هم کلاسی

Hamkelasi.ir

یازدهم

اندیشه قهرمان

به انضمام کنکور ۹۶

ریاضی ۲

تجربی

$f(x)=\frac{1}{x}$

رحیم قهرمان

مراکز پخش کتاب‌های انتشارات اندیشه قهرمان

پخش کتاب دو کاج	۰۲۱-۶۶۹۶۱۰۱۲
پخش کتاب مهر	۰۲۱-۶۶۹۷۵۸۰۳
پخش کتاب همراه	۰۲۱-۶۶۹۷۵۶۶۹
پخش کتاب آموزشی تهران	۰۲۱-۶۶۴۹۳۲۲۱
پخش کتاب ارسطو	۰۵۱-۳۲۲۴۱۷۶۱ ۰۵۱-۳۲۲۸۱۹۸۱
پخش کتاب قائم	۰۵۱-۳۳۴۴۹۹۵۰
پخش کتاب دارالفنون	۰۵۱-۳۸۵۱۴۳۴۲

نمایندگی‌های انتشارات اندیشه قهرمان در سراسر کشور

نام شهر	نام فروشگاه	شماره تماس
تهران	دو کاج	۶۶۹۶۱۰۱۲
تهران	مهر	۶۶۹۷۵۸۰۳
مشهد	ارسطو	۳۲۲۴۱۷۶۱
مشهد	سخن	۳۲۲۸۱۹۸۱
مشهد	اوستا	۳۲۲۱۵۷۸۲
مشهد	یاس	۳۲۲۵۹۳۱۶
مشهد	بانک کتاب بهار	۳۵۲۲۲۰۲۰
مشهد	بانک کتاب اساتید برتر	۳۸۴۱۵۱۲۷
بابل	دهخدا	۳۲۲۲۰۲۲۰
آمل	شباویز	۴۲۲۲۴۲۱۸
بیرجند	خوارزمی	۳۲۲۲۲۲۲۱
شاهرود	جواد	۳۲۲۳۷۲۲۷
قائم‌شهر	دهقان	۴۲۲۲۷۰۴۰
مرند	دانشجو	۴۲۲۶۴۴۴۶
زنجان	خانه کتاب	۳۳۳۲۹۱۰۰
ساری	خاکساریان	۳۳۴۰۶۶۷۰
کرمانشاه	سروش نو	۳۷۲۸۰۰۳۲
کرمانشاه	دانش	۳۷۲۳۴۹۸۷
کرمان	بانک کتاب آزادی	۳۲۴۶۰۶۶۲
قم	هادی	۳۷۷۳۲۵۷۶
رفسنجان	خورشید شب	۳۴۲۵۳۸۹۰
شیراز	بانک کتاب	۳۳۳۰۶۵۱۵
خرم‌آباد	مقدم	۳۳۳۰۶۵۱۵
اصفهان	پدرام	۳۶۶۴۲۰۹۵
اهواز	رشد	۳۲۲۳۰۳۳۲
اراک	اندیشه	۳۲۲۴۵۴۳۰
اردبیل	راهیان دانشگاه	۳۲۲۶۰۰۹۰
ارومیه	ظرافت	۳۲۲۴۲۶۶۷
اصفهان	گلفام	۳۲۲۱۵۳۳۷
تبریز	گیتامهر	۳۵۵۶۸۸۸۷
تبریز	آفتاب	۳۵۵۶۲۰۴۹

نمایندگی‌های انتشارات اندیشه قهرمان در سراسر کشور

رشت	رستگار	۳۳۳۳۴۰۰۲
شیراز	خرد	۳۲۳۳۵۱۶۹
شیراز	خرد (شعبه ۲)	۶۲۴۹۷۸۳
همدان	جهان دانش	۳۲۵۱۲۹۰۵
نیشابور	شیخ طوسی	۴۲۲۲۱۹۸۵
گرگان	فرهنگ	۳۲۲۴۵۷۶۹
گرگان	بانک کتاب جلالی	۳۲۲۲۰۱۸۹
قزوین	علامه	۳۳۲۳۷۸۷۵
یزد	شهر کتاب	۳۶۲۲۳۲۱۳
سبزوار	آینده‌سازان	۴۴۲۲۲۱۱۸
بجنورد	گوتنبرگ	۲۷۲۱۱۵۹

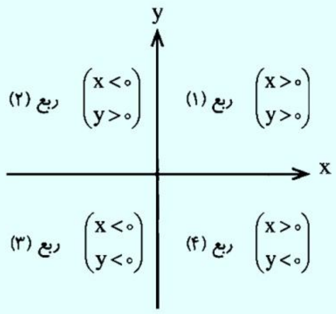
فصل ۱

هندسه تحلیلی و جبر

درسنامه ۱

دستگاه مختصات

دستگاه مختصات متشکل از دو محور عمود بر هم x ها و y ها است که در مبدأ مختصات متقاطع‌اند. این محورها صفحه را به ۴ ناحیه تقسیم می‌کنند که هر کدام از آن‌ها را یک ربع مختصاتی می‌نامیم. هر نقطه دلخواه مانند A از صفحه را با زوج مرتب (x,y) نمایش می‌دهیم. x (مؤلفه‌ی اول) را طول نقطه و y (مؤلفه‌ی دوم) را عرض نقطه می‌نامیم.



مثال با فرض آن‌که نقطه‌ی $A\left(m-۲,\dfrac{m-۱}{m-۲}\right)$ در ربع سوم باشد، نقطه‌ی $B(m,m^۲-۵)$ در کدام ناحیه قرار دارد؟

۱) ناحیه‌ی ۱ ۲) ناحیه‌ی ۲ ۳) ناحیه‌ی ۳ ۴) ناحیه‌ی ۴

پاسخ گزینه‌ی ۴ چون Aدر ربع سوم قرار دارد پس $x_A<۰$ و $y_A<۰$، بنابراین :

$$\begin{cases}m-۲<۰\\ \dfrac{m-۱}{m-۲}<۰\end{cases}\xrightarrow{\text{حل نامعادله}}\begin{cases}m<۲\\ ۱<m<۲\end{cases}\xrightarrow{\text{اشتراک}}۱<m<۲\xrightarrow{\text{توان دو}}۱<m^۲<۴\xrightarrow{+(-۵)}-۴<m^۲-۵<-۱$$

در نتیجه:

$$\begin{cases}۱<m<۲\Rightarrow x_B>۰\\ -۴<m^۲-۵<-۱\Rightarrow y_B<۰\end{cases}\Rightarrow \text{نقطه B در ناحیه چهارم قرار دارد.}$$

نکات

۱) اگر نقطه‌ی A روی محور x ها باشد، مؤلفه‌ی دوم یعنی y ، صفر است، به بیان دیگر مختصات آن به صورت $A(x\,,\,۰)$ ظاهر می‌شود.

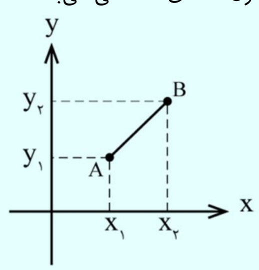
۲) اگر نقطه‌ی A روی محور y ها باشد، مؤلفه‌ی اول، یعنی x ، صفر است. به بیان دیگر مختصات آن به صورت $A(۰\,,\,y)$ ظاهر می‌شود.

۳) اگر نقطه‌ی $A(x_A,y_A)$ بالای محور x ها باشد، عرض نقطه‌ی A مثبت بوده و اگر پایین محور x ها باشد، عرض نقطه‌ی A منفی می‌باشد.

۴) اگر نقطه‌ی $A(x_A,y_A)$ سمت راست محور y ها باشد، طول نقطه‌ی A مثبت بوده و اگر سمت چپ محور y ها باشد، طول نقطه‌ی A منفی می‌باشد.

فاصله دو نقطه (طول پاره‌خط)

فاصله‌ی دو نقطه‌ی $A(x_۱,y_۱)$ و $B(x_۲,y_۲)$ در صفحه مختصات به آن همان طول پاره‌خط AB می‌گوئیم از رابطه‌ی زیر حاصل می‌شود.



$$AB=\sqrt{(x_۲-x_۱)^۲+(y_۲-y_۱)^۲}$$

مثال نقاط $A(۶,-۲)$ و $B(۲,۱)$ دو رأس مجاور یک مربع می‌باشند. مساحت این مربع کدام است؟

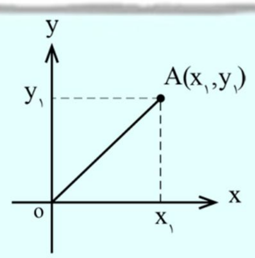
۱) ۵ ۲) ۱۵ ۳) ۲۰ ۴) ۲۵

پاسخ چون دو نقطه A و B دو راس مجاور یک مربع هستند، با محاسبه طول پاره‌خط AB ، اندازه‌ی ضلع مربع حاصل می‌شود، با داشتن ضلع مربع، مساحت مربع به دست می‌آید.

$$AB=\sqrt{(۲-۶)^۲+(۱+۲)^۲}=\sqrt{۱۶+۹}=\sqrt{۲۵}=۵\ \text{ضلع مربع}\Rightarrow S=(AB)^۲=۲۵$$

نکات

۱) فاصله‌ی نقطه‌ی دلخواه $A(x_۱,y_۱)$ از مبدا مختصات که همان طول پاره‌خط OA می‌باشد، از فرمول زیر محاسبه می‌شود.



$$|OA|=\sqrt{x_۱^۲+y_۱^۲}$$

مثال به ازای کدام مقدار a فاصله نقطه‌ی $A(a-۵,۲a+۱)$ از مبدأ مختصات برابر ۵ می‌باشد؟

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) -۵ ۳) -۱ ۴) ۲

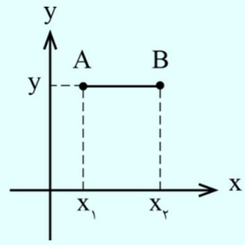
پاسخ گزینه‌ی ۱ $OA=۵$ و $x_۱=a-۵$ و $y_۱=۲a+۱$ بنابراین:

$$|OA|=\sqrt{x_۱^۲+y_۱^۲}\Rightarrow ۵=\sqrt{(a-۵)^۲+(۲a+۱)^۲}\xrightarrow{\text{توان دو}}$$

$$۲۵=a^۲-۱۰a+۲۵+۴a^۲+۴a+۱\Rightarrow ۵a^۲-۶a+۲۶=۲۵\Rightarrow$$

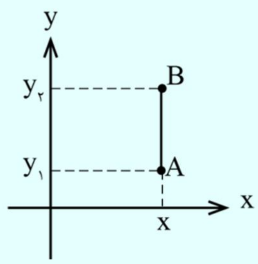
$$۵a^۲-۶a+۱=۰\xrightarrow{\text{مجموع ضرایب صفر است}}\begin{cases}a=۱\\ a=\frac{۱}{۵}\end{cases}$$

۲) اگر نقاط A و B هم‌عرض باشند، طول پاره‌خط AB به صورت $|AB|=|x_۲-x_۱|$ به دست می‌آید.



$$|AB|=|x_۲-x_۱|$$

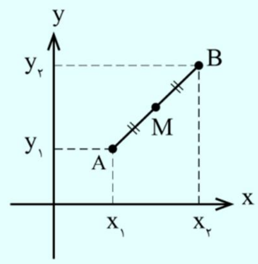
۳) اگر نقاط A و B هم‌طول باشند، طول پاره‌خط AB به صورت $|AB|=|y_۲-y_۱|$ حاصل می‌شود.



$$|AB|=|y_۲-y_۱|$$

مختصات وسط دو نقطه (وسط پاره‌خط)

مختصات نقطه‌ی M، وسط دو نقطه‌ی A و B (وسط پاره‌خط AB) که به مختصات $A=(x_۱,y_۱)$ و $B=(x_۲,y_۲)$ می‌باشند از فرمول زیر حاصل می‌شود.



$$\text{وسط } AB\ M=\frac{A+B}{۲}\Rightarrow\begin{cases}x_M=\frac{x_۱+x_۲}{۲}\\ y_M=\frac{y_۱+y_۲}{۲}\end{cases}$$

مثال نقاط $A=(۲a+۳,b)$ ، $B=(-۱,۲)$ و $C(۳,-۴)$ مفروض‌اند. به ازای کدام مقدار a و b نقطه‌ی A وسط پاره‌خط BC است؟

پاسخ

$$\text{وسط } BC\quad A=\frac{B+C}{۲}\Rightarrow\begin{cases}x_A=\dfrac{x_B+x_C}{۲}\\ y_A=\dfrac{y_B+y_C}{۲}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۲a+۳=\dfrac{-۱+۳}{۲}\\ b=\dfrac{۲-۴}{۲}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۲a+۳=۱\\ b=-۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-۱\\ b=-۱\end{cases}$$

نکات

۱) **قرینه یک نقطه**: قرینه‌ی نقطه‌ی $A(x,\ y)$ نسبت به نقطه‌ی $M(\alpha,\beta)$، نقطه $A'(۲\alpha-x,۲\beta-y)$ می‌باشد. در حقیقت نقطه‌ی M وسط پاره‌خط می‌باشد.

مثال اگر نقاط $A(a+۱,۴b-۳)$ و $B(۶b-۱,a-۱)$ نسبت به نقطه‌ی $M(b,-a)$ قرینه یکدیگر باشند، مقادیر a و b را بیابید.

(مشابه تمرین کتاب)

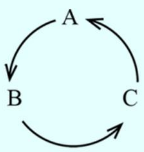
پاسخ

$$\text{وسط } AB\quad M=\frac{A+B}{۲}\Rightarrow(b,-a)=\left(\frac{a+۱+۶b-۱}{۲},\frac{۴b-۳+a-۱}{۲}\right)\Rightarrow(b,-a)=\left(\frac{a+۶b}{۲},\frac{۴b+a-۴}{۲}\right)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{a+۶b}{۲}=b\\ \dfrac{۴b+a-۴}{۲}=-a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+۶b=۲b\\ ۴b+a-۴=-۲a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۴b+a=۰\\ ۴b+۳a=۴\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=۲\\ b=-\dfrac{۱}{۲}\end{cases}$$

۲) **تعیین مساحت مثلث**

اگر نقاط $A(x_A,y_A)$، $B(x_B,y_B)$ و $C(x_C,y_C)$ سه رأس مثلث باشند، مساحت مثلث ABC برابر است با:



$$S_{\underset{ABC}{\Delta}}=\frac{۱}{۲}\left|x_A(y_B-y_c)+x_B(y_C-y_A)+x_C(y_A-y_B)\right|$$

مثال نقاط $A(-۵,-۲)$، $B(۴,۲)$ و $C(-۳,۴)$ رئوس مثلث ABC هستند، مساحت مثلث را بیابید.

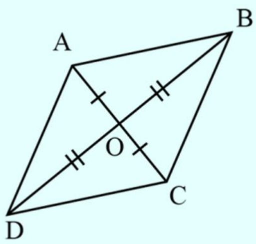
پاسخ

$$S_{\underset{ABC}{\Delta}}=\frac{۱}{۲}\left|x_A(y_B-y_c)+x_B(y_C-y_A)+x_C(y_A-y_B)\right|\Rightarrow$$

$$S_{\underset{ABC}{\Delta}}=\frac{۱}{۲}\left|-۵(۲-۴)+۴(۴+۲)-۳(-۲-۲)\right|=\frac{۱}{۲}\left|۱۰+۲۴+۱۲\right|=۲۳$$

۳) **رابطه‌ی بین مختصات رأس‌های متوازی الاضلاع**

رابطه‌ی زیر بین مختصات رئوس متوازی الاضلاع همواره برقرار است.



$$A+C=B+D\Rightarrow\begin{cases}x_A+x_C=x_B+x_D\\ y_A+y_C=y_B+y_D\end{cases}$$

تذکر مهم لوزی، مستطیل و مربع حالت‌های خاصی از متوازی‌الاضلاع هستند، بنابراین نکته بالا در مورد آن‌ها نیز صدق می‌کند.

مثال اگر چهار نقطه‌ی $A(a-۱,b)$، $B(۲a+۳,b-۱)$، $C(b-۲,a)$ و $D(۳b+۱,۲a-۱)$ رأس‌های متوالی متوازی الاضلاع ABCD باشند، a+b کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{3}{2}$ ۳) $-\frac{5}{2}$ ۴) $\frac{5}{2}$

پاسخ گزینه‌ی ۳

$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-1+b-2 = 2a+3+2b+1 \\ b+a = b-1+2a-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b+a=-7 \\ a=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-\frac{9}{2} \\ a=2 \end{cases} \Rightarrow a+b=-\frac{5}{2}$$

۱) اگر نقطه‌ی $A(2m-1, |m|-|m+2|)$ پایین محور x ها باشد، حدود m کدام است؟

۱) $m>1$ ۲) $m<-1$ ۳) $m<1$ ۴) $m>-1$

۲) نقطه‌ی $A(2m-1, m^2+2)$ از دو محور مختصات به یک فاصله است، مقدار m کدام است؟

۱) $m=0$ ۲) $m=1$ ۳) $m=-1$ ۴) $m=-2$

۳) نقطه‌ای با عرض منفی روی محور y ها که فاصله‌اش از نقطه‌ی $A(4,1)$ برابر ۵ باشد، کدام است؟

۱) $(0,-1)$ ۲) $(0,-2)$ ۳) $(0,-3)$ ۴) $(0,-4)$

۴) نقاط $A(6,-2)$ و $B(2,1)$ دو راس مجاور یک لوزی می‌باشند، محیط لوزی کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۱۰ ۳) ۴۰ ۴) ۱۰۰

۵) اگر نقاط A ، B و C سه راس یک مثلث باشند و $A(\sqrt{3},-\sqrt{5})$ و $B(\sqrt{5},\sqrt{3})$ باشد و طول AC یک واحد بیش‌تر از طول AB و طول BCیک واحد بیش‌تر از طول AC باشد، محیط مثلث کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۴ ۳) ۱۵ ۴) ۱۶

۶) اگر $A(1,-2)$ یک راس و $O'(-2,2)$ مرکز مربع باشد، محیط مربع چه‌قدر است؟

۱) ۵۰ ۲) ۲۵ ۳) ۲۰ ۴) $20\sqrt{2}$

۷) دو نقطه‌ی $A(3,-1)$ و $B(3,2)$ دو انتهای قطر کوچک یک لوزی هستند که قطر بزرگ آن ۲ برابر قطر کوچک آن است. مساحت لوزی کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۱۸ ۳) ۴/۵ ۴) ۹

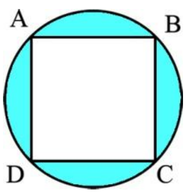
۸) نقاط $A(1, 2)$ و $B(1, 6)$ و $C(5, 4)$ سه رأس یک لوزی هستند. مساحت لوزی چه قدر است؟

۱) ۳۲ ۲) ۱۶ ۳) ۸ ۴) ۲۴

۹) نقطه‌ای روی خط $y=2x-3$ که از دو نقطه‌ی $A(3, 1)$ و $B(1, 3)$ به یک فاصله باشد، کدام است؟

۱) $(2, 0)$ ۲) $(4, 5)$ ۳) $(3, 3)$ ۴) $(5, 7)$

۱۰) در شکل مقابل در مربع ABCD اگر $A(2, 3)$ و $C(3, 5)$ باشد، مساحت قسمت هاشور خورده کدام است؟



۱) $\frac{5\pi}{4}-1$ ۲) $\frac{5(\pi-2)}{4}$ ۳) $\frac{5\pi-2}{2}$ ۴) $\frac{\pi-2}{4}$

۱۱) m چه مقداری داشته باشد تا مثلث ABC به رئوس $A(3, m+1)$ ، $B(1, 1)$ و $C(5, 1)$ متساوی الاضلاع باشد؟

۱) $\pm 3\sqrt{2}$ ۲) $\pm 2\sqrt{3}$ ۳) $\pm\sqrt{2}$ ۴) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

۱۲) نقاط $A(1, 0)$ ، $B(4, 2)$ و $C(a,-a)$ مفروض‌اند. به ازای کدام مقدار a ، مثلث ABC در رأس A قائمه و متساوی‌الساقین است؟

۱) -3 ۲) -2 ۳) ۲ ۴) ۳

۱۳) دو نقطه روی خط $x-y+1=0$ یافت می‌شود که از مبدأ مختصات به فاصله‌ی ۱ می‌باشند. فاصله‌ی این دو نقطه از یکدیگر کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$

۱۴) نقاط $A(۲\beta,\beta)$ و $B(\beta+۳,\beta-۴)$ دو رأس مثلث ABC و معادله میانه نظیر رأس C خط y=۵، مختصات وسط AB کدام است؟

۱) (۵ , ۹) ۲) (۵ , ۱۲) ۳) (۹ , ۵) ۴) (۱۲ , ۵)

۱۵) اگر نقاط M(۱ , ۲)، N(۴,−۵) و P(۳ , ۰) به ترتیب وسط‌های اضلاع AB، BC و AC از مثلث ABC باشند، رأس B کدام است؟

۱) (۲,−۳) ۲) (−۲,۳) ۳) (۳,−۲) ۴) (−۳,۲)

۱۶) اگر $A(m-۲,۰)$ و $B(m , ۲m)$ و فاصله‌ی نقطه‌ی وسط AB از مبدأ مختصات برابر $\sqrt{۵}$ باشد، مجموع مقادیر m کدام است؟

۱) −۱ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

۱۷) از نقطه‌ی $A(-۲,۱)$ سه واحد به سمت راست و دو واحد به سمت پایین حرکت می‌کنیم تا به نقطه‌ی B برسیم. فاصله‌ی وسط پاره‌خط AB تا مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۱۸) نقاط A(۴ , ۲)، $B(۱,-۱)$ و $C(۶,-۱)$ سه رأس مثلث ABC هستند. اگر H و M به ترتیب پای ارتفاع AH و میانه AM باشند، طول MH چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\frac{۷}{۲}$

۱۹) نقطه‌ی A(۷ , ۶) رأس یک متوازی الاضلاع است که دو ضلع آن منطبق بر دو خط به معادلات $۲y-۳x=۱۱$ و ۳y+۴x=۸ می‌باشند. مختصات وسط قطر آن کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۰)

۱) (۱ , ۵) ۲) (۳ , ۴) ۳) (۳ , ۵) ۴) (۴ , ۳)

۲۰) چهار نقطه‌ی A(۰ , ۶)، B(۴,−۴)، C(۳ , ۱) و $D(x_D,y_D)$ به گونه‌ای هستند که پاره‌خط‌های AB و CD یکدیگر را نصف می‌کنند، مختصات نقطه‌ی D کدام است؟

۱) (۱ , ۱) ۲) (−۱ ,۰) ۳) $\left(\frac{۵}{۲} , ۲\right)$ ۴) (۲ ,−۹)

۲۱) نقاط M(۴ , ۶)، $N(۲,-۴)$ و $P(-۴,۲)$، وسط‌های اضلاع مثلث ABC می‌باشند، مساحت مثلث ABC برابر کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۳۶ ۳) ۷۲ ۴) ۱۴۴

درسنامه ۲

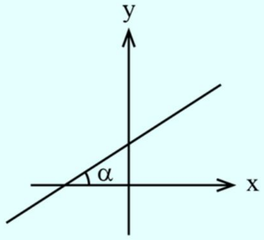
شیب خط (ضریب زاویه خط)

شیب خط: شیب خط، تانژانت زاویه‌ای است که خط با جهت مثبت محور x ها (یعنی سمت راست محور x ها) می‌سازد.

تذکر

اگر شیب خطی مثبت باشد، می‌توان نتیجه گرفت که خط با جهت مثبت محور x ها، زاویه‌ی حاده می‌سازد و خط صعودی می‌باشد.

دقت شود که اگر شیب خط مثبت باشد، نمودار خط از نواحی اول و سوم می‌گذرد.



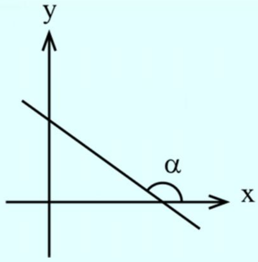
$۰<\alpha<۹۰^{\circ}$

شیب خط $= m = \tan\alpha > ۰ \Rightarrow$ خط صعودی

تذکر

اگر شیب خط منفی باشد، می‌توان نتیجه گرفت که خط با جهت مثبت محور x ها زاویه‌ی منفرجه می‌سازد و خط نزولی می‌باشد.

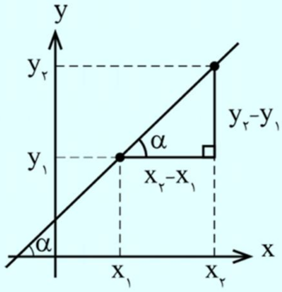
دقت شود که اگر شیب خط منفی باشد، نمودار خط از نواحی دوم و چهارم می‌گذرد.



$90^\circ < \alpha < 180^\circ$

خط نزولی $\Leftarrow$ شیب خط = $m = \tan\alpha < 0$

تعیین شیب خط با داشتن دو نقطه از خط



شیب خطی که از دو نقطه متمایز $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$ می‌گذرد. از رابطه‌ی $m_{AB} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ به دست می‌آید. به شکل روبه‌رو دقت کنید:

$$m_{AB} = \tan\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

مثال

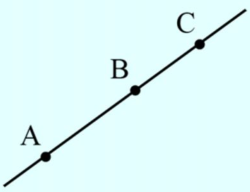
شیب خطی که از دو نقطه‌ی $A(m\,,\,0)$ و $B(-m,3m)$ می‌گذرد کدام است؟ $(m \neq 0)$

۱) $\dfrac{2}{3}$ ۲) $-\dfrac{2}{3}$ ۳) $-\dfrac{3}{2}$ ۴) $\dfrac{3}{2}$

پاسخ گزینه‌ی ۳

$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 3m}{m - (-m)} = \frac{-3m}{2m} = -\frac{3}{2}$$

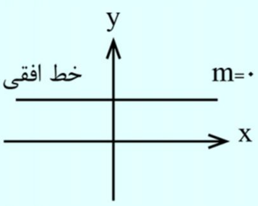
نکات



۱) اگر سه نقطه‌ی $A(x_A, y_A)$، $B(x_B, y_B)$ و $C(x_C, y_C)$ بر یک خط راست واقع باشند (یعنی بر یک استقامت یا بر یک راستا باشند) باید شیب دو پاره‌خط AB و BC یکسان باشند، یعنی:

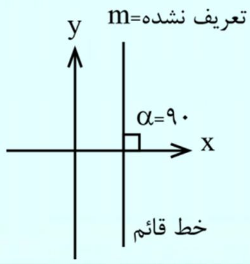
$$m_{AB} = m_{BC} \Rightarrow \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B}$$

۲) شیب هر خط افقی برابر صفر است. چون تمام نقاط واقع بر این خط عرض‌های مساوی دارند، پس تغییرات عرض آن صفر می‌شود، بنابراین برای این نوع خطوط شیب صفر است.



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \xrightarrow{y_2 = y_1} m = \frac{0}{x_2 - x_1} = 0$$

۳) برای هر خط قائم، شیب تعریف نمی‌شود. چون تمام نقاط واقع بر این خط طول‌های مساوی دارند، پس تغییرات طول آن صفر می‌شود، بنابراین برای این نوع خطوط شیب تعریف نمی‌شود.



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \xrightarrow{x_2 = x_1} m = \frac{y_2 - y_1}{0} = \text{تعریف نشده}$$

۲۲) به ازای کدام مقدار a، خط به معادله‌ی $(۲a-۱)x+ay+۳a-۲=۰$ با جهت مثبت محور x ها زاویه ۴۵° می‌سازد؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۳}$

۲۳) اندازه‌ی زاویه‌ای که خط x=۲ با خط $\sqrt{۳}y+x-۱=۰$ می‌سازد، چند درجه است؟ $\left(\tan ۱۵۰^\circ=-\frac{\sqrt{۳}}{۳}\right)$

۱) ۳۰° ۲) ۶۰° ۳) ۴۵° ۴) ۹۰°

۲۴) مثلثی با سه رأس $A(۱,۱)$، $B(۲,۱)$ و $C(۵,۳)$ در نظر بگیرید. شیب خطی که وسط پاره‌خط AB را به وسط پاره‌خط BC وصل می‌کند، چند است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۲

۲۵) خطی از نقطه‌ی $A(۴,۴۰)$ عبور می‌کند. کدام گزینه در بازه‌ی این خط همواره درست است؟

۱) معادله خط، ثابت است. ۲) شیب خط، ثابت است.
۳) عرض از مبدا خط، ثابت است. ۴) محل تلاقی با محور x ها، ثابت است.

۲۶) به ازای کدام مقادیر a، نقاط $(a,۳)$ و $(۴a+۱,۶)$ و مبدأ مختصات در یک راستا قرار می‌گیرند؟ (سراسری تجربی خارج از کشور ۸۵)

۱) $-۲,\frac{۹}{۴}$ ۲) $-۲,\frac{۳}{۴}$ ۳) $۲,-\frac{۳}{۴}$ ۴) $۲,-\frac{۹}{۴}$

۲۷) اگر زاویه‌ای که خط $\sqrt{۷-۴\sqrt{۳}}\,y+(m-۲\sqrt{۳})x-(m+\sqrt{۳})=۰$ با جهت مثبت محور x ها می‌سازد، ۶۰° باشد. این خط محور عرض‌ها را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟

۱) $-۵\sqrt{۳}-۹$ ۲) $۵\sqrt{۳}+۹$ ۳) $-۵\sqrt{۳}+۹$ ۴) $۵\sqrt{۳}-۹$

درسنامه ۳

معادله‌ی خط

معادله‌ی استاندارد خط راست: هر ضابطه به صورت y=ax+b ، معادله‌ی استاندارد یک خط راست. که در آن ضریب x ، یعنی a را شیب خط و عدد ثابت معادله را یعنی b عرض از مبدأ خط می‌گویند.

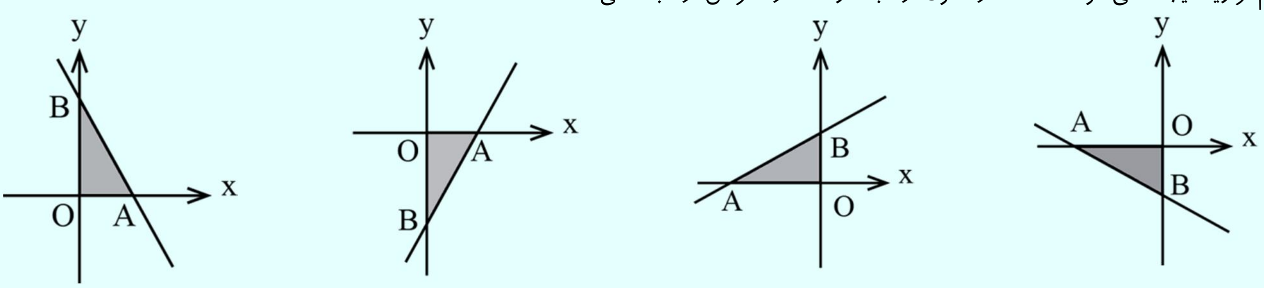
معادله‌ی غیر استاندارد خط راست: شکل دیگری از معادله ی خط به صورت $ax+by+c=۰$ است که معادله‌ی غیراستاندارد یک خط راست است. برای به دست آوردن شیب خط معادله مذکور از فرمول زیر استفاده می‌کنیم. (جملات شامل x و y باید در یک طرف تساوی باشند.)

$$m=\frac{-x\ \text{ضریب}}{y\ \text{ضریب}}:\ \text{شیب خط معادله‌ی غیر استاندارد}$$

نکات

۱) اگر در معادله‌ی خطی، مقدار x را برابر صفر قرار دهیم، عدد به دست آمده عرض از مبدأ و اگر مقدار y را برابر صفر قرار دهیم، عدد به دست آمده طول از مبدأ خط می‌باشد.

۲) طبق شکل‌های زیر، اگر طول از مبدأ و عرض از مبدأ خطی مخالف صفر باشد، بین خط و محورهای مختصات ناحیه‌ای به شکل یک مثلث قائم‌الزاویه ایجاد می‌شود که OA را طول از مبدأ و OB را عرض از مبدأ می‌نامند.



۳) اندازه‌ی مساحت مثلثی که از برخورد یک خط با محورهای مختصات ایجاد می‌شود برابر است با:

$S = \frac{1}{2}\left|\text{عرض از مبدأ} \times \text{طول از مبدأ}\right|$

مثال: مساحت مثلثی که اضلاع آن منطبق بر محور OX و محور OY و خط به معادله‌ی ۲x+۳y=۱۲ می‌باشد را بیابید.

پاسخ: کافی است طول از مبدأ و عرض از مبدأ خط را به دست آوریم. داریم:

عرض از مبدأ خط $x = 0 \Rightarrow 2(0) + 3y = 12 \Rightarrow y = 4$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 12$$

طول از مبدأ خط $y = 0 \Rightarrow 2x + 3(0) = 12 \Rightarrow x = 6$

۲۸) چند نقطه روی خط y=x وجود دارد که از نقطه‌ی (۴ , ۱) به فاصله $\sqrt{2}$ می‌باشد؟ (آزاد تجربی ۹۱)

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) صفر ۴) ۴

۲۹) خطی به معادله‌ی $2y - 3x = 6$ محورهای مختصات را در نقاط A و B قطع می‌کند، فاصله ی وسط AB از نقطه‌ی $\left(0, -\frac{3}{2}\right)$ کدام است؟

۱) $\sqrt{5}$ ۲) ۳ ۳) $\sqrt{10}$ ۴) ۴

۳۰) اگر خط Δ محورهای مختصات را در نقاط A و B قطع کند، مساحت مثلث OBA برابر $|ab|$ باشد، معادله‌ی خط Δ کدام یک از خطوط زیر کمی تواند باشد؟

۱) bx+۲ay=۲ab ۲) ax+by=۱ ۳) ۲ax+by=ab ۴) ax+by=ab

۳۱) دو خط $L_1 : y = 3x - 21$ و $L_2 : 11y - 30x + 39 = 0$ را در صفحه رسم کرده‌ایم. نقطه‌ی $A(35, 91)$ نسبت به این دو خط چه موقعیتی دارد؟

۱) بالای هر دو خط ۲) بالای L_1 و پایین L_2

۳) پایین L_1 و بالای L_2 ۴) پایین هر دو خط

۳۲) خط راست $3x + 2y + 7 = 0$ و نقاط $A(3, 1)$، $B(-1, -1)$ و $C(0, -4)$ مفروضند. کدام نقطه‌ها در یک طرف این خط راست قرار گرفته‌اند؟

۱) B, A ۲) C, A ۳) C, B ۴) B, A و C

درسنامه ۴

تعیین معادله‌ی خط

روش نوشتن معادله یک خط

۱) معادله‌ی خطی که شیب آن m و از نقطه‌ی $A(x_0, y_0)$ عبور کند، از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

۲) برای نوشتن معادله‌ی خطی که دو نقطه‌ی آن معلوم باشد، یعنی اگر دو نقطه $A(x_1, y_1)$ و $A(x_2, y_2)$ دو نقطه‌ی دلخواه از خطی باشند، آن‌گاه معادله‌ی این خط را می‌توان از رابطه‌ی $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ به دست آورد و یا می‌توان به صورت $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ نوشت.

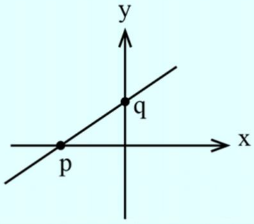
مثال: معادله‌ی خطی از نقطه‌ی $A(-2, 1)$ گذشته و عرض از مبدأ آن ۳ باشد را بیابید.

پاسخ: عرض از مبدأ خط برابر ۳ است یعنی $B(0, 3)$ روی خط قرار دارد. برای نوشتن معادله‌ی خطی که از نقاط $A(-2, 1)$ و

$B(\circ,۳)$ بگذرد، به صورت زیر عمل می‌کنیم.

$$y-y_۱=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}(x-x_۱)\xrightarrow[x_۲=\circ,\,y_۲=۳]{x_۱=-۲,\,y_۱=۱}y-۱=\frac{۳-۱}{\circ+۲}(x+۲)\Rightarrow y=x+۳$$

نکته: معادله‌ی خطی که طول از مبدا آن p و عرض از مبدأ آن q باشد، به صورت $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=۱$ می‌باشد.



۳۳) خطی محورهای مختصات را در نقاط A و B قطع می‌کند. اگر $M(-۳,۲)$ وسط AB باشد، معادله‌ی این خط کدام است؟
(مشابه تمرین کتاب درسی)

۱) $۲x-۳y=-۱۲$
۲) $۲x-۳y=۱۲$
۳) $۳x+۲y=۱۲$
۴) $۳x-۲y=-۱۲$

۳۴) نقطه‌ای بر محور عرض‌ها که از $A(۲,۳)$ و $B(-۴,۱)$ به یک فاصله باشد، کدام است؟
(مشابه تمرین کتاب درسی)

۱) $p\left(\circ,\frac{۵}{۳}\right)$
۲) $p(\circ,-۲)$
۳) $p(\circ,۱)$
۴) $p(\circ,-۱)$

۳۵) اگر سه نقطه‌ی $A(۱,\circ)$ ، $B(۱,۳)$ و $C(۵,\circ)$ سه رأس یک مثلث باشند، معادله ی نیمساز رأس A کدام است؟

۱) $y=x-۱$
۲) $y=-x+۱$
۳) $y=۲x-۲$
۴) $y=-۲x+۲$

۳۶) اگر قطعه خطی که یک طرف آن روی محور x ها و طرف دیگر آن روی محور y ها باشد، در نظر گرفته شده و فرض کنیم نقطه‌ی $(۲,۳)$ وسط این قطعه خط قرار داشته باشد، معادله‌ی چنین خطی کدام است؟

۱) $۳x+۲y-۱۲=\circ$
۲) $۳x-۲y-۱۲=\circ$
۳) $۲x-۳y-۱۲=\circ$
۴) $۲x+۳y-۱۲=\circ$

۳۷) مختصات نقطه‌ای از خط $۳x+۲y=۵$ که از دو سر پاره‌خط AB با مختصات $A(۳,۱)$ و $B(۱,۳)$ به یک فاصله باشد، کدام است؟

۱) $(۳,-۲)$
۲) $(۱,۱)$
۳) $(-۳,۲)$
۴) $\left(\circ,\frac{۵}{۲}\right)$

۳۸) معادله‌ی سه ضلع یک مثلث $x+y=۱$، $y=۲x$ و $x=۱$ است. معادله‌ی خطی که کوچک‌ترین ارتفاع این مثلث بر آن قرار دارد، کدام است؟
(سراسری تجربی ۸۴)

۱) $y=\frac{۲}{۳}$
۲) $x=\frac{۲}{۳}$
۳) $y+x=\frac{۲}{۳}$
۴) $y+x=\frac{۱}{۳}$

۳۹) فاصله مبدأ مختصات از نقطه ثابت دسته خطوط $(۲m-۳)x+(۷-۲m)y+۴=\circ$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$
۲) ۲
۳) $۲\sqrt{۲}$
۴) ۴

درسنامه ۵

خطهای موازی و عمود بر هم

خط‌های موازی: هرگاه شیب‌های دو خط مساوی باشند، آن دو خط موازی می‌باشند.

اگر دو خط y=ax+b و $y=a'x+b'$ با هم موازی باشند باید $a=a'$

مثال: به ازای کدام مقدار a ، خط گذرنده از نقاط $A(۲,-۱)$ و $B(-۴,۳)$ با خط $ay=-۳x-۱$ موازی است؟

پاسخ: ابتدا شیب خط گذرنده از نقاط $A(۲,-۱)$ و $B(-۴,۳)$ را به دست می‌آوریم.

$$m_{AB}=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}\xrightarrow[x_۲=-۴\ ,\ y_۲=۳]{x_۱=۲\ ,\ y_۱=-۱} m_{AB}=\frac{۳-(-۱)}{-۴-۲}=-\frac{۲}{۳}$$

برای موازی بودن دو خط فوق، باید شیب‌های آن‌ها با هم برابر باشند.

$$ay=-۳x-۱\Rightarrow ay+۳x=-۱\Rightarrow m_۱=\frac{-۳}{a}$$

$$m_۱=m_{AB}\Rightarrow -\frac{۳}{a}=-\frac{۲}{۳}\Rightarrow a=\frac{۹}{۲}=۴/۵$$

خط‌های عمود بر هم: دو خط را عمود بر هم گوییم هرگاه شیب‌های دو خط عکس و قرینه هم باشند. به عبارت دیگر شرط آن‌که دو خط y=ax+b و $y=a'x+b'$ برهم عمود باشند آن است که:

$$a=\frac{-۱}{a'}\Rightarrow aa'=-۱$$

مثال: اگر خط L به معادله‌ی $(k+۱)y+۲kx-k+۱=\circ$ بر خط گذرنده از دو نقطه‌ی $(۲,-۱)$ و $(۸\ ,\ ۳)$ عمود باشد، معادله‌ی خط L را بیابید.

پاسخ: ابتدا شیب خط داده شده را می‌یابیم:

$$(k+۱)y+۲kx-k+۱=\circ\Rightarrow m=\frac{-۲k}{k+۱}$$

از طرفی شیب خط گذرنده از دو نقطه‌ی $A(۲,-۱)$ و $B(۸\ ,\ ۳)$ برابر است با:

$$m'=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}=\frac{۳-(-۱)}{۸-۲}=\frac{۲}{۳}$$

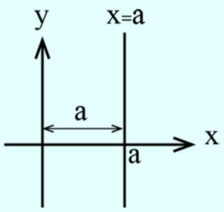
چون دو خط بر هم عمود می‌باشند، پس حاصل ضرب شیب‌های آنها برابر منفی یک است، لذا:

$$mm'=-۱\Rightarrow\left(\frac{-۲k}{k+۱}\right)\left(\frac{۲}{۳}\right)=-۱\Rightarrow k=۳$$

حال k در معادله L قرار می‌دهیم. داریم:

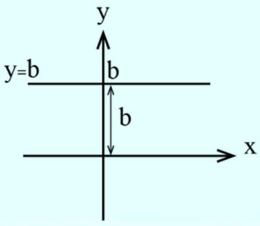
$$(k+۱)y+۲kx-k+۱=\circ\xrightarrow{k=۳}۴y+۶x-۲=\circ$$

معادله‌ی برخی خطوط خاص



۱) **خطوط عمودی**: معادله‌ی خطی که از دو نقطه‌ی $A(a\ ,y_A)$ و $B(a\ ,y_B)$ عبور می‌کند، به صورت x=a است.

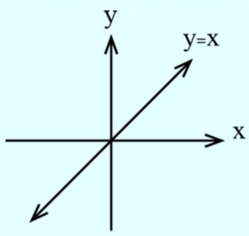
چنین خطی را خط عمودی گویند و طول همه‌ی نقاط روی آن؛ عدد ثابت a است.



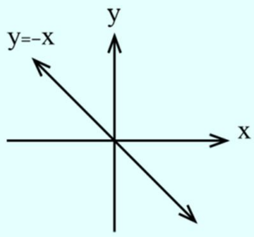
۲) **خطوط افقی**: معادله‌ی خطی که از دو نقطه $A(x_A,b)$ و $B(x_B,b)$ عبور می‌کند، به صورت y=b است.

چنین خطی را خط افقی گویند و عرض همه‌ی نقاط روی آن، عدد ثابت b است.

۳) **خط نیمساز ربع اول و سوم**: خطی که معادله‌ی آن به صورت y=x باشد، نیمساز ربع اول و سوم نامیده می‌شود. این خط از مبدأ مختصات می‌گذرد و نقاطی را شامل می‌شود که مختصات طول و عرض آنها با هم برابرند.



۴) **خط نیمساز ربع دوم و چهارم**: خطی که معادله‌ی آن به صورت $y=-x$ باشد، نیمساز ربع دوم و چهارم نامیده می‌شود. این خط مبدأ مختصات می‌گذرد و نقاطی را شامل می‌شود که مختصات طول و عرض آنها قرینه یکدیگرند.

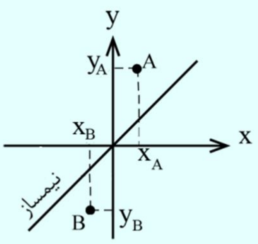


نکته: اگر نقطه‌ی $A(x_A , Y_a)$ در ربع اول بالای نیمساز واقع باشد باید:

$$\begin{cases} x_A > ۰ \\ y_A > ۰ \\ y_A > x_A \end{cases}$$

حال اگر نقطه‌ی $B(x_B , y_B)$ در ربع سوم زیر نیمساز واقع باشد باید:

$$\begin{cases} x_B < ۰ \\ y_B < ۰ \\ x_B > y_B \end{cases}$$



مثال: نقطه‌ی $A(-۲m-۱, m-۲)$ در ربع سوم زیر نیمساز قرار دارد. حدود m را بیابید.

پاسخ: باید شرایط زیر برقرار باشد.

$$\begin{cases} x_A < ۰ \\ y_A < ۰ \\ x_A > y_A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۲m-۱ < ۰ \\ m-۲ < ۰ \\ -۲m-۱ > m-۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m > -\frac{۱}{۲} \\ m < ۲ \\ m < \frac{۱}{۳} \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} \frac{-۱}{۲} < m < \frac{۱}{۳}$$

اوضاع نسبی دو خط

اگر خط D به معادله‌ی $ax+by+c=۰$ و خط D' به معادله‌ی $a'x+b'y+c'=۰$ باشد:

الف) اگر $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} \Rightarrow$ دو خط D و D' متقاطعند

ب) اگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'} \Rightarrow$ دو خط D و D' موازیند

ج) اگر $aa'-bb'=۰ \Rightarrow$ دو خط D و D' بر هم عمودند

د) اگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \Rightarrow$ دو خط D و D' بر هم منطبقند

مثال: اگر دو خط به معادلات $۲x+۵my+۲m=۰$ و $mx+۲(m^۲+۱)y=۳m+۲$ منطبق برهم باشند، از نقطه‌ای با کدام مختصات می‌گذرند؟

۱) (۶ , ۲) ۲) (۶ , ۳) ۳) (۱۲ , ۲) ۴) (۱۲ , ۵)

پاسخ گزینه‌ی ۳

$$\begin{cases} mx+2(m^2+1)y=3m+2 \\ 2x+5my=-2m \end{cases} \Rightarrow \frac{m}{2}=\frac{2(m^2+1)}{5m}=\frac{3m+2}{-2m} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{m}{2}=\frac{2(m^2+1)}{5m} \Rightarrow 5m^2=4m^2+4 \Rightarrow m^2=4 \Rightarrow m=\pm 2 \\ \frac{m}{2}=\frac{3m+2}{-2m} \Rightarrow -2m^2=6m+4 \Rightarrow m^2+3m+2=0 \Rightarrow m=-1 \text{ یا } m=-2 \end{cases}$$

جواب مشترک دو معادله‌ی حاصل مورد قبول است یعنی $m=-2$ و معادله‌ی خط به صورت $-2x+10y=-4$ یا $-x+5y=-2$ است. این خط از نقطه‌ی $(2\ ,\ 12)$ می‌گذرد. چون فقط همین نقطه در معادله خط صدق می‌کند.

۴۰) اگر دو خط $y=3x+1$ و $y=3x+m^2-3$ دو ضلع مقابل یک متوازی الاضلاع باشند:

۱) m هر عددی می‌تواند باشد.
۲) m هر عددی می‌تواند باشد به جز ۲
۳) m هر عددی می‌تواند باشد به جز صفر.
۴) m هر عددی می‌تواند باشد، به جز ۲ و ۲ −

۴۱) طول نقطه‌ی M واقع بر محور طول‌ها که از دو نقطه‌ی $(-2,3)$ و $(4,-1)$ به یک فاصله باشد، کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $-\frac{2}{3}$

۴۲) مختصات نقطه‌ای از خط $3x+2y=5$ را که از دو سر پاره‌خط AB که در آن $A(3\ ,\ 1)$ و $B(1\ ,\ 3)$ به یک فاصله است، کدام است؟

۱) $(3,-2)$ ۲) $(1\ ,\ 1)$ ۳) $(-1,-1)$ ۴) $\left(0,\frac{5}{2}\right)$

۴۳) نقاط $A\ (3\ ,\ m)$ و $B(7\ ,-1)$ مفروض‌اند. از وسط پاره‌خط AB، خط d را موازی خط به معادله‌ی $2x=y-4$ رسم می‌کنیم. اگر عرض از مبدأ خط d، -5 باشد آن‌گاه مقدار m چقدر است؟

۱) ۲۱ ۲) ۱۹ ۳) ۹ ۴) ۱۱

۴۴) اگر $A(1\ ,\ 1)$ و $C(-3\ ,-3)$ دو راس مقابل در لوزی ABCD باشند، معادله‌ی خطی که دو رأس B و D روی آن قرار می‌گیرند، کدام است؟

۱) $y=-x-2$
۲) $y=2x-3$
۳) $y=-x-2\ ;\ (x\neq -1)$
۴) $y=2x-3\ ;\ (x\neq -1)$

۴۵) مربع ABCD را در نظر بگیرید. پاره‌خط AB در نقطه‌ی A به طول -4 بر نیمساز ربع دوم عمود است و رأس B روی محور عرض‌ها قرار دارد، محیط مربع کدام است؟

۱) $8\sqrt{2}$ ۲) $16\sqrt{2}$ ۳) $12\sqrt{2}$ ۴) $20\sqrt{2}$

۴۶) سه ضلع مثلثی به معادلات $AB:2y-x=3$ ، $AC:y-2x=5$ و $BC:2y+3x=6$ هستند. معادله‌ی ارتفاع AH از مثلث مفروض، کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور ۸۹)

۱) $6y-4x=15$ ۲) $9y-6x=17$ ۳) $3y-2x=7$ ۴) $3y+2x=9$

۴۷) دو خط به معادلات $y=(m^2-4)x+1$ و $y=(m^2+m-6)x+2$ با هم موازی‌اند. آن‌گاه این دو خط با خط y=x+1 چه زاویه‌ای می‌سازند؟

۱) 30° ۲) 45° ۳) 60° ۴) 25°

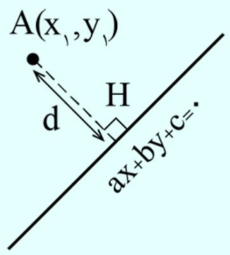
۴۸) اگر نقطه‌ی $A(2m-1,m+1)$ در ربع سوم بالای نیمساز باشد، حدود m کدام است؟

۱) $m<\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}<m<2$ ۳) $m<-1$ ۴) $m<-2$

درسنامه ۶

فاصله‌ی یک نقطه از خط

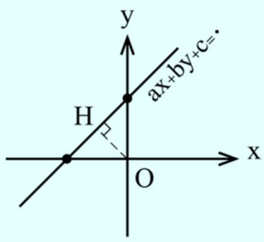
اگر خط L به معادله‌ی $ax+by+c=۰$ و نقطه $A(x_۱,y_۱)$ خارج این خط مطابق شکل مفروض باشند، آن‌گاه منظور از فاصله‌ی نقطه‌ی A از خط L، طول پاره‌خطی است که از نقطه‌ی A به خط L عمود می‌شود که از نظر اندازه، کوتاه‌ترین پاره‌خطی است که می‌توان از نقطه‌ی A به خط L رسم نمود و مقدار آن را می‌توان از فرمول زیر محاسبه نمود.



$$d=|AH|=\frac{|ax_۱+by_۱+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

تذکر مهم: در استفاده از فرمول فوق باید دقت شود که معادله خط داده شده حتماً به صورت $ax+by+c=۰$ باشد.

نکته: فاصله‌ی مبدأ مختصات از خط به معادله‌ی $ax+by+c=۰$ برابر است با:



$$|OH|=\frac{|C|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

مثال: فاصله‌ی نقطه‌ی $A(-۳,۱)$ را از خط $۴x+۳y=۱۰$ به دست آورید.

پاسخ:

$$۴x+۳y=۱۰\Rightarrow ۴x+۳y-۱۰=۰\xrightarrow{A(-۳,۱)}$$

$$|AH|=\frac{|۴x_A+۳y_A-۱۰|}{\sqrt{۴^۲+۳^۲}}\xrightarrow[y_A=۱]{x_A=-۴}\frac{|۴(-۳)+۳(۱)-۱۰|}{\sqrt{۲۵}}=\frac{۱۹}{۵}$$

۴۹) کدام خط به مبدأ مختصات نزدیک‌تر است؟

۱) $۲x+۳=۰$ ۲) $۳y+۲=۰$ ۳) $\frac{x}{۴}+\frac{y}{۳}=۱$ ۴) $y=x+۱$

۵۰) به ازای کدام مقدار از m، فاصله‌ی نقطه‌ی $A(m,-m)$ از خط $y=x$ برابر $\sqrt{۲}$ است؟

۱) ۲ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) -۱

۵۱) فاصله‌ی نقطه‌ی $A(۱,۱)$ از خط $y=-m^۲x+۲m$ برابر $\frac{۴}{\sqrt{۱+m^۴}}$ است. مجموع مقادیر صحیح m کدام است؟

۱) $\{۲,-۴\}$ ۲) $\{-۱,۳\}$ ۳) $\{۴,-۵\}$ ۴) $\{۲,-۵\}$

۵۲) خطی محور طول‌ها را در نقطه‌ای با طول ۳ و محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۴ قطع می‌کند، فاصله‌ی این خط تا مبدأ مختصات کدام است؟

۱) ۱/۲ ۲) ۲/۴ ۳) ۳/۶ ۴) ۴/۸

۵۳) فاصله‌ی مبدأ مختصات از خط به معادله $۲y+m=mx+۴$ برابر ۲ است. این خط محور xها را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) ۳

۵۴) فاصله مبدأ مختصات از خط به معادله $۲y = mx + b$ گذرنده بر نقطه $(۲ , ۱)$ برابر ۱ است، m کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{-۲}{۳}$ ۴) $\frac{-۳}{۲}$

۵۵) اگر $A(a , b)$ نقطه‌ای روی خط $۳x - ۴y = ۱۵$ باشد، کمترین مقدار $\sqrt{a^۲ + b^۲}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

۵۶) فاصله‌ی مبدأ مختصات از خط $a^۲x + (a^۲ + ۱)y = ۵$ برابر یک است. فاصله‌ی مبدأ مختصات از خط $(a^۲ + ۱)x + a^۲y = ۱۰$ چه قدر است؟ (آزاد تجربی ۸۰)

۱) ۲ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) ۱۰

۵۷) نقطه‌ای واقع بر نیمساز ناحیه‌ی دوم که از خط $y = ۲x - ۱$ به فاصله $\sqrt{۵}$ باشد، کدام است؟

۱) $(-۲ , ۲)$ ۲) $(۲ , -۲)$ ۳) $\left(\frac{۴}{۳} , -\frac{۴}{۳}\right)$ ۴) $\left(-\frac{۴}{۳} , \frac{۴}{۳}\right)$

۵۸) دو نقطه بر خط به معادله‌ی $y = x - ۱$ قرار دارند که فاصله‌ی این نقاط از خط به معادله‌ی $۲x - ۳y = ۵$ برابر $\sqrt{۱۳}$ است. طول این دو نقطه کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۹)

۱) $-۱۵ , ۹$ ۲) $-۱۵ , ۱۱$ ۳) $-۱۱ , ۱۵$ ۴) $۱۱ , -۹$

۵۹) چند نقطه روی خط $۳x + ۴y + ۴ = ۰$ وجود دارد که فاصله‌ی آن از نقطه‌ی $A(۱ , ۲)$ برابر ۲ می‌گردد؟

۱) هیچ نقطه‌ای ۲) یک نقطه ۳) دو نقطه ۴) سه نقطه

۶۰) فاصله مبدأ مختصات از خط به معادله‌ی $۲y = ax + b$ برابر ۱ است. اگر نقطه‌ی $A(۱,-۲)$ روی این خط قرار داشته باشد، مقدار عددی a کدام است؟

۱) -۲ ۲) ۲ ۳) $۱/۵$ ۴) $-۱/۵$

۶۱) معادله‌ی خطی که بر خط L به معادله‌ی $۳x + ۴y - ۱ = ۰$ عمود باشد و فاصله‌ی نقطه‌ی $(۰ , ۱)$ از آن برابر با ۲ است کدام گزینه می‌تواند باشد؟

۱) $y = \frac{۴}{۳}x - \frac{۱۴}{۳}$ ۲) $y = \frac{۴}{۳}x + \frac{۱۴}{۳}$

۳) $y = \frac{۴}{۳}x - ۲$ ۴) $y = -\frac{۴}{۳}x + ۲$

۶۲) اگر $A(۱ , ۲)$ ، $B(۳ , ۴)$ و $c(-۲ , ۲)$ سه رأس مثلث باشند، آن‌گاه اندازه ارتفاع AH کدام است؟

۱) $\frac{۲}{\sqrt{۲۹}}$ ۲) $\frac{۴}{\sqrt{۲۹}}$ ۳) $\frac{۶}{\sqrt{۲۹}}$ ۴) $\frac{۸}{\sqrt{۲۹}}$

۶۳) مساحت مربعی که یک رأس آن به مختصات $(-۱,۳)$ و یک ضلع آن واقع بر خط به معادله‌ی $۴y = ۳x + ۱$ باشد، کدام است؟ (مشابه تمرین کتاب درسی)

۱) $\frac{۱۹۶}{۲۵}$ ۲) $\frac{۲۲۵}{۱۶}$ ۳) $\frac{۲۵۶}{۲۵}$ ۴) $\frac{۱۶۹}{۱۶}$

۶۴) یک ضلع مربعی منطبق بر خط به معادله‌ی $y=x+۲$ و نقطه‌ی $A(۳ , -۱)$ یک رأس آن است. اندازه‌ی قطر مربع کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۶۵) دو نقطه بر روی نیمساز ربع اول و سوم وجود دارند که از خط $x + ۲y = ۰$ به فاصله‌ی $۲\sqrt{۵}$ هستند. اگر این دو نقطه را A و B بنامیم، مساحت مثلث ABC چند واحد مربع است؟ نقطه‌ی C روی محور y ها به عرض ۳ است.

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) $\frac{۱۹۰}{۳}$ ۴) $\frac{۹۵}{۳}$

۶۶) مساحت متوازی‌الاضلاع محدود به خطوط به معادلات $y = x + ۳$ و $x=۴$ و محور x ها و نیمساز ناحیه اول برابر کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۲ ۳) ۳۵ ۴) ۴۰

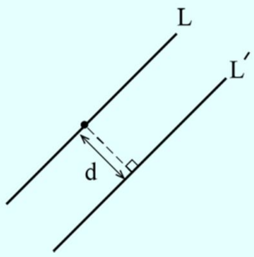
۶۷) دو ضلع یک مستطیل منطبق بر دو خط به معادلات $۲y + x = ۶$ و $۲x - y = ۷$ می‌باشند و یک رأس مستطیل نقطه‌ی $A(۸\,,\,۵)$ است. مساحت این مستطیل کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور ۹۰)

۱) ۷/۲ ۲) ۹/۶ ۳) ۱۱/۴ ۴) ۱۲/۸

درسنامه ۷

فاصله‌ی دو خط موازی

دو خط موازی L و L' به معادلات $ax + by + c = ۰$ و $ax + by + c' = ۰$ مطابق شکل مفروض‌اند. برای محاسبه‌ی فاصله‌ی این دو خط موازی از رابطه‌ی زیر استفاده می‌کنیم:

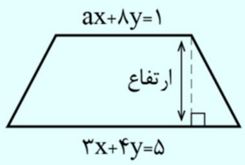


$$d = \frac{|c' - c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$$

نکته مهم: برای استفاده از فرمول فاصله‌ی دو خط موازی، باید ضرایب x و y حتماً یکسان باشند.

مثال: اگر خطوط به معادلات $۳x+۴y=۵$ و $۶x+۸y=۱$ قاعده‌های یک ذوزنقه باشند، طول ارتفاع آن را بیابید.

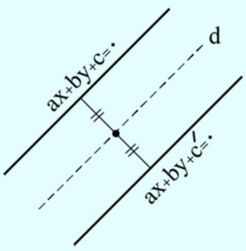
پاسخ: ذوزنقه را مطابق شکل روبرو در نظر بگیرید. می‌دانیم در هر ذوزنقه دو قاعده با هم موازی هستند و فاصله‌ی بین آنها برابر طول ارتفاع ذوزنقه است. بنابراین:



$$\begin{cases} ۶x + ۸y = ۱ \xrightarrow{\div ۲} ۳x + ۴y - \frac{۱}{۲} = ۰ \Rightarrow c = -\frac{۱}{۲} \\ ۳x + ۴y = ۵ \Rightarrow ۳x + ۴y - ۵ = ۰ \Rightarrow c' = -۵ \end{cases} \Rightarrow \text{طول ارتفاع} = \frac{\left|-۵\left(-\frac{۱}{۲}\right)\right|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}} = \frac{۹}{۱۰}$$

خط وسط دو خط موازی

معادله‌ی خطی که با خط‌های $ax + by + c = ۰$ و $ax + by + c' = ۰$ موازی و فاصله‌اش از این خط‌ها برابر باشد عبارت است از:



$$d = ax + by + \frac{c + c'}{۲} = ۰$$

نکته مهم: برای استفاده از رابطه‌ی فوق، باید ضرایب x و y یکسان باشند، در صورتی که یکسان نبودند، خودمان ضرایب را یکسان می‌کنیم.

۶۸) فاصله‌ی بین دو خط به معادلات $y = x\sqrt{۳} + ۲$ و $\sqrt{۳}y - ۳x + ۶ = ۰$ کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور ۸۸)

۱) $۲ - \sqrt{۳}$ ۲) $\sqrt{۳} - ۱$ ۳) $\sqrt{۳} + ۱$ ۴) $۲ + \sqrt{۳}$

۶۹) معادله‌ی خطی که با خط $۴x+۳y=۱$ موازی و به فاصله‌ی ۳ از آن باشد، کدام است؟

۱) $۴x + ۳y - ۱۵ = ۰$ ۲) $۴x + ۳y + ۱۴ = ۰$

۳) $۳x + ۴y - ۱۶ = ۰$ ۴) $۳x + ۴y + ۱۴ = ۰$

۷۰) دو ضلع مربعی روی خط $\pi x + \pi y - ۱ = ۰$ و $\pi x + \pi y - ۵ = ۰$ قرار دارد. مساحت دایره‌ی محاطی مربع کدام است؟ (مشابه تمرین کتاب درسی)

۱) ۲π ۲) $\frac{۲}{\pi}$ ۳) $\frac{۱}{\pi}$ ۴) π

۷۱) اگر $y = -\frac{۳}{۴}x + ۱$ و $۳x+۴y+a=۰$ دو ضلع یک مربع با محیط ۲۰ باشند، مقدار a کدام عدد می‌تواند باشد؟

۱) -۲۹ ۲) ۲۹ ۳) -۲۱ ۴) -۲۵

۷۲) اگر $۳y=-۴x+۲a+۱$ و $y+\frac{۴}{۳}x+۲=۰$ دو ضلع مربعی با مساحت ۹ باشند، مقدار صحیح مثبت a کدام است؟

۱) ۱۱   ۲) ۴   ۳) ۲۲   ۴) ۸

۷۳) مقدار a در معادلات خطوط $d_۱:(a-۲)x+y=۲$ و $d_۲:(a-۲)x+y=-۱$ چه مقدار باید باشد تا فاصله‌ی این دو خط بیش‌ترین مقدار ممکن را داشته باشند؟

۱) صفر   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۱

۷۴) مساحت ذوزنقه‌ای که رأس‌های آن روی محورهای مختصات است و معادله‌ی خطوط گذرنده از قاعده‌هایش به صورت y=x+۲ و y=x+۴ است چقدر می‌باشد؟

۱) ۶   ۲) ۱۲   ۳)   ۴)

۷۵) خطوط x+y=۱۲ و x+y=۸ دو ضلع مقابل یک مربع می‌باشند معادله خطی که از وسط‌های دو ضلع دیگر مربع می‌گذرد کدام است؟

۱) x+y=۲   ۲) x+y=۸   ۳) x+y=۱۰   ۴) x+y=۶

درسنامه ۸

معادله درجه دوم

معادله‌ی $ax^۲+bx+c=۰$ را با شرط $a\neq ۰$ معادله درجه دوم می‌نامند. برای به دست آوردن ریشه‌های آن دلتای (Δ) معادله را تشکیل داده داریم:

$$\Delta=b^۲-۴ac$$

۱) اگر $\Delta>۰$ باشد، آن‌گاه ریشه‌های معادله $(x_۱,x_۲)$ از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\Delta>۰ \xrightarrow{\text{دو ریشه ی حقیقی دارد}} x_۱,x_۲=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}$$

۲) اگر $\Delta=۰$ باشد، معادله یک ریشه حقیقی مضاعف دارد آن ریشه $x=-\frac{b}{۲a}$ است. (معادله مربع کامل است.)

۳) اگر $\Delta<۰$ معادله ریشه حقیقی ندارد.

مثال

معادلات زیر را حل کنید.

الف) $x^۲-۴x+۳=۰$ ب) $x^۲-۶x+۹=۰$ ج) $-x+x^۲+۵=۰$

پاسخ

الف) $x^۲-۴x+۳=۰ \quad , \quad a=۱ \quad , \quad b=-۴ \quad , \quad c=۳$

$$\Delta=b^۲-۴ac=۱۶-۴\times ۳=۱۶-۱۲=۴>۰ \xrightarrow{\text{دو ریشه حقیقی}} x_۱\ ,x_۲=\frac{۴\pm ۲}{۲}\Rightarrow x_۱=۱ \quad , \quad x_۲=۳$$

ب) $x^۲-۶x+۹=۰ \quad , \quad a=۱ \quad , \quad b=-۶ \quad , \quad c=۹$

$$\Delta=b^۲-۴ac=۳۶-۳۶=۰$$

ج) $-x+x^۲+۵=۰ \quad , \quad a=۱ \quad , \quad b=-۱ \quad , \quad c=۵ \xrightarrow{\text{یک ریشه حقیقی}} x=\frac{۶}{۲}=۳$

$\Delta=b^۲-۴ac=۱-۲۰=-۱۹<۰$ ریشه حقیقی ندارد

روابط بین جواب‌های معادله‌ی درجه دوم

معادله‌ی $ax^۲+bx+c=۰$ با شرط $\Delta>۰$ دو جواب متمایز دارد. اگر $x_۱$ و $x_۲$ دو جواب معادله‌ی $ax^۲+bx+c=۰$ باشد، روابط زیر بین جواب‌های معادله برقرار است:

الف) $S=x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ ب) $p=x_1x_2=\frac{c}{a}$ ج) $|x_1-x_2|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\sqrt{s^2-4p}$

تذکر

حالات دیگر را می‌توان به رابطه‌ی دیگر بین S و P تبدیل کرد، به عنوان مثال داریم:

$$1)\ x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=s^2-2p$$

$$2)\ x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)=S^3-3ps$$

$$3)\ \sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}=\sqrt{(x_1+x_2)+2\sqrt{x_1x_2}}=\sqrt{S+2\sqrt{p}}$$

$$4)\ \left|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right|=\sqrt{(x_1+x_2)-2\sqrt{x_1x_2}}=\sqrt{S-2\sqrt{p}}$$

$$5)\ \alpha x_1^n+\beta x_2^n=\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\left(x_1^n+x_2^n\right)+\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\left(x_1^n x_2^n\right)$$

$$6)\ \begin{cases}x_1>0\\ x_2>0\end{cases}\Rightarrow \frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}}+\frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}}=\frac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1x_2}}=\frac{S}{\sqrt{p}}$$

مثال اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x^2-3x+1=0$ باشند، حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را بیابید.

الف) $x_1+x_2S=-\left(\frac{-3}{1}\right)=3=S$

ب) $x_1x_2=p=\frac{1}{1}$

ج) $x_1^2+x_2^2=S^2-2p=3^2-2\times1=7$

د) $x_1^3+x_2^3=S^3-3pS=3^3-3\times3\times1=18$

هـ) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{S}{P}=\frac{3}{1}=3$

و) $x_1x_2^2+x_2x_1^2=x_1x_2(x_1+x_2)=SP=3$

ط) $A=\left|\frac{x_1}{\sqrt{x_2}}-\frac{x_2}{\sqrt{x_1}}\right|\xrightarrow{\text{طرفین را به توان دو می رسانیم.}}A^2=\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_1}-\frac{2x_1x_2}{\sqrt{x_1x_2}}$

$$\Rightarrow A^2=\frac{x_1^3+x_2^3}{x_1x_2}-\frac{2x_1x_2}{\sqrt{x_1x_2}}=\frac{s^3-3sp}{p}-\frac{2p}{\sqrt{p}}=16\Rightarrow A^2=16\xrightarrow{A>0}A=4$$

نکته گاهی اوقات عبارت مورد سؤال تشابه زیادی به خود معادله دارد.

ر) $\left(x_1^2+1\right)\left(x_2^2+1\right)$

چون x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $x^2-3x_1+1=0$ هستند بنابراین در خود معادله صدق می‌کنند داریم:

$$x_1^2-3x_1+1=0\Rightarrow x_1^2+1=3x_1(1)x_2^2-3x+1=0\Rightarrow x_2^2+1=3x_2(2)$$

در نتیجه:

$$(x_1^2+1)(x_2^2+1)\xlongequal[(2)]{(1)}(3x_1)(3x_2)=9p=9\times1=9$$

$$ز)\ x_1\left(\underbrace{2x_2^3-6x_2^2}_{\text{فاکتور از } 2x_2}\right)+x_2\left(\underbrace{2x_1^3-6x_1^2}_{\text{فاکتور از } 2x_1}\right)=2x_1x_2(x_2^2-3x_2)+2x_1x_2(2x_1^2-3x_1)\qquad(*)$$

چون x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $x^2-3x+1=0$ هستند لذا در خود معادله صدق می‌کنند. داریم:

$$x_1^2-3x_1+1=0\Rightarrow x_1^2-3x_1=-1$$

$$x_2^2-3x_2+1=0\Rightarrow x_2^2-3x_2=-1$$

در نتیجه:

$$(*):\ 2x_1x_2\left(\overbrace{x_2^2-3x_2}^{(-1)}\right)+2x_1x_2\left(\overbrace{2x_1^2-3x_1}^{(-1)}\right)=-4x_1x_2=-4p=-4$$

ویژگی معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2+bx+c=0$ (در حالت $\Delta>0$)

۱) اگر $c=0 \Leftrightarrow$ معادله یک ریشه برابر صفر دارد $\Leftrightarrow \begin{cases}x_1=0\\ x_2=-\frac{b}{a}\end{cases}$

۲) اگر $b=0 \Leftrightarrow$ معادله دو ریشه قرینه دارد

۳) اگر $a=0, b\neq0 \Leftrightarrow x=-\frac{c}{b}$

۴) اگر $a=c \Leftrightarrow$ دو ریشه معادله عکس یکدیگرند.

۵) اگر $a=-c \Leftrightarrow$ دو ریشه معادله قرینه عکس یکدیگرند.

۶) اگر $a+b+c=0 \Leftrightarrow \begin{cases}x_1=1\\ x_2=\frac{c}{a}\end{cases}$

۷) اگر $a+c=b \Leftrightarrow \begin{cases}x_1=-1\\ x_2=-\frac{c}{a}\end{cases}$

مثال اگر معادله $ax^2+2bx+c=0$ دارای دو ریشه عکس یکدیگر باشد کدام درست است؟

۱) $a=-c$ ۲) $b=c$ ۳) $|b|>|a|$ ۴) $|b|<|a|$

پاسخ گزینه‌ی ۳ معادله دارای دو ریشه حقیقی است. بنابراین:

$$\Delta=b^2-4ac=(2b)^2-4ac>0\Rightarrow 4b^2-4ac>0\Rightarrow b^2-ac>0$$

از طرفی دیگر ریشه‌های معادله عکس یکدیگرند بنابراین باید $a=c$ باشد. داریم:

$$b^2-ac>0\xrightarrow{a=c}b^2-a^2>0\Rightarrow b^2>a^2\xrightarrow{\text{جذر}}|b|>|a|$$

مثال مقدار a را طوری بیابید که معادله‌ی $x^2-(a-1)x+a-7=0$ دارای دو جواب قرینه و معکوس هم باشند.

پاسخ باید $a=-c$ بنابراین:

$$1=-(a-7)\Rightarrow a=6$$

به ازای $a=6$، $\Delta>0$ است. بنابراین قابل قبول است.

نکاتی درباره جواب‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2+2bx+c=0$

۱) اگر $\Delta>0 \Leftrightarrow$ معادله دو ریشه‌ی متمایز دارد

الف) $\frac{c}{a}<0 \Leftrightarrow$ دو ریشه ی مختلف علامت دارد $(x_1<0<x_2)$ $\Rightarrow \begin{cases} -\frac{b}{a}<0\ ,\ |x_1|>|x_2| \\ -\frac{b}{a}=0 \ \text{دو ریشه قرینه‌ی یکدیگرند} \\ -\frac{b}{a}>0\ ,\ |x_2|>|x_1| \end{cases}$

ب) $\frac{c}{a}=0 \Leftrightarrow$ یک ریشه صفر و دیگری $\frac{-b}{a}$ است

ج) $\frac{c}{a}>0 \Leftrightarrow$ دو ریشه هم‌علامت اند $\Rightarrow \begin{cases} -\frac{b}{a}<0 \ \text{هر دو ریشه‌اند منفی} \\ -\frac{b}{a}=0 \ \text{غیر ممکن است} \\ -\frac{b}{a}>0 \ \text{هر دو ریشه مثبت است} \end{cases}$

۲) اگر $\Delta=0\Rightarrow$ معادله دارای ریشه‌ی مضاعف است.

$$\Leftrightarrow x_1=x_2=\frac{-b}{2a}\Rightarrow\begin{cases} -\frac{b}{a}>0\Rightarrow x_1=x_2>0 \\ -\frac{b}{a}<0\Rightarrow x_1=x_2<0 \end{cases}$$

۳) اگر $\Delta<0\Rightarrow$ معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد.

مثال اگر معادله $mx^2+2(m-1)x+m-3=0$ دارای دو ریشه مثبت باشد، حدود m کدام است؟

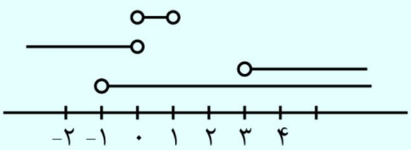
۱) $(-3,1)$ ۲) $(0,1)$ ۳) $(-1,0)$ ۴) ϕ

پاسخ گزینه‌ی ۴ باید $\Delta>0$ ، $\frac{c}{a}>0$ و $-\frac{b}{a}>0$ با هم برقرار باشند.

$$\Delta=b^2-4ac=4(m-1)^2-4m(m-3)=4(m+1)>0\Rightarrow m>-1$$

$\frac{c}{a}=\frac{m-3}{m}>0\xrightarrow{\text{حل نامعادله}} m<0$ یا $m>3$ و $-\frac{b}{a}=\frac{-2(m-1)}{m}>0\xrightarrow{\text{حل نامعادله}}0<m<1$

از محدوده‌هایی که برای m حاصل شده است، اشتراک می‌گیریم. داریم:



در نتیجه $m=\phi$ یعنی مقداری برای m وجود ندارد.

مثال اگر $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ باشد، معادله‌ی $x^2-(\sin^3\alpha+\cos^3\alpha)x+\sin\alpha-\sqrt{\sin\alpha}=0$ به ازای کلیه مقادیر α :

۱) دو ریشه مثبت دارد. ۲) دو ریشه منفی دارد.

۳) دو ریشه‌ی مختلف العلامت دارد. ۴) دو ریشه مساوی دارد.

پاسخ گزینه‌ی ۳

نکته اگر $0<x<\frac{\pi}{2}\Rightarrow 0<\sin x<1\Rightarrow \dots<\sin^3x<\sin^2x<\sin x<\sqrt{\sin x}<\sqrt[3]{\sin x}<\dots$

بنابراین طبق نکته ذکر شده داریم:

$\sin\alpha<\sqrt{\sin\alpha}\Rightarrow\underbrace{\sin\alpha-\sqrt{\sin\alpha}}_{\frac{c}{a}}<0\Rightarrow\frac{c}{a}<0\Rightarrow$ معادله دو ریشه مختلف العلامت دارد

مثال به ازای کدام مقادیر m معادله $mx^2-2x-4m-1=0$ دو ریشه متمایز منفی دارد؟ (مشابه سراسری تجربی ۹۵)

۱) $-\frac{۱}{۴} < m < ۰$ ۲) $m > ۲$ ۳) $۰ < m < \frac{۱}{۴}$ ۴) $-۱ < m < -\frac{۱}{۴}$

پاسخ گزینه‌ی ۱ برای این‌که معادله درجه دوم دارای دو ریشه متمایز منفی باشد باید:

$$\begin{cases} \frac{c}{a} > ۰ \Rightarrow \frac{-۴m-۱}{m} > ۰ \xrightarrow{\text{حل نامعادله}} -\frac{۱}{۴} < m < ۰ \\ -\frac{b}{a} < ۰ \Rightarrow \frac{۲}{m} < ۰ \Rightarrow m < ۰ \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} -\frac{۱}{۴} < m < ۰$$

مسائل پارامتری

در این مسأله‌ها یکی از دو رابطه بین مجموع یا حاصلضرب دو ریشه را به رابطه داده شده اضافه نموده و از دستگاه دو معادله تشکیل شده یکی از ریشه‌ها را به دست می‌آوریم. (شاید برحسب پارامتر) و از قرار دادن آن در معادله پارامتر به دست می‌آید.

مثال اگر x' و x'' ریشه‌های معادله $x^۲ - ۱۵x + a = ۰$ باشد، a را چنان بیابید که $۲x' - ۳x'' = ۰$.

پاسخ
$$\begin{cases} ۲x' - ۳x'' = ۰ \\ x' + x'' = ۱۵ \end{cases} \Rightarrow x' = ۹ \xrightarrow{\text{در معادله}} ۸۱ - ۱۳۵ + a = ۰ \Rightarrow a = ۵۴$$

۷۶) اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم $x^۲ - ۴x + ۱ = ۰$ باشند، مقدار $\alpha^\beta \times \beta^\alpha$ برابر کدام است؟

۱) $(۲-\sqrt{۳})^۳$ ۲) $(۲+\sqrt{۳})^۳$ ۳) $(۷+۴\sqrt{۳})^۳$ ۴) $(۷-۴\sqrt{۳})^۳$

۷۶) در مثلث قائم‌الزاویه‌ای به طول اضلاع a ، a+۲ و a+۴ ، مساحت کدام است؟ (آزاد غیرپزشکی ۹۰)

۱) ۱۲ ۲) ۲۴ ۳) ۴۸ ۴) ۶

۷۸) اگر به اعداد ۱۲ و ۱۸، a واحد اضافه گردد، به حاصل ضرب آن دو عدد $۲a^۲$ واحد اضافه می‌شود. مقدار $\sqrt{a^۲ + ۴a + ۴}$ کدام است؟

۱) ۳۱ ۲) ۳۲ ۳) ۳۳ ۴) ۳۶

۷۹) اگر سه عدد غیر صفر a، b و c به ترتیب سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، در این صورت معادله‌ی درجه‌ی دوم $۹ax^۲ + ۶bx + c = ۰$ دارای ....

۱) ریشه مضاعف است. ۲) دو ریشه متمایز مثبت است.
۳) دو ریشه متمایز منفی است. ۴) ریشه نمی‌باشد.

۸۰) ریشه‌های معادله درجه دوم $mnx^۲ - (m^۲ + n^۲)x + mn = ۰$ با شرط $m^۴ + n^۴ > ۲m^۲$ عبارتند از:

۱) $x'' = m^۲ \ , \ x' = n^۲$ ۲) $x'' = \frac{n}{m} \ , \ x' = \frac{m}{n}$
۳) $x'' = \frac{۱}{m^۲} \ , \ x' = \frac{۱}{n^۲}$ ۴) $x'' = \frac{۱}{mn} \ , \ x' = mn$

۸۱) اگر معادله‌ی $x^۲ + ax + b = ۰$ دارای دو جواب به صورت عدد صحیح باشد، کدام گزینه همواره درست است؟

۱) اگر هر دو جواب فرد باشند آن‌گاه a و b اعدادی فرد هستند.
۲) اگر هر دو جواب فرد باشند آن‌گاه a فرد و b زوج است.
۳) اگر یک جواب زوج و دیگری فرد باشد آن‌گاه a زوج و b فرد است.
۴) اگر یک جواب زوج و دیگری فرد باشد آن‌گاه a فرد و b زوج است.

۸۲) به ازای کدام مقادیر a ، معادله‌ی درجه دوم $۲x^۲ + ax + a - \frac{۳}{۲} = ۰$، دارای دو ریشه‌ی حقیقی متمایز است؟ (سراسری تجربی ۸۱)

۱) $a < ۲$ یا $a > ۶$ ۲) $a < ۳$ یا $a > ۴$ ۳) $۲ < a < ۶$ ۴) $۳ < a < ۴$

۸۳) به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، معادله‌ی درجه دوم $۲x^۲ + (m+۱)x + \frac{۱}{۲}m + ۲ = ۰$ ، فاقد ریشه‌ی حقیقی است؟

(سراسری تجربی خارج از کشور ۸۹)

۱) $-۳ < m < ۵$ ۲) $-۳ < m < ۴$

۳) $-۲<m<۴$ ۴) $-۱<m<۵$

۸۴) منحنی به معادله‌ی $y=(۲x+۱)(x+۸)$ با خطوط $y=mx$ نقطه‌ی مشترکی ندارد. مجموعه مقادیر m کدام است؟

(سراسری ریاضی ۸۸)

۱) $۹<m<۲۵$ ۲) $۱۵<m<۲۳$ ۳) $۷<m<۱۵$ ۴) $۵<m<۱۳$

۸۵) به ازای کدام مقادیر m، خط به معادله‌ی $y=۲x-۴$ بر منحنی به معادله‌ی $y=(m+۳)x^۲+mx$، مماس است؟

(سراسری ریاضی ۹۰)

۱) $-۲,۱۸$ ۲) $۲,۲۲$ ۳) $-۲,۲۲$ ۴) $۴,۱۱$

۸۶) به ازای کدام مقدار a نمودار دو تابع با ضابطه‌های $f(x)=x^۲+۱$ و $g(x)=ax^۲+۴x$، بر هم مماس‌اند؟ (سراسری ریاضی ۹۱)

۱) -۱ ۲) -۳ ۳) -۲ ۴) -۴

۸۷) به ازای چند مقدار k منحنی تابع $y=(x-۲)(x^۲+kx+۱)$ بر محور x ها مماس است؟ (مشابه سراسری ریاضی ۸۳)

۱) ۳   ۲) ۲   ۳) ۱   ۴) صفر

۸۸) اگر معادله‌ی $x^۲+ax+b=۰$، ریشه مضاعف $\sqrt{۳}$ داشته باشد، آن‌گاه $\frac{b}{a}$ کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) $-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۸۹) اگر عدد ۱ بین دو ریشه معادله $mx^۲+۳x+۱=۰$ قرار گیرد حدود m کدام است؟

۱) $m<-۴$ ۲) $m>۰$ ۳) $-۴<m<۰$ ۴) $-<m<۴$

۹۰) اگر یکی از ریشه‌های معادله‌ی $x^۲-۲bx+۱=۰$ برابر $۲-\sqrt{۳}$ باشد، ریشه‌ی دیگر آن کدام است؟

۱) $-\left(۲+\sqrt{۳}\right)$ ۲) $۲-\sqrt{۳}$ ۳) $\sqrt{۳}+۳$ ۴) $-\left(\sqrt{۳}+۳\right)$

۹۱) اگر α و β ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $m^۲x^۲+m=x(۳x)+۴x^۲$ باشند به ازای کدام مقدار m دنباله $\alpha, \frac{۱}{n}, \beta$ یک دنباله حسابی تشکیل می‌دهند؟

(مشابه سراسری ریاضی ۸۴)

۱) -۶ ۲) -۴ ۳) ۴   ۴) ۶

۹۲) در معادله‌ی درجه دوم $۲x^۲+ax+۹=۰$، یک ریشه دو برابر ریشه‌ی دیگر است. مجموع دو ریشه‌ی مثبت کدام است؟

(سراسری تجربی خارج از کشور ۸۴)

۱) ۳/۵   ۲) ۴   ۳) ۴/۵   ۴) ۵

۹۳) در معادله‌ی $۳x^۲-۱۵x+m=۰$، اگر یکی از ریشه‌ها ۲ واحد از ریشه‌ی دیگر بیشتر باشد، mکدام است؟

(سراسری ریاضی ۸۲)

۱) $\frac{۵۹}{۵}$ ۲) $\frac{۶۳}{۵}$ ۳) $\frac{۵۹}{۴}$ ۴) $\frac{۶۳}{۴}$

۹۴) در معادله‌ی $۳x^۲-۱۷x+m=۰$، یک ریشه از سه برابر ریشه‌ی دیگر ۳ واحد بیشتر است. m کدام است؟

(سراسری ریاضی ۸۷)

۱) ۹   ۲) ۱۰   ۳) ۱۲   ۴) ۱۵

۹۵) به ازای کدام مقدار m، یکی از ریشه‌های معادله‌ی $x^۲-۶x+۵+m=۰$ مجذور دیگری است؟ (آزاد ریاضی ۸۱)

۱) ۳۲   ۲) ۲   ۳) -۳۲ ۴) -۳

۹۶) یکی از ریشه‌های معادله‌ی $x^۲-ax+۲=۰$ مربع معکوس ریشه‌ی دیگر است. a کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۲}$ ۲) $-\frac{۵}{۲}$ ۳) $\frac{۹}{۲}$ ۴) $-\frac{۹}{۲}$

۹۷) در معادله‌ی $ax^۲+۲x+c=۰$ مجموع دو ریشه «عددی مثبت» و یکی از ریشه‌ها برابر a است. ریشه‌ی دیگر که برابر c باشد، چه عددی است؟

(آزاد انسانی ۸۹)

۱) ۱   ۲) -۳ ۳) -۱ ۴) ۳

۹۸) اگر معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^۲+۲(m-۱)x+m^۲+۲m=۰$ دو ریشه‌ی متمایز منفی داشته باشد، حدود m کدام است؟

۱) $m>\frac{1}{4}$ ۲) $0<m<1$ ۳) $m<\frac{1}{4}$ ۴) ϕ

۹۹) اگر منحنی به معادله‌ی $y=2x^2-4x+m-3$، محور x ها را در دو نقطه به طول‌های مثبت قطع کند، آن‌گاه مجموعه مقادیر m به کدام صورت است؟ (سراسری ریاضی ۸۷)

۱) $m>3$ ۲) $3<m<4$ ۳) $3<m<5$ ۴) $4<m<5$

۱۰۰) به ازای کدام مجموعه مقادیر a نمودار تابع $f(x)=ax^2+(a+3)x-1$، محور x ها را در دو نقطه به طول‌های منفی قطع می‌کند؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور ۹۲)

۱) $a<-9$ ۲) $a<-3$
۳) $a>-1$ ۴) $-3<a<0$

۱۰۱) به ازای کدام مقدار m معادله $x^2+(m^2+m)x+m=2x$ دارای دو ریشه حقیقی قرینه است؟

۱) -2 ۲) -1 ۳) $-2,1$ ۴) $-1,0$

۱۰۲) به ازای کدام مقدار b، معادله‌ی درجه دوم $mx^2+5x+m^2-6=0$، دو ریشه‌ی حقیقی و معکوس هم دارد؟

۱) -3 ۲) -2 ۳) ۲ ۴) ۳

۱۰۳) به ازای کدام مقدار m ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $mx^2+3x+m^2=2$، معکوس یکدیگرند؟ (سراسری تجربی خارج از کشور ۹۰)

۱) -2 ۲) -1 ۳) ۱ ۴) ۲

۱۰۴) به ازای کدام مقدار m، مجموع مربعات ریشه‌های معادله درجه دوم $2x^2+(m-1)x=1$ برابر $\frac{13}{4}$ است؟ (مشابه آزاد ریاضی خارج از کشور ۸۹)

۱) $2,-4$ ۲) $-3,4$ ۳) $-2,4$ ۴) $-2,3$

۱۰۵) اگر $x_1=\sin\alpha$ و $x_2=\cos\alpha$ ریشه‌های معادله‌ی $x^2+bx+c=0$ باشند، حاصل $\frac{x_1}{x_2^3}+\frac{x_2}{x_1^3}$ کدام است؟

۱) $\frac{3c^2-1}{c^3}$ ۲) $\frac{c^2+2}{c^3}$ ۳) $\frac{1-2c^2}{c^3}$ ۴) $\frac{2c^2-1}{c^3}$

۱۰۶) در معادله‌ی $x^2-2x+\frac{3}{4}=0$، حاصل $x_1^4+x_2^4$ چه قدر است؟ (x_1 و x_2 ریشه‌های معادله هستند.) (آزاد تجربی خارج از کشور ۹۰)

۱) $\frac{5}{2}$ ۲) $\frac{5}{8}$ ۳) $\frac{41}{2}$ ۴) $\frac{41}{8}$

۱۰۷) اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $4x^2-12x+1=0$ باشند، مقدار $\frac{1}{\sqrt{\beta}}+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ چه قدر است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور ۸۵)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۱۰۸) در معادله‌ی $x^2-3x+1=0$، حاصل $x_1\sqrt{x_2}+x_2\sqrt{x_1}$ کدام است؟ (آزاد ریاضی خارج از کشور ۸۷)

۱) $\sqrt{5}$ ۲) ۵ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) ۳

۱۰۹) اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم $x^2-7x-8=0$ باشند، حاصل $\sqrt[3]{x_1}+\sqrt[3]{x_2}$ کدام است؟ (آزاد ریاضی خارج از کشور ۹۰)

۱) ۳ ۲) -3 ۳) -4 ۴) ۱

۱۱۰) اگر رابطه‌ی $4a+c=-2b$، بین ضرایب معادله‌ی درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ برقرار باشد، یک جواب معادله کدام است؟

۱) $\frac{2a}{c}$ ۲) $\frac{c}{2a}$ ۳) $-\frac{c}{2a}$ ۴) $\frac{a}{c}$

۱۱۱) هرگاه معادله‌های $x^2+mx+2=0$ و $x^2+(m+1)x+3=0$ یک ریشه مشترک داشته باشند، مقدار m کدام است؟

۱) ۳ ۲) -3 ۳) -1 ۴) ۱

۱۱۲) اگر x=1 یک ریشه‌ی معادله $x(x^2+x-a)=-2$ باشد، مجموع دو ریشه دیگر کدام است؟ (مشابه سراسری ریاضی خارج از کشور ۸۷)

۱) -۲ ۲) ۳ ۳) -۳ ۴) -۱

۱۱۳) اگر نمودار تابع $f(x)=۲x^۳-۵x^۲-x+m$ ، محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع کند، طول‌های دو نقطه ی تلاقی دیگر آن با محور x ها کدام‌اند؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور ۸۹)

۱) $-۱ , \frac{۱}{۲}$ ۲) $۱ , -\frac{۱}{۲}$ ۳) $-۱ , \frac{۳}{۲}$ ۴) $۳ , -\frac{۱}{۲}$

۱۱۴) اگر α و β دو ریشه‌ی معادله‌ی $x^۲+۳x-۱=۰$ باشند، حاصل $\beta^۳-۲\alpha^۲+\beta^۲+\alpha$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۲ ۳) -۱۸ ۴) -۲۵

۱۱۵) اگر رابطه‌ی $\frac{۱}{۲}=\frac{x_۱^۲+mx_۱}{x_۱^۲+x_۲^۲}$ بین ریشه‌های حقیقی معادله $x^۲+mx-m^۳+۱=۰$ برقرار باشد، چند مقدار قابل قبول برای m وجود دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

درسنامه ۹

معادله‌ی درجه دوم

۱) معادله‌ی درجه دومی که جواب‌های آن اعداد حقیقی $x_۱$ و $x_۲$ باشد، به صورت $x^۲-(x_۱+x_۲)x+x_۱x_۲=۰$ است. به عبارت دیگر، اگر مجموع دو عدد S و حاصل ضربشان P باشد آن دو عدد از حل معادله‌ی $x^۲-Sx+p=۰$ حاصل می‌شود:

مثال کدام معادله درجه دو ریشه‌هایش $\frac{\sqrt{۵}-۲}{\sqrt{۵}+۲}$ و $\frac{\sqrt{۵}+۲}{\sqrt{۵}-۲}$ می‌باشد؟ (مشابه تمرین کتاب درسی)

۱) $x^۲-\sqrt{۵}x+۱=۰$ ۲) $x^۲-۱۸x+۱=۰$

۳) $x^۲-۹x+۱=۰$ ۴) $x^۲-۲\sqrt{۵}x+۱=۰$

پاسخ گزینه‌ی ۲ مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله را می‌یابیم:

$$\begin{cases} p=x_۱x_۲=\frac{\sqrt{۵}-۲}{\sqrt{۵}+۲}\times\frac{\sqrt{۵}+۲}{\sqrt{۵}-۲}=۱ \\ S=x_۱+x_۲=\frac{\sqrt{۵}-۲}{\sqrt{۵}+۲}+\frac{\sqrt{۵}+۲}{\sqrt{۵}-۲}=\frac{(\sqrt{۵}-۲)^۲+(\sqrt{۵}+۲)^۲}{(\sqrt{۵}+۲)(\sqrt{۵}-۲)}=\frac{۵+۴-۴\sqrt{۵}+۵+۴+۴\sqrt{۵}}{۵-۴}=۱۸ \end{cases}$$

در نتیجه:

$$x^۲-Sx+p=۰ \xrightarrow[S=۱۸]{P=۱} x^۲-۱۸x+۱=۰$$

۲) اگر معادله‌ی درجه دومی با ضرایب گویا دارای ریشه‌ی غیر گویا $(p,q\in Q)p+\sqrt{q}$ باشد، ریشه‌ی دیگر آن به صورت $p-\sqrt{q}$ خواهد بود.

مثال اگر یکی از ریشه‌های معادله درجه‌ی دوم با ضرایب گویا $x_۱=\sqrt{۷-\sqrt{۴۸}}$ باشد، آن معادله کدام است؟

۱) $x^۲-۴x+۱=۰$ ۲) $x^۲-۴x-۱=۰$ ۳) $x^۲+۴x+۱=۰$ ۴) $x^۲-۷x+۱=۰$

پاسخ گزینه‌ی ۱

$$x_۱=\sqrt{۷-\sqrt{۴۸}}=\sqrt{۷-\sqrt{۱۶\times۳}}=\sqrt{۷-۴\sqrt{۳}}=\sqrt{(۲-\sqrt{۳})^۲}=۲-\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow x_۱=۲-\sqrt{۳}\Rightarrow x_۲=۲+\sqrt{۳}\Rightarrow\begin{cases}x_۱+x_۲=۴\\x_۱x_۲=۱\end{cases}\Rightarrow x^۲-۴x+۱=۰$$

۳) برای یافتن معادله‌ی درجه دوم جدید که ریشه‌های آن رابطه‌ای با ریشه‌های معادله‌ی قبلی داشته باشد، P' و S' را برای معادله‌ی جدید به دست آورده و آن‌گاه معادله‌ی $x^۲-S'x+P'=۰$ را تشکیل می‌دهیم.

مثال اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم $x^۲-۲x-۱=۰$ باشد. معادله‌ای بنویسید که ریشه‌های آن $\frac{۱}{\alpha+۱}$ و $\frac{۱}{\beta+۱}$ باشد.

(هماهنگ کشوری خرداد ۹۵)

پاسخ

$$S=۲\Rightarrow \alpha+\beta=۲(*), P=-۱\Rightarrow \alpha\beta=-۱\ (**)$$

با فرض $x_۱=\frac{۱}{\alpha+۱}$ و $x_۲=\frac{۱}{\beta+۱}$ داریم:

$$x_۱+x_۲=\frac{۱}{\alpha+۱}+\frac{۱}{\beta+۱}=\frac{\alpha+\beta+۲}{\alpha\beta+\alpha+\beta+۱}\underset{(**)}{\overset{(*)}{=}}\frac{۲+۲}{-۱+۲+۱}=۲=S' \qquad (۱)$$

$$x_۱x_۲=\left(\frac{۱}{\alpha+۱}\right)\left(\frac{۱}{\beta+۱}\right)=\frac{۱}{\alpha\beta+\alpha+\beta+۱}\underset{(**)}{\overset{(*)}{=}}\frac{۱}{۲}=P' \qquad (۲)$$

معادله‌ی جدید : $x^۲-S'x+p'=۰ \underset{(۲)}{\overset{(۱)}{=}}$ معادله‌ی جدید: $x^۲-۲x+\frac{۱}{۲}=۰$

نکاتی از تشکیل معادله‌ی جدید

معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^۲+bx+c=۰$ را در نظر بگیرید. معادله‌ای که:

۱) ریشه‌هایش قرینه‌ی هر یک از ریشه‌های معادله‌ی فوق باشد، کافی است در معادله فوق علامت b را قرینه کنیم. یعنی:

$$ax^۲-bx+c=۰$$

۲) ریشه‌هایش عکس هر یک از ریشه‌های معادله فوق باشند، کافی است در معادله فوق جای a و c را عوض کنیم.

$$cx^۲+bx+a=۰$$

۳) ریشه‌هایش k برابر هر یک از ریشه‌های معادله فوق باشند، کافی است ضریب x را در k و مقدار ثابت c را در $k^۲$ ضرب کنیم.

$$ax^۲+bkx+ck^۲=۰$$

۴) ریشه‌هایش k واحد بیشتر از هر یک از ریشه‌های معادله فوق باشد، کافی است در معادله‌ی فوق، x را به $x-k$ تبدیل کنیم:

$$a(x-k)^۲+b(x-k)+c=۰$$

۵) ریشه‌هایش k واحد کم‌تر از هر یک از ریشه‌های معادله‌ی فوق باشد، کافی است در معادله‌ی فوق x را به x+k تبدیل کنیم:

$$a(x+k)^۲+b(x+k)+c=۰$$

۶) ریشه‌هایش عکس و قرینه‌ی ریشه‌های معادله‌ی فوق باشد، کافی است جای a و c را عوض کنیم و b را نیز در یک منفی ضرب کنیم:

$$cx^۲-bx+a=۰$$

معادله دو مجذوری

بعضی معادله‌ها، اغلب نسبت به متغیر خاصی، از درجه دوم نیستند، اما نسبت به یک عبارتی شامل آن متغیر از درجه دوم هستند. برای مثال معادله $x^۴-۱۰x^۲+۹=۰$ یک معادله درجه دوم نسبت به متغیر x نیست اما اگر به جای $x^۲$، در معادله‌ی u قرار دهیم معادله برحسب u به صورت $u^۲-۱۰u+۹=۰$ در می‌آید که یک معادله درجه دوم نسبت به متغیر u می‌باشد. معادله اصلی یعنی معادله $x^۴-۱۰x^۲+۹=۰$ را یک معادله دو مجذوری می‌گویند، یعنی درجه دو نسبت به عبارت $x^۲$. به طور مشابه $(y^۲+۴y)^۲-(y^۲+۴y)-۲۰=۰$ یک معادله درجه دوم نسبت به عبارت $y^۲+۴y$ می‌باشد زیرا می‌توان آن را با جانشینی $u=y^۲+۴y$ به صورت $u^۲-u-۲=۰$ نوشت که یک معادله درجه دوم نسبت به متغیر u است.

مثال معادله‌ی $x^۴-۱۰x^۲+۹=۰$ را حل کنید.

(مشابه تمرین کتاب درسی)

پاسخ اگر $x^۲=u$ در نظر بگیریم در نتیجه $x^۴=u^۲$ و معادله داده شده برحسب u به صورت زیر درمی‌آید:

$$u^2-10u+9=0 \Rightarrow (u-1)(u-9)=0 \Rightarrow \begin{cases} u=1 \\ u=9 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1 \\ x^2=9 \Rightarrow x=\pm 3 \end{cases}$$

۱۱۶) معادله درجه‌ی دوم که ریشه‌های آن $\frac{a}{\sqrt{a}+\sqrt{a-b}}$ و $\frac{a}{\sqrt{a}-\sqrt{a-b}}$ می‌باشد برابر است با: (مشابه تمرین کتاب درسی)

۱) $x^2-\frac{2a\sqrt{a}}{b^2}x+\frac{a^2}{bc}=0$
۲) $bx^2-2\sqrt{a}x+a^2=0$
۳) $bx^2-2a\sqrt{a}x+a^2=0$
۴) $x^2-2a\sqrt{a}x+\frac{a^2}{b}=0$

۱۱۷) اگر در معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$، a، b و c اعداد گویا و $x=\sqrt{5}-3$ یکی از ریشه‌های معادله باشد، مجموع مربعات ریشه‌ها کدام است؟

۱) $14-2\sqrt{5}$
۲) $14+2\sqrt{5}$
۳) ۱۴
۴) ۲۸

۱۱۸) ریشه‌های معادله‌ی $x^2+ax+b=0$، از ریشه‌های معادله‌ی $3x^2-4x-1=0$ یک واحد بیشتر است. b کدام است؟ (سراسری خارج از کشور ۸۶)

۱) -5
۲) ۲
۳) ۴
۴) ۶

۱۱۹) ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم $ax^2+ax+b=0$، یک واحد از ریشه‌های معادله‌ی $3x^2+7x+1=0$ بیشتر است. b کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۷)

۱) -2
۲) -1
۳) $\frac{2}{3}$
۴) $\frac{4}{3}$

۱۲۰) اگر هر یک از ریشه‌های معادله‌ی $x^2+(b+1)x-b=0$ نصف ریشه‌های معادله‌ی $x^2-2ax+a+1=0$ باشند؛ $2b-a$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۱۲۱) اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $2x^2-3x-4=0$ باشند، مجموعه جواب‌های کدام معادله، به صورت $\left\{\frac{1}{\alpha}+1 \,,\, \frac{1}{\beta}+1\right\}$ است؟ (سراسری ریاضی ۹۲)

۱) $4x^2-5x+1=0$
۲) $4x^2-3x+1=0$
۳) $4x^2-5x-1=0$
۴) $4x^2-3x-1=0$

۱۲۲) اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x(5x+3)=2$ باشند، به ازای کدام مقدار k مجموعه جواب‌های معادله‌ی $4x^2-kx+25=0$ به صورت $\left\{\frac{1}{\alpha^2},\frac{1}{\beta^2}\right\}$ است؟ (سراسری ریاضی ۹۰)

۱) ۲۷
۲) ۲۹
۳) ۲۸
۴) ۳۱

۱۲۳) اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $2x^2-3x=1$ باشند، به ازای کدام مقدار k مجموعه جواب‌های معادله‌ی $8x^2+kx-1=0$ به صورت $\{\alpha^2\beta \,,\, \alpha\beta^2\}$ است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور ۹۰)

۱) ۵
۲) ۶
۳) ۷
۴) ۹

۱۲۴) اگر $x=\sqrt{2}-\sqrt{3}$ ریشه‌ی معادله‌ی $x^4+ax^2+b=0$ (a و b صحیح) باشند، آن‌گاه حاصل a+b کدام است؟

۱) -19
۲) ۸
۳) -9
۴) ۱۱

۱۲۵) به ازای چه مقدار a معادله $x^2+\left(2a\sqrt{a^2-3}\right)x+4=0$ دارای ریشه‌های مساوی است؟

۱) ۳　　۲) ۱　　۳) ۲　　۴) صفر

۱۲۶) معادله $\left(x^2+x+1\right)^2-3\left(x^2+x+1\right)+2=0$ دارای .... :　　(مشابه تمرین کتاب درسی)

۱) چهار ریشه ساده حقیقی است.　　۲) دو ریشه‌ی ساده حقیقی است.

۳) دو ریشه مضاعف است.　　۴) معادله ریشه حقیقی ندارد.

۱۲۷) معادله‌ی $\left(x^2+1\right)^2-7\left(x^2+1\right)+12=0$ چند ریشه دارد؟　　(آزاد پزشکی ۹۰)

۱) ۴　　۲) صفر　　۳) ۲　　۴) ۱

۱۲۸) مجموع ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $\left(x^2+x\right)^2-18(x^2+x)+72=0$ ، کدام است؟　　(سراسری تجربی ۹۰)

۱) -4　　۲) -2　　۳) ۲　　۴) ۴

۱۲۹) در یک دنباله‌ی هندسی با جملات مثبت جمله‌ی دوم، دو برابر جمله‌ی پنجم و جمله‌ی هشتم، تشکیل سه جمله‌ی متوالی از یک دنباله‌ی حسابی را می‌دهند، بزرگ‌ترین این سه عدد چند برابر کوچک‌ترین آن‌ها است؟　　(سراسری تجربی خارج از کشور ۹۲)

۱) $2+\sqrt{3}$　　۲) $5+4\sqrt{3}$　　۳) $5+4\sqrt{3}$　　۴) $7+4\sqrt{3}$

۱۳۰) به ازای مقداری از a چند جمله‌ای $f(x)=x^4+ax^3-8x$ بر x+۲ بخش‌پذیر است. کوچک‌ترین ریشه‌ی معادله‌ی f(x)=۰ کدام است؟　　(سراسری ریاضی ۹۴)

۱) $1-\sqrt{3}$　　۲) $1-\sqrt{5}$　　۳) $-1-\sqrt{3}$　　۴) $-1-\sqrt{5}$

۱۳۱) به ازای کدام مقادیر m در معادله‌ی $x-2\sqrt{x}+m-1=0$ ، دو جواب متمایز برای x حاصل می‌شود؟　　(سراسری تجربی خارج از کشور ۸۸)

۱) $m\geq 1$　　۲) $m<2$　　۳) $1\leq m<2$　　۴) هیچ مقدار m

۱۳۲) به ازای کدام مقادیر m معادله $x^3+3x^2+(m-6)x-m+2=0$ دارای دو ریشه منفی و یک ریشه مثبت است؟

۱) $m>2$　　۲) $-2<m<6$　　۳) $2<m<6$　　۴) $1<m<2$

۱۳۳) به ازای کدام مقادیر a ، معادله‌ی $x^3+(a-1)x^2+(4-a)x=4$ دارای سه ریشه‌ی حقیقی متمایز مثبت است؟　　(سراسری تجربی خارج از کشور ۹۴)

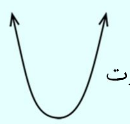
۱) $a<-4$　　۲) $a>-4$　　۳) $a<4$　　۴) $a>4$

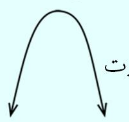
۱۳۴) اگر معادله‌ی $x^4-(m+2)x^2+m+5=0$ دارای ۴ ریشه‌ی حقیقی متمایز باشد، مجموع مقادیر m به کدام صورت است؟　　(سراسری تجربی ۸۵)

۱) $m<-4$　　۲) $m>4$　　۳) $-4<m<4$　　۴) $4<m<9$

درسنامه ۱۰

نمودار تابع درجه‌ی دوم (سهمی)

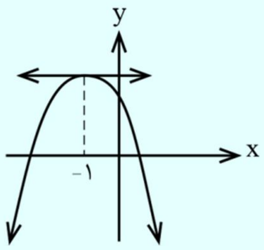
۱) اگر $a>0$ باشد، دهانه‌ی سهمی به سمت بالا و به صورت  است. (تابع مینیمم دارد.)

۲) اگر $a<0$ باشد، دهانه‌ی سهمی به سمت پایین و به صورت  است. (تابع ماکزیمم دارد.)

۳) مختصات رأس سهمی از فرمول $S\left(-\frac{b}{2a},\frac{-\Delta}{4a}\right)$ به دست می‌آید که به آن نقطه‌ی مینیمم (هرگاه $a>0$) یا نقطه‌ی ماکزیمم (هرگاه $a<0$) نیز می‌گویند. و خط $x=\frac{-b}{2a}$ محور تقارن سهمی است.

مثال شکل زیر، نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=(a-2)^3x^2-4bx+c$ می‌باشد. اگر a عددی طبیعی باشد در این صورت مقدار b

کدام است؟



۱) ۲ ۲) ۴

۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ گزینه‌ی ۴ با توجه به این‌که نمودار تابع یک سهمی رو به پایین است، بنابراین باید ضریب $x^۲$ منفی باشد، پس:

$$(a-۲)^۳ < ۰ \Rightarrow a < ۲ \xrightarrow{a \in N} a = ۱ \Rightarrow f(x) = -x^۲ - ۴bx + c$$

از طرفی می‌دانیم در تابع درجه دوم $S\left(-\frac{b}{۲a}, \frac{-\Delta}{۴a}\right)$ مختصات رأس سهمی یعنی همان ماکسیمم یا مینیمم است چون طبق شکل $x_{max} = -۱$ بنابراین:

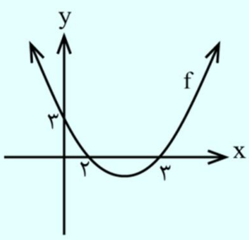
$$\frac{۴b}{-۲} = -۱ \Rightarrow b = \frac{۱}{۲}$$

۴) هر تابع درجه دوم $y = ax^۲ + bx + c$ را می‌توان به صورت $y = a(x-\alpha)^۲ + \beta$ $(a \neq ۰)$ نیز نوشت که در آن $S(\alpha \ , \ \beta)$ رأس سهمی است.

۵) اگر تابع درجه‌ی دوم $y = ax^۲ + bx + c$ محور x ها را در نقاطی به طول‌های $x_۱$ و $x_۲$ قطع کند، آن‌گاه معادله را به صورت $y = a(x - x_۱)(x - x_۲)$ نیز می‌توان نوشت.

مثال مطابق شکل اگر عبارت درجه‌ی دوم $y = ax^۲ + bx + c$ متناظر تابع f(x) باشد، در این صورت f(۴) را بیابید.

(مشابه تمرین کتاب درسی)



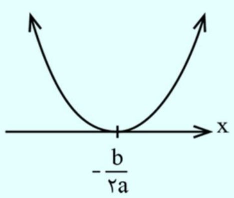
پاسخ چون نمودار تابع درجه دوم محور x ها را در نقاطی به طول‌های $x_۱ = ۲$ و $x_۲ = ۳$ قطع کرده است آن‌گاه معادله را به صورت $f(x) = a(x-۲)(x-۳)$ ظاهر می‌شود، از طرفی دیگر $(۰ \ , ۳) \in f$ است لذا:

$$f(۰) = ۳ \Rightarrow f(۰) = a(۰-۲)(۰-۳) = ۳ \Rightarrow ۶a = ۳ \Rightarrow a = \frac{۱}{۲}$$

در نتیجه:

$$f(x) = \frac{۱}{۲}(x-۲)(x-۳) \Rightarrow f(۴) = \frac{۱}{۲}(۴-۲)(۴-۳) = ۱$$

۶) اگر تابع درجه دوم $y = ax^۲ + bx + c$ محور x ها را فقط در یک نقطه مانند $x_۱$ قطع کند، آن‌گاه معادله را به صورت $y = a(x - x_۱)^۲$ نیز می‌توان نوشت.



۷) در سهمی $y = ax^۲ + bx + c$ اگر $\begin{cases} \Delta = ۰ \\ a > ۰ \end{cases}$ سهمی بالای محور x و بر آن مماس است.

مثال به ازای کدام مقدار m ، نمودار سه جمله‌ای درجه دوم $f(x) = (۲m+۲)x^۲ - ۲(m+۱)x + ۱$ ، بالای محور x ها قرار دارد و بر آن مماس است؟

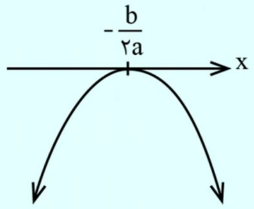
۱) ۱ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) ۲ ۴) $-\frac{۲}{۵}$

پاسخ گزینه‌ی ۱

$$\begin{cases}\Delta=0\\ a>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4(m+1)^2-4(2m+2)=0\\ 2m+2>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m^2-1=0\\ m>-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=\pm1\\ m>-1\end{cases}$$

چون $m>-1$ لذا $m=-1$ غیرقابل قبول است، پس $m=1$ جواب است.

۸) در سهمی $y=ax^2+bx+c$ اگر $\begin{cases}\Delta=0\\ a<0\end{cases}$ سهمی پایین محور x ها و بر آن مماس است.



مثال: به ازای کدام مقدار m نمودار سه جمله‌ای $f(x)=(2m-1)x^2-2mx+(2m-1)$ پایین محور x ها بر آن مماس باشد؟

۱) $\frac{1}{5}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{2}{9}$

پاسخ گزینه‌ی ۳

$$\begin{cases}\Delta=0\\ a<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4m^2-4(2m-1)^2=0\\ 2m-1<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overbrace{(m^2-(2m-1)^2)}^{\text{اتحاد مزدوج}}=0\\ m<\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}(m+2m-1)(m-2m+1)=0\\ m<\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(3m-1)(1-m)=0\Rightarrow m=\frac{1}{3}\ \text{یا}\ m=1\\ m<\frac{1}{2}\end{cases}$$

با توجه به این‌که $m<\frac{1}{2}$ غیرقابل قبول است، پس $m=\frac{1}{3}$ جواب است.

۹) نمودار تابع درجه‌ی دوم $y=ax^2+bx+c$ همواره بالای محور x ها است، (به عبارت دیگر چند جمله‌ای ax^2+bx+c همواره مثبت است) اگر و تنها اگر $a>0$ و $\Delta<0$ باشد.

۱۰) نمودار تابع درجه‌ی دوم $y=ax^2+bx+c$ همواره پایین محور x ها است (به عبارت دیگر چندجمله‌ای ax^2+bx+c همواره منفی است) اگر و تنها اگر $a<0$ و $\Delta<0$ باشد.

مثال: به ازای چه مقادیری از k نمودار تابع درجه‌ی دوم $f(x)=kx^2-4x+2k$ به ازای هر x حقیقی بالای محور x ها قرار می‌گیرد؟

پاسخ

$$\begin{cases}\Delta<0\\ a>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}16-4(k)(2k)=16-8k^2<0\\ k>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k^2>2\\ k<0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}k>\sqrt{2}\ \ \text{یا}\ \ k<-\sqrt{2}\\ k>0\end{cases}\xrightarrow{\text{اشتراک جوابهای به دست آمده}}k>\sqrt{2}$$

۱۱) نمودار تابع درجه دوم $y=ax^2+bx+c$ از هر چهار ناحیه‌ی محورهای مختصات عبور می‌کند هرگاه $\frac{c}{a}<0$ باشد، یعنی دارای دو ریشه مختلف العلامه باشد.

۱۲) تابع درجه دوم $y=ax^2+bx+c$ با شرط $a>0$ قطعاً از ناحیه‌ی اول و دوم و با شرط $a<0$ قطعاً از ناحیه‌ی سوم و چهارم عبور می‌کند.

۱۳) **صفرهای تابع درجه دوم**: نقاط برخورد نمودار یک تابع با محور x ها ، نقاط با اهمیتی هستند که آنها را صفرهای تابع می‌نامیم، چرا که در این نقاط مقدار تابع صفر می‌شود.

۱۳۵) نمودار $y=(m-6)x^2+2mx-1$ بالای محور x ها نمی‌باشد. حدود m کدام است؟ (مشابه سراسری ریاضی ۸۵)

۱) $-3\le m<-2$ ۲) $-2\le m<3$

۳) $-3\le m\le 2$ ۴) $-2\le m\le 3$

۱۳۶) اگر $a+b+c<0$ و معادله‌ی درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ فاقد ریشه باشد، آن‌گاه کدام گزینه همواره درست است؟

(تمرین کتاب درسی)

۱) $a > ۰$ ۲) $c > ۰$ ۳) $c < ۰$ ۴) $b < ۰$

۱۳۷) حدود a چگونه باشد تا نمودار سهمی $y = x^۲ + (۳a - ۲)x + ۲a$ بالای محور x ها قرار گیرد؟

(مشابه سراسری ریاضی خارج از کشور ۸۵)

۱) $\frac{۲}{۹} < a < ۳$ ۲) $\frac{۲}{۹} < a < ۲$ ۳) $۱ < a < ۳$ ۴) $۰ < a < ۲$

۱۳۸) به ازای کدام مقادیر m، عبارت $(m - ۱)x^۲ + ۶x + ۲m + ۱$، برای هر مقدار دلخواه x مثبت است؟

(سراسری ریاضی خارج از کشور ۹۰)

۱) $m < -۲$ ۲) $m > ۲/۵$ ۳) $۱ < m < ۲$ ۴) $۱ < m < ۲/۵$

۱۳۹) اگر $a \in (-\infty , k)$ باشد، عبارت $y = ax^۲ + ۴x + a - ۳$ به ازای جمیع مقادیر x، منفی خواهد بود، بیش‌ترین مقدار k کدام است؟

(مشابه سراسری ریاضی ۹۱)

۱) -۱ ۲) صفر ۳) ۴ ۴) -۳

۱۴۰) به ازای کدام مقدار m نمودار تابع $y = ۲x^۲ + (m + ۱)x + m + ۶$، بر نیمساز ناحیه‌ی اول دستگاه مختصات، مماس است؟

(سراسری تجربی خارج از کشور ۹۳)

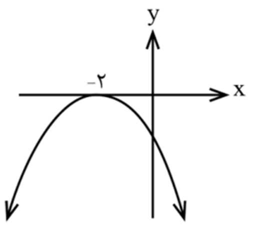
۱) -۴ ۲) ۴ و -۱۲ ۳) -۴ و ۱۲ ۴) ۱۲

۱۴۱) به ازای کدام مقادیر m منحنی $y = ۲x^۳ - m(x^۲ - ۱)$ با خط y=۲x در یک نقطه مماسند؟

۱) ۱ یا -۱ ۲) ۲ یا -۱ ۳) ۱ یا -۲ ۴) ۲ یا -۲

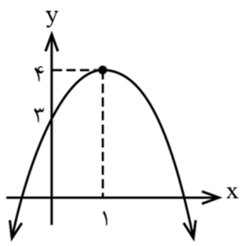
۱۴۲) اگر شکل زیر نمودار $y = (ax + ۳)(-x - ۲)$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) $۱/۵$ ۲) $-۱/۵$
۳) -۲ ۴) ۲



۱۴۳) اگر نمودار سهمی $f(x) = ax^۲ + bx + c$ به شکل مقابل باشد، آن‌گاه مقدار $a - b + c$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲
۳) ۰ ۴) -۱



۱۴۴) به ازای کدام مقادیر m، نمودار منحنی تابع $y = (m + ۱)x^۲ - x + ۲$ از هر چهار ناحیه‌ی محورهای مختصات می‌گذرد؟

(مشابه سراسری ریاضی خارج از کشور ۸۷)

۱) $m > -۱$ ۲) $m < -۱$ ۳) $-۲ < m < -۱$ ۴) $-۱ < m < ۲$

۱۴۵) به ازای کدام مقادیر m، نمودار تابع $y = (۱ - m)x^۲ + x + m - ۲$ از هر چهار ناحیه‌ی محورهای مختصات گذشته و دارای ماکزیمم است؟

۱) $m < ۱$ ۲) $m > ۲$ ۳) $۱ < m < ۲$ ۴) $-۱ < m < ۲$

۱۴۶) نمودار تابع $f(x) = ax^۲ - ۴x + ۱$ از ناحیه‌ی سوم دستگاه مختصات نمی‌گذرد، حدود a کدام است؟

۱) $a > ۰$ ۲) $a \geq ۰$ ۳) $a < ۰$ ۴) $a \leq ۰$

۱۴۷) اگر منحنی به معادله‌ی $y = x^۲ + ۳x + m - ۲$ محور x ها را در دو نقطه به طول‌های منفی قطع کند، آن‌گاه حدود m کدام است؟

۱) $m > ۲$ ۲) $۳ < m < \frac{۱۷}{۴}$ ۳) $۲ < m < \frac{۱۵}{۴}$ ۴) $۲ < m < \frac{۱۷}{۴}$

۱۴۸) نمودار تابع $y = -\frac{۱}{۲}x^۲$ را طوری انتقال می‌دهیم که رأس آن بر نقطه (۳, ۲) منطبق شود. صفرهای تابع حاصل کدام است؟

۱) $1\pm\sqrt{2}$　　۲) $1\pm\sqrt{3}$　　۳) $2\pm 2\sqrt{2}$　　۴) $2\pm\sqrt{6}$

۱۴۹) معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌های آن $\frac{1+\sqrt{2}}{3}$ و $\frac{1-\sqrt{2}}{3}$ می‌باشد، به صورت $f(x)=0$ است. در این صورت محور تقارن سهمی $y=f(x)$ کدام است؟

۱) $x=\frac{2}{3}$　　۲) $x=\frac{-1}{3}$　　۳) $x=\frac{1}{6}$　　۴) $x=\frac{1}{3}$

۱۵۰) بیشترین مقدار نمودار تابع $f(x)=-x^2+bx+c$ برابر ۱ بوده، سهمی از ناحیه‌ی اول محورهای مختصات نمی‌گذرد و محور yها را به عرض ۳− قطع می‌نماید، طول رأس سهمی چه عددی است؟

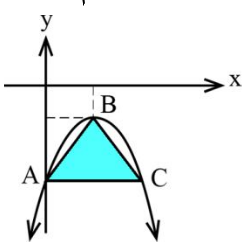
۱) ۴　　۲) ۲　　۳) ۲−　　۴) ۴−

۱۵۱) در معادله‌ی درجه‌ی دومی به عنوان ضابطه‌ی یک سهمی $a=-1$ (ضریب جمله‌ی درجه دوم، $\Delta=16$ و مجموع ریشه‌ها برابر ۲ بوده، این سهمی، فاقد «کدام ویژگی» است؟

۱) رو به پایین باز می‌شود.　　۲) محور تقارن: خط x=۲

۳) بیشترین مقدار را دارد.　　۴) مختصات رأس: (۱،۴)

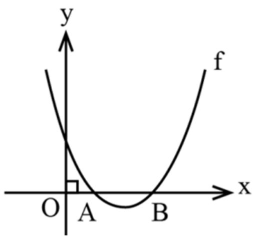
۱۵۲) در شکل مقابل، اگر معادله‌ی سهمی $y=-2x^2+4x-3$ و AC موازی محور طول‌ها باشد، مساحت مثلث ABC کدام است؟



۱) ۱　　۲) ۲

۳) $\frac{3}{2}$　　۴) $\frac{7}{2}$

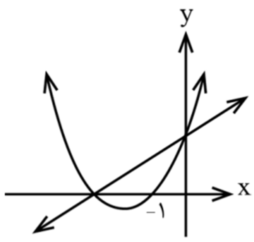
۱۵۳) اگر نمودار سهمی $f(x)=2x^2-16x+k+4$ به صورت زیر باشد به طوری که |AB|=۲ |OA|، آن‌گاه مقدار k کدام است؟



۵) ۸　　۶) ۱۲

۷) ۲۰　　۸) ۲۴

۱۵۴) در شکل سهمی $y=ax^2+bx+c$ را (که a، b و c دو به دو متمایزند) همراه با یک خط نشان داده‌ایم. طول از مبدأ و عرض از مبدأ خط نقاط برخورد سهمی با محورهای مختصات هستند. معادله‌ی خط کدام است؟



۱) $y=bx+c$　　۲) $y=ax+b$

۳) $y=cx+b$　　۴) $y=ax+c$

۱۵۵) خط y=k وتری به طول یک واحد روی نمودار سهمی $y=2x^2+3x$ جدا می‌کند. نقطه‌ی تلاقی سمت راست این خط و سهمی چه طولی دارد؟

۱) $-\frac{1}{4}$　　۲) $-\frac{5}{8}$　　۳) $-\frac{5}{4}$　　۴) $\frac{1}{8}$

درسنامه ۱۱

روش‌های یافتن ماکزیمم یا مینیمم توابع درجه دوم

۱) روش مربع کامل کردن: در این روش ابتدا از ضریب $x^{۲}$ فاکتور گرفته آن را به صورت $a\left(x^{۲}+\frac{b}{a}x\right)+c$ می‌نویسیم. سپس به عبارت داخل پرانتزعدد $\left(\frac{b}{۲a}\right)^{۲}$ را اضافه و کم می‌کنیم و مربع کامل تشکیل می‌دهیم. ($\frac{b}{۲a}$ در واقع نصف ضریب x ، پس از فاکتورگیری از a است)

مثال: مینیمم و ماکزیمم چند جمله‌ای‌های $۲x^{۲}+۶x-۱$ و $-۳x^{۲}+۹x+۲$ را به دست آورید.

پاسخ:

الف) $$۲x^{۲}+۶x-۱=۲(x^{۲}+۳x)-۱=۲\left(x^{۲}+۳x+\left(\frac{۳}{۲\times۱}\right)^{۲}-\left(\frac{۳}{۲\times۱}\right)^{۲}\right)-۱$$

$$=۲\left(x^{۲}+۳x+\frac{۹}{۴}-\frac{۹}{۴}\right)-۱=۲\left(x^{۲}+۳x+\frac{۹}{۴}\right)-\frac{۹}{۲}-۱$$

$$=۲\left(x+\frac{۹}{۲}\right)^{۲}-\frac{۱۱}{۲}\ge-\frac{۱۱}{۲}\Rightarrow \text{کم ترین مقدار}=-\frac{۱۱}{۲}=-۵/۵$$

ب) $$-۳x^{۲}+۹x+۲=-۳(x^{۲}-۳x)+۲=-۳\left(x^{۲}-۳x+\left(\frac{-۳}{۲\times۱}\right)^{۲}-\left(\frac{-۳}{۲\times۱}\right)^{۲}\right)+۲$$

$$=-۳\left(x^{۲}-۳x+\frac{۹}{۴}-\frac{۹}{۴}\right)+۲=-۳\left(x^{۲}-۳x+\frac{۹}{۴}\right)-\frac{۲۷}{۴}+۲=-۳\left(x-\frac{۳}{۲}\right)^{۲}-\frac{۳۵}{۴}\le-\frac{۳۵}{۴}\Rightarrow \text{بیشترین مقدار}=-\frac{۳۵}{۴}$$

۲) روش یافتن مختصات نقطه‌ای اکستریم: گفتیم اگر $a>۰$ باشد تابع مینیمم و اگر $a<۰$ باشد تابع ماکزیمم دارد. مختصات نقطه‌ای مینیمم یا ماکزیمم تابع درجه دوم $y=ax^{۲}+bx+c$ از رابطه‌ی زیر قابل محاسبه است:

$$S\left(-\frac{b}{۲a}\ ,\ -\frac{\Delta}{۴a}\right)$$

مثال: مختصات نقاط اکسترمم توابع $f(x)=x^{۲}+۴x-۱$ و $g(x)=-x^{۲}+۶x+۲$ را به دست آورید.

پاسخ:

$$f(x)=x^{۲}+۴x-۱\xrightarrow{\text{ضریب } x^{۲} \text{ مثبت است، پس مینیمم دارد}}x_{min}=-\frac{b}{۲a}=-\frac{۴}{۲}=-۲$$

$$y_{min}=-\frac{\Delta}{۴a}=-\frac{۱۶-۴(-۱)}{۴}=-۵$$

$$g(x)=-x^{۲}+۶x+۲\xrightarrow{\text{ضریب } x^{۲} \text{ منفی است، پس ماکزیمم دارد}}x_{max}=\frac{-b}{۲a}=-\frac{۶}{۲(-۱)}=۳$$

$$y_{min}=-\frac{\Delta}{۴a}=-\frac{۳۶-۴(-۱)(۲)}{-۴}=۱۱$$

۳) روش یافتن عرض نقطه‌ی (مقدار) اکسترمم: کمترین یا بیشترین مقدار تابع $y=ax^{۲}+bx+c$ بسته به علامت a برابر است با $\frac{-\Delta}{۴a}$

۱۵۶) تابع $f=\{(x,y)x^{۲}\big|-x-y=-m\}$ مینیممی برابر ۳ دارد. مقدار m کدام است؟ (مشابه تمرین کتاب درسی)

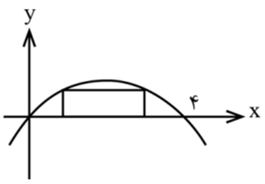
۱) $\frac{۱۳}{۲}$ ۲) $\frac{۱۳}{۴}$ ۳) $-\frac{۱۳}{۲}$ ۴) $-\frac{۱۳}{۴}$

۱۵۷) موشکی از سطح زمین پرتاب می شود به طوری که مسیر سهمی را طی می‌کند. اگر ارتفاع موشک بعد از t ثانیه از معادله‌ی $y=-۵t^{۲}+۱۰۰t+۲۰۰$ به دست می‌آید، حداکثر ارتفاعی که موشک به آن خواهد رسید، کدام است؟

(مشابه تمرین کتاب درسی)

۱) ۴۰۰ ۲) ۵۰۰ ۳) ۶۰۰ ۴) ۷۰۰

۱۵۸) شکل مقابل قسمتی از نمودار سهمی $y=ax^{۲}+۴x$ است. بیشترین محیط مستطیلی که بین منحنی و محور x ها در ربع اول قرار دارد، کدام است ؟



۱) ۱ ۲) ۲
۳) ۱۰ ۴) ۸

۱۵۹) بیشترین مساحت از زمینی را که می توان توسط یک طناب به طول ۸۸ متر و به شکل مستطیلی که یک طرف آن رودخانه است محصور نمود چند متر مربع است ؟

۱) ۹۵۸ ۲) ۹۶۸ ۳) ۹۷۸ ۴) ۹۸۸

۱۶۰) قیمت فروش هر یک از x کالای فروخته شده توسط شرکتی در یک ماه معین، از رابطه ی $p(x)=۶۰-۳x$ به دست می‌آید. با فروش چه تعداد کالا در آن ماه، بیشترین درآمد فروش نصیب شرکت می‌گردد؟

۱) ۴۰ ۲) ۳۰ ۳) ۲۰ ۴) ۱۰

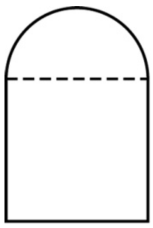
۱۶۱) در یک زمین گل خانه‌ای، اگر با فاصله‌های یکسان ۴۰ بوته‌ی گوجه‌فرنگی کاشته شود، به طور متوسط از هر بوته ۸ کیلو محصول به دست می‌آید. به ازای هر بوته‌ی اضافی که کاشته شود، به مقدار $\frac{۱}{۸}$ کیلو از میانگین محصول بوته‌ها کاسته می‌شود. در این صورت بیشترین محصول برداشتی چند کیلو گرم است؟

۱) ۳۳۶ ۲) ۳۳۸ ۳) ۳۴۰ ۴) ۳۴۲

۱۶۲) دو ضلع مستطیل منطبق بر محورهای مختصات و یک رأس آن بر روی خط به معادله‌ی $۲x+y=۶$ می‌توان حرکت کند. بیشترین مساحت از این نوع مستطیل‌ها واقع در ناحیه اول کدام است ؟

۱) ۴/۵ ۲) ۴/۸ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۶۳) با میله‌ای به طول $۸+۲\pi$ متر پنجره‌ای مطابق شکل رو به رو ساخته‌ایم. اگر بخواهیم بیشترین نور را از پنجره داشته باشیم. اندازه‌ی مساحت پنجره چه قدر است؟



۱) $\pi+۴$ ۲) $\pi+۸$
۳) $۲\pi+۸$ ۴) $۲\pi+۴$

۱۶۴) نقاط متحرک $M(۰,۷)$ و $N(۳,۰)$ بر محورهای مختصات مفروض‌اند. (هر واحد مختصات ، یک متر است.) اگر M با سرعت ۱ m/s و N با سرعت ۳ m/s روی محورهای مختصات به طرف مبدأ در حرکت باشند. پس از چند مدت، فاصله‌ی این دو نقطه کم‌ترین مقدار ممکن را خواهد داشت؟

۱) ۱/۲ s ۲) ۱/۴ s ۳) ۱/۸ s ۴) ۱/۶ s

درسنامه ۱۲

معادلات گویا

مستطیل طلایی: مستطیلی است که نسبت مجموع طول و عرض، به طول آن برابر با نسبت طول به عرض مستطیل باشد به عبارت دیگر اگر طول و عرض مستطیل به ترتیب x,y باشد داشته باشیم $\frac{x+y}{x}=\frac{x}{y}$. نسبت طول به عرض این مستطیل را نسبت طلایی می‌گویند.

عبارت‌های گویا

کسرهایی که صورت و مخرج آنها چند جمله‌ای باشند، عبارت‌های گویا می‌نامیم. برای مثال عبارت‌های زیر همگی عبارت‌های گویا هستند.

$$\frac{x+1}{x-5}-\frac{7x}{x+9} \quad , \quad \frac{5x^3-3x-10}{x^2+7x}$$

دامنه‌ی عبارت‌های جبری گویا: برای محاسبه دامنه‌ی عبارت گویا ، ابتدا مخرج را مساوی صفر قرار می‌دهیم، سپس ریشه‌های مخرج را به دست می‌آوریم. ریشه‌های مخرج را از مجموعه اعداد حقیقی کم می‌کنیم تا دامنه‌ی عبارت گویا حاصل شود به عبارت دیگر:

$$D=\mathbb{R}-\{\text{ریشه‌های مخرج}\}$$

مثال: دامنه‌ی عبارت‌های گویای زیر را به دست آورید.

الف - $\frac{x}{x^2-1}$ ب - $\frac{x^2+3x}{x^2+7x}-\frac{x}{x+9}$

پاسخ:

الف) $\text{مخرج}=0 \Rightarrow x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1 \Rightarrow D=\mathbb{R}-\{\pm 1\}$

ب) $\text{مخرج‌ها}=0 \begin{cases} x+9=0 \Rightarrow x=-9 \\ x^2+7x=0 \Rightarrow x(x+7)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow D=\mathbb{R}-\{-9,-7,0\} \\ x=-7 \end{cases} \end{cases}$

تذکر مهم: در تعیین دامنه‌ی عبارت گویا، حق نداریم کسرها را ساده کنیم، زیرا در صورت ساده کردن کسرها ممکن است بعضی از ریشه‌های مخرج حذف شوند و آنها را جز دامنه محسوب کنیم.

((ک م م)) چند جمله‌ای‌ها: برای تعیین ((ک م م)) چند عبارت، ابتدا هر یک از عبارات را به حاصل ضرب عوامل اول تجزیه می‌کنیم، سپس عوامل مشترک با بزرگترین توان را در عبارت‌های غیرمشترک ضرب می‌کنیم تا ((ک م م)) به دست آید.

مثال: ک م م دو عبارت $(x^2+x)^2,(x^2-1)^3$ را بیابید.

پاسخ: دو عبارت را تجزیه می‌کنیم. داریم:

$$(x^2+x)^2=(x(x+1))^2=x^2(x+1)^2 \quad \text{و} \quad (x^2-1)^3=((x-1)(x+1))^3=(x-1)^3(x+1)^3$$

ک م م = حاصل‌ضرب عوامل مشترک و غیرمشترک با بیشترین توان $\Rightarrow$ ک م م $=x^2(x-1)^3(x+1)^3$

معادله‌هایی شامل عبارت گویا

معادله‌هایی که در آنها عبارت‌های گویا وجود داشته باشند، معادله‌هایی شامل عبارت‌های گویا می‌نامند. برای حل این‌گونه معادلات باید مراحل زیر را انجام دهیم.

۱) دامنه‌ی معادله را به دست می آوریم .

۲) همه‌ی عبارت‌های جبری را به یک طرف معادله انتقال می‌دهیم.

۳) ک م م مخرج‌ها را به دست می‌آوریم و معادله را در ((ک م م)) مخرج‌ها ضرب (یعنی ریشه‌ی مخرج نباشد.) و ساده‌تر می‌کنیم و جواب‌ها

را به دست می‌آوریم. (یعنی ریشه‌ی مخرج نباشد)

۴) جواب‌هایی قابل قبول هستند که در دامنه‌ی جواب معادله قرار داشته باشند.

مثال: نامعادلات زیر را حل کنید.

(هماهنگ خارج از کشور ـ خرداد ۹۰) الف) $\frac{۲x+۴}{x+۱}=۱$

(هماهنگ کشوری ـ شهریور ۹۰) ب) $\frac{x}{x-۱}+\frac{۳}{x^۲-۱}=\frac{x-۲}{x+۱}$

الف) ابتدا دامنه‌ی معادله را می‌یابیم:

$$\text{مخرج}=۰\Rightarrow x+۱=۰\Rightarrow x=-۱\Rightarrow D=\mathbb{R}-\{-۱\}$$

$$\frac{۲x+۴}{x+۱}=۱\Rightarrow ۲x+۴=x+۱\Rightarrow x=-۳\in D \quad (\text{ق ق})$$

ب) دامنه‌ی معادله برابر است با:

$$\text{مخرجها}=۰\Rightarrow\begin{cases}x-۱=۰\Rightarrow x=۱\\ x^۲-۱=۰\Rightarrow x=\pm۱\Rightarrow D=\mathbb{R}-\{\pm۱\}\\ x+۱=۰\Rightarrow x=-۱\end{cases}$$

کل عبارت را به یک طرف تساوی منتقل می‌کنیم و مخرج مشترک می‌گیریم.

$$\frac{x}{x-۱}+\frac{۳}{x^۲-۱}-\frac{x-۲}{x+۱}=۰\Rightarrow\frac{x(x+۱)+۳-(x-۲)(x-۱)}{(x-۱)(x+۱)}=۰$$

$$\Rightarrow\frac{x^۲+x+۳-x^۲+۳x-۲}{(x-۱)(x+۱)}=۰\Rightarrow ۴x+۱=۰\Rightarrow x=-\frac{۱}{۴}\in D \quad (\text{ق ق})$$

۱۶۵) اگر نسبت طول به عرض یک مستطیل برابر نسبت طلایی و طول مستطیل برابر جمله دوم دنباله مربعی باشد، عرض مستطیل کدام است؟

۱) $۴\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۵}+۱$ ۳) $۲(\sqrt{۵}-۱)$ ۴) ۳

۱۶۶) ابعاد یک مستطیل متناسب با نسب طلایی است . اگر محیط مستطیل ۲۰ متر باشد، طول آن کدام است ؟

۱) $۵-۵\sqrt{۵}$ ۲) $۵(\sqrt{۵}-۱)$ ۳) $۲(\sqrt{۵}+۱)$ ۴) $۵(۲+\sqrt{۵})$

۱۶۷) تعداد جواب‌های معادله‌ی $\frac{x-۱}{x-۲}=\frac{۱+x}{x}-\frac{x^۲-۲x+۲}{x^۲-۲x}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۱۶۸) معادله‌ی $\frac{x}{x^۲-۶۴}+\frac{x}{x^۲-۳۶}=۰$ دارای چه نوع جواب‌هایی است؟

۱) یک جواب مثبت و یک جواب منفی ۲) دو جواب مثبت

۳) یک جواب مثبت و یک جواب صفر ۴) یک جواب مثبت ، یک جواب منفی و یک جواب صفر

۱۶۹) در معادله‌ی $\frac{x+۲}{x-۲}=۱-\frac{۳}{x+۵}$ حاصل مجموع با معکوس جواب کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{-۱}{۲}$ ۳) $\frac{-۵}{۲}$ ۴) -۲

۱۷۰) جواب معادله‌ی $\frac{x-b}{x-a}+\frac{x-a}{x-b}+۲=۰$ کدام است؟ $(a\neq b)$

۱) $\frac{a+b}{۲}$ ۲) $\frac{a-b}{۲}$ ۳) $\frac{a+۲b}{۳}$ ۴) $\frac{۲a-b}{۳}$

۱۷۱) بازه‌ای که شامل جواب‌های معادله‌ی $\frac{۶۴}{x^۳-۶۴}-\frac{x}{x-۴}=\frac{۱۶}{x^۲+۴x+۱۶}$ می‌باشد، کدام است؟

۱) $(-5,-2)$ ۲) $(-10,0)$ ۳) $(-5,5)$ ۴) $[0,10]$

۱۷۲) معادله‌ی $\frac{x^2}{a^3}+\frac{b^3}{x^2}=\frac{b}{a}+\frac{b^2}{a^2}$ چند جواب دارد؟ $(a,b>0)$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۷۳) اگر x_2, x_1 ریشه‌های معادله‌ی $2=\frac{a}{x-b}+\frac{b}{x-a}$ باشند، حاصل $x_1^2-x_2^2$ کدام است؟ $(a,b>0, x_1>x_2)$

۱) $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ ۲) $3\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ ۳) $2(a+b)^2$ ۴) $\frac{3(a+b)^2}{2}$

۱۷۴) اگر $x=-1$ ریشه‌ی معادله‌ی $\frac{x+2}{k(k-2)}=\frac{k+4x}{k(k+2)}+\frac{x^2+1}{k^2-4}$ باشد، آن گاه مقدار k کدام است؟

۱) فقط ۲ ۲) فقط ۳ ۳) ۲ و ۳ ۴) ۲- و ۳

۱۷۵) اگر معادلات $\frac{2}{x(x-2)}=\frac{1}{x}-\frac{x+2}{x-2}$ و $\frac{2a}{x+2}=ax+6$ دارای ریشه مشترک باشند، a کدام است؟

۱) ۱- ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۶

۱۷۶) مجموع ریشه‌های معادله‌ی $\frac{x+5}{x^2+2x}=\frac{x-a}{x+2}+\frac{x+a}{x}$ کدام است؟ $(a<0)$

۱) ۱- ۲) ۱ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{-1}{2}$

۱۷۷) مجموع شیب‌های دو خط عمود بر هم، $\frac{21}{10}$ است. ضریب زاویه ی خط دارای شیبی مثبت، برابر چه عددی است؟

۱) $\frac{5}{2}$ ۲) $\frac{10}{21}$ ۳) $\frac{11}{10}$ ۴) $\frac{21}{5}$

۱۷۸) اگر معادله‌ی $\frac{ax+b}{x^2-9}=\frac{x+1}{x-3}+\frac{3-x}{x+3}$ دارای بی‌شمار ریشه باشد، حاصل $(a+b)$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۱۶ ۳) ۹ ۴) صفر

۱۷۹) حاصل ضرب ریشه‌های معادله‌ی $3\left(\frac{x+3}{2x-1}\right)^2-4\left(\frac{x+3}{2x-1}\right)+1=0$ کدام است؟

۱) ۴۰ ۲) ۶- ۳) ۱۴- ۴) ۴۰-

۱۸۰) مجموع ریشه‌های معادله‌ی $\frac{2x+3}{x+5}+6\left(\frac{x+5}{2x+3}\right)=7$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) $-\frac{19}{4}$ ۴) $\frac{-35}{4}$

۱۸۱) مجموع مربعات ریشه‌های معادله‌ی $\frac{1}{x^2-2x}+\frac{2}{x^2-2x-3}=-\frac{3}{2}$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۴

۱۸۲) حاصل ضرب ریشه‌های معادله‌ی $\left(x+\frac{2}{x}\right)^4-x^2-\frac{4}{x^2}-76=0$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۲

۱۸۳) موتور سوار ۱ با سرعت $120\ km/h$ از A به طرف B حرکت می‌کند. موتور سوار ۲ از $50km$ جلوتر، با سرعت $80km/h$ حرکت می‌کند و یک ساعت دیرتر از موتور سوار ۱ به B می‌رسد. فاصله‌ی A تا B چند کیلومتر است؟

۱) ۳۹۰ ۲) ۴۱۰ ۳) ۴۳۰ ۴) ۳۷۰

۱۸۴) در یک مغازه‌ی زیتون فروشی، زیتون در محلول‌های آب نمک با غلظت ۸ درصد نگهداری می‌شود. به علت تازه کار بودن یکی از کارگران مغازه ۲۵۰ کیلوگرم محلول آب نمک با غلظت ۴ درصدی ساخته شده است. تقریباً با افزودن چه مقدار نمک می‌توان این محلول را به غلظت موردنظر رساند؟

۱) ۱۰ کیلو گرم و ۸۳ گرم ۲) ۱۰ کیلو گرم و ۸۶ گرم

۳) ۱۲ کیلوگرم و ۸۶ گرم ۴) ۱۲ کیلو گرم و ۸۳ گرم

۱۸۵) در مدت ۴ ساعت یک تراکتور ۷ هکتار بیش از یک اسب زمین را شخم می‌زند اگر تراکتور یک هکتار زمین را ۳/۵ ساعت زودتر از اسب شخم بزند، یک اسب در یک ساعت چند هکتار زمین را شخم می‌زند؟

۱) ۲۵٪ ۲) ۵٪ ۳) ۱۱ ۴) ۲

درسنامه ۱۳

معادلات رادیکالی

برای حل یک معادله شامل رادیکال مراحل زیر را انجام می‌دهیم.

۱) رادیکال را در یک طرف تنها نگه می‌داریم و بقیه جملات را به طرف دیگر منتقل می‌کنیم.

۲) طرفین معادله را به توان عدد فرجه‌ی رادیکال می‌رسانیم.

۳) معادله را ساده می‌کنیم، حال اگر رادیکال باقی مانده باشد باز دوباره آن را در یک طرف تنها نگه می‌داریم و طرفین معادله را به توان عدد فرجه می‌رسانیم و نتیجه را ساده و حل می‌کنیم.

۴) تمام جواب‌های به دست آمده را در معادله اصلی امتحان می‌کنیم. و جواب‌های نهایی را به دست می‌آوریم.

مثال: معادله‌ی $\sqrt{5x+9}=2x+3$ را حل کنید.

پاسخ:

$$\sqrt{5x+9}=2x+3 \xrightarrow{\text{توان دو}} 5x+9=(2x+3)^2$$

$$5x+9=4x^2+12x+9 \Rightarrow 4x^2+7x=0 \Rightarrow x=0 \quad \text{یا} \quad x=-\frac{7}{4}$$

جواب $x=-\frac{7}{4}$ قابل قبول نیست، زیرا در معادله‌ی اصلی صدق نمی‌کند پس $x=0$ جواب معادله است.

۱۸۶) جواب‌های معادله‌ی $\sqrt{x^2-4}=x^2-4$ چگونه‌اند؟

۱) یک جواب منفی، و یک جواب مثبت
۲) دو جواب منفی ، یک جواب مثبت
۳) دو جواب مثبت
۴) دو جواب منفی ، دو جواب مثبت

۱۸۷) معادله‌ی $\sqrt[5]{3+\sqrt{x-x^2}}=\sqrt[5]{3}$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۱۸۸) معادله‌ی $\sqrt{x-\sqrt{x+8}}=2$ چند ریشه دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) بی‌شمار

۱۸۹) منحنی‌های $y=2+\sqrt{x-3}$ و $y=\sqrt{2x+1}$ در چند نقطه با هم تلاقی می‌کنند؟

۱) هیچ نقطه ۲) یک نقطه ۳) دو نقطه ۴) سه نقطه

۱۹۰) جواب‌های معادله‌ی $(x-3)\sqrt{x^2-5x+4}=2x-6$ شامل چند عدد حسابی است؟

۱) ۳ ۲) صفر ۳) ۲ ۴) ۱

۱۹۱) مجموع جواب‌های معادله‌ی $\sqrt[5]{x^7+2-\sqrt{x^2+x+4}}=x\sqrt[5]{x^2}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) -۲ ۳) -۱ ۴) ۱

۱۹۲) تعداد جواب‌های معادله‌ی $\sqrt{x-1}-\frac{2}{\sqrt{x-1}}=-1$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) صفر

۱۹۳) اگر برای هر عدد حقیقی x متعلق به بازه‌ی (۳ و ۲) رابطه‌ی $\sqrt{x^2-10x+25}-\sqrt{x^2-6x+9}=\sqrt{k^5+36}$ برقرار باشد، مقدار k

کدام است؟

۱) ۴ ‌ ‌ ۲) -۲ ‌ ‌ ۳) ۲ ‌ ‌ ۴) -۴

۱۹۴) به ازای چه مقدار از x ، معادله‌ی $\left(\sqrt{x+۲\sqrt{x-۱}}+\sqrt{x-۲\sqrt{x-۱}}\right)^۲=۴$ **دارای جواب می‌باشد؟**

۱) $[۲,۴]$ ‌ ‌ ۲) $[۰,۲]$ ‌ ‌ ۳) $[۱,۲]$ ‌ ‌ ۴) $[۱,۰]$

۱۹۵) به ازای کدام مقدار a معادله $\sqrt{۲x^۲-۳x-۲}+\sqrt{x^۲+۲ax-x-۲a}=۰$ **دارای ریشه حقیقی است؟**

۱) $-۲,\frac{۱}{۲}$ ‌ ‌ ۲) $-۱,\frac{۱}{۴}$ ‌ ‌ ۳) $۱,-\frac{۱}{۴}$ ‌ ‌ ۴) $۲,-\frac{۱}{۲}$

۱۹۶) معادله $(x^۲+۳x-۴)\left|x^۲-۱\right|\sqrt{x^۲-x-۶}=۰$ **چند ریشه دارد؟**

۱) ۵ ‌ ‌ ۲) ۲ ‌ ‌ ۳) ۳ ‌ ‌ ۴) ۴

۱۹۷) ریشه‌های معادله‌ی $۳x^{\frac{۱}{۲}}+۳x^{-\frac{۱}{۲}}=۷$ **را با حل کدام معادله زیر می‌توان تعیین کرد؟** (مشابه تمرین کتاب درسی)

۱) $۱۸x^۲-۳۱x+۹=۰$ ‌ ‌ ۲) $۳x^۲-۶۲x+۳=۰$

۳) $۱۸x^۲-۳۱x+۳=۰$ ‌ ‌ ۴) $۹x^۲-۳۱x+۹=۰$

۱۹۸) حاصل ضرب ریشه‌های معادله‌ی $x^{\frac{۱}{۳}}-۳x^{-\frac{۱}{۶}}=-۲$ **کدام است؟** (مشابه تمرین کتاب درسی)

۱) ۶۵ ‌ ‌ ۲) ۶۴ ‌ ‌ ۳) ۲ ‌ ‌ ۴) ۳

۱۹۹) معادله‌ی $\sqrt{x\sqrt[۵]{x}}-\sqrt[۵]{x\sqrt{x}}=۵۶$ **دارای چند جواب است؟**

۱) ۱ ‌ ‌ ۲) ۲ ‌ ‌ ۳) ۳ ‌ ‌ ۴) صفر

۲۰۰) مجموع مربعات جواب‌های معادله‌ی $\sqrt{\frac{۲x}{۱+۲x}}+\sqrt{\frac{۱+۲x}{۲x}}=\frac{۵}{۲}$ **کدام است؟**

۱) $\frac{۱۷}{۳۶}$ ‌ ‌ ۲) $\frac{۴}{۹}$ ‌ ‌ ۳) $\frac{۱}{۳۶}$ ‌ ‌ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۲۰۱) عدد طبیعی که جذر جمع آن عدد با ۳۶ مساوی مجموع جذر آن عدد با ۲ ، در کدام نامساوی صدق می‌کند؟

۱) $۶<x<۶۳$ ‌ ‌ ۲) $۶۳<x<۶۵$ ‌ ‌ ۳) $۳۶<x<۳۸$ ‌ ‌ ۴) $۳۵<x<۳۷$

۲۰۲) نقطه‌ای روی خط $۳x+y+۴=۰$ **فاصله آن از نقاط** M(-۵ , ۶) **و** N(۳ , ۲) **به یک فاصله است، مجموع مربعات طول و عرض آن چقدر است؟**

۱) ۴ ‌ ‌ ۲) ۸ ‌ ‌ ۳) ۱۶ ‌ ‌ ۴) ۳۲

درسنامه اول

۱) گزینه‌ی ۴ چون نقطه‌ی $A(۲m-۱,|m|-|m+۲|)$ پائین محور x ها قرار می‌گیرد، لذا عرض آن منفی است. بنابراین:

$$y_A<۰\Rightarrow |m|-|m+۲|<۰\Rightarrow |m|<|m+۲| \xrightarrow{|x|<|y| \xrightarrow{\text{توان دو}} x^۲<y^۲}$$

$$m^۲<(m+۲)^۲\Rightarrow m^۲<m^۲+۴m+۴\Rightarrow ۴m+۴>۰\Rightarrow$$

$$۴m>-۴\Rightarrow m>-۱$$

۲) گزینه‌ی ۲

> **نکته** نقطه $A(x, y)$ از دو محور مختصات به یک فاصله است اگر و تنها اگر $|x|=|y|$

بنابراین:

$$|x|=|y|\Rightarrow |۲m-۱|=\overbrace{|m^۲+۲|}^{(+)}\Rightarrow |۲m-۱|=m^۲+۲$$

$$\xrightarrow{|x|=k \xrightarrow{k>۰} x=\pm k} ۲m-۱=\pm(m^۲+۲)\Rightarrow \begin{cases} m^۲+۲=۲m-۱ \\ m^۲+۲=-۲m+۱\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases} m^۲-۲m+۳=۰\Rightarrow \Delta<۰ (\text{ریشه ندارد}) \\ \underbrace{m^۲+۲m+۱}_{\text{مربع کامل}}=۰\Rightarrow (m+۱)^۲=۰\Rightarrow m=-۱\end{cases}$$

۳) گزینه‌ی ۲ اگر نقطه مورد نظر که با عرض منفی روی محور y ها قرار می‌گیرد را با $B(۰, y)$ نمایش دهیم. داریم:

$$B(۰,y),\ A(۴,۱),\ |AB|=۵$$

$$|AB|=\sqrt{(۰-۴)^۲+(y-۱)^۲}\xrightarrow{|AB|=۵}\sqrt{۱۶+(y-۱)^۲}=۵\xrightarrow{\text{توان دو}}$$

$$۱۶+(y-۱)^۲=۲۵\Rightarrow (y-۱)^۲=۹\Rightarrow y-۱=\pm۳\Rightarrow \begin{cases} y-۱=-۳\Rightarrow y=-۲ \\ y-۱=۳\Rightarrow y=۴\end{cases}$$

بنابراین نقطه مورد نظر $B(۰,-۲)$ خواهد بود.

۴) گزینه‌ی ۱ طول پاره‌خط AB را که همان ضلع لوزی است محاسبه می‌کنیم، سپس محیط آن را می‌یابیم:

$$AB=\sqrt{(۲-۶)^۲+(۱+۲)^۲}=\sqrt{۱۶+۹}=\sqrt{۲۵}=۵\Rightarrow \text{محیط لوزی}=۴\times|AB|=۲۰$$

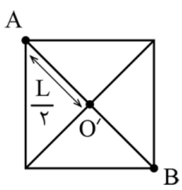
۵) گزینه‌ی ۳

$$|AB|=\sqrt{\left(\sqrt{۵}-\sqrt{۳}\right)^۲+\left(\sqrt{۳}+\sqrt{۵}\right)^۲}$$

$$|AB|=\sqrt{۵+۳-۲\sqrt{۱۵}+۳+۵+۲\sqrt{۱۵}}=\sqrt{۱۶}\Rightarrow AB=۴$$

$$\text{محیط مثلث}=۴+۵+۶=۱۵$$

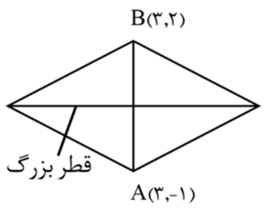
۶) گزینه‌ی ۴ ابتدا شکل مسأله را رسم می‌کنیم. داریم:



$$O'A=\frac{L}{۲}=\sqrt{۳^۲+۴^۲}=\sqrt{۲۵}=۵\Rightarrow \text{قطر مربع}=L=۱۰$$

$$\text{ضلع مربع}=a=\frac{L}{\sqrt{۲}}=\frac{۱۰}{\sqrt{۲}}=۵\sqrt{۲}\Rightarrow \text{محیط مربع}=۴a=۲۰\sqrt{۲}$$

۷) گزینه‌ی ۴ با توجه به فرض مسأله دو نقطه‌ی $A(۳,-۱)$ و $B(۳,۲)$ دو انتهای قطر کوچک لوزی می‌باشند.



چون A و B هم طول هستند، بنابراین فاصله دو نقطه‌ی A و B به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\text{قطر کوچک لوزی}\ |AB|=|y_B-y_A|=|۲-(-۱)|=۳$$

از طرف دیگر قطر بزرگ، دو برابر قطر کوچک است. بنابراین:

$$\text{قطر بزرگ}=۲\times\text{قطر کوچک}=۲\times۳=۶$$

$$\text{مساحت لوزی} = \frac{\text{حاصل ضرب دو قطر}}{۲} = \frac{۶ \times ۳}{۲} = ۹$$

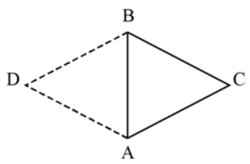
۸) گزینه‌ی ۲ اندازه‌های AB و BC و AC را به دست می‌آوریم:

$$|AB| = \sqrt{(۱-۱)^۲ + (۲-۶)^۲} = ۴$$

$$|BC| = \sqrt{(۱-۵)^۲ + (۶-۴)^۲} = \sqrt{۱۶+۴} = \sqrt{۲۰} = ۲\sqrt{۵}$$

$$|AC| = \sqrt{(۱-۵)^۲ + (۲-۴)^۲} = \sqrt{۱۶+۴} = \sqrt{۲۰} = ۲\sqrt{۵}$$

بنابراین AC و BC اضلاع لوزی و AB قطر کوچک لوزی می‌باشد. مساحت لوزی، دو برابر مساحت مثلث ABC می‌باشد. برای به دست آوردن مساحت ABC ابتدا طول ضلع AB و سپس اندازه ارتفاع وارد بر آن را محاسبه می‌کنیم. مشاهده می‌شود که طول نقاط A و B برابر ۱ می‌باشد. پس این دو نقطه بر خط x=۱ قرار دارند و فاصله‌ی نقطه C از AB برابر $۵-۱=۴$ می‌باشد. بنابراین:



$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{۱}{۲} \times ۴ \times ۴ = ۸ \Rightarrow S_{\text{مساحت لوزی}} = ۲ \times ۸ = ۱۶$$

۹) گزینه‌ی ۳ اگر نقطه مورد نظر را $M(x, ۲x-۳)$ بگیریم (بر روی خط $y = ۲x - ۳$ قرار دارد.) حال چون فاصله‌ی $M(x,۲x-۳)$ از دو نقطه‌ی $A(۳،۱)$ و $B(۱،۳)$ برابر است، کافی است فاصله M را تا A و B محاسبه کره و برابر هم قرار دهیم. داریم:

$$MA = MB \Rightarrow \sqrt{(x-۳)^۲ + (۲x-۳-۱)^۲} = \sqrt{(x-۱)^۲ + (۲x-۳-۳)^۲} \xrightarrow{\text{توان دو}}$$

$$x^۲ - ۶x + ۹ + ۴x^۲ - ۱۶x + ۱۶ = x^۲ - ۲x + ۱ + ۴x^۲ - ۲۴x + ۳۶ \Rightarrow$$

$$-۲۲x + ۲۵ = -۲۶x + ۳۷ \Rightarrow x = ۳ \Rightarrow M(۳,۳)$$

۱۰) گزینه‌ی ۲ کافی است مساحت‌های مربع و دایره را به دست آوریم، سپس آن‌ها را از هم کم کنیم تا مساحت قسمت هاشور خورده حاصل شود. AC که قطر مربع است به دست می‌آوریم:

$$|AC| = \sqrt{(۳-۲)^۲ + (۵-۳)^۲} = \sqrt{۵}$$

از طرفی می‌دانیم در مربع طول قطر، $\sqrt{۲}$ برابر طول ضلع است.

$$\text{طول قطر مربع} = \sqrt{۲}\,|AB| \Rightarrow \sqrt{۵} = \sqrt{۲} \times |AB| \Rightarrow |AB| = \frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۲}}$$

$$\Rightarrow \text{مساحت مربع} = \left(\frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۲}}\right)^۲ = \frac{۵}{۲}$$

باتوجه به شکل قطر مربع همان قطر دایره است، بنابراین شعاع دایره برابر است با $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$.

$$\text{مساحت دایره} = \pi \left(\frac{\sqrt{۵}}{۲}\right)^۲ = \frac{۵\pi}{۴}$$

$$\text{مساحت هاشور خورده} = \text{مساحت دایره} - \text{مساحت مربع} = \frac{۵\pi - ۱۰}{۴} = \frac{۵(\pi-۲)}{۴}$$

۱۱) گزینه‌ی ۲ چون مثلث ABC متساوی الاضلاع است بنابراین داریم: BC= AB = AC

$$\left.\begin{array}{l} BC = \sqrt{(۱-۵)^۲ + (۱-۱)^۲} = ۴ \\ AB = \sqrt{(۳-۱)^۲ + (m+۱-۱)^۲} = \sqrt{۴+m^۲} \\ AC = \sqrt{(۳-۵)^۲ + (m+۱-۱)^۲} = \sqrt{۴+m^۲} \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{۴+m^۲} = ۴ \Rightarrow ۴ + m^۲ = ۱۶ \Rightarrow m^۲ = ۱۲ \Rightarrow m = \pm ۲\sqrt{۳}$$

۱۲) گزینه‌ی ۴ می‌دانیم نقاط $A(۱,۰)$ ، $B(۴،۲)$ و $C(a,-a)$ سه رأس مثلث ABC هستند. چون مثلث ABC در رأس A قائمه و متساوی‌الساقین

است، پس باید بین اضلاع آن رابطه‌ی فیثاغورس برقرار بوده و AB=AC باشد. برای برقراری رابطه‌ی فیثاغورس تنها باید به این نکته توجه کنیم که کدام ضلع را به عنوان وتر انتخاب نماییم. چون این مثلث در رأس A قائمه است، لذا ضلع روبه رو به این زاویه، یعنی ضلع BC ، نقش وتر را ایفا می‌کند. پس می‌نویسیم:

$$AB=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}\,,\,AC=\sqrt{(a-1)^2+a^2}\,,\,BC=\sqrt{(a-4)^2+(a+2)^2}$$

$$\xRightarrow{\text{رابطه ی فیثاغورس را برقرار می کنیم}} BC^2=AB^2+AC^2 \Rightarrow (a-4)^2+(a+2)^2=13+(a-1)^2+a^2$$

$$\Rightarrow \cancel{2a^2}-4a+20=\cancel{2a^2}-2a+14 \Rightarrow 2a=6 \Rightarrow a=3$$

۱۳) گزینه‌ی $\boxed{2}$ هر نقطه‌ای که روی خط $x-y+1=0$ یا همان y=x+1 واقع باشد، مختصات آن به صورت A(x , x+1) می‌باشد. بنابراین فاصله ی نقطه‌ی A(x,x+1) را از مبدأ مختصات به دست می‌آوریم و آن را برابر ۱ قرار می‌دهیم. داریم:

$$OA=1 \Rightarrow \sqrt{x^2+(x+1)^2}=1 \xrightarrow{\text{به توان دو می‌رسانیم}} x^2+x^2+2x+1=1 \Rightarrow 2x^2+2x=0 \Rightarrow 2x(x+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow A_1(0,1) \\ x=-1 \Rightarrow A_2(-1,0) \end{cases} \Rightarrow A_1A_2=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$$

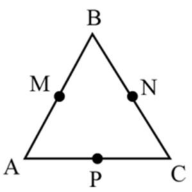
۱۴) گزینه‌ی $\boxed{4}$ با داشتن مختصات نقاط A و B نقطه M وسط آن را پیدا می‌کنیم:

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{3\beta+3}{2} \quad , \quad y_M=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{2\beta-4}{2}=\beta-2$$

با توجه به این‌که خط y=۵ میانه رأس C می‌باشد، پس نقطه M روی این خط قرار دارد، بنابراین $\beta-2=5 \Rightarrow \beta=7$ و مختصات نقطه‌ی میانه M(۱۲, ۵) می‌باشد.

۱۵) گزینه‌ی $\boxed{1}$

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{2} \xrightarrow{x_m=1} 2=x_A+x_B \qquad (1)$$



$$\left.\begin{array}{l} x_N=\dfrac{x_B+x_C}{2} \xrightarrow{x_N=4} 8=x_B+x_C \\ X_p=\dfrac{x_A+x_C}{2} \xrightarrow{x_p=3} 6=x_A+x_C \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{طرفین تساوی ها را از هم می کنیم}} x_B-x_A=2 \qquad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \begin{cases} x_A+x_B=2 \\ x_B-x_A=2 \end{cases} \Rightarrow 2x_B=4 \Rightarrow x_B=2$$

$$y_M=\frac{y_A+y_B}{2} \xrightarrow{y_m=2} y_A+y_B=4 \qquad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} y_N=\dfrac{y_B+y_C}{2} \xrightarrow{y_N=-5} y_B+y_C=-10 \\ y_p=\dfrac{y_A+y_C}{2} \xrightarrow{y_p=0} y_A+y_c=0 \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{طرفین تساوی ها را از هم می کنیم}} y_B-y_A=-10 \qquad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \begin{cases} y_A+y_B=4 \\ y_B-y_A=-10 \end{cases} \Rightarrow 2y_B=-6 \Rightarrow y_B=-3$$

بنابراین مختصات رأس B به صورت $(2,-3)$ می‌باشد.

۱۶) گزینه‌ی $\boxed{3}$ اگر M نقطه وسط AB باشد داریم:

$$\text{وسط}AB \quad M=\frac{A+B}{2}=\left(\frac{m-2+m}{2},\frac{0+2m}{2}\right) \Rightarrow M(m-1,m)$$

از طرفی دیگر می‌دانیم $OM=\sqrt{5}$ است درنتیجه:

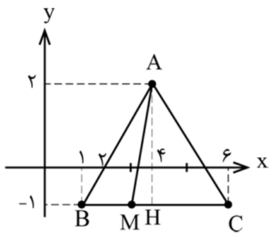
$$OM=\sqrt{5} \Rightarrow \sqrt{(m-1)^2+m^2}=\sqrt{5} \Rightarrow m^2-2m+1+m^2=5 \Rightarrow m^2-m-2=0 \Rightarrow m=-1 \text{ یا } m=2$$

m مجموع مقادیر $= 2 - 1 = 1$

۱۷) **گزینه‌ی ۱** هنگامی که از نقطه‌ی $A(-2,1)$ سه واحد به سمت راست حرکت می‌کنیم، در واقع به اندازه‌ی سه واحد به طول این نقطه افزوده می‌شود و به نقطه‌ی (۱،۱) می‌رسیم. حال اگر از این نقطه جدید ۲ واحد به سمت پایین حرکت کنیم، ۲ واحد از عرض این نقطه کم می‌شود و به نقطه‌ی $B(1,-1)$ می‌رسیم. حال وسط پاره‌خط AB را حساب می‌کنیم. داریم:

$$\text{وسط } AB \quad M = \frac{A+B}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_M = \dfrac{-2+1}{2} = -\dfrac{1}{2} \\ y_M = \dfrac{1-1}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow M = \left(-\frac{1}{2}\ ,\ 0\right) \Rightarrow OM = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + (0)^2} = \frac{1}{2}$$

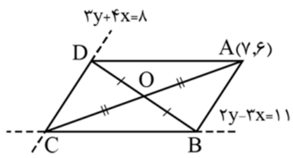
۱۸) **گزینه‌ی ۱** با توجه به رسم شکل داریم:



$$\begin{cases} x_M = \dfrac{1+6}{2} = \dfrac{7}{2} \\ y_M = \dfrac{-1+(-1)}{2} = -1 \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{7}{2}, -1\right) \Rightarrow MH = \sqrt{\left(\frac{7}{2}-4\right)^2 + (-1+1)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} x_H = x_A = 4 \\ y_H = y_B = y_c = -1 \end{cases} \Rightarrow H(4\ ,\ -1)$$

۱۹) **گزینه‌ی ۳** چون مختصات رأس $A(7,6)$ در معادلات اضلاع داده شده صدق نمی‌کند، پس نقطه‌ی A بر هیچ کدام از این دو ضلع واقع نیست. بنابراین اگر معادله ی این دو ضلع را با هم قطع دهیم، مختصات رأس مقابل A (یعنی مختصات نقطه‌ی C) مشخص می‌شود. داریم:



$$\begin{cases} 2y - 3x = 11 \xrightarrow{\times 4} 8y - 12x = 44 \\ 3y + 4x = 8 \xrightarrow{\times 3} 9y + 12x = 24 \end{cases} \xrightarrow{+} 17y = 68$$

$$\Rightarrow y = \frac{68}{17} = 4 \quad , \quad x = -1 \Rightarrow C(-1, 4)$$

حال با معلوم بودن مختصات دو رأس مقابل A و C (دو سر قطر متوازی الاضلاع، مختصات وسط قطر برابر است با:

$$O = \left(\frac{x_A + x_C}{2}\ ,\ \frac{y_A + y_C}{2}\right) = \left(\frac{7-1}{2}\ ,\ \frac{6+4}{2}\right) = (3, 5)$$

۲۰) **گزینه‌ی ۱** روش اول: چون دو پاره‌خط AB و CD یکدیگر را نصف می‌کنند بنابراین وسط این دو پاره‌خط بر هم منطبق است. اگر وسط AB و CD که برهم منطبق‌اند را نقطه M در نظر بگیریم:

$$\text{وسط } AB \quad M : M = \frac{A+B}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{0+4}{2} = 2 \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{-4+6}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow M(2, 1)$$

$$\text{وسط } CD \quad M : M = \frac{C+D}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_M = \dfrac{x_C + x_D}{2} = \dfrac{3 + x_D}{2} \\ y_M = \dfrac{y_C + y_D}{2} = \dfrac{1 + y_D}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{3 + x_D}{2}\ ,\ \frac{1 + y_D}{2}\right)$$

بنابراین داریم:

$$\frac{3 + x_D}{2} = 2 \Rightarrow x_D = 1, \quad \frac{1 + y_D}{2} = 1 \Rightarrow y_D = 1$$

پس مختصات D به صورت (۱،۱) است.

روش دوم: چون AB و CD همدیگر را نصف می‌کنند پس می‌توان تصور کرد که AB و CD قطرهای متوازی الاضلاع ABCD هستند و در یک متوازی الاضلاع به قطر AB داریم:

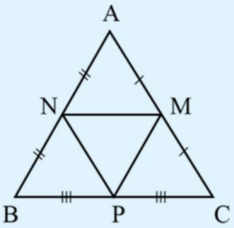
$$\begin{cases} x_A + x_B = x_C + x_D \\ y_A + y_B = y_C + y_D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 + 4 = 3 + x_D \Rightarrow x_D = 1 \\ 6 - 4 = 1 + y_D \Rightarrow y_D = 1 \end{cases} \Rightarrow D(1\ ,\ 1)$$

۲۱) گزینه‌ی ۴

نکته

اگر وسط‌های اضلاع مثلث ABC را به هم وصل کنیم، مثلث جدید با با مثلث ABC متشابه است. مساحت مثلث جدید، $\frac{۱}{۴}$ مساحت مثلث ABC است. یعنی:

$S_{ABC} = ۴S_{MNP}$



با داشتن مختصات M(۴،۶)، N(۲،−۴) و P(−۴،۲) ، مساحت مثلث MNP قابل محاسبه است.

$$S_{\overset{\Delta}{MNP}} = \frac{۱}{۲}\left|۴(-۴-۲)+۲(۲-۶)-۴(۶+۴)\right| = \frac{۱}{۲}\left|-۲۴-۸-۴۰\right| = ۳۶$$

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = ۴S_{\overset{\Delta}{MNP}} = ۴\times ۳۶ = ۱۴۴$$

درسنامه دوم

۲۲) گزینه‌ی ۲

$$m = \tan\alpha = \tan ۴۵^\circ = ۱ \Rightarrow -\frac{۲a-۱}{a} = ۱ \Rightarrow a = \frac{۱}{۳}$$

۲۳) گزینه‌ی ۲ خط x=۲ با محور y ها موازی و شیب آن بی‌نهایت است، درنتیجه برای محاسبه‌ی زاویه بین خط $d:\sqrt{۳}y+x-۱=۰$ با خط x=۲ کافی است زاویه‌ی ∘ بین خط d و محور y ها را به دست آوریم. داریم:

$$d: y = \frac{\sqrt{۳}}{۳}(۱-x) \Rightarrow m = -\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\Rightarrow \tan\alpha = -\frac{\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow \hat{\alpha} = ۱۵۰^\circ \Rightarrow$$ زاویه ی بین خط d و محور yها $= ۱۵۰^\circ - ۹۰^\circ = ۶۰^\circ$

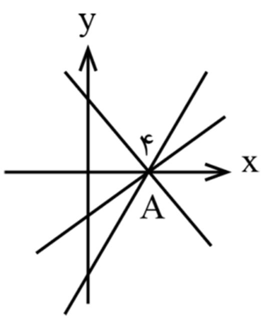
۲۴) گزینه‌ی ۳ ابتدا وسط پاره‌خط‌های AB و BC را به دست می‌آوریم و سپس شیب خط گذرنده از وسط این دو پاره‌خط را می‌یابیم.

وسط پاره‌خط AB $= N = \frac{A+B}{۲} = \left(\frac{۱+۲}{۲}, \frac{۱+۱}{۲}\right) = \left(\frac{۳}{۲}, ۱\right)$

وسط پاره‌خط BC $= M = \frac{B+C}{۲} = \left(\frac{۵+۲}{۲}, \frac{۳+۱}{۲}\right) = \left(\frac{۷}{۲}, ۲\right)$

$$m_{M.N} = \frac{۱-۲}{\frac{۳}{۲}-\frac{۷}{۲}} = \frac{۱}{۲}$$

۲۵) گزینه‌ی ۴ همانطور که در شکل زیر مشاهده می‌کنید خطوط مختلفی را می‌توان رسم نمود که همه‌ی آن‌ها از نقطه‌ی A(۴, ۰) عبور کنند. محل تلاقی تمامی خطوط رسم شده با محور طول‌ها (x ها) نقطه A می‌باشد، که عرض از مبدا و شیب‌های مختلفی دارند، لذا گزینه (۴) جواب موردنظر است.



۲۶) گزینه‌ی ۴ برای این‌که نقاط (a ,۳) و (۶ , ۴a+۱) و مبدأ مختصات در یک راستا باشند، باید شیب خط واصل دو به دوی این نقاط یکسان باشد. داریم:

A(a , ۳) , B (۶, ۴a+۱) , o(۰, ۰)

$$\begin{cases} m_{OA} = \dfrac{۳}{a} \\ m_{OB} = \dfrac{۴a+۱}{۶} \end{cases} \Rightarrow m_{OA} = m_{OB} \Rightarrow \frac{۳}{a} = \frac{۴a+۱}{۶} \Rightarrow ۴a^{۲} + a - ۱۸ = ۰ \xrightarrow{\Delta = ۲۸۹} a = \frac{-۱ \pm ۱۷}{۸} = ۲ , -\frac{۹}{۴}$$

۲۷) گزینه‌ی $\boxed{۲}$ شیب خط برابر با تانژانت زاویه می‌باشد. پس در این سؤال باید شیب خط برابر با $\tan ۶۰^\circ = \sqrt{۳}$ باشد.

$$\sqrt{۳} = \frac{۲\sqrt{۳} - m}{\sqrt{۷ - ۴\sqrt{۳}}} \Rightarrow \sqrt{۳} = \frac{۲\sqrt{۳} - m}{\sqrt{(۲ - \sqrt{۳})^{۲}}} \Rightarrow \sqrt{۳} = \frac{۲\sqrt{۳} - m}{|۲ - \sqrt{۳}|}$$

$$\sqrt{۳} = \frac{۲\sqrt{۳} - m}{۲ - \sqrt{۳}} \Rightarrow ۲\sqrt{۳} - ۳ = ۲\sqrt{۳} - m \Rightarrow m = ۳$$

محور عرض‌ها را در نقطه‌ای قطع می‌کند که طول آن برابر با صفر باشد پس داریم:

$$(۲ - \sqrt{۳})y = m + \sqrt{۳} \Rightarrow (۲ - \sqrt{۳})y = ۳ + \sqrt{۳} \Rightarrow y = \underbrace{\frac{۳+\sqrt{۳}}{۲-\sqrt{۳}} \times \frac{۲+\sqrt{۳}}{۲+\sqrt{۳}}}_{\text{گویا کردن مخرج}} \Rightarrow y = \frac{(۳ + \sqrt{۳})(۲ + \sqrt{۳})}{۴ - ۳} \Rightarrow y = ۹ + ۵\sqrt{۳}$$

پاسخنامه درسنامه سوم

۲۸) گزینه‌ی $\boxed{۳}$ فاصله‌ی نقطه‌ی فرضی (x ,y) روی خط y=x از نقطه‌ی (۱ ,۴) برابر است با:

$$d = \sqrt{(x-۱)^{۲} + (y-۴)^{۲}} \xrightarrow{x=y} \sqrt{۲} = \sqrt{(x-۱)^{۲} + (x-۴)^{۲}}$$

$$\Rightarrow ۲ = (x-۱)^{۲} + (x-۴)^{۲} \Rightarrow ۲x^{۲} - ۱۰x + ۱۵ = ۰$$

ریشه‌های معادله را به دست می‌آوریم:

$$\Delta = ۱۰۰ - (۴ \times ۲ \times ۱۵) = -۲۰ < ۰$$

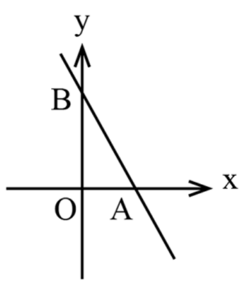
یعنی فاصله‌ی هیچ نقطه‌ای روی خط y=x از نقطه‌ی (۱ ,۴) برابر $\sqrt{۲}$ نیست.

۲۹) گزینه‌ی $\boxed{۳}$ خط به معادله‌ی $۲y - ۳x = ۶$ محورهای مختصات را در نقاط A و B قطع می‌کند. مختصات این دو نقطه به صورت زیر است:

$$۲y - ۳x = ۶ \begin{cases} \xrightarrow{y=۰} x = -۲ \xrightarrow{\text{محل تلاقی خط با محور x ها}} A(-۲ , ۰) \\ \xrightarrow{x=۰} y = ۳ \xrightarrow{\text{محل تلاقی خط با محور y ها}} B(۰ , ۳) \end{cases} \xrightarrow{\text{وسط AB}} M = \frac{A+B}{۲} = \left(-۱ , \frac{۳}{۲}\right)$$

حال فاصله‌ی نقطه‌ی وسط AB را از نقطه‌ی $N\left(۰ , -\frac{۳}{۲}\right)$ به دست می‌آوریم. داریم:

$$MN = \sqrt{۱^{۲} + ۳^{۲}} = \sqrt{۱۰}$$



۳۰) گزینه‌ی $\boxed{۱}$ اگر خط Δ محورهای مختصات را در نقاط A و B قطع کند، چون مثلث OAB قائم‌الزاویه است، مساحت آن برابر است با: $S = OA \times OB \times \frac{۱}{۲}$ حال در این سؤال برای هر یک از گزینه‌ها، محل تلاقی خط با محورهای مختصات را پیدا می‌کنیم و مساحت مثلث را به دست می‌آوریم:

گزینه‌ی ۱): $bx + ۲ay = ۲ab \Rightarrow A(۰ , b) \;,\; B(۲a , ۰) \Rightarrow S = |b| \times |۲a| \times \frac{۱}{۲} = |ab| \Rightarrow S = |ab|$

گزینه‌ی ۲): $ax + by = ۱ \Rightarrow A\left(۰ , \frac{۱}{b}\right) \;,\; B\left(\frac{۱}{a} , ۰\right) \Rightarrow S = \left|\frac{۱}{b}\right| \times \left|\frac{۱}{a}\right| \times \frac{۱}{۲} \Rightarrow S = \left|\frac{۱}{۲ab}\right|$

گزینه‌ی ۳): $۲ax + by = ab \Rightarrow A(۰ , a) \;,\; B\left(\frac{b}{۲} , ۰\right) \Rightarrow S = |a| \times \left|\frac{b}{۲}\right| \times \frac{۱}{۲} \Rightarrow S = \frac{|ab|}{۴}$

گزینه‌ی ۴) $ax+by=ab \Rightarrow A(۰,a)\ ,\ B(b,۰) \Rightarrow S=|a|\times|b|\times\frac{۱}{۲} \Rightarrow S=\frac{|ab|}{۲}$

همان‌طور که مشاهده می‌شود در گزینه‌ی (۱) مساحت مثلث برابر است با $|ab|$ که جواب موردنظر است.

۳۱) گزینه‌ی ۲

نکته

وضعیت نقطه‌ی $A(x_۱,y_۱)$ نسبت به خط $h:ax+by+c=۰$ سه حالت وجود دارد ابتدا نقطه را در معادله‌ی خط جایگذاری می‌کنیم. در این صورت: $(b>۰)$

۱) $ax_۱+by_۱+c>۰ \Rightarrow$ نقطه‌ی A بالای خط L قرار می‌گیرد.

۲) $ax_۱+by_۱+c<۰ \Rightarrow$ نقطه‌ی A پایین خط L قرار می‌گیرد.

۳) $ax_۱+by_۱+c=۰ \Rightarrow$ نقطه‌ی A روی خط L قرار می‌گیرد.

حال مختصات نقطه‌ی A را در خطهای $L_۱$، $L_۲$ قرار می‌دهیم:

$L_۱: y=۳x-۲۱ \Rightarrow -۳x+y+۲۱=۰ \Rightarrow -۳\times۳۵+۹۱+۲۱=۷>۰$ نقطه A بالای خط $L_۱$ قرار می‌گیرد.

$L_۲: ۱۱y-۳۰x+۳۹=۰ \Rightarrow ۱۱\times۹۱-۳۰\times۳۵+۳۹=-۱۰<۰$ نقطه‌ی A پایین خط $L_۲$ قرار می‌گیرد.

۳۲) گزینه‌ی ۴

نکته

خط $D:ax+by+c=۰$ و $A(x_۱,y_۱)$ و $B(x_۲,y_۲)$ مفروضند.

۱) شرط لازم و کافی برای آن‌که دو نقطه‌ی A و B در یک طرف خط D قرار گیرند، آن است که $D(x_۱,y_۱)D(x_۲,y_۲)<۰$ باشد.

۲) شرط لازم و کافی برای آن‌که دو نقطه‌ی A و B در طرفین خط D قرار گیرند، آن است که $D(x_۱,y_۱)D(x_۲,y_۲)>۰$ باشد.

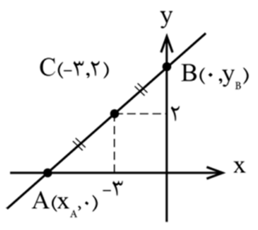
بنابراین:

$$D(x_۱,y_۱)=۱۸\quad,\quad D(x_۲,y_۲)=۲\quad,\quad D(x_۳,y_۳)=-۱$$

پاسخنامه

درسنامه چهارم

۳۳) گزینه‌ی ۱ چون نقطه‌ی $M(-۳,۲)$ وسط پاره‌خط AB است و $A(x_A,۰)$ و $B(۰,y_B)$، پس داریم:



$$M=\frac{A+B}{۲} \Rightarrow \begin{cases} x_M=\frac{x_A+x_B}{۲} \Rightarrow -۳=\frac{x_A+۰}{۲} \Rightarrow x_A=-۶ \xrightarrow{\text{طول از مبدا}} p=-۶ \\ y_M=\frac{y_A+y_B}{۲} \Rightarrow ۲=\frac{۰+y_B}{۲} \Rightarrow y_B=۴ \xrightarrow{\text{عرض از مبدا}} q=۴ \end{cases}$$

حال با داشتن طول از مبدأ و عرض از مبدأ خط، معادله‌ی خط AB به صورت زیر است:

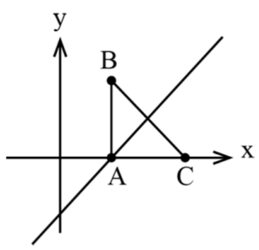
$$\xrightarrow[p=-۶,q=۴]{\text{معادله ی خط AB}} \frac{x}{-۶}+\frac{y}{۴}=۱ \xrightarrow{\times۱۲} -۲x+۳y=۱۲ \Rightarrow ۲x-۳y=-۱۲$$

۳۴) گزینه‌ی ۴ کافی است عمود منصف AB را با محور عرض‌ها قطع دهیم:

$$M\left(\frac{-۴+۲}{۲}\ ,\ \frac{۱+۳}{۲}\right)=(-۱,۲)\ ,\ m_{AB}=\frac{۳-۱}{۲+۴}=\frac{۱}{۳} \Rightarrow m'=-۳ \text{ عمود منصف}$$

$$\text{عمود منصف AB}: y-۲=-۳(x+۱) \Rightarrow \begin{cases} y=-۳x-۱ \\ x=۰ \end{cases} \Rightarrow p(۰,-۱)$$

۳۵) گزینه‌ی ۱ اگر این سه نقطه را در دستگاه مختصات رسم کنیم می‌بینیم که مثلث در رأس A قائم‌الزاویه است پس نیمساز آن با توجه به شکل با محور x ها زاویه‌ی ۴۵° می‌سازد. از طرفی می‌دانیم اگر یک خط با محور x ها زاویه‌ی α بسازد شیب آن برابر $m=\tan\alpha$ خواهد بود. پس شیب نیمساز زاویه‌ی A برابر است با $m=\tan۴۵^\circ=۱$ و چون این خط از نقطه‌ی $A(۱,۰)$ عبور می‌کند با توجه به رابطه‌ی



$$y-y_۱=m(x-x_۱)$$

داریم:

$$y-0=1\times(x-1)\Rightarrow y=x-1$$

۳۶) گزینه‌ی ۱ این پاره‌خط محدود به محور طول‌ها و عرض‌هاست پس مختصات دو سر آن عبارتند از:

$$A(\alpha,0)\ ,\ B(0,\beta)$$

$$\text{وسط } AB \quad M(2,3)=\left(\frac{\alpha+0}{2}\ ,\ \frac{\beta+0}{2}\right)\Rightarrow \alpha=4\ ,\ \beta=6$$

حال با داشتن دو نقطه‌ی $A(4,\ 0)$ و $B(0\ ,\ 6)$ معادله خط را می‌نویسیم.

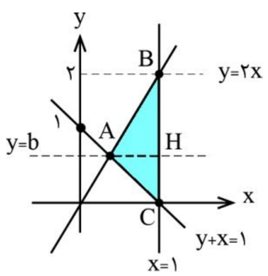
$$y-0=\frac{6-0}{0-4}(x-4)\Rightarrow y=-\frac{3}{2}(x-4)\Rightarrow 2y=-3x+12\Rightarrow 2y+3x-12=0$$

۳۷) گزینه‌ی ۲ مجموعه نقاطی که از دو سر پاره‌خط به یک فاصله باشند روی عمود منصف پاره‌خط قرار دارند. معادله‌ی عمود منصف پاره‌خط را به دست می‌آوریم و با معادله‌ی خط مذکور تلاقی می‌دهیم.

$$\left.\begin{array}{l} m_{AB}=\dfrac{3-1}{1-3}=-1\Rightarrow m'=1 \\ \text{وسط } AB \quad M\Rightarrow M\left(\dfrac{3+1}{2}\ ,\ \dfrac{1+3}{2}\right)=(2,2) \end{array}\right\}\Rightarrow y-2=1(x-2)\Rightarrow y=x$$

$$\begin{cases} 3x+2y=5 \\ y=x \end{cases}\Rightarrow 3x+2x=5\Rightarrow x=1\Rightarrow y=1\Rightarrow D(1,1)$$

۳۸) گزینه‌ی ۱ همان‌طور که ملاحظه می‌کنیم مثلث ABC در رأس A، زاویه‌ی منفرجه دارد و در نتیجه BC بزرگ‌ترین ضلع مثلث است. پس ارتفاع وارد بر ضلع BC، یعنی ارتفاع AH، کوتاه‌ترین ارتفاع مثلث می‌باشد. با توجه به قائم بودن ضلع BC، نتیجه می‌گیریم ارتفاع AH افقی است. پس معادله‌ی ارتفاع AH به صورت $y=b$ است که b همان عرض نقطه‌ی A بوده و A نقطه‌ی تلاقی دو خط $x+y=1$ و $y=2x$ می‌باشد. بنابراین کافی است معادله‌ی این دو خط را در یک دستگاه دو معادله دو مجهول حل کنیم تا عرض نقطه‌ی تلاقی و در نتیجه معادله‌ی ارتفاع AH به دست آید:



$$\begin{cases} x+y=1 \\ y=2x \end{cases}\Rightarrow x=\frac{1}{3}\ ,\ y=\frac{2}{3}\Rightarrow A\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\Rightarrow \text{معادله‌ی ارتفاع } AH: y=y_A=\frac{2}{3}$$

۳۹) گزینه‌ی ۱

نکته: برای به دست آوردن نقطه ثابت می‌توانیم، دسته خط را برحسب m مرتب کرده و ضرایب x و y و مقدار ثابت عددی را برابر صفر قرار دهیم.

$$(2m-3)x+(7-2m)y+4=0\xrightarrow{\text{ضرایب x و y برابر صفر قرار می دهیم.}}\begin{cases} 2m-3=0 \\ 7-2m=0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 4y+4=0\Rightarrow y=-1 \\ 4x+4=0\Rightarrow x=-1 \end{cases}$$

بنابراین نقطه ثابت $A(-1,-1)$ ظاهر می‌شود و فاصله آن از مبدأ برابر با $OA=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$ می‌باشد.

پاسخنامه درسنامه پنجم

۴۰) گزینه‌ی ۴ می‌دانیم در متوازی‌الاضلاع دو ضلع رو به رو با هم موازی هستند. بنابراین:

$$y=3x+1\Rightarrow \text{شیب خط}=3\quad \text{عرض از مبدأ خط}=1$$

$$y=3x+m^2-3\Rightarrow \text{شیب خط}=3\quad \text{عرض از مبدأ}=m^2-3$$

با توجه به توضیحات ذکر شده، شیب هر دو خط با هم برابرند، حال اگر عرض از مبدأها با هم برابر باشند، دو خط بر هم منطبق می‌شوند و در نتیجه متوازی‌الاضلاع تشکیل نخواهد شد. بنابراین حالتی را که دو ضلع بر هم منطبق‌اند از کل حالات کم می‌کنیم. داریم:

$$m^2-3=1\Rightarrow m^2=4\Rightarrow m=\pm 2$$

لذا m هر مقداری می‌تواند بگیرد به جز مقادیر ۲ و ۲ −.

۴۱) گزینه‌ی ۳ برای اینکه نقطه C از دو نقطه‌ی $(-۲,۳)$ و $(۴,-۱)$ به یک فاصله باشد، باید بر روی عمود منصف پاره‌خط قرار گیرد.

$$\text{شیب پاره‌خط} = \frac{۳+۱}{-۲-۴} = \frac{-۲}{۳} \Rightarrow \text{شیب عمود منصف} = \frac{۳}{۲} \ (\text{به دلیل عمود بودن})$$

$$\text{وسط دو نقطه } M\left(\frac{۴-۲}{۲}, \frac{-۱+۳}{۲}\right) \Rightarrow M(۱,۱)$$

$$\begin{cases} M(۱,۱) \\ m = \frac{۳}{۲} \end{cases} \Rightarrow y-۱ = \frac{۳}{۲}(x-۱) \Rightarrow y = \frac{۳}{۲}x - \frac{۱}{۲}$$

چون m روی محور طول‌ها قرار دارد، با جایگذاری $y=۰$، طول آن به دست می‌آید.

$$y = ۰ \Rightarrow \frac{۳}{۲}x - \frac{۱}{۲} = ۰ \Rightarrow x = \frac{۱}{۳}$$

۴۲) گزینه‌ی ۲ فرض می‌کنیم نقطه C از دو سر پاره‌خط AB یک فاصله باشد، پس C روی عمود منصف AB قرار دارد.

$$\begin{cases} \text{وسط } AB \ M\left(\frac{۳+۱}{۲}, \frac{۱+۳}{۲}\right) \Rightarrow M(۲,۲) \\ m_{AB} = \frac{۳-۱}{۱-۳} = -۱ \Rightarrow m' = ۱ \Rightarrow y-۲ = x-۲ \Rightarrow y = x \quad \text{معادله‌ی خط عمود منصف} \end{cases}$$

از طرفی چون C نقطه‌ای از خط $۳x+۲y-۵=۰$ نیز می‌باشد، پس C محل تلاقی دو خط $y=x$ و $۳x+۲y-۵=۰$ است.

$$\begin{cases} ۳x+۲y-۵=۰ \\ y=x \end{cases} \Rightarrow x=۱ , y=۱ \Rightarrow C(۱ , ۱)$$

۴۳) گزینه‌ی ۴

$$\text{وسط پاره‌خط } AB \quad M = \frac{A+B}{۲} \Rightarrow M\left(\frac{۷+۳}{۲}, \frac{m-۱}{۲}\right) = \left(۵ , \frac{m-۱}{۲}\right)$$

از طرفی دیگر خط d را از وسط پاره‌خط AB موازی خط $۲x = y-۴$ رسم می‌کنیم. بنابراین شیب آن برابر شیب خط $۲x = y-۴$ می‌باشد یعنی ۲.
بنابراین معادله خط به صورت زیر خواهد بود:

$$y - \left(\frac{m-۱}{۲}\right) = ۲(x-۵) \Rightarrow y - \frac{m-۱}{۲} = ۲x - ۱۰ \Rightarrow y = ۲x - ۱۰ + \frac{m-۱}{۲}$$

حال عرض از مبدأ خط d را می‌یابیم و آن را برابر ۵ − قرار می‌دهیم:

$$y = ۲x - ۱۰ + \frac{m-۱}{۲} \xrightarrow{x=۰} y = -۱۰ + \frac{m-۱}{۲} \Rightarrow -۱۰ + \frac{m-۱}{۲} = -۵ \Rightarrow m = ۱۱$$

۴۴) گزینه‌ی ۳ می‌دانیم لوزی، متوازی‌الاضلاعی است که چهار ضلع آن با هم برابر و دو قطر آن بر هم عمودند، از طرفی دیگر محل تقاطع قطرها، توسط پاره‌خط واصل بین دو رأس مقابل در آن می‌باشد. باتوجه به این توضیحات ابتدا شیب خطی که از نقاط A و C می‌گذرد را می‌یابیم:

$$m_{AC} = \frac{-۳-۱}{-۳-۱} = ۱$$

از طرفی دیگر چون مختصات نقطه M، وسط پاره‌خط AC است می‌یابیم:

$$M = \frac{A+C}{۲} = \left(\frac{-۳+۱}{۲}, \frac{-۳+۱}{۲}\right) = (-۱,-۱)$$

شیب خطی که از نقاط D و B می‌گذرد، عکس و قرینه شیب خط گذرنده از نقاط A و C می‌باشد، داریم:

$$m_{AC} = ۱ \Rightarrow m_{BD} = -۱$$

چون خط خواسته شده از نقطه M می‌گذرد، در نتیجه:

$$y-(-۱) = -۱(x-(-۱)) \Rightarrow y = -x-۲$$

۴۵) گزینه‌ی ۲ معادله‌ی نیمساز ربع دوم $y=-x$ است. ابتدا رأس A را محاسبه می‌کنیم.

$$y = -x \xrightarrow{x=-۴} y = ۴ \Rightarrow A(-۴,۴)$$

پاره‌خط AB بر خط $y=-x$ عمود است، پس:

$$y=-x \Rightarrow m=-۱ \Rightarrow m_{AB}=۱ \quad , \quad A(-۴,۴)$$

$$\xrightarrow{m=۱,A(-۴,۴)} y-۴=۱(x-(-۴)) \Rightarrow y=x+۸ \xrightarrow{x=۰} y=۸ \Rightarrow B(۰,۸)$$

$$AB=\sqrt{(۰,۴)^۲+(۸-۴)^۲}=\sqrt{۳۲} \Rightarrow AB=۴\sqrt{۲} \quad \text{محیط مربع}=۴\times۴\sqrt{۲}=۱۶\sqrt{۲}$$

۴۶) گزینه‌ی ۲ معادله‌ی ارتفاع AH را با داشتن شیب و مختصات یک نقطه از آن می‌توانیم بنویسیم. شیب AH عکس و قرینه‌ی شیب ضلع BC است. چون شیب BC برابر $-\frac{۳}{۲}$ است، لذا شیب ارتفاع AH برابر $\frac{۲}{۳}$ می‌باشد. از طرفی برای تعیین مختصات نقطه‌ی A روی ارتفاع AH، باید معادله‌ی دو ضلع AB و AC را با هم قطع دهیم. داریم:

$$\begin{cases} AB: ۲y-x=۳ \\ AC: y-۲x=۵ \xrightarrow{\times(-۲)} -۲y+۴x=-۱۰ \end{cases} \Rightarrow x=-\frac{۷}{۳}\ ,\ y=\frac{۱}{۳} \Rightarrow A\left(-\frac{۷}{۳},\frac{۱}{۳}\right)$$

$$m=\frac{۲}{۳}\ ,\ A\left(-\frac{۷}{۳},\frac{۱}{۳}\right) \xrightarrow{\text{معادله‌ی ارتفاع AH}} y-\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{۳}\left(x-\left(-\frac{۷}{۳}\right)\right) \xrightarrow{\times۳} ۳y-۱=۲\left(x+\frac{۷}{۳}\right)$$

$$\Rightarrow ۳y-۲x=\frac{۱۷}{۳} \xrightarrow{\times۳} ۹y-۶x=۱۷$$

۴۷) گزینه‌ی ۲ برای آن‌که دو خط با هم موازی باشند باید شیب‌های آنها با هم مساوی باشد. بنابراین:

$$m^۲+m-۶=m^۲-۴ \Rightarrow m=۲$$

$$y=(m^۲+m-۶)x+۲ \xrightarrow{m=۲} y=۲$$

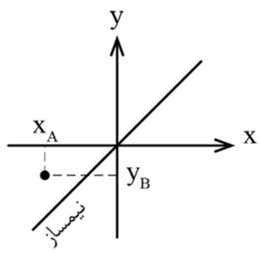
$$y=(m^۲-۴)x+۱ \xrightarrow{m=۲} y=۱ \Rightarrow \text{شیب خط}=۰$$

همانطور که ملاحظه شد شیب دو خط موازی ذکر شده برابر با صفر شد، حال شیب خط $y=x+۱$ به دست می‌آوریم.

$$y=x+۱ \Rightarrow \text{شیب خط}=۱ \Rightarrow \tan\alpha=۱ \Rightarrow \alpha=۴۵^\circ$$

خط $y=۱$ یا $y=۲$ موازی محور x ها است و خط $y=x+۱$ با محور x ها زاویه ۴۵° می‌سازد. پس با خط $y=۱$ یا $y=۲$ هم زاویه ۴۵° می‌سازد.

۴۸) گزینه‌ی ۳ نقطه‌ی A در ربع سوم بالای نیمساز قرار گرفته باشد، با توجه به شکل باید شرایط زیر را داشته باشد.



$$\begin{cases} x_A<۰ \\ y_A<۰ \\ y_A>x_A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲m-۱<۰ \\ m+۱<۰ \\ m+۱>۲m-۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m<\frac{۱}{۲} \\ m<-۱ \\ m<۲ \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک جوابها}} m<-۱$$

پاسخنامه درسنامه ششم

۴۹) گزینه‌ی ۲ بررسی گزینه‌ها:

گزینه‌ی ۱) $x=-\frac{۳}{۲} \Rightarrow d=\frac{۳}{۲}$

گزینه‌ی ۲) $y=-\frac{۳}{۲} \Rightarrow d=\frac{۲}{۳}$

گزینه‌ی ۳) $۳x+۴y=۱۲ \Rightarrow d=\frac{۱۲}{\sqrt{۹+۱۶}}=\frac{۱۲}{۵}$

گزینه‌ی ۴) $y-x-۱=۰ \Rightarrow d=\frac{۱}{\sqrt{۲}}$

$\frac{۲}{۳}$ از سایر گزینه‌ها کمتر است زیرا: $\frac{۲}{۳} < \frac{۱}{\sqrt{۳}} < \frac{۳}{۲}\ \frac{۱۲}{۵}$

۵۰) گزینه‌ی ۴ فاصله نقطه‌ی $A(m,-m)$ از خط $y-x=۰$ برابر است با:

$$d=\frac{|m-(-m)|}{\sqrt{۱+(-۱)^۲}}=\frac{|۲m|}{\sqrt{۲}}\xrightarrow{d=\sqrt{۲}}\frac{|۲m|}{\sqrt{۲}}=\sqrt{۲}\Rightarrow |۲m|=۲\Rightarrow m=\pm ۱$$

۵۱) گزینه‌ی ۲

$$d=\frac{|m^۲+۱-۲m|}{\sqrt{m^۴+۱}}=\frac{۴}{\sqrt{۱+m^۴}}\Rightarrow |m^۲-۲m+۱|=۴\Rightarrow$$

$$\begin{cases} m^۲-۲m+۱=۴\Rightarrow (m+۱)(m-۳)=۰\Rightarrow m=-۱,۳ \\ \text{یا} \\ m^۲-۲m+۱=-۴\Rightarrow m^۲-۲m+۵=۰\Rightarrow \Delta<۰ \quad \text{جواب ندارد} \end{cases}$$

۵۲) گزینه‌ی ۲ خطی که محور x ها را به طول P و محور y ها را به عرض q قطع کند خط $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=۱$ است. بنابراین:

$$\frac{x}{۳}+\frac{y}{۴}=۱\xrightarrow{\times ۱۲}۴x+۳y-۱۲=۰\Rightarrow d=\frac{|-۱۲|}{\sqrt{۴^۲+۳^۲}}=\frac{۱۲}{۵}=۲/۴$$

۵۳) گزینه‌ی ۳

$$۲y-mx+m-۴=۰\Rightarrow d=\frac{|m-۴|}{\sqrt{۴+m^۲}}=۲\Rightarrow |m-۴|=۲\sqrt{۴+m^۲}$$

$$\Rightarrow m^۲-۸m+۱۶=۱۶+۴m^۲\Rightarrow ۳m^۲+۸m=۰\Rightarrow \begin{cases} m=۰ \quad \text{غ ق ق} \\ m=-\frac{۸}{۳} \end{cases}$$

$$\text{طول از مبدأ}: y=۰\Rightarrow x=\frac{m-۴}{m}=\frac{-\frac{۸}{۳}-۴}{-\frac{۸}{۳}}=\frac{۵}{۲}$$

۵۴) گزینه‌ی ۱ چون نقطه (۲, ۱) باید در معادله خط صدق کند، بنابراین داریم:

$۴=m+b$ از طرفی دیگر فاصله مبدأ مختصات از خط $ax+by+c=۰$ از رابطه‌ی $\frac{|c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$ حاصل می‌شود و این فاصله برابر ۱ می‌باشد لذا داریم:

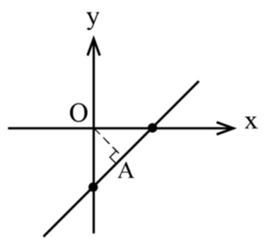
$$۱=\frac{|b|}{\sqrt{۴+m^۲}}\Rightarrow ۴+m^۲=b^۲\Rightarrow \begin{cases} ۴=m+b \\ ۴+m^۲=b^۲ \end{cases}\Rightarrow ۴=m+\sqrt{۴+m^۲}$$

$$\Rightarrow ۴-m=\sqrt{۴+m^۲}\xrightarrow{\text{توان دو}}(۴-m)^۲=\left(\sqrt{۴+m^۲}\right)^۲$$

$$\Rightarrow m^۲-۸m+۱۶=۴+m^۲\Rightarrow m=\frac{۳}{۲}$$

۵۵) گزینه‌ی ۱ مقدار $\sqrt{a^۲+b^۲}$ ، فاصله‌ی نقطه‌ی A از مبدأ مختصات است. کمترین مقدار فاصله‌ی O از خط همان طول خط عمودی است. بنابراین کافی است فاصله‌ی O از خط را بیابیم:

$$|OA|=\frac{|۳\times ۰-۴\times ۰-۱۵|}{\sqrt{۹+۱۶}}=۳$$



۵۶) گزینه‌ی ۱

$$d_۱ = \frac{|-۵|}{\sqrt{a^۴+(a^۲+۱)^۲}} \Rightarrow ۱ = \frac{۵}{\sqrt{a^۴+(a^۲+۱)^۲}} \Rightarrow \sqrt{a^۴+(a^۲+۱)^۲} = ۵ \qquad (۱)$$

$$d_۲ = \frac{|-۱۰|}{\sqrt{(a^۲+۱)^۲+a^۴}} = \xrightarrow{(۱)} d_۲ = \frac{۱۰}{۵} = ۲$$

۵۷) گزینه‌ی ۴ اگر A بر روی نیمساز ناحیه‌ی دوم در نظر بگیریم، آن‌گاه با فرض $x_A = \alpha$ داریم:

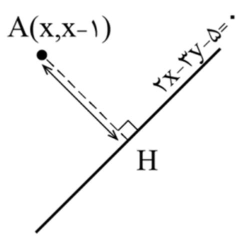
$$x_A = \alpha \Rightarrow y_A = -\alpha \Rightarrow A(\alpha,-\alpha) \quad \text{و} \quad y-۲x+۱۰$$

بنابراین:

$$\sqrt{۵} = \frac{|-\alpha-۲\alpha+۱|}{\sqrt{۵}} \Rightarrow |۳\alpha-۱| = ۵ \Rightarrow \begin{cases} ۳\alpha-۱=۵ \\ ۳\alpha-۱=-۵ \end{cases}$$

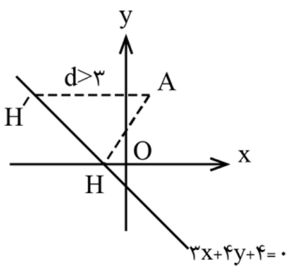
$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha=۲ \\ \alpha=-\frac{۴}{۳} \end{cases} \quad A(۲,-۲) \in \text{ناحیه‌ی چهارم} \quad \text{و} \quad A'\left(-\frac{۴}{۳},\frac{۴}{۳}\right) \in \text{ناحیه دوم}$$

۵۸) گزینه‌ی ۲ نقطه‌ی مجهول A بر روی خط به معادله‌ی $y = x-۱$ قرار دارد، لذا مختصات آن به صورت $(x, x-۱)$ است. چون فاصله‌ی نقطه‌ی A از خط $۲x-۳y-۵=۰$ برابر $\sqrt{۱۳}$ است، در نتیجه با توجه به فرمول فاصله‌ی نقطه از خط داریم:



$$AH = \frac{|۲x-۳(x-۱)-۵|}{\sqrt{۲^۲+(-۳)^۲}} = \frac{|-x-۲|}{\sqrt{۱۳}} = \sqrt{۱۳} \Rightarrow |x+۲| = ۱۳ \Rightarrow \begin{cases} x+۲=۱۳ \Rightarrow x=۱۱ \\ x+۲=-۱۳ \Rightarrow x=-۱۵ \end{cases}$$

۵۹) گزینه‌ی ۱ ابتدا فاصله‌ی نقطه تا خط را به دست می‌آوریم:



$$d = \frac{|۳\times۱+۴\times۲+۴|}{\sqrt{۱۶+۹}} = ۳$$

با توجه به شکل و فاصله‌ی به دست آمده، مشخص می‌شود که نقطه‌ی H از خط مورد نظر که نزدیکترین نقطه به نقطه $A(۱, ۲)$ است، فاصله‌ای برابر ۳ با آن نقطه دارد. پس بقیه‌ی نقاط خط، فاصله‌شان تا نقطه‌ی A بیشتر از ۳ می‌باشد و هیچ نقطه‌ای روی خط پیدا نمی‌شود که فاصله‌ی آن تا نقطه‌ی A برابر ۲ باشد.

۶۰) گزینه‌ی ۴ فاصله مبدأ مختصات از خط $۲y = ax + b$ برابر ۱ است، لذا داریم:

$$d = \frac{|ax_۱+by_۱+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}} \Rightarrow ۱ = \frac{|۲\times۰-a\times۰-b|}{\sqrt{۴+a^۲}} \Rightarrow ۱ = \frac{|b|}{\sqrt{۴+a^۲}} \Rightarrow \sqrt{۴+a^۲} = |b| \Rightarrow b^۲ = a^۲+۴$$

از طرفی دیگر نقطه‌ی $A(۱,-۲)$ واقع بر خط $۲y = ax+b$ می‌باشد.

$$-۴ = a+b \Rightarrow b = -۴-a$$

در نتیجه:

$$b^۲ = a^۲+۴ \xrightarrow{b=-۴-a} (-۴-a)^۲ = a^۲+۴ \Rightarrow$$

$$۱۶+a^۲+۸a = a^۲+۴ \Rightarrow ۸a = -۱۲ \Rightarrow a = -\frac{۱۲}{۸} = -\frac{۳}{۲} = -۱/۵$$

۶۱) گزینه‌ی ۱ شیب خط L برابر $-\frac{۳}{۴}$ است، پس شیب خط‌های مطلوب برابر $\frac{۴}{۳}$ است. در نتیجه معادله‌ی آنها به صورت $y = \frac{۴}{۳}x+n$ یا $۳y-۴x-۳n=۰$ است. از طرفی فاصله‌ی نقطه $(۱, ۰)$ از این خطها برابر ۲ است، پس داریم:

$$\frac{|-۴+۰-۳n|}{\sqrt{۱۶+۹}} = ۲ \Rightarrow |-۴-۳n| = ۱۰ \Rightarrow -۴-۳n = \pm۱۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -۳n = ۱۰+۴ \Rightarrow n = -\frac{۱۴}{۳} \\ -۳n = -۱۰+۴ \Rightarrow n = ۲ \end{cases} \Rightarrow y = \frac{۴}{۳}x-\frac{۱۴}{۳}, y = \frac{۴}{۳}x+۲$$

۶۲) گزینه‌ی ۳ ابتدا معادله‌ی خط BC را می‌نویسیم. سپس فاصله‌ی نقطه‌ی A از این خط (ارتفاع AH) را به دست می‌آوریم:

$$y-2=\frac{4-2}{3+2}(x+2)\Rightarrow -\frac{2}{5}x+y-\frac{14}{5}=0\Rightarrow AH=\frac{\left|-\frac{2}{5}+2-\frac{14}{5}\right|}{\sqrt{\frac{4}{25}+1}}=\frac{6}{\sqrt{29}}$$

۶۳) گزینه‌ی ۱ از آنجا که این نقطه روی خط واقع نیست، پس فاصله‌ی این نقطه تا خط همان ضلع مربع است، بنابراین:

$$a=\frac{|4(3)-3(-1)-1|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{14}{5}\Rightarrow S=a^2=\frac{196}{25}$$

۶۴) گزینه‌ی ۲ با توجه به اینکه مختصات نقطه‌ی A روی خط y=x+2 صدق نمی‌کند بنابراین فاصله‌ی نقطه‌ی A که یک رأس مربع می‌باشد تا ضلع مقابل، برابر طول ضلع مربع می‌باشد. با استفاده از رابطه‌ی فاصله‌ی یک نقطه از خط داریم:

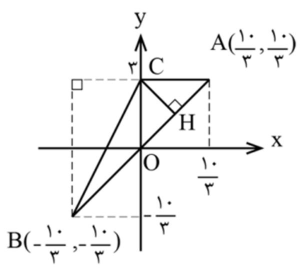
$$d=\frac{|3\times 1+(-1)\times(-1)+2|}{\sqrt{(-1)^2+(1)^2}}=\frac{6}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$$

با استفاده از رابطه‌ی فیثاغورث داریم: $x^2=d^2+d^2\Rightarrow x^2=(3\sqrt{2})^2+3(\sqrt{2})^2\Rightarrow x^2=36\Rightarrow x=6$

۶۵) گزینه‌ی ۱ مختصات هر نقطه روی نیمساز ربع اول و سوم به صورت $(x\ ,x)$ است. ما می‌خواهیم فاصله‌ی این نقاط از خط $x+2y=0$ برابر $2\sqrt{5}$ باشد، پس داریم:

$$\frac{|x+2x|}{\sqrt{1^2+2^2}}=2\sqrt{5}\Rightarrow\frac{3|x|}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}\Rightarrow 3|x|=10\Rightarrow |x|=\frac{10}{3}\Rightarrow x=\pm\frac{10}{3}\Rightarrow A\left(\frac{10}{3}\ ,\ \frac{10}{3}\right),B\left(-\frac{10}{3}\ ,\ -\frac{10}{3}\right)$$

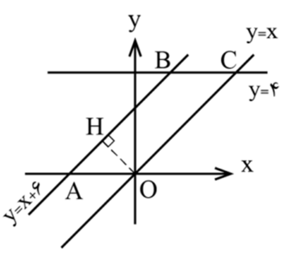
پس داریم:



$$S_{\underset{ABC}{\Delta}}=\frac{|CH|\times|AB|}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l}|AB|=2\times|OA|=2\times\frac{10}{3}\times\sqrt{2}=\frac{20\sqrt{2}}{3}\\ \text{فاصله‌ی } C \text{ از } y=x=CH=\frac{|3-0|}{\sqrt{1+1}}=\frac{3}{\sqrt{2}}\end{array}\right\}\Rightarrow S_{\underset{ABC}{\Delta}}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{\sqrt{2}}\times\frac{20\sqrt{2}}{3}=10$$

۶۶) گزینه‌ی ۲ همان‌طور که در شکل دیده می‌شود ارتفاع این متوازی‌الاضلاع، فاصله مبدأ مختصات از خط $y=x+3$ می‌باشد.



$$|OH|=\frac{|3|}{\sqrt{1+1}}=\frac{3}{\sqrt{2}}\quad \text{و}\quad d:x-y+3=0\Rightarrow\begin{cases}y=0\Rightarrow x=-3\Rightarrow A(-3,0)\\ y=4\Rightarrow x=1\Rightarrow B(1,4)\end{cases}$$

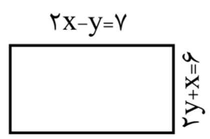
قاعده متوازی‌الاضلاع نیز برابر پاره‌خط AB می‌باشد.

$$\Rightarrow AB=\sqrt{(-3-1)^2+(0-4)^2}=\sqrt{16+16}=4\sqrt{2}$$

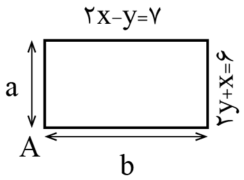
بنابراین:

$$S=\text{قاعده}\times\text{ارتفاع}=4\sqrt{2}\times\frac{3}{\sqrt{2}}=12$$

۶۷) گزینه‌ی ۲ ابتدا شیب دو خط داده شده را به دست می‌آوریم:



$$\begin{cases}2x-y=7\Rightarrow y=2x-7\Rightarrow m_1=2\\ 2y+x=6\Rightarrow y=-\frac{1}{2}x+3\Rightarrow m_2=-\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow m_1\times m_2=2\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$$



پس دو خط داده شده بر هم عمود بوده و دو ضلع با معادلات مذکور، دو ضلع مجاور مستطیل می‌باشند. از طرفی نقطه‌ی A(۸ ,۵) در هیچ کدام از معادلات داده شده صدق نمی‌کند. پس A روی این اضلاع قرار نداشته و باید در موقعیت مقابل باشد:

حال اگر فاصله‌ی نقطه‌ی A را از دو ضلع نمایش داده شده در شکل بیابیم، طول و عرض مستطیل به دست می‌آید:

$$\begin{cases} a = \dfrac{|۲x_A - y_A - ۷|}{\sqrt{۲^۲ + (-۱)^۲}} \underset{=\!=\!=\!=}{A(۸,۵)} \dfrac{|۲(۸) - ۵ - ۷|}{\sqrt{۵}} = \dfrac{۴}{\sqrt{۵}} \\ b = \dfrac{|۲y_A + x_A - ۶|}{\sqrt{۲^۲ + ۱^۲}} \underset{=\!=\!=\!=}{A(۸,۵)} \dfrac{|۲(۵) + ۸ - ۶|}{\sqrt{۵}} = \dfrac{۱۲}{\sqrt{۵}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{مساحت} = a \times b = \frac{۴}{\sqrt{۵}} \times \frac{۱۲}{\sqrt{۵}} = \frac{۴۸}{۵} = ۹/۶$$

پاسخنامه

درسنامه هفتم

۶۸) گزینه‌ی ۳

$$\begin{cases} y = x\sqrt{۳} + ۲ \xrightarrow{\times \sqrt{۳}} \sqrt{۳}y - ۳x - ۲\sqrt{۳} = ۰ \\ \sqrt{۳}y - ۳x + ۶ = ۰ \end{cases} \Rightarrow D = \frac{|۶ - (-۲\sqrt{۳})|}{\sqrt{(-۳)^۲ + (\sqrt{۳})^۲}} = \frac{۶ + ۲\sqrt{۳}}{\sqrt{۱۲}} = \frac{۲(۳ + \sqrt{۳})}{۲\sqrt{۳}} = \sqrt{۳} + ۱$$

۶۹) گزینه‌ی ۲ چون معادله‌ی خط خواسته شده با خط $۴x + ۳y = ۱$ موازی است، آن را به صورت $۴x + ۳y = c$ در نظر می‌گیریم. داریم:

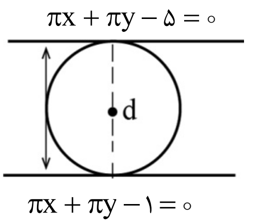
$$\frac{|c - ۱|}{\sqrt{۱۶ + ۹}} = ۳ \Rightarrow |c - ۱| = ۱۵ \Rightarrow c - ۱ = \pm ۱۵$$

$c = ۱۶$ یا $c = -۱۴ \Rightarrow ۴x + ۳y = ۱۶ \,,\, ۴x + ۳y = -۱۴$

۷۰) گزینه‌ی ۲ فاصله‌ی دو خط موازی $\pi x + \pi y - ۱ = ۰$ و $\pi x + \pi y - ۵ = ۰$ را می‌یابیم. (اندازه‌ی ضلع مربع)

$$d = \frac{|-۵ + ۱|}{\sqrt{\pi^۲ + \pi^۲}} = \frac{۴}{\sqrt{۲}\pi} \times \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = \frac{۲\sqrt{۲}}{\pi}$$

با توجه به شکل $R = \frac{۱}{۲}d$ پس:



$$S = \pi R^۲ = \pi \times \left(\frac{\sqrt{۲}}{\pi}\right)^۲ = \frac{۲}{\pi}$$

۷۱) گزینه‌ی ۱ شیب این دو خط با هم برابر است پس معادلات دو ضلع مقابل مربع می‌باشند:

$$\begin{cases} ۳x + ۴y + a = ۰ \\ y = -\frac{۳}{۴}x + ۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۳x + ۴y + a = ۰ \\ ۴y + ۳x - ۴ = ۰ \end{cases} \Rightarrow \text{ضلع مربع} = \frac{|a + ۴|}{\sqrt{۱۶ + ۹}} = \frac{|a + ۴|}{۵} = ۵$$

$$|a + ۴| = ۲۵ \Rightarrow \begin{cases} a = ۲۱ \\ a = -۲۹ \end{cases}$$

۷۲) گزینه‌ی ۲

$$۳y = -۴x + ۲a + ۱ \Rightarrow ۳y + ۴x - ۲a - ۱ = ۰ \Rightarrow m = -\frac{۴}{۳}$$

$$y + \frac{۴}{۳}x + ۲ = ۰ \Rightarrow ۳y + ۴x + ۶ = ۰ \Rightarrow m = -\frac{۴}{۳}$$

این دو معادله دارای شیب‌های مساوی‌اند، پس معادلات دو ضلع مقابل یک مربع‌اند. طول ضلع مربع با فاصله‌ی این دو خط موازی برابر است:

$$\text{طول ضلع مربع} = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}} = \frac{|۶ + ۲a + ۱|}{\sqrt{۹ + ۱۶}} = \frac{|۲a + ۷|}{۵}$$

و $\text{مساحت مربع} = ۹ \Rightarrow \text{طول ضلع مربع} = ۳$

$$\Rightarrow \frac{|۲a+۷|}{۵}=۳ \Rightarrow |۲a+۷|=۱۵ \Rightarrow ۲a+۷=\pm ۱۵ \Rightarrow \begin{cases} ۲a+۷=۱۵ \\ ۲a+۷=-۱۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲a=۸ \\ ۲a=-۲۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=۴ \\ a=-۱۱ \end{cases}$$

۷۳) گزینه‌ی ۲

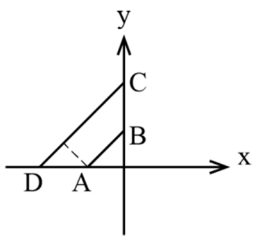
$$\begin{aligned} d_۱ &: (a-۲)x+y=۲ \Rightarrow (a-۲)x+y-۲=۰ \\ d_۲ &: (a-۲)x+y=-۱ \Rightarrow (a-۲)x+y+۱=۰ \end{aligned} \Rightarrow \text{فاصله بین دو خط موازی} = \frac{|۱-(-۲)|}{\sqrt{(a-۲)^۲+۱^۲}} = \frac{۳}{\sqrt{(a-۲)^۲+۱}}$$

فاصله بین دو خط موازی، هنگامی بیشترین مقدار را دارد که مخرج کسر $\frac{۳}{\sqrt{(a-۲)^۲+۱}}$ کم‌ترین مقدار را داشته باشد برای این منظور a باید ۲ باشند.

۷۴) گزینه‌ی ۱ ابتدا با روش نقطه‌یابی نمودار دو خط را رسم می‌کنیم تا ذوزنقه گفته شده را پیدا کنیم.

$$y=x+۴: \begin{array}{c|cc} x & ۰ & -۴ \\ \hline y & ۴ & ۰ \end{array} \quad , \quad y=x+۲: \begin{array}{c|cc} x & ۰ & -۲ \\ \hline y & ۲ & ۰ \end{array}$$

می‌دانیم که برای محاسبه‌ی مساحت ذوزنقه به طول قاعده‌ها و ارتفاع ذوزنقه احتیاج داریم. قاعده‌های ذوزنقه دو پاره خط AB و CD می‌باشند که طول آن‌ها برابر است با:



$$AB=\sqrt{(-۲-۰)^۲+(۰-۲)^۲} \quad , \quad CD=\sqrt{(-۴-۰)^۲+(۰-۴)^۲}=۴\sqrt{۲}$$

از طرفی ارتفاع ذوزنقه برابر فاصله‌ی دو قاعده یعنی فاصله‌ی دو خط موازی $y=x+۲$ و $y=x+۴$ است. ابتدا معادله‌ی دو خط را به صورت $x-y+۲=۰$ و $x-y+۴=۰$ می‌نویسیم داریم:

$$\text{ارتفاع}(h)=\frac{|۴-۲|}{\sqrt{(۱)^۲+(-۱)^۲}}=\sqrt{۲}$$

پس مساحت ذوزنقه برابر است با:

$$S=\frac{AB+CD}{۲}\times h=\frac{۲\sqrt{۲}+۴\sqrt{۲}}{۲}\times\sqrt{۲}=(۳\sqrt{۲})(\sqrt{۲})=۶$$

۷۵) گزینه‌ی ۳ می‌دانیم معادله‌ی خطی که با خط‌های $ax+by+c=۰$ و $ax+by+c'=۰$ موازی و فاصله‌اش از این خط‌ها برابر باشد به صورت $ax+by+\frac{c+c'}{۲}=۰$ می‌باشد. بنابراین:

$$\begin{cases} x+y=۱۲ \\ x+y=۸ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y-۱۲=۰ \\ x+y-۸=۰ \end{cases} \Rightarrow x+y+\frac{-۱۲-۸}{۲}=۰ \Rightarrow x+y-۱۰=۰ \Rightarrow x+y=۱۰$$

پاسخنامه درسنامه هشتم

۷۶) گزینه‌ی ۴

$$x^۲-۴x+۱=۰ \xrightarrow{\sqrt{\Delta}=۲\sqrt{۳}} x=۲\pm\sqrt{۳} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=۲+\sqrt{۳} \\ \beta=۲-\sqrt{۳} \end{cases}$$

$$\alpha^\beta\times\beta^\alpha=(۲+\sqrt{۳})^{\sqrt{۳}-۲}\times(۲-\sqrt{۳})^{۲+\sqrt{۳}}=(۲+\sqrt{۳})^{-(\sqrt{۳}-۲)}\times(۲-\sqrt{۳})^{۲+\sqrt{۳}}$$

$$\underline{\underline{a^{-۱}=\frac{۱}{a}}}\left(\frac{۱}{۲+\sqrt{۳}}\right)^{۲-\sqrt{۳}}\times(۲-\sqrt{۳})^{۲+\sqrt{۳}}=(۲-\sqrt{۳})^{\sqrt{۳}-۲}\times(۲-\sqrt{۳})^{۲+\sqrt{۳}}$$

$$=(۲-\sqrt{۳})^{\sqrt{۳}-۲+۲+\sqrt{۳}}=(۲-\sqrt{۳})^{۲\sqrt{۳}}=\left((۲-\sqrt{۳})^۲\right)^{\sqrt{۳}}=(۷-۴\sqrt{۳})^{\sqrt{۳}}$$

۷۷) گزینه‌ی ۲ در یک مثلث قائم‌الزاویه، بزرگ‌ترین ضلع همان وتر مثلث است؛ پس در این مثلث قائم‌الزاویه طول وتر a+۴ و اضلاع قائمه a و a+۲ می‌باشند، بنابراین طبق رابطه‌ی فیثاغورس داریم:

$$(a+۴)^۲=(a+۲)^۲+a^۲ \Rightarrow a^۲+۸a+۱۶=(a^۲+۴a+۴)+a^۲$$

$$\Rightarrow a^{2}-4a-12=0 \Rightarrow (a+2)(a-6)=0 \Rightarrow \begin{cases} a=-2 & \text{غ ق ق} \\ a=6 \end{cases}$$

بنابراین، این مثلث به اضلاع ۶ و ۸ و ۱۰ بوده و مساحت آن برابر است با:

$$S=\frac{1}{2}\times 8\times 6=24$$

۷۸) گزینه‌ی ۲

$$\left.\begin{array}{l} 12 \xrightarrow{\text{a واحد اضافه شود}} 12+a \\ 18 \xrightarrow{\text{a واحد اضافه شود}} 18+a \end{array}\right\} \Rightarrow (12+a)(18+a)=12\times 18+2a^{2}$$

$$\Rightarrow 216+30a+a^{2}=216+2a^{2} \Rightarrow a^{2}-30a=0 \Rightarrow a(a-30)=0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 & \text{غ ق ق} \\ a=30 & \text{ق ق} \end{cases}$$

در نتیجه:

$$\sqrt{a^{2}+4a+4}=\sqrt{(a+2)^{2}}=|a+2|=|30+2|=|32|=32$$

۷۹) گزینه‌ی ۱

یادآوری

اگر b,a و c سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی هندسی باشند داریم:

$$b^{2}=ac$$

$$ba,b,c \xrightarrow{\text{تشکیل دنباله هندسی}} b^{2}=ac(*)$$

در معادله‌ی درجه دوم دلتای معادله را محاسبه می‌کنیم:

$$9ax^{2}+6bx+c=0 \Rightarrow \Delta=36b^{2}-36ac=36(b^{2}-ac)\overset{(*)}{=\!=}36(b^{2}-b^{2})=0 \quad \text{ریشه مضاعف}$$

۸۰) گزینه‌ی ۲ چون $\Delta=m^{4}+n^{4}-m^{2}>0$ لذا معادله دو ریشه دارد. بنابراین:

$$\text{حاصل‌ضرب ریشه‌ها}: p=\frac{c}{a}=\frac{mn}{mn}=1$$

چون حاصلضرب ریشه‌ها برابر یک است، پس ریشه‌ها باید معکوس یکدیگر باشند، پس گزینه‌های (۱) و (۳) غلط است، از طرفی می‌دانیم:

$$\text{مجموع ریشه‌ها}: S=-\frac{b}{a}=\frac{m^{2}+n^{2}}{mn}=\frac{m}{n}+\frac{n}{m} \Rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{m}{n} \\ x_2=\frac{n}{m} \end{cases}$$

۸۱) گزینه‌ی ۴ چون $x^{2}+ax+b=0$ لذا با شرط $\Delta=0$ داریم $P=b$ و $S=-b$ بنابراین اگر هر دو جواب فرد باشند حاصل جمع عددی زوج و حاصل ضرب عددی فرد است. پس a زوج و b فرد است. پس گزینه‌های (۱ و ۲) نادر هستند. اگر یک جواب زوج و دیگری فرد باشد مجموع عدد فرد و حاصل ضرب زوج است. پس a عدد فرد و b عدد زوج است. لذا گزینه ی (۴) درست است.

۸۲) گزینه‌ی ۱ می‌دانیم معادله‌ی درجه دوم $ax^{2}+bx+c=0$، دارای دو ریشه‌ی حقیقی متمایز است. هرگاه $\Delta=b^{2}-4ac>0$.

$$2x^{2}+ax+a-\frac{3}{2}=0 \Rightarrow \Delta=a^{2}-4\times 2\times\left(a-\frac{3}{2}\right) \Rightarrow \Delta=a^{2}-8a+12$$

با توجه به این‌که معادله دو ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد، بنابراین باید $\Delta>0$ شود. داریم:

$$\Delta>0 \Rightarrow a^{2}-8a+12>0 \Rightarrow (a-2)(a-6)>0 \Rightarrow a>6 \text{ یا } a<2$$

۸۳) گزینه‌ی ۱ باید دلتای معادله کم‌تر از صفر باشد. داریم:

$$(m+1)^{2}-4\times 2\times\left(\frac{m}{2}+2\right)<0 \Rightarrow m^{2}+2m+1-4m-16<0 \Rightarrow m^{2}-2m-15<0$$

$$\Rightarrow (m+3)(m-5)<0 \Rightarrow -3<m<5$$

۸۴) گزینه‌ی $\boxed{۱}$

$$\begin{cases} y=(۲x+۱)(x+۸)=۲x^۲+۱۷x+۸ \\ y=mx \end{cases} \Rightarrow ۲x^۲+۱۷x+۸=mx \Rightarrow ۲x^۲+(۱۷-m)x+۸=۰$$

باید دلتای معادله‌ی $۲x^۲+(۱۷-m)x+۸=۰$ را کم‌تر از صفر قرار دهیم. داریم:

$$(۱۷-m)^۲-۴\times۲\times۸<۰ \Rightarrow ۲۸۹-۳۴m+m^۲-۶۴<۰ \Rightarrow m^۲-۳۴m+۲۲۵<۰$$
$$\Rightarrow (m-۹)(m-۲۵)<۰ \Rightarrow ۹<m<۲۵$$

۸۵) گزینه‌ی $\boxed{۳}$ برای مماس بودن، خط باید با منحنی فقط یک نقطه تلاقی داشته باشد، لذا:

$$(m+۳)x^۲+mx=۲x-۴ \Rightarrow (m+۳)x^۲+(m-۲)x+۴=۰$$

$$\xrightarrow[\Delta=۰]{\text{شرط ریشه‌ی مضاعف}} (m-۲)^۲-۴(m+۳)(۴)=۰$$

$$\Rightarrow m^۲-۴m+۴-۱۶m-۴۸=۰ \Rightarrow m^۲-۲۰m-۴۴=۰$$

$$\xrightarrow{\text{به کمک گزینه‌ها ریشه‌ها را حدس می‌زنیم}} (m-۲۲)(m+۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} m=۲۲ \\ \text{یا} \\ m=-۲ \end{cases}$$

۸۶) گزینه‌ی $\boxed{۲}$ باید معادله‌ی تلاقی f و g یعنی $f(x)=g(x)$ ریشه‌ی مضاعف داشته باشد.

$$f(x)=g(x) \Rightarrow x^۲+۱=ax^۲+۴x \Rightarrow (a-۱)x^۲+۴x-۱=۰ \Rightarrow ۱۶+۴(a-۱)=۰ \Rightarrow a=-۳$$

۸۷) گزینه‌ی $\boxed{۲}$ می‌دانیم منحنی یک تابع در صورتی بر محور x ها مماس است که معادله‌ی حاصل از تقاطع آن با محور x ها یعنی $f(x)=۰$ دارای ریشه می‌گردد ریشه‌ای با مرتبه‌ی ۲ یا بیش‌تر از ۲ باشد. در منحنی با ضابطه‌ی $y=(x-۲)(x^۲+kx+۱)$ نقطه‌ی به طول $x=۲$، یک ریشه‌ی تابع از مرتبه‌ی اول است، اگر این عدد ریشه‌ی معادله‌ی $x^۲+kx+۱=۰$ نیز باشد، آن‌گاه ریشه مکرر تابع y خواهد بود. پس داریم:

$$x^۲+kx+۱=۰ \xrightarrow{x=۲} ۴+۲k+۱=۰ \Rightarrow k=-\frac{۵}{۲}$$

از طرفی اگر معادله‌ی $x^۲+kx+۱=۰$ دارای ریشه‌ی مضاعف باشد آن‌گاه منحنی تابع در نقطه‌ای به طول این ریشه نیز بر محور x ها مماس خواهد بود. پس داریم:

$$x^۲+kx+۱=۰ \Rightarrow \Delta=۰ \Rightarrow k^۲-۴=۰ \Rightarrow k=\pm۲$$

۸۸) گزینه‌ی $\boxed{۴}$ می‌دانیم معادله‌ی درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ با شرط $\Delta=۰$ دارای یک ریشه مضاعف یا تکراری است. در این حالت $x=-\frac{b}{۲a}$، تنها ریشه خواهد بود. با توجه به این که $x=\sqrt{۳}$ تنها ریشه است، داریم:

$$\sqrt{۳}=-\frac{a}{۲} \Rightarrow a=-۲\sqrt{۳}$$

$$\Delta=۰ \Rightarrow a^۲-۴b=۰ \xrightarrow{a=-۲\sqrt{۳}} (-۲\sqrt{۳})^۲-۴b=۰ \Rightarrow ۱۲-۴b=۰ \Rightarrow b=۳$$

در نتیجه:

$$\frac{b}{a}=\frac{۳}{-۲\sqrt{۳}}\times\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}}=\frac{۳\sqrt{۳}}{-۲\times۳}=-\frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \frac{b}{a}=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۸۹) گزینه‌ی $\boxed{۳}$ فرض کنیم α و β ریشه‌های معادله‌ی $mx^۲+۳x+۱=۰$ باشد، داریم:

$$\alpha<۱<\beta \Rightarrow \begin{cases} \alpha-۱<۰ \\ \beta-۱>۰ \end{cases} \xrightarrow{\text{ضرب طرفین}} (\alpha-۱)(\beta-۱)<۰$$

$$\Rightarrow \alpha\beta-\alpha-\beta+۱<۰ \Rightarrow \alpha\beta-(\alpha+\beta)+۱<۰ \xrightarrow[\alpha+\beta=S]{\alpha\beta=p}$$

$$P-S+1<0 \xrightarrow{S=\frac{-3}{m}\ ,\ P=\frac{1}{m}} \frac{1}{m}-\frac{-3}{m}+1<0 \Rightarrow$$

$$\frac{4}{m}+1<0 \Rightarrow \frac{4+m}{m}<0 \xrightarrow{\text{حل نامعادله}} -4<m<0$$

۹۰) گزینه‌ی ۱ با توجه به صورت مسأله معادله دو جواب دارد. در این صورت چون $\frac{c}{a}=1$ است، لذا ریشه‌ی دیگر به صورتی باشد که اگر در ضرب شود، حاصل برابر ۱ شود، یعنی ریشه‌ی دیگر، معکوس $\sqrt{3}-2$ است:

$$x_2=\frac{1}{x_1}=\frac{1}{\sqrt{3}-2}=-(\sqrt{3}+2)$$

۹۱) گزینه‌ی ۲

یادآوری: اگر b واسطه‌ی حسابی دو عدد c و a باشد، در این $2b=a+c$ است.

معادله درجه دوم را برحسب x مرتب می‌کنیم.

$$(m^2-4)x^2-3x+m=0$$

شرط آن‌که β و $\frac{1}{8}$ و α دنباله‌ی حسابی تشکیل دهند.

$$\alpha+\beta=2\left(\frac{1}{8}\right)$$

پس خواهیم داشت:

$$\frac{3}{m^2-4}=\frac{1}{4}\Rightarrow m^2-4=12\Rightarrow m^2=16$$

پس $m=\pm 16$ ولی به ازای m=۴ معادله $12x^2-3x+4=0$ فاقد ریشه حقیقی است پس $m=-4$ مورد قبول است.

۹۲) گزینه‌ی ۳

$$\left.\begin{array}{l}\text{طبق فرض}: x_1=2x_2\\ 2x^2+ax+9=0\Rightarrow x_1x_2=\frac{9}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow 2x_2x_2=\frac{9}{2}\Rightarrow x_2^2=\frac{9}{4}\Rightarrow x_2=\pm\frac{3}{2}$$

باتوجه به این‌که $x_1=2x_2$ است. مجموع دو ریشه‌ی مثبت در این حالت برابر است با:

$$x_2=\frac{3}{2}\quad,\quad x_1=3\Rightarrow x_1+x_2==4/5$$

۹۳) گزینه‌ی ۴ اگر x_2 را ریشه‌ی بزرگ‌تر بگیریم، داریم:

$$\begin{cases}x_2-x_1=2\\ x_2+x_1=\frac{15}{3}=5\end{cases}\Rightarrow x_1=\frac{3}{2}\quad,\quad x_2=\frac{7}{2}\Rightarrow x_1x_2=\frac{m}{3}\to\frac{m}{3}=\frac{21}{4}\Rightarrow m=\frac{63}{4}$$

۹۴) گزینه‌ی ۲ اگر x_2 از سه برابر x_1، ۳ واحد بیشتر باشد، یعنی $x_2=3x_1+3$. از طرف دیگر از معادله‌ی $3x^2-17x+m=0$، داریم $x_1+x_2=\frac{17}{3}$ و $x_1x_2=\frac{m}{3}$. پس:

$$\begin{cases}x_2=3x_1+3\\ x_1+x_2=\frac{17}{3}\end{cases}\Rightarrow x_1=\frac{2}{3}\quad,\ x_2=5\Rightarrow x_1x_2=\frac{10}{3}\Rightarrow\frac{m}{3}=\frac{10}{3}\Rightarrow m=10$$

۹۵) گزینه‌ی ۳ اگر x_1 و x_2 دو ریشه‌ی معادله باشند، $x_1^2=x_2$ است. از طرف دیگر با توجه به $x^2-6x+5+m=0$، داریم $x_1+x_2=6$. پس:

$$\begin{cases}x_1+x_2=6\\ x_1^2-x_2=0\end{cases}\Rightarrow x_1^2+x_1-6=0\Rightarrow(x_1+3)(x_1-2)=0\Rightarrow x_1=-3\quad\text{یا}\quad x_1=2$$

$$\begin{cases} x_1=-۳ \Rightarrow x_۲=۹ \\ x_1=x_۲ \Rightarrow x_۲=۴ \end{cases} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1x_۲=-۲۷ \\ x_1x_۲=۸ \end{matrix}\right\} \xrightarrow{x_1x_۲=۵+m} \begin{cases} ۵+m=-۲۷ \Rightarrow m=-۳۲ \\ ۵+m=۸ \Rightarrow m=۳ \end{cases}$$

بنابراین به ازای هر دو مقدار $m=-۳۲$ و $m=۳$ ، یکی از ریشه‌های معادله‌ی $x^۲-۶x+۵+m=۰$ مجذور دیگری است. $m=-۳۲$ در گزینه‌ها دیده می‌شود.

۹۶) گزینه‌ی ۳ ابتدا معادله باید دو ریشه داشته باشد $\Delta=a^۲-۸>۰ \Rightarrow \sqrt{۸}$ یا $a<-\sqrt{۸}$ ریشه‌ها را α و β فرض می‌کنیم. می‌دانیم $\alpha=\frac{۱}{\beta^۲}$. از طرف دیگر می‌دانیم در معادله $x^۲-ax+۲=۰$ مجموع ریشه‌ها برابر و حاصل ضرب ریشه‌ها ۲ است. در نتیجه داریم:

$$\alpha\beta=۲ \Rightarrow \frac{۱}{\beta^۲}\times\beta=۲ \Rightarrow \beta=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \alpha=۴$$

$$\alpha+\beta=a \Rightarrow ۴+\frac{۱}{۲}=a \Rightarrow a=\frac{۹}{۲}$$

۹۷) گزینه‌ی ۴ با توجه به این‌که مجموع دو ریشه عددی مثبت است، لذا $-\frac{۲}{a}$ عددی مثبت است، در نتیجه a عددی منفی است. با توجه به این‌که a و c دو ریشه هستند، بنابراین برای حاصل ضرب و مجموع ریشه‌ها داریم:

$$a\times c=\frac{c}{a} \Rightarrow a^۲c=c' \xrightarrow[\text{(چرا؟)}]{c\neq۰} a^۲=۱ \Rightarrow a=-۱ \quad \text{یا} \quad a=+۱$$

حال با توجه به این‌که a باید عددی منفی باشد، $a=-۱$ است. بنابراین برای c داریم:

$$a+c=-\frac{۲}{a} \Rightarrow -۱+c=-\frac{۲}{-۱} \Rightarrow c=۳$$

۹۸) گزینه‌ی ۴ برای آن‌که معادله‌ی درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ دارای دو ریشه‌ی متمایز منفی باشد باید $\Delta>۰$ و $\frac{c}{a}>۰$ و $-\frac{b}{a}<۰$ باشند، پس:

$$x^۲+۲(m-۱)x+m^۲+۲m=۰$$

$$\Delta>۰ \Rightarrow ۴(m-۱)^۲-۴(m^۲+۲m)>۰ \Rightarrow ۴(m^۲-۲m+۱-m^۲-۲m)>۰ \Rightarrow -۴m+۱>۰ \Rightarrow m<\frac{۱}{۴}$$

$$\frac{c}{a}>۰ \Rightarrow m^۲+۲m>۰ \Rightarrow m<-۲ \quad \text{یا} \quad m>۰$$

$$-\frac{b}{a}<۰ \Rightarrow -۲(m-۱)<۰ \Rightarrow m>۱$$

اکنون بین سه نامساوی $m>۱$ و $(m<-۲$ یا $m>۰)$ و $m<\frac{۱}{۴}$ اشتراک می‌گیریم. اشتراک این سه نامساوی تهی است.

۹۹) گزینه‌ی ۳ باید معادله‌ی $y=۲x^۲-۴x+m-۳$ دو جواب مثبت داشته باشد. می‌دانیم معادله ی $ax^۲+bx+c=۰$ دارای دو جواب مثبت است هرگاه اولاً $\frac{c}{a}>۰$ ، ثانیاً $-\frac{b}{a}>۰$ و ثالثاً $\Delta>۰$ باشد. بنابراین داریم:

$$\left.\begin{matrix} (I)\frac{c}{a}>۰ \Rightarrow \frac{m-۳}{۲}>۰ \Rightarrow m>۳ \\ (II)-\frac{b}{a}>۰ \Rightarrow -\left(-\frac{۴}{۲}\right)>۰ \Rightarrow \text{همواره برقرار است} \\ (III)\Delta'>۰ \Rightarrow (-۲)^۲-۲\times(m-۳)>۰ \Rightarrow ۴-۲m+۶>۰ \Rightarrow m<۵ \end{matrix}\right\} \Rightarrow ۳<m<۵$$

۱۰۰) گزینه‌ی ۱

یادآوری

تابع $y=ax^۲+bx+c$ در صورتی محور x ها را در دو نقطه به طول‌های منفی قطع می‌کند که ۳ شرط زیر برقرار باشد:

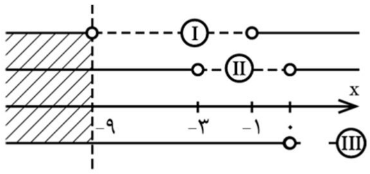
$۱)\Delta>۰$ $\qquad ۲)x_1+x_۲=-\frac{b}{a}<۰$ $\qquad ۳)x_1.x_۲=\frac{c}{a}>۰$

با توجه به یادآوری فوق، برای تابع $f(x)=ax^2+(a+3)x-1$ که محور x ها را در ۲ نقطه به طول‌های منفی قطع می‌کند، داریم:

$$1)\ \Delta=(a+3)^2-4(a)(-1)=a^2+10a+9>0\Rightarrow(a+9)(a+1)>0\Rightarrow\boxed{(a<-9)\cup(a>-1)}\qquad(I)$$

$$2)\ \frac{-(a+3)}{a}<0\Rightarrow\boxed{(a<-3)\cup(a>0)}\qquad(II)$$

$$3)\ \frac{-1}{a}>0\Rightarrow\boxed{a<0}\qquad(III)$$



جواب آخر: اشتراک جواب‌های (I), (II), (III) $\Leftarrow$ $\boxed{a<-9}$

۱۰۱) گزینه‌ی ۱ می‌دانیم معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ با شرط $\Delta>0$ و $b=0$ و $\frac{c}{a}<0$ دو ریشه‌ی قرینه‌ی هم دارد. معادله را بازنویسی می‌کنیم. داریم:

$$x^2+(m^2+m)x+m=2x\Rightarrow x^2+(m^2+m-2)x+m=0$$

$$\begin{cases}m^2+m-2=0\Rightarrow(m+2)(m-1)=0\Rightarrow m=-2\ ,\ m=1 & (1)\\ m<0 & (2)\end{cases}\quad\Rightarrow(1),(2)\Rightarrow m=-2$$

از (۱) و (۲) نتیجه گرفته‌ایم که $m=-2$ اما باید در شرط $\Delta>0$ نیز صدق کند:

$$\Delta=(m^2+m-2)^2-4m\xrightarrow{m=-2}(4-2-2)^2-4(-2)=8>0$$

پس $m=-2$ جواب مسأله است.

۱۰۲) گزینه‌ی ۲ می‌دانیم معادله‌ی درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ با شرط $c=a$ و $\Delta>0$ دارای دو ریشه‌ی معکوس هم است. لذا داریم:

$$m^2-6=m\Rightarrow m^2-m-6=0\Rightarrow(m+2)(m-3)=0\Rightarrow m=-2 \text{ یا } m=3$$

به ازای $m=3$، دلتای معادله عددی منفی است، لذا قابل قبول نیست. اما به ازای $m=-2$، دلتای معادله عددی مثبت است، بنابراین $m=-2$ قابل قبول است.

۱۰۳) گزینه‌ی ۲ معادله دارای دو ریشه حقیقی است، بنابراین:

$$mx^2+3x+m^2-2=0\xrightarrow{\Delta>0}9-4m(m^2-2)>0\ (*)$$

به علاوه در معادله‌ی درجه دوم $ax^2+bx+c=0$، مجموع ریشه‌ها برابر با $\frac{-b}{a}$ و حاصل ضرب آن‌ها برابر با $\frac{c}{a}$ است. پس داریم:

$$mx^2+3x+m^2-2=0\Rightarrow \text{حاصل ضرب ریشه‌ها}: P=\frac{m^2-2}{m}$$

چون ریشه‌های معادله معکوس یکدیگرند، بنابراین حاصل ضرب آن‌ها برابر با ۱ است و داریم:

$$P=1\Rightarrow\frac{m^2-2}{m}=1\Rightarrow m^2-m-2=0\Rightarrow(m+1)(m-2)=0\Rightarrow\begin{cases}m=-1\\ m=2\end{cases}$$

حال هر یک از مقادیر به دست آمده را در رابطه‌ی (*) قرار می‌دهیم، داریم:

$$\begin{cases}m=-1\xrightarrow{(*)}9-4(-1)(1-2)>0\Rightarrow5>0\Rightarrow \text{قابل قبول}\\ m=2\Rightarrow9-4\times2(4-2)>0\Rightarrow-7<0\Rightarrow \text{غیرقابل قبول}\end{cases}$$

بنابراین فقط به ازای $m=-1$ دلتای معادله مثبت و معادله دارای دو ریشه است.

۱۰۴) گزینه‌ی ۳ $$2x^2+(m-1)x=1\Rightarrow2x^2+(m-1)x-1=0\Rightarrow S=\frac{1-m}{2}\ ,\ P=-\frac{1}{2}\quad(*)$$

$$x_۱^۲+x_۲^۲=\frac{۱۳}{۴}\Rightarrow S^۲-۲p=\frac{۱۳}{۴}\xrightarrow{(*)}\frac{(۱-m)^۲}{۴}-۲\left(-\frac{۱}{۲}\right)=\frac{۱۳}{۴}$$

$$\Rightarrow (۱-m)^۲+۴=۱۳\Rightarrow (m-۱)^۲=۹\Rightarrow m-۱=\pm۳\Rightarrow m=-۲\ ,\ m=۴$$

که هر دو جواب برای m مورد قبول است و $\Delta=(m-۱)^۲+۸$ همواره مثبت است و معادله دو جواب حقیقی دارد..

۱۰۵) گزینه‌ی ۳

نکته: $\text{Sin}^۴\alpha+\cos^۴\alpha=۱-۲\text{Sin}^۲\alpha\text{Cos}^۲\alpha$

$$\frac{x_۱}{x_۲^۳}+\frac{x_۲}{x_۱^۳}=\frac{x_۱^۴+x_۲^۴}{x_۱^۳x_۲^۳}$$

حال با جایگذاری عدد $x_۱=\text{Sin}\alpha$ و $x_۲=\text{Cos}\alpha$ ، در رابطه‌ی به دست آمده داریم:

$$\frac{x_۱^۴+x_۲^۴}{(x_۱x_۲)^۳}=\frac{\text{Sin}^۴\alpha+\text{Cox}^۴\alpha}{(\text{Sin}\alpha\text{Cos}\alpha)^۳}=\frac{۱-۲\text{Sin}^۲\alpha\text{Cos}^۲\alpha}{(\text{Sin}\alpha\text{Cos}\alpha)^۳}=\frac{۱-۲(\text{Sin}\alpha\text{Cos}\alpha)^۲}{(\text{Sin}\alpha\text{Cos}\alpha)^۳}$$

کافی است برای محاسبه‌ی رابطه‌ی اخیر حاصل ضرب ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم یعنی $\text{Sin}\alpha\text{Cos}\alpha$ که می‌شود c در آن جایگذاری کنیم، بنابراین:

$$\frac{۱-۲(\text{Sin}\alpha\text{Cos}\alpha)^۲}{(\text{Sin}\alpha\text{Cos}\alpha)^۳}=\frac{۱-۲c^۲}{c^۳}$$

۱۰۶) گزینه‌ی ۴ در معادله‌ی $x^۲-۲x+\frac{۳}{۴}=۰$ داریم $\Delta=۱>۰$ لذا مجموع ریشه‌ها برابر با $S=\frac{-b}{a}=۲$ و حاصل ضرب آن‌ها برابر با $P=\frac{c}{a}=\frac{۳}{۴}$ است، پس داریم:

$$x_۱^۴+x_۲^۴=\left(x_۱^۲+x_۲^۲\right)^۲-۲x_۱^۲x_۲^۲=\left((x_۱+x_۲)^۲-۲x_۱x_۲\right)^۲-۲P^۲=(S^۲-۲P)^۲-۲P^۲$$

$$=\left(۴-۲\left(\frac{۳}{۴}\right)\right)^۲-۲\left(\frac{۹}{۱۶}\right)=\left(۴-\frac{۳}{۲}\right)^۲-\frac{۹}{۸}=\frac{۲۵}{۴}-\frac{۹}{۸}=\frac{۵۰-۹}{۸}=\frac{۴۱}{۸}$$

۱۰۷) گزینه‌ی ۳

$$۴x^۲-۱۲x+۱=۰\Rightarrow S=۳\ ,\ P=\frac{۱}{۴}\quad(*)$$

$$A=\frac{۱}{\sqrt{\alpha}}+\frac{۱}{\sqrt{\beta}}=\frac{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha\beta}}=\frac{\sqrt{S+۲\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}\overset{(*)}{=}\frac{\sqrt{۳+۲\times\frac{۱}{۲}}}{\frac{۱}{۲}}=۴$$

۱۰۸) گزینه‌ی ۱

$$\left.\begin{array}{l}x_۱\sqrt{x_۲}+x_۲\sqrt{x_۱}=\sqrt{x_۱x_۲}\left(\sqrt{x_۱}+\sqrt{x_۲}\right)=\sqrt{P}\times\sqrt{S+۲\sqrt{P}}\\ x^۲-۳x+۱=۰\Rightarrow S=۳\ ,P=۱\end{array}\right\}\Rightarrow x_۱\sqrt{x_۲}+x_۲\sqrt{x_۱}=\sqrt{۱}\times\sqrt{۳+۲\sqrt{۱}}=\sqrt{۵}$$

۱۰۹) گزینه‌ی ۴ در معادله‌ی درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ اگر a+c=b باشد، یکی از ریشه‌ها $x=-۱$ و دیگری $x=-\frac{c}{a}$ است. داریم:

$$x^۲-۷x-۸=۰\xrightarrow{a+c=b}\begin{cases}x_۱=-۱\\ x_۲=۸\end{cases}\Rightarrow\sqrt[۳]{x_۱}+\sqrt[۳]{x_۲}=\sqrt[۳]{-۱}+\sqrt[۳]{۸}=-۱+۲=۱$$

۱۱۰) گزینه‌ی ۲ با توجه به این‌که $۴a+c=-۲b$ ، بنابراین $۴a+۲b+c=۰$ است. با جایگذاری x=۲ در معادله‌ی درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ به تساوی $۴a+۲b+c=۰$ می‌رسیم و لذا $x=۲$ یک ریشه معادله است. پس اگر $x_۲$ ریشه‌ی دیگر معادله باشد، داریم:

$$x_۱x_۲=۲x_۲=\frac{c}{a}\Rightarrow x_۲=\frac{c}{۲a}$$

۱۱۱) گزینه‌ی ۱

نکته هرگاه دو معادله درجه دوم یک ریشه مشترک داشته باشند، با تشکیل یک دستگاه معادلات، ریشه مشترک را به دست می‌آوریم، برای تعیین ریشه مشترک دو معادله بهتر است بین معادلات آنها جملات درجه دوم را حذف کنیم از رابطه‌ی حاصل، ریشه مشترک دو معادله به دست می‌آید، اگر مسأله پارامتری باشد ریشه مشترک معادله را به دلخواه در یکی از دو معادله قرار می‌دهیم.

$$\times(-)\begin{cases}x^2+mx+2=0 \quad (1)\\ x^2+(m+1)x+3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-x^2-mx-2=0\\ x^2+(m+1)x+3=0\end{cases}\xrightarrow{\text{جمع}}$$

$$-x^2-mx-2+x^2+(m+1)x+3=0\Rightarrow x=-1\xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله ی}(1)}$$

$$1-m+2=0\Rightarrow m=3$$

۱۱۲) گزینه‌ی ۱ با قرار دادن $x=1$ در معادله‌ی داده شده، a را به دست می‌آوریم.

$$x(x^2+x-a)=-2\xrightarrow{x=1}1(1+1-a)=-2\Rightarrow a=4$$

بنابراین معادله‌ی داده شده به صورت $x^3+x^2-4x+2=0$ می‌باشد. حال با تقسیم معادله بر $x-1$ ، ($x=1$ یک ریشه معادله است) آن را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$x^3+x^2-4x+2=0\Rightarrow(x-1)(x^2+2x-2)=0$$

به جز $x=1$ دو ریشه دیگر، ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم داخل پرانتز می‌باشد (چون دلتا مثبت است) لذا مجموع این دو ریشه برابر با $-\frac{b}{a}=-2$ است.

۱۱۳) گزینه‌ی ۳

$$f(x)=2x^3-5x^2-x+m\xrightarrow{x=2\ \text{ریشه ی تابع است}}f(2)=0\Rightarrow 16-20-2+m=0\Rightarrow m=6$$

پس ضابطه‌ی تابع به صورت $y=2x^3-5x^2-x+6$ است. معادله‌ی $y=2x^3-5x^2-x+6$ را حل می‌کنیم. چون می‌دانیم $x=2$ یک جواب معادله است، بنابراین عبارت $y=2x^2-5x^2-x+6$ بر $(x-2)$ بخش‌پذیر است. داریم:

$$2x^3-5x^2-x+6=0\Rightarrow(x-2)(2x^2-x-3)=0\Rightarrow(x-2)(x+1)(2x-3)=0$$

بنابراین دو ریشه‌ی دیگر تابع $x=\frac{3}{2}$ و $x=-1$ است.

۱۱۴) گزینه‌ی ۴ اگر عددی ریشه‌ی یک معادله باشد، در این صورت در آن معادله صدق می‌کند، داریم:

$$\beta^2+3\beta-1=0\xrightarrow{\times\beta}\beta^3+3\beta^2-\beta=0\Rightarrow\beta^3=\beta-3\beta^2$$

$$\beta^3-2\alpha^2+\beta^2+\alpha=(\beta-3\beta^2)-2\alpha^2+\beta^2+\alpha=-2\beta^2-2\alpha^2+\alpha+\beta$$

$$=-2(\alpha^2+\beta^2)+\alpha+\beta=-2((\beta+\alpha)^2-2\alpha\beta)+(\alpha+\beta)=-2(S^2-2P)+S$$

$$=-2\left(\left(-\frac{3}{1}\right)^2-2\times(-1)\right)+\left(-\frac{3}{1}\right)=-2(9+2)-3=-25$$

۱۱۵) گزینه‌ی ۴ چون x_1 و x_2 ریشه‌های معادله هستند پس در خود معادله صدق می‌کند.

$$x^2+mx_1-m^3+1=0\Rightarrow x_1^2+mx_1=m^3-1 \quad (1)$$

$$x_1^2+x_2^2=S^2-2P=\left(-\frac{m}{1}\right)^2-2\left(-m^3+1\right)=m^2+2m^3-2 \quad (2)$$

$$\frac{x_1^2+mx_1}{x_1^2+x_2^2}=\frac{1}{2}\xrightarrow[(2)]{(1)}\frac{m^3-1}{m^2+2m^3-2}=\frac{1}{2}\Rightarrow 2m^3-2=m^2+2m^3-2$$

$$\Rightarrow m^2=0\Rightarrow m=0 \quad \text{غ ق ق}$$

اگر $m=۰$ باشد، معادله به صورت $x^۲+۱=۰$ تبدیل شود در این صورت فاقد ریشه است.

پاسخنامه درسنامه نهم

۱۱۶) گزینه‌ی ۳ S و P را می‌یابیم و با استفاده از معادله‌ی $x^۲-Sx+P=۰$ ، به جواب مورد نظر می‌رسیم.

$$P=x_۱x_۲=\frac{a}{\sqrt{a}-\sqrt{a-b}}\times\frac{a}{\sqrt{a}+\sqrt{a-b}}=\frac{a^۲}{b}$$

$$S=x_۱+x_۲=\frac{a}{\sqrt{a}-\sqrt{a-b}}+\frac{a}{\sqrt{a}+\sqrt{a-b}}=\frac{۲a\sqrt{a}}{b}$$

در نتیجه:

$$x^۲-Sx+P=۰\xrightarrow{p=\frac{a^۲}{b}\ ,\ S=\frac{۲a\sqrt{a}}{b}}x^۲-\frac{۲a\sqrt{a}}{b}x+\frac{a^۲}{b}=۰\xrightarrow{\times b}bx^۲-۲a\sqrt{a}x+a^۲=۰$$

۱۱۷) گزینه‌ی ۴ با توجه به این‌که $\sqrt{۵}-۳$ یک ریشه معادله است، ریشه‌ی دیگر معادله باید $-۳-\sqrt{۵}$ باشد تا ضرایب معادله گویا شود. داریم:

$$x_۱=-۳+\sqrt{۵}\Rightarrow x_۲=-۳-\sqrt{۵}$$

$$x_۱^۲+x_۲^۲=(x_۱+x_۲)^۲-۲x_۱x_۲\Rightarrow x_۱^۲+x_۲^۲=S^۲-۲p(*)$$

$$S=x_۱+x_۲=-۳+\sqrt{۵}-۳-\sqrt{۵}=-۶$$

$$p=x_۱x_۲=(\sqrt{۵}-۳)(-۳-\sqrt{۵})=(-۳+\sqrt{۵})(-۳-\sqrt{۵})=(-۳)^۲-(\sqrt{۵})^۲=۹-۵=۴$$

$$(*)\Rightarrow S^۲-۲P\xrightarrow[P=۴]{S=-۶}(-۶)^۲-۲(۴)=۲۸$$

۱۱۸) گزینه‌ی ۴ اگر $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادله‌ی $۳x^۲-۴x-۱=۰$ باشند، آن‌گاه ریشه‌های معادله‌ی $۳x^۲+ax+b=۰$ به صورت $X_۱=x_۱+۱$ و $X_۱=X_۲+۱$ هستند. بنابراین $x=X-۱$ است و داریم:

$$۳x^۲-۴x-۱=۰\Rightarrow ۳(X-۱)^۲-۴(X-۱)-۱=۰\Rightarrow ۳X^۲-۱۰X+۶=۰\Rightarrow a=-۱۰\quad ,\quad b=۶$$

۱۱۹) گزینه‌ی ۲ اگر ریشه‌های معادله‌ی $۳x^۲+۷x+۱=۰$ را $x_۱$ و $x_۲$ و ریشه‌های معادله‌ی $x^۲+ax+b=۰$ را $X_۱$ و $X_۲$ فرض کنیم، آن‌گاه $X_۱=x_۱+۱$ و لذا $x_۲=X_۲+۱$ ، بنابراین داریم:

$$۳x^۲+۷x+۱=۰\Rightarrow ۳(X-۱)^۲+۷(X-۱)+۱=۰\Rightarrow ۳(X^۲-۲X+۱)+۷X-۷+۱=۰\Rightarrow ۳X^۲+X-۳=۰$$

بنابراین معادله‌ی جدید به صورت $۳x^۲+x-۳$ است با ضرب طرفین معادله در $\frac{۱}{۳}$ داریم:

$$x^۲+\frac{x}{۳}-۱=۰\Rightarrow b=-۱$$

۱۲۰) گزینه‌ی ۱ ابتدا معادله‌ای را می‌نویسیم که ریشه‌هایش نصف ریشه‌های معادله $x^۲-۲ax+a+۱=۰$ باشد. داریم:

$$X_{\text{جدید}}=\frac{x_{\text{قدیم}}}{۲}\Rightarrow x=۲X$$

$$x^۲-۲ax+a+۱=۰\Rightarrow (۲X)^۲-۲a(۲X)+a+۱=۰\Rightarrow ۴X^۲-۴aX+a+۱=۰\xrightarrow{\div ۴}X^۲-aX+\frac{a+۱}{۴}=۰$$

بنابراین داریم:

$$x^۲-ax+\frac{a+۱}{۴}\equiv x^۲+(b+۱)x-۲b\Rightarrow\begin{cases}-a=b+۱\\ \frac{a+۱}{۴}=-۲b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b+a=-۱\\ a+۸b=-۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=۰\\ a=-۱\end{cases}\Rightarrow ۲b-a=۱$$

۱۲۱) گزینه‌ی ۳

$$2x^2-3x-4=0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta=\frac{-b}{a}=\frac{-(-3)}{2}=\frac{3}{2} \\ \alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{-4}{2}=-2 \end{cases}$$

ریشه‌های معادله‌ی موردنظر عبارتند از: $\alpha'=\frac{1}{\alpha}+1$ و $\beta'=\frac{1}{\beta}+1$، پس:

$$\begin{cases} S=\alpha'+\beta'=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+2=\frac{\frac{3}{2}}{-2}+2=\frac{5}{4} \\ P=\alpha'\beta'=\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+1=\frac{-1}{2}+\left(\frac{-3}{4}\right)+1=\frac{-1}{4} \end{cases}$$

$$x^2-Sx+P=0 \Rightarrow x^2-\frac{5}{4}x-\frac{1}{4}=0 \xrightarrow{\times 4} 4x^2-5x-1=0$$

۱۲۲) گزینه‌ی ۲ در معادلـه‌ی درجـه دوم $ax^2+bx+c=0$ اگـر $a+c=b$ باشـد، یکـی از ریشـه‌ها -1 و دیگـری $-\frac{c}{a}$ اسـت. هـم‌چنین اگـر $a+b+c=0$ باشد یکی از ریشه‌ها ۱ و دیگری $\frac{c}{a}$ است و برعکس. چون یک ریشه‌ی معادله‌ی اول $\alpha=-1$ و در نتیجه یک ریشـه‌ی معادلـه‌ی دوم $\frac{1}{\alpha^2}=1$ می‌باشد، لذا باید مجموع ضرایب معادله‌ی دوم صفر باشد:

$$4+(-k)+25=0 \Rightarrow k=29$$

۱۲۳) گزینه‌ی ۲ اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ باشد، داریم:

$$S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a} \quad , \quad P=\alpha.\beta=\frac{c}{a}$$

با مرتب کردن معادله‌ی داده شده به معادله‌ی $2x^2-3x-1=0$ می‌رسیم. بنابراین:

$$S=\alpha+\beta=\frac{3}{2} \quad , \quad P=\alpha.\beta=-\frac{1}{2}$$

هم‌چنین اگر S و P به ترتیب حاصل جمع و حاصل ضرب ریشه‌ها باشند، معادله‌ی موردنظر را می‌توان به صورت $x^2-Sx+P=0$ نوشت. ریشـه‌هـای معادله‌ی $8x^2+kx-1=0$، $\alpha\beta^2$ و $\alpha^2\beta$ هستند. داریم:

$$S_{\text{جدید}}=\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=\alpha\beta(\alpha+\beta)=P.S=\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{4}$$

$$P_{\text{جدید}}=\alpha^2\beta.\alpha\beta^2=\alpha^3\beta^3=(\alpha\beta)^3=P^3=\left(-\frac{1}{2}\right)^3=-\frac{1}{8}$$

بنابراین معادله‌ی متناظر به صورت $x^2+\frac{3}{4}x-\frac{1}{8}=0$ می‌باشد، بـا ضـرب طـرفین معادلـه در عـدد ۸، ایـن معادلـه بـه صـورت $8x^2+6x-1=0$ درمی‌آید و لذا $k=6$ است.

۱۲۴) گزینه‌ی ۳

$$x=\sqrt{2}-\sqrt{3} \xrightarrow{\text{توان دو}} x^2=\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow x^2=2+3-2\sqrt{6}$$

$$\Rightarrow x^2-5=-2\sqrt{6} \Rightarrow (x^2-5)^2=(-2\sqrt{6})^2 \Rightarrow x^4-10x^2+25=24 \Rightarrow x^4-10x^2+1=0$$

حال دو عبارت x^4-10x^2+1 و x^4+ax^2+b با هم متحد قرار می‌دهیم.

$$x^4+ax^2+b=x^4-10x^2+1 \Rightarrow \begin{cases} a=-10 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow a+b=-9$$

۱۲۵) گزینه‌ی ۳ برای اینکه معادله‌ی درجه‌ی دوم دارای ریشه‌های مساوی باشد باید $\Delta=0$ داریم:

$$\Delta=\left(2a\sqrt{a^2-3}\right)^2-4(4)=0\Rightarrow 4a^2(a^2-3)-16=0\xrightarrow{\div 4}a^2(a^2-3)-4=0$$

$$\Rightarrow a^4-3a^2-4=0\xrightarrow{a^2=t}t^2-3t-4=0\xrightarrow{a+c=b}\begin{cases}t_1=-1 & (\text{غ ق ق})\\ t_2=4 & \text{ق ق}\end{cases}\Rightarrow a^2=4\Rightarrow a=\pm 2$$

۱۲۶) گزینه‌ی ۱

$$x^2+x+1=u\Rightarrow u^2-3u+2=0\Rightarrow (u-2)(u-1)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}u=2\Rightarrow x^2+x+1=2\Rightarrow x^2+x-1=0\xrightarrow{\Delta>0}\text{دو ریشه حقیقی دارد}\\ u=1\Rightarrow x^2+x+1=1\Rightarrow x^2+x=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\x=-1\end{cases}\Rightarrow \text{دو ریشه حقیقی دارد}\end{cases}$$

بنابراین معادله مجموعاً چهار ریشه حقیقی دارد.

۱۲۷) گزینه‌ی ۱ معادله را با روش تغییر متغیر حل می‌کنیم:

$$\left(x^2+1\right)^2-7\left(x^2+1\right)+12=0\xrightarrow{x^2+1=t}t^2-7t+12=0\Rightarrow (t-4)(t-3)=0\Rightarrow\begin{cases}t=4\\t=3\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x^2+1=4\Rightarrow x^2=3\Rightarrow x_1\ ,\ x_2=\pm\sqrt{3}\\ x^2+1=3\Rightarrow x^2=2\Rightarrow x_1\ ,\ x_2=\pm\sqrt{2}\end{cases}$$

بنابراین معادله‌ی داده شده در مجموع چهار ریشه دارد.

۱۲۸) گزینه‌ی ۲ معادله را از روش تغییر متغیر، حل می‌کنیم. داریم:

$$\left(x^2+x\right)^2-18(x^2+x)+72=0\xrightarrow{x^2+x=t}t^2-18t+72=0\Rightarrow (t-6)(t-12)=0\Rightarrow\begin{cases}t=6\\t=11\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x^2+x=12\Rightarrow x^2+x-12=0\xrightarrow{\text{۲ ریشه ی حقیقی متمایز}}x_1+x_2=-1\\ x^2+x=6\Rightarrow x^2+x-6=0\xrightarrow{\text{۲ ریشه ی حقیقی متمایز}}x_3+x_4=-1\end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع ریشه‌ها}=x_1+x_2+x_3+x_4=-2$$

۱۲۹) گزینه‌ی ۴ با فرض آن‌که a_2، a_5 و a_8 جملات یک دنباله‌ی هندسی با قدر نسبت q باشند و چون a_2 ، $2a_5$، $2a_8$، جملات متوالی یک دنباله‌ی حسابی می‌باشند، لذا داریم:

$$2(2a_5)=a_2+a_8\Rightarrow 4a_5=a_2+a_8\Rightarrow 4(a_1q^4)=a_1q+a_1q^7\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4a_1q^4=a_1q(1+q^6)\xrightarrow{\div a_1q}q^6-4q^3+1=0\xrightarrow{\text{تغییر متغیر}\ q^3=A}$$

$$A^2-4A+1=0\xrightarrow{\text{حل معادله درجه دوم}}A=2\pm\sqrt{3}$$

اگر بزرگترین جمله را a_8 و کوچک‌ترین جمله را a_2 است بنابراین، داریم:

$$\frac{a_8}{a_2}=q^6=(q^3)^2=(2+\sqrt{3})^2=7+4\sqrt{3}$$

۱۳۰) گزینه‌ی ۴ چون چند جمله‌ای بر x+2 بخش پذیر است بنابراین $f(-2)=0$ (چرا؟) و از آنجا مقدار a حاصل می‌شود.

$$(-2)^4+a(-2)^3-8(-2)=0\Rightarrow 8a=32\Rightarrow a=4$$

حال باید معادله‌ی $x^4+ax^3-8x=0$ را حل کرد تا بتوان کوچک‌ترین ریشه را پیدا کرد.

$$x^4+ax^3-8x=0\Rightarrow x\left(x^3+4x^2-8\right)=0$$

در صورت سؤال قید شده است که (x+2) یک عامل عبارت است، بنابراین عبارت x^3+4x^2-8 را بر (x+2) تقسیم می‌کنیم و با حل عامل درجه دوم

به جواب موردنظر می‌رسیم.

$$\begin{array}{r|l} x^3+4x^2-8 & x+2 \\ \hline -(x^3+2x^2) & \boxed{x^2+2x-4} \\ \hline 2x^2-8 & \\ -(2x^2+4x) & \\ \hline -4x-8 & \\ -(-4x-8) & \\ \hline 0 & \end{array} \Rightarrow x^2+2x-4=0 \xrightarrow{\sqrt{\Delta}=\sqrt{20}} = \frac{-2\pm 2\sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow x=-1\pm\sqrt{5}$$

در نتیجه از بین ریشه‌های 0 ، -2 ، $-1+\sqrt{5}$ ، $-1-\sqrt{5}$ به کوچک‌ترین ریشه $x=-1-\sqrt{5}$ می‌باشد.

۱۳۱) گزینه‌ی $\boxed{3}$ با تغییر متغیر $\sqrt{x}=t$ داریم:

$$x-2\sqrt{x}+m-1=0 \xrightarrow{\sqrt{x}=t} t^2-2t+m-1=0$$

معادله‌ی $x-2\sqrt{x}+m-1=0$ در صورتی دو جواب متمایز دارد که معادله‌ی $t^2-2t+m-1=0$ دارای دو جواب نامنفی متمایز باشد.

$$\text{شرط وجود دو جواب:}\begin{cases} \Delta>0 \Rightarrow 4-4(m-1)>0 \Rightarrow 8-4m>0 \Rightarrow m<2 \\ \frac{c}{a}\geq 0 \Rightarrow \frac{m-1}{1}\geq 0 \Rightarrow m\geq 1 \\ -\frac{b}{a}>0 \Rightarrow -\frac{-2}{1}>0 \Rightarrow \text{برقرار است} \end{cases} \Rightarrow 1\leq m<2$$

۱۳۲) گزینه‌ی $\boxed{3}$ مجموع ضرایب معادله‌ی $x^3+3x^2-6x+2+mx-m=0$ برابر صفر است، در نتیجه یکی از ریشه‌های آن ۱ می‌باشد و چند جمله‌ای بر $x-1$ بخش‌پذیر است.

$$(x-1)(x^2+4x-2+m)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \quad \text{ریشه مثبت} \\ x^2+4x-2+m=0 \end{cases}$$

معادله درجه دوم $x^2+4x-2+m=0$ دارای دو ریشه منفی است. بنابراین:

$$\begin{cases} \Delta>0 \Rightarrow \Delta=16-4(-2+m)>0 \Rightarrow m<6 \\ -\frac{b}{a}=-4<0 \\ \frac{c}{a}=m-2>0 \Rightarrow m>2 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} 2<m<6$$

۱۳۳) گزینه‌ی $\boxed{1}$

$$x^3+(a-1)x^2+(4-a)x=4 \Rightarrow x^3+(a-1)x^2+(4-a)x-4=0$$

چون مجموع ضرایب معادله برابر صفر می‌باشد، لذا یک ریشه‌ی معادله $x=1$ است و می‌توان نتیجه گرفت که در تجزیه عبارت $x^3+(a-1)x^2+(4-a)x-4$ یک عامل $(x-1)$ وجود دارد. داریم:

$$x^3+(a-1)x^2+(4-a)x-4=(x-1)(x^2+ax+4)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x^2+ax+4=0 \end{cases}$$

برای این که معادله، ۳ ریشه‌ی مثبت داشته باشد باید معادله $x^2+ax+4=0$ هم دو ریشه‌ی مثبت داشته باشد. درنتیجه باید:

$$\begin{cases} \Delta>0 \Rightarrow a^2-16>0 \Rightarrow a>4 \quad \text{یا} \quad a<-4 \\ \frac{c}{a}>0 \Rightarrow \frac{4}{1}>0 \\ -\frac{b}{a}>0 \Rightarrow \frac{-a}{1}>0 \Rightarrow a<0 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} a<-4$$

۱۳۴) گزینه‌ی ۲

$$x^4-(m+2)x^2+m+5=0 \xrightarrow{x^2=t} t^2-(m+2)t+m+5=0$$

معادله‌ی $x^4-(m+2)x^2+m+5=0$ در صورتی دارای چهار ریشه‌ی حقیقی متمایز است که معادله‌ی $t^2-(m+2)t+m+5=0$ دارای دو ریشه‌ی حقیقی مثبت متمایز باشد. داریم:

شرط وجود دو ریشه‌ی حقیقی مثبت متمایز:
$$\begin{cases}\Delta>0 \Rightarrow \left(-(m+2)\right)^2-4\times1\times(m+5)>0 \Rightarrow m^2>16 \Rightarrow m>4, m<-4 & (1)\\ \dfrac{c}{a}>0 \Rightarrow \dfrac{m+5}{1}>0 \Rightarrow m>-5 & (2)\\ -\dfrac{b}{a}>0 \Rightarrow \dfrac{m+2}{1}>0 \Rightarrow m>-2 & (3)\end{cases}$$

$$\Rightarrow (1),(2),(3) \Rightarrow m>4$$

درسنامه دهم

۱۳۵) گزینه‌ی ۳ چون نمودار بالای محور x ها نیست پس عرض نقاط منفی یا صفر است.

$$y\le 0 \Rightarrow \Delta\le 0\ ,\ a<0$$

$$1)\ \Delta\le 0 \Rightarrow 4m^2-4(m-6)(-1)\le 0 \Rightarrow m^2+m-6\le 0$$

$$\Rightarrow -3\le m\le 2$$

m	$-\infty$		-3		$+2$		$+\infty$
Δ		+	0	−	0	+	

$$2)\ a<0 \Rightarrow m-6<0 \Rightarrow m<6$$

$$(-3\le m\le 2)\cap(m<6) \Rightarrow -3\le m\le 2$$

۱۳۶) گزینه‌ی ۳ تابع $f(x)=ax^2+bx+c$ را در نظر می‌گیریم، چون $a+b+c<0$ پس $f(1)<0$ و چون f فاقد ریشه است و $f(1)<0$ پس $a<0$ و نمودار تابع زیر محور x ها قرار دارد بنابراین $f(0)<0$ است یعنی $c<0$.

۱۳۷) گزینه‌ی ۲ برای این‌که نمودار سهمی $y=ax^2+bx+c$ بالای محور x ها قرار بگیرد باید $a>0$ و $\Delta<0$ ، شرط $a>0$ در این سهمی برقرار است پس کافی است $\Delta<0$ باشد.

$$\Delta<0 \Rightarrow (3a-2)^2-4(1)(2a)<0 \Rightarrow 9a^2-20a+4<0$$

$$9a^2-20a+4=0 \Rightarrow a=\frac{20\pm16}{18} \Rightarrow \begin{cases}a=2\\ a=\dfrac{2}{9}\end{cases}$$

a	$-\infty$		$\frac{2}{9}$		2		$+\infty$
$9a^2-20a+4$		+	0	−	0	+	

$$\Rightarrow \frac{2}{9}<a<2$$

۱۳۸) گزینه‌ی ۲ برای این‌که عبارت درجه دوم ax^2+bx+c همواره مثبت باشد، باید $a>0$ و $\Delta<0$ باشد. بنابراین داریم:

$$\begin{cases}m-1>0 \Rightarrow m>1 & (*)\\ \Delta'<0 \Rightarrow 9-(m-1)(2m+1)<0 \Rightarrow 9-2m^2+m+1<0 \Rightarrow 2m^2-m-10>0\end{cases}$$

$$\Rightarrow (2m-5)(m+2)>0 \Rightarrow m<-2 \text{ یا } m>\frac{5}{2} \quad (**)$$

از اشتراک روابط (*) و (**)، $m>\frac{5}{2}$ یا $m>2.5$ به دست می‌آید.

۱۳۹) گزینه‌ی ۱ می‌دانیم شرط آن‌که عبارت درجه دوم ax^2+bx+c برای هر x منفی باشد، آن است که $a<0$ و $\Delta<0$ بنابراین برای عبارت $ax^2+4x+a-3$ می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} a<0 \quad (*) \\ \Delta<0 \Rightarrow 16-4a(a-3)<0 \xrightarrow{\div(-4)} a^2-3a-4>0 \Rightarrow \begin{cases} a>4 \quad (**) \\ \text{یا} \\ a<-1 \end{cases} \end{cases}$$

اشتراک (*) و (**) به فرم $a<-1$ خواهد بود، پس $a\in(-\infty,-1)$ در نتیجه $k=-1$.

۱۴۰) گزینه‌ی ۱ نمودار تابع $y=2x^2+(m+1)x+m+6$ با نیمساز ناحیه‌ی اول یعنی $y=x\ (x>0)$ قطع می‌دهیم. داریم:

$$\begin{cases} y=2x^2+(m+1)x+m+6 \\ y=x \end{cases} \Rightarrow 2x^2+(m+1)x+(m+6)=x \Rightarrow$$

$$2x^2+mx+(m+6)=0$$

شرط آن‌که نمودار تابع و نیمساز ناحیه‌ی اول بر هم مماس باشند، لازم است که معادله‌ی تقاطع دارای ریشه‌ی مضاعف باشد، یعنی $\Delta=0$ شود. بنابراین:

$$\Delta=0 \Rightarrow m^2-4(2)(m+6)=0 \Rightarrow m^2-8m-48=0 \Rightarrow$$

$$(m-12)(m+4)=0 \Rightarrow \begin{cases} m_1=12 \\ m_2=-4 \end{cases}$$

تا این مرحله گزینه‌ی (۲) حذف می‌شود حالا باید شرط $x>0$ را بررسی کنیم تا به جواب مطلوب برسیم. طول نقطه x تماس، ریشه‌ی مضاعف معادله‌ی تقاطع یعنی $x=-\frac{m}{4}$ می‌باشد. اگر $x>0$ باشد بنابراین $-\frac{m}{4}>0$ پس $m<0$ می‌شود بنابراین $m=-4$ جواب موردنظر می‌باشد.

۱۴۱) گزینه‌ی ۴ نقطه تلاقی $y=2x^3-mx^2+m$ با خط $y=2x$ را پیدا می‌کنیم:

$$2x^3-mx^2+m-2x=0$$

می‌دانیم شرط مماس آن است که معادله حاصل دارای دو ریشه مساوی هم باشد:

$$2x(x^2-1)-m(x^2-1)=0 \Rightarrow (x^2-1)(2x-m)=0$$

ریشه‌های معادله به صورت $\frac{m}{2}$، -1 و 1 است لذا شرط ریشه مضاعف آن است که $m=2$ یا $m=-2$ باشد.

۱۴۲) گزینه‌ی ۱ چون سهمی در یک نقطه (با طول منفی) بر محور x ها مماس است، بنابراین معادله باید دارای ریشه‌ی مضاعف باشد.

$$y=(ax+3)(-x-2)=-ax^2-2ax-3x-6=-ax^2-(2a+3)x-6 \quad \text{ریشه مضاعف} =-\frac{b}{2a}=\frac{2a+3}{-2a}$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{2a+3}{-2a} \\ x=-2 \end{cases} \Rightarrow \frac{2a+3}{-2a}=-2 \Rightarrow 2a+3=4a \Rightarrow 2a=3 \Rightarrow a=\frac{3}{2}=1/5$$

۱۴۳) گزینه‌ی ۳ روش اول: نمودار سهمی از نقاط (۰, ۳) و (۱, ۴) می‌گذرد و x=۱ طول رأس سهمی است. پس خواهیم داشت:

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

$$(0,3)\in f \Rightarrow 3=0+0+c \Rightarrow C=3$$

$$(1,4)\in f \Rightarrow 4=a(1)^3+b(1)+3 \Rightarrow a+b=1$$

$$\begin{cases} x=1 \\ x=-\dfrac{b}{2a} \quad \text{طول راس سهمی} \end{cases} \Rightarrow 1=-\frac{b}{2a} \Rightarrow b=-2a$$

$$\begin{cases} a+b=1 \\ b=-2a \end{cases} \Rightarrow a-2a=1 \Rightarrow a=-1\ ,\ b=2$$

لذا داریم:

$$a-b+c=-1-2+3=0$$

روش دوم: (۱،۴) راس سهمی است پس معادله آن به صورت $y=a(x-1)^2+4$ است که از (۰،۳) می‌گذرد پس $3=a+4$ لذا $a=-1$ درنتیجه

$y=-x^2+2x+3$ که $b=2$ و $c=3$.

۱۴۴) گزینه‌ی ۲ شرط آن‌که نمودار تابع درجه‌ی دوم به صورت ax^2+bx+c از هر چهار ناحیه محورهای مختصات بگذرد آن است که دو ریشه‌ی مختلف العلامت داشته باشد، یعنی باید $\Delta>0$ و $\frac{c}{a}<0$ باشد، داریم:

$$\begin{cases}\Delta>0\Rightarrow 1-8(m+1)>0\Rightarrow 8m<-7\Rightarrow m<-\frac{7}{8}\\ \frac{c}{a}<0\Rightarrow \frac{2}{m+1}<0\Rightarrow m<-1\end{cases}$$

از اشتراک دو مجموعه فوق داریم: $m<-1$.

۱۴۵) گزینه‌ی ۲ $\frac{c}{a}<0\Rightarrow \frac{m-2}{1-m}<0\Rightarrow \frac{m-2}{m-1}>0\Rightarrow m>2$ یا $m<1$

با شرط $m<1$ یا $m>2$، نمودار از هر چهار ناحیه عبور می‌کند. اما با شرط $a<0$، دهانه‌ی نمودار رو به پایین بوده و دارای ماکزیمم خواهد بود. لذا $1-m<0\Rightarrow m>1$. با اشتراک‌گیری داریم:

$$\begin{cases}m>2 \text{ یا } m<1\\ m>1\end{cases}\xrightarrow{\cap} m>2$$

۱۴۶) گزینه‌ی ۲ اگر $a<0$ آن‌گاه $f(x)$ دارای مینیمم خواهد بود و در نتیجه نمودار $f(x)$ حتماً از ناحیه‌ی سوم می‌گذرد.

اگر $a=0$ آن‌گاه نمودار $f(x)=-4x+1$ از ناحیه سوم نمی‌گذرد.

اگر $a>0$ آن‌گاه نمودار $f(x)$ دارای ماکزیمم خواهد بود و در نتیجه ممکن است از ناحیه‌ی سوم بگذرد و ممکن است نگذرد.

با توجه به مطالب فوق a می‌تواند بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد $a\geq 0$

۱۴۷) گزینه‌ی ۴ باید معادله‌ی $x^2+3x+m-2=0$ دو ریشه‌ی منفی داشته باشد، لذا باید سه شرط برقرار باشد.

۱) $\Delta>0$ ۲) $\frac{c}{a}>0$ ۳) $\frac{-b}{a}<0$ بنابراین خواهیم داشت:

$$1)\ \Delta>0\Rightarrow 9+4(m-2)>0\Rightarrow 9-4m+8>0\Rightarrow m<\frac{17}{4}$$

$$2)\ \frac{c}{a}>0\Rightarrow m-2>0\Rightarrow m>2$$

$$3)\ \frac{-b}{a}<0\Rightarrow -3<0 \text{ همواره برقرار است}$$

$$(1)\cap(2)\cap(3)\Rightarrow 2<m<\frac{17}{4}$$

۱۴۸) گزینه‌ی ۴ رأس سهمی $y=-\frac{1}{2}x^2$ در نقطه $(0,0)$ است اگر این رأس به نقطه $(2,3)$ انتقال یابد، معادله آن به صورت زیر است:

$$y=-\frac{1}{2}(x-2)^2+3\Rightarrow y=-\frac{1}{2}x^2+2x+1$$

حال برای محاسبه‌ی صفرهای تابع حاصل باید معادله $y=0$ را حل کنیم:

$$\frac{1}{2}x^2-2x-1=0\Rightarrow x=2\pm\sqrt{4+2}=2\pm\sqrt{6}$$

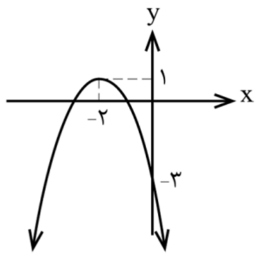
۱۴۹) گزینه‌ی ۴ اگر $\alpha+\beta=S$ و $\alpha\beta=P$ باشند معادله‌ی درجه دوم به صورت $x^2-Sx+P=0$ خواهد بود. داریم:

$$\left.\begin{array}{l}S=\frac{1-\sqrt{2}}{3}+\frac{1+\sqrt{2}}{3}=\frac{1-\sqrt{2}+1+\sqrt{2}}{3}=\frac{2}{3}\\ P=\left(\frac{1-\sqrt{2}}{3}\right)\left(\frac{1+\sqrt{2}}{3}\right)=\frac{1-2}{3}=-\frac{1}{3}\end{array}\right\}\Rightarrow y=x^2-\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}$$

در سهمی $y=ax^2+bx+c$ معادله محور تقارن به صورت $x=-\frac{b}{2a}$ می‌باشد، بنابراین $x=\frac{-\left(-\frac{2}{3}\right)}{2}$ یا $x=\frac{1}{3}$ خواهد بد

۱۵۰) گزینه‌ی ۳ بیشترین مقدار تابع درجه دوم همان مقدار y نقطه‌ی رأس سهمی است. پس $f(x)=۱$ و عرض نقطه‌ی تلاقی سهمی با محور y ها همان عدد ثابت معادله (یعنی c) است. پس:

$$f(x)=-x^۲+bx+c \xrightarrow{c=-۳} f(x)=-x^۲+bx-۳$$



عرض نقطه‌ی رأس سهمی از رابطه‌ی $y=\frac{۴ac-b^۲}{۴a}$ به دست می‌آید و با توجه به این‌که $y=۱$ است، داریم:

$$۱=\frac{۴(-۱)(-۳)-b^۲}{۴(-۱)} \quad -۴=۱۲-b^۲ \Rightarrow b^۲=۱۲+۴ \Rightarrow b^۲=۱۶ \Rightarrow b=\pm ۴$$

می‌دانیم طول رأس سهمی از رابطه‌ی $x=\frac{-b}{۲a}$ به دست می‌آید:

$$\text{اگر } b=۴ \Rightarrow y=-x^۲+۴x-۳ \Rightarrow x=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۴}{۲(-۱)}=\frac{۴}{۲}=۲$$

$x=۲$ نمی‌تواند درست باشد، زیرا در صورت سؤال ذکر شده است که سهمی از ناحیه‌ی اول نمی‌گذرد و چون عرض رأس سهمی مثبت است، پس طول نقطه‌ی رأس سهمی نمی‌تواند مثبت باشد.

$$\text{اگر } b=-۴ \quad y=-x^۲-۴x-۳ \quad x=\frac{-b}{۲a}=\frac{-(-۴)}{۲(-۱)}=\frac{۴}{-۲}=-۲$$

$x=-۲$ می‌تواند طول نقطه‌ی رأس سهمی باشد که از ناحیه‌ی اول نیز نمی‌گذرد.

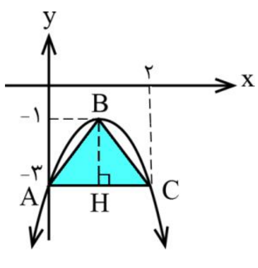
۱۵۱) گزینه‌ی ۲ براساس اطلاعات داده شده در تابع $y=ax^۲+bx+c$ مقادیر b و c را مشخص می‌کنیم.

$$\begin{cases} a=-۱ \\ \text{مجموع ریشه‌ها} = S=-\frac{b}{a} \Rightarrow ۲=\frac{-b}{-۱} \Rightarrow b=۲ \\ \Delta=b^۲-۴ac \Rightarrow ۱۶=۲^۲-۴(-۱)c \Rightarrow c=۳ \end{cases}$$

معادله‌ی تابع درجه دوم (سهمی) به صورت $y=-x^۲+۲x+۳$ خواهد بود.

در این صورت، چون a (ضریب $x^۲$) منفی است، بنابراین تابع ماکزیمم یا بیش‌ترین مقدار ممکن را دارد و سهمی رو به پایین ($\cap$) باز می‌شود.

(درستی گزینه‌های ۱ و ۳) اما معادله‌ی محور تقارن سهمی به صورت $x=-\frac{b}{۲a}=۱$ است که گزینه‌ی (۲) محور تقارن سهمی را $x=۲$ معرفی کرده است که نادرست است.



۱۵۲) گزینه‌ی ۲ ابتدا مختصات نقاط A ، B و C را مشخص می‌کنیم.

A محل برخورد نمودار با محور عرض‌ها است، پس مختصات آن به صورت $(۰,-۳)$ است.

B رأس سهمی است. با استفاده از رابطه $\left(\frac{-b}{۲a},\frac{۴ac-b^۲}{۴a}\right)$ مختصات این نقطه به صورت $(۱,-۱)$ است.

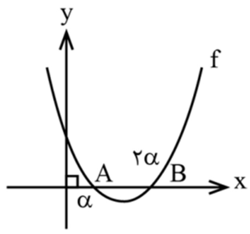
چون AC موازی محور طول‌ها است، پس نقاط A و C دارای عرض برابر ۳ − هستند.

$$y=-۳ \Rightarrow -۲x^۲+۴x-۳=-۳ \Rightarrow -۲x^۲+۴=۰ \Rightarrow -۲x(x-۲)=۰+۴x=۰ \Rightarrow x=۰\ ,\ x=۲$$

پس مختصات نقطه C هم به صورت $(۲,-۳)$ است.

حال با محاسبه طول BH و AC (ارتفاع و قاعده مثلث)، مساحت مثلث ABC را به دست می‌آوریم:

$$|BH|=-۱-(-۳)=۲\ ,\ |AC|=۲-۰=۲ \quad \text{و} \quad S_{ABC}=\frac{۲\times ۲}{۲}=۲$$



۱۵۳) گزینه‌ی ۳ بنا به فرض $|OA|=\alpha$ و $|OB|=۳\alpha$ ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم $۲x^۲-۱۶x+k+۴=۰$ می‌باشند. پس داریم:

$$y=۲x^۲-۱۶x+k+۴ \qquad \alpha+۳\alpha=-\frac{-۱۶}{۲}=۸ \Rightarrow ۴\alpha=۸ \Rightarrow \alpha=۲$$

$$\alpha\times ۳\alpha=\frac{k+۴}{۲}\Rightarrow ۲\times ۶=\frac{k+۴}{۲}\Rightarrow k=۲۰$$

۱۵۴) گزینه‌ی ۴

یادآوری

در معادله‌ی درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ داریم:

$$a+c=b\Leftrightarrow x_۱=-۱\ ,\ x_۲=-\frac{c}{a}$$

چون عرض از مبدأ خط همان عرض از مبدأ سهمی است، باید مقدار y به ازای $x=۰$ برای خط و سهمی برابر باشد، به علاوه چون -۱ یک ریشه سهمی است، در نتیجه ریشه‌ی دیگر آن برابر است با $-\frac{c}{a}$، پس اگر معادله‌ی خط را به صورت $y=mx+c$ بنویسیم باید $m\times\left(-\frac{c}{a}\right)+c=۰$ و از آن‌جا $m=a$ بنابراین معادله‌ی خط $y=ax+c$ است.

۱۵۵) گزینه‌ی ۱ یک خط افقی با سهمی تلاقی می‌کند و وتری به طول واحد ایجاد می‌کند، یعنی تفاضل ریشه‌های معادله محل تلاقی، یک است.

$$\begin{cases}y=۲x^۲+۳x\\ y=k\end{cases}\Rightarrow ۲x^۲+۳x=k$$

$$\Rightarrow ۲x^۲+۳x-k=۰\Rightarrow |x_۱-x_۲|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\frac{\sqrt{۹+۸k}}{۲}=۱\Rightarrow k=-\frac{۵}{۸}\Rightarrow ۲x^۲+۳x+\frac{۵}{۸}=۰$$

طول محل تلاقی ریشه‌های معادله $۲x^۲+۳x+\frac{۵}{۸}=۰$ ریشه‌های این تلاقی هستند.

$$x_۱=-\frac{۱}{۴}\ ,\ x_۲=-\frac{۵}{۴}$$

پس نقطه تلاقی سمت راست $-\frac{۱}{۴}$ است.

پاسخنامه درسنامه یازدهم

۱۵۶) گزینه‌ی ۲ در سهمی $y=ax^۲+bx+c$ اگر $a>۰$ مینیممی برابر $\frac{-\Delta}{۴a}$ خواهد داشت.

$$x^۲-x-y=-m\Rightarrow y=x^۲-x+m$$

$$\frac{-\Delta}{۴a}=-\frac{۱-۴m}{۴}=۳\Rightarrow ۱-۴m=-۱۲\Rightarrow m=\frac{۱۳}{۴}$$

۱۵۷) گزینه‌ی ۴

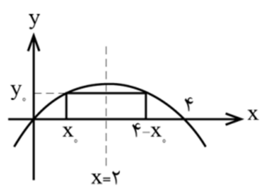
$$y=-۵t^۲+۱۰۰t+۲۰۰\xrightarrow[y_{max}=-\frac{\Delta}{۴a}]{\text{ضریب } t^۲ \text{ منفی است، ماکزیمم دارد.}}$$

$$y_{max}=\frac{-(۱۰۰^۲-۴\times(-۵)\times(۲۰۰))}{۴\times(-۵)}=\frac{۱۰۰۰۰+۴۰۰۰}{۲۰}=\frac{۱۴۰۰۰}{۲۰}=۷۰۰$$

۱۵۸) گزینه‌ی ۳

$$f(۴)=۰\Rightarrow a(۴)^۲+۴(۴)=۰\Rightarrow a=-۱$$

مستطیل مفروض نسبت به محور تقارن منحنی، قرینه است.



محور تقارن : $x=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۴}{-۲}=۲$

محیط مستطیل : $p=۲((۴-۲x_۰)+y_۰)$

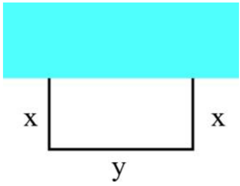
$$\xrightarrow{y_۰=f(x_۰)\Rightarrow -x_۰^۲+۴x_۰=y_۰} p=۲(۴-۲x_۰-x_۰^۲+۴x_۰)=۲(-x_۰^۲+۲x_۰+۴)$$

بیشترین مقدار $-x_۰^۲+۲x_۰+۴$ به ازای $x_۰=\frac{-۲}{-۲}=۱$ به دست می‌آید:

$$p_{max}=۲(-(۱)^۲+۲(۱)+۴)=۱۰$$

۱۵۹) گزینه‌ی ۲ با توجه به شکل و فرض مسأله $۲x+y=۸۸$ است پس $y=۸۸-۲x$

تابع مساحت برابر است با:



$$S = x.y \Rightarrow S(x) = x(۸۸-۲x) = ۸۸x-۲x^۲$$

$$x_{max} = -\frac{۸۸}{۲\times(-۲)} = -\frac{۸۸}{-۴} = ۲۲ \Rightarrow S_{max} = ۲۲(۸۸-۴۴) = ۹۶۸$$

۱۶۰) گزینه‌ی $\boxed{۴}$ قیمت فروش هر یک از x کالا برابر با $p(x) = ۶۰-۳x$ می‌باشد، در نتیجه درآمد حاصل از فروش x کالا برابر است با $(۶۰-۳x)x$ لذا:

$$q(x) = (۶۰-۳x)x = -۳x^۲+۶۰x \Rightarrow x_{max} = -\frac{۶۰}{۲\times(-۳)} = ۱۰$$

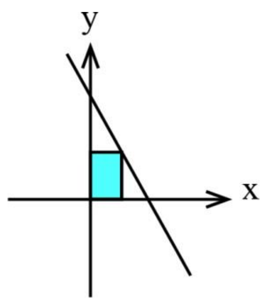
۱۶۱) گزینه‌ی $\boxed{۲}$

تعداد بوته $= ۴۰+x$ ، وزن محصول هر بوته $= ۸-\frac{۱}{۸}\times x$

وزن کل محصول $w = (۴۰+x)(۸-\frac{x}{۸}) = ۳۲۰+۳x-\frac{x^۲}{۸}$

$x_{max} = -\frac{۳}{۲\times(-\frac{۱}{۸})} = ۱۲ \Rightarrow$ بیشترین مقدار وزن $= w_{max} = w(۱۲) = ۳۲۰+۳\times۱۲-\frac{۱۲^۲}{۸} = ۳۳۸$

۱۶۲) گزینه‌ی $\boxed{۱}$ رأس مستطیل بر روی خط $y = -۲x+۶$ قرار دارد. رأس مستطیل $(x \;,\; -۲x+۶)$ می‌باشد با توجه به شکل، مساحت مستطیل:



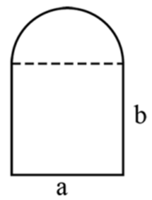
$$S = xy \xrightarrow{y=-۲x+۶} S = x(-۲x+۶)$$

بیشترین مقدار مساحت در نقطه‌ی $x = \frac{-b}{۲a} = \frac{۳}{۲}$ می‌باشد.

$$S = -۲\left(\frac{۳}{۲}\right)^۲+۶\left(\frac{۳}{۲}\right) = \frac{۹}{۲} = ۴/۵$$

در نتیجه بیشترین مساحت $۴/۵$ می‌باشد.

۱۶۳) گزینه‌ی $\boxed{۳}$ بیشترین مساحت پنجره را می‌خواهیم:



$$s = \underbrace{ab}_{\text{مساحت مستطیل}} + \underbrace{\pi\left(\frac{a}{۲}\right)^۲\times\frac{۱}{۲}}_{\text{مساحت نیم دایره}} = ab+\frac{\pi}{۸}a^۲ \qquad (۱)$$

$$\text{طول میله} = ۲\pi+۸ \Rightarrow \underbrace{a+۲b}_{\text{محیط مستطیل}} + \underbrace{\frac{۱}{۲}\pi a}_{\text{محیط نیم دایره}} = ۲\pi+۸ \Rightarrow b = \pi+۴-\frac{۱}{۴}\pi a-\frac{۱}{۲}a \qquad (۲)$$

$$\Rightarrow s = a\left(\pi+۴-\frac{۱}{۴}\pi a-\frac{۱}{۲}a\right)+\frac{\pi}{۸}a^۲ = \pi a+۴a-\frac{۱}{۴}\pi a^۲-\frac{۱}{۲}a^۲+\frac{\pi}{۸}a^۲ \Rightarrow s = -\frac{۱}{۸}(۴+\pi)a^۲+(\pi+۴)a$$

$$a_{max} = -\frac{b}{۲a} = \frac{-(\pi+۴)}{۲\left(-\frac{۱}{۸}(۴+\pi)\right)} = ۴ \Rightarrow s_{max} = -\frac{۱}{۸}(۴+\pi)\times۱۶+(\pi+۴)\times۴ = -۸-۲\pi+۴\pi+۱۶ = ۲\pi+۸$$

۱۶۴) گزینه‌ی $\boxed{۴}$

مختصات N , M بعد از t ثانیه به صورت $M(۰,۷-t)$ و $N(۳-۳t,۰)$ است. فاصله‌ی بین دو نقطه بعد از t ثانیه از رابطه‌ی $D = \sqrt{(۳-۳۲t-۰)^۲+(۷-t-۰)^۲}$ به دست می‌آید: $D = \sqrt{۹-۱۸t+۹t^۲+t^۲-۱۴t+۴۹} = \sqrt{۱۰t^۲-۳۲t+۵۸}$. D زمانی کم‌ترین مقدار خود را دارد که $D^۲$ کم‌ترین مقدار خود را داشته باشد، داریم:

$$D = \sqrt{۱۰t^۲-۳۲t+۵۸} \Rightarrow D^۲ = ۱۰t^۲-۳۲t+۵۸$$

کم‌ترین‌مقدار $D^۲$ زمانی اتفاق می‌افتد که $t = -\frac{b}{۲a} = \frac{۳۲}{۲\times۱۰} = ۱/۶$ باشد.

درسنامه دوازدهم

۱۶۵) گزینه‌ی ۳ می‌دانیم دنباله‌ی مربع ... ۱۶، ۹، ۴ و ۱۰ است، از طرفی بنا به مفروضات مسأله داریم:

$$\frac{x}{y}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\Rightarrow\frac{4}{y}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\Rightarrow y=\frac{8}{\sqrt{5}+1}\times\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1}$$

$$\Rightarrow y=\frac{8(\sqrt{5}-1)}{5-1}=\frac{8(\sqrt{5}-1)}{4}\Rightarrow y=2(\sqrt{5}-1)$$

۱۶۶) گزینه‌ی ۲ فرض می‌کنیم طول مستطیل $=x$ و عرض مستطیل $=y$ می‌دانیم نسبت طلایی به صورت $\frac{y}{x}=\frac{x}{x+y}$ می‌باشد.

$$\text{محیط مستطیل}=20\Rightarrow 2x+2y=20\Rightarrow x+y=10\Rightarrow y=10-x$$

$$\frac{x}{x+y}=\frac{y}{x}\xrightarrow{y=10-x\ ,\ x+y=10}\frac{x}{10}=\frac{10-x}{x}\Rightarrow x^2=10(10-x)$$

$$\Rightarrow x^2=100-10x\Rightarrow x^2+10x-100=0\xrightarrow{\sqrt{\Delta}=10\sqrt{5}}$$

$$x_1,x_2=\frac{-10\pm10\sqrt{5}}{2}=\begin{cases}x_1=5(\sqrt{5}-1) & (\text{ق ق})\\ x_2=-5(\sqrt{5}+1) & (\text{غ ق ق})\end{cases}$$

۱۶۷) گزینه‌ی ۱ ابتدا عبارت‌های جبری را به یک طرف معادله می‌بریم، سپس مشترک را به دست می‌آوریم.

$$\frac{x^2-2x+2}{x^2-2x}-\frac{1+x}{x}-\frac{x-1}{x-2}=0$$

$$\text{مخرج کسر اول}=x^2-2x=x(x-2)$$
$$\text{مخرج کسر دوم}=x$$
$$\text{مخرج کسر سوم}=x-2$$

$$\frac{x^2-2x+2-(x-2)(1+x)-x(x-1)}{x(x-2)}=0\Rightarrow\frac{-x^2+4}{x(x-2)}=0\Rightarrow -x^2+4=0\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x=\pm2$$

چون x=2 مخرج کسرهای $\frac{x-1}{x-2}$, $\frac{x^2-2x+2}{x^2-2x}$ را صفر می‌کند، بنابراین این جواب قابل قبول نیست و فقط $x=-2$ ریشه‌ی این معادله است.

۱۶۸) گزینه‌ی ۴

$$\text{ک.م.م مخرج‌ها}=(x^2-36)(x^2-64)$$

$$\frac{x}{x^2-36}+\frac{x}{x^2-64}=0\xrightarrow{\text{مخرج مشترک}}\frac{x(x^2-64)+x(x^2-36)}{(x^2-36)(x^2-64)}=0$$

$$\Rightarrow\frac{x(x^2-64+x^2-36)}{(x^2-36)(x^2-64)}=0\Rightarrow x(2x^2-100)=0\Rightarrow x=0\quad\text{یا}\quad 2x^2-100=0$$

$$\Rightarrow x=0\quad\text{یا}\quad x^2=50\Rightarrow x=\pm5\sqrt{2}$$

هر سه جواب $x_1=0$ و $x_2=5\sqrt{2}$ و $x_3=-5\sqrt{2}$ قابل قبول هستند. (چرا؟)

۱۶۹) گزینه‌ی ۳

$$\text{ک.م.م مخرج کسرها}=(x-2)(x+5)$$

$$\frac{x+2}{x-2}=1-\frac{3}{x+5}\Rightarrow\frac{x+2}{x-2}+\frac{3}{x+5}-1=0\xrightarrow{\text{مخرج مشترک}}$$

$$\frac{(x+5)(x+2)+3(x-2)-(x-2)(x+5)}{(x-2)(x+5)}=0$$

$$\Rightarrow x^2+7x+10+3x-6-x^2-3x+10=0\Rightarrow 7x=-14\Rightarrow x=-2\ (\text{ق ق})$$

بنابراین مجموع جواب و معکوسش برابر است با $-۲+\frac{۱}{-۲}=-\frac{۵}{۲}$

۱۷۰) گزینه‌ی ۱

ک.م.م مخرج کسرها $=(x-b)(x-a)$

$$\frac{x-a}{x-b}+\frac{x-b}{x-a}+۲=۰\xrightarrow{\text{مخرج مشترک}}\frac{(x-a)^۲+(x-b)^۲+۲(x-a)(x-b)}{(x-a)(x-b)}=۰$$

$$\Rightarrow x^۲-۲ax+a^۲+x^۲-۲bx+b^۲+۲(x^۲+(-a-b)x+ab)=۰$$

$$\Rightarrow x^۲-۲ax+a^۲+x^۲-۲bx+b^۲+۲x^۲-۲ax-۲bx+۲ab=۰$$

$$\Rightarrow ۴x^۲-۴ax-۴bx+a^۲+b^۲+۲ab=۰\Rightarrow ۴x^۲-۴(a+b)x+(a+b)^۲=۰$$

$$\Delta=۱۶(a+b)^۲-۴(۴)(a+b)^۲=۰\Rightarrow x=\frac{۴(a+b)}{۲\times ۴}=\frac{a+b}{۲}\ \text{(ق ق)}$$

۱۷۱) گزینه‌ی ۳ با توجه به اتحاد $x^۳-۶۴=(x-۴)(x^۲+۴x+۱۶)$ طرفین معادله را در $x^۳-۶۴$ ضرب می‌کنیم.

$$\frac{۱۶}{x^۲+۴x+۱۶}=\frac{x}{x-۴}-\frac{۶۴}{x^۳-۶۴}\Rightarrow ۱۶(x-۴)=x(x^۲+۴x+۱۶)-۶۴$$

$$\Rightarrow ۱۶x-۶۴=x^۳+۴x^۲+۱۶x-۶۴\Rightarrow x^۳+۴x^۲=۰\Rightarrow x=۰\ ,\ x=-۴\in(-۵\ ,\ ۵)$$

۱۷۲) گزینه‌ی ۴ دامنه‌ی معادله‌ی $D=\mathbb{R}-\{۰\}$ است. داریم:

$$\frac{x^۲}{a^۳}+\frac{b^۳}{x^۲}=\frac{b}{a}+\frac{b^۲}{a^۲}\Rightarrow ۲\frac{x^۴+a^۳b^۳}{x^۲a^۳}=\frac{ab+b^۲}{a^۲}\Rightarrow\frac{x^۴+a^۳b^۳}{ax^۲}=ab+b^۲$$

$$\Rightarrow x^۴+a^۳b^۳=(ab+b^۲)(x^۲-a^۲b)=ax^۲\Rightarrow x^۴-(ab+b^۲)ax^۲+a^۳b^۳=۰\Rightarrow x^۴-(a^۲b+b^۲a)x^۲+a^۳b^۳=۰$$

$$\Rightarrow(x^۲-ab^۲)(x^۲-a^۲b)=۰\Rightarrow x=\pm b\sqrt{a}\ \text{ یا }\ x=\pm a\sqrt{b}\ \text{ ۴جواب}$$

۱۷۳) گزینه‌ی ۲ دامنه‌ی توابع معادله $D=\mathbb{R}-\{a,b\}$ است داریم:

$$\frac{b}{x-a}+\frac{a}{x-b}=۲\Rightarrow\frac{b(x-b)+a(x-a)}{(x-a)(x-b)}=۲$$

$$\Rightarrow\frac{bx-b^۲+ax-a^۲}{x^۲-(a+b)x+ab}=۲\Rightarrow(a+b)x-(a^۲+b^۲)=۲x^۲-۲(a+b)x+۲ab$$

$$۲x^۲-۳(a+b)x+a^۲+b^۲+۲ab=۰$$

$$\Rightarrow ۲x^۲-۳(a+b)+(a+b)^۲=۰\xrightarrow{\sqrt{\Delta}=a+b}x_۱\ ,\ x_۲=\frac{۳(a+b)\pm(a+b)}{۴}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_۱=a+b\\ x_۲=\dfrac{a+b}{۲}\end{cases}\Rightarrow x_۱^۲-x_۲^۲=(a+b)^۲-\frac{(a+b)^۲}{۴}=۳\left(\frac{a+b}{۲}\right)^۲$$

۱۷۴) گزینه‌ی ۲ $x=-۱$ جواب معادله است. بنابراین در آن صدق می‌کند. داریم:

$$\frac{x^۲+۱}{k^۲-۴}+\frac{k+۴x}{k(k+۲)}=\frac{x+۲}{k(k-۲)}\xrightarrow{\text{در معادله } x=-۱}\frac{۲}{k^۲-۴}+\frac{k-۴}{k(k-۲)}=\frac{۱}{k(k-۲)}$$

$$\Rightarrow\frac{۲}{(k-۲)(k+۲)}+\frac{k-۴}{k(k+۲)}-\frac{۱}{k(k-۲)}=۰\quad \text{ک م م مخرج کسرها و}=k(k-۲)(k+۲)$$

$$\Rightarrow\frac{۲k+(k-۴)(k-۲)-(k+۲)}{k(k-۲)(k+۲)}=۰\Rightarrow ۲k+k^۲-۶k+۸-k-۲=۰\Rightarrow k^۲-۵k+۶=۰\Rightarrow k=۲\ ,\ ۳$$

k=۲ قابل قبول نیست، زیرا مخرج کسرها را صفر می‌کند، فقط k=۳ جواب موردنظر است.

۱۷۵) گزینه‌ی ۳ ابتدا معادله‌ی $\frac{۲}{x(x-۲)}=\frac{۱}{x}-\frac{x+۲}{x-۲}$ را حل می‌کنیم، دامنه‌ی این معادله برابر $IR-\{۰\ ,\ ۲\}$ است.

$$\frac{x+۲}{x-۲}-\frac{۱}{x}=\frac{۲}{x(x-۲)}\xrightarrow{\times x(x-۲)}x(x+۲)-(x-۲)=۲\Rightarrow x^۲+x=۰\Rightarrow x=۰ \text{ و } x=-۱$$

$x=۰$ در دامنه قرار ندارند پس $x=-۱$ تنها جواب معادله است. چون دو معادله طبق فرض دارای ریشه‌ی یکسان هستند پس $x=-۱$ در معادلـه دوم صدق می‌کند.

$$\frac{۲a}{-۱+۲}=-a+۶\Rightarrow a=۲$$

۱۷۶) گزینه‌ی ۴

$$\frac{x+a}{x}+\frac{x-a}{x+۲}\,\frac{x+۵}{x^۲+۲x}=۰ \quad \text{مخرج کسرها} \quad \text{ک م م}=x(x+۲)$$

$$\frac{(x+a)(x+۲)+x(x-a)-x-۵}{x(x+۲)}=۰\Rightarrow(x+a)(x+۲)+x(x-a)-x-۵=۰$$

$$\Rightarrow x^۲+(۲+a)x+۲a+x^۲-ax-x-۵=۰\Rightarrow ۲x^۲+(۲+a-a-۱)x+۲a-۵=۰\Rightarrow ۲x^۲+x+۲a-۵=۰$$

یادآوری

در معادله‌ی درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ باشد $\Delta>۰$ داریم:

$$\text{مجموع ریشه‌ها}: x_۱+x_۲=-\frac{b}{a}$$

$$۲x^۲+x+۲a-۵=۰\Rightarrow \text{مجموع ریشه‌ها}=x_۱+x_۲=\frac{-۱}{۲}$$

۱۷۷) گزینه‌ی ۱ اگر m شیب خط باشد، $\frac{-۱}{m}$ شیب خط عمود بر آن است. لذا داریم:

$$m-\frac{۱}{m}=\frac{۲۱}{۱۰}\Rightarrow\frac{m^۲-۱}{m}=\frac{۲۱}{۱۰}\Rightarrow ۱۰m^۲-۲۱m-۱۰=۰\xrightarrow{\sqrt{\Delta}=۲۹}\Rightarrow m=\frac{۵}{۲}\quad m=-\frac{۲}{۵}\xrightarrow{m>۰}m=\frac{۵}{۲}$$

۱۷۸) گزینه‌ی ۱

$$\frac{۳-x}{x+۳}+\frac{x+۱}{x-۳}=\frac{ax+b}{x^۲-۹}$$

$$\Rightarrow\frac{-x^۲+۶x-۹+x^۲+۴x+۳}{x^۲-۹}=\frac{ax+b}{x^۲-۹}\Rightarrow\frac{۱۰x-۶}{x^۲-۹}=\frac{ax+b}{x^۲-۹}$$

معادله‌ی اخیر وقتی دارای بی‌شمار ریشه است که ضرایب جملات متشابه در صورت کسرها برابر باشند، پس داریم:

$$a=۱۰\quad,\quad b=-۶\Rightarrow a+b=۴$$

۱۷۹) گزینه‌ی ۴

$$۳\left(\frac{x+۳}{۲x-۱}\right)^۲-۴\left(\frac{x+۳}{۲x-۱}\right)+۱=۰\xrightarrow{\frac{x+۳}{۲x-۱}=t}۳t^۲-۴t+۱=۰\xrightarrow{\sqrt{\Delta}=۲}$$

$$\Rightarrow t_۱=۱ \quad \text{یا} \quad t_۲=\frac{۱}{۳}$$

$$\left\{\begin{array}{l} t_۱=۱\Rightarrow\frac{x+۳}{۲x-۱}=۱\Rightarrow x+۳=۲x-۱\Rightarrow x_۱=۴\\ t_۲=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\frac{x+۳}{۲x-۱}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow ۳x+۹=۲x-۱\Rightarrow x_۲=-۱۰\end{array}\right.\Rightarrow x_۱x_۲=-۴۰$$

۱۸۰) گزینه‌ی ۳

$$\frac{۲x+۳}{x+۵}+۶\left(\frac{x+۵}{۲x+۳}\right)=-۷=۰\xrightarrow{\frac{۲x+۳}{x+۵}=t}t+\frac{۶}{t}-۷=۰\xrightarrow{\times t}t^۲+۶-۷t=۰$$

$$\Rightarrow t_۱=۱ \text{ و } t_۲=۶$$

$$\begin{cases} t_1 = 1 \Rightarrow \dfrac{2x+3}{x+5} = 1 \Rightarrow 2x+3 = x+5 \Rightarrow x_1 = 2 \\ t_2 = 6 \Rightarrow \dfrac{2x+3}{x+5} = 6 \Rightarrow 2x+3 = 6x+30 \Rightarrow x_2 = -\dfrac{27}{4} \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 = -\dfrac{19}{4}$$

۱۸۱) گزینه‌ی ۲ معادله گویا را با انتخاب $x^2 - 2x = A$ به صورت ساده‌تر می‌نویسیم:

$$\frac{1}{A} + \frac{2}{A-3} + \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow 2A - 6 + 4A + 3A^2 - 9A = 0 \Rightarrow A^2 - A - 2 = 0 \Rightarrow A = -1\ ,\ A = 2$$

$$x^2 - 2x = -1 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 1$$

$$x^2 - 2x = 2 \Rightarrow x^2 - 2x - 2 = 0 \xrightarrow{\Delta > 0} x'^2 + x''^2 = (x'+x'')^2 - 2x'x'' \xrightarrow[x'x''=\frac{c}{a}]{x'+x''=-\frac{b}{a}} 4 - 2(-2) = 8$$

$$\text{مجموع مربعات ریشه‌ها} = 1 + 8 = 9$$

۱۸۲) گزینه‌ی ۴

یادآوری: $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$

$$\left(x + \frac{2}{x}\right)^4 - \left(x^2 + \frac{4}{x^2}\right) - 76 = 0 \Rightarrow (x + \frac{2}{x})^4 - \left[\left(x + \frac{2}{x}\right)^2 - 2(x)\left(\frac{2}{x}\right)\right] - 76 = 0$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{2}{x}\right)^4 - \left(x + \frac{2}{x}\right)^2 + 4 - 76 = 0 \Rightarrow (x + \frac{2}{x})^4 - \left(x + \frac{2}{x}\right)^2 - 72 = 0$$

$$\xrightarrow{\left(x+\frac{2}{x}\right)^2 = A} A^2 - A - 72 = 0 \Rightarrow (A-9)(A+8) = 0 \begin{cases} A = 9 \\ A = -8 \ (\text{غ ق ق}) \end{cases}$$

$$\left(x + \frac{2}{x}\right)^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} x + \dfrac{2}{x} = 3 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \xrightarrow{\Delta > 0} x_1 x_2 = 2 \\ x + \dfrac{2}{x} = -3 \Rightarrow x^2 + 3x + 2 = 0 \xrightarrow{\Delta > 0} x'x'' = 2 \end{cases} \Rightarrow x_1 x_2 x' x'' = 4$$

یادآوری: حاصل ضرب ریشه ها در معادله ی درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ برابر است با $\dfrac{c}{a}$

۱۸۳) گزینه‌ی ۱ مطابق فرمول های فیزیک می دانیم $\text{زمان} = \dfrac{\text{مسافت}}{\text{سرعت}}$، اگر زمان طی شده مربوط به موتور سوار ۱ را t_1 و زمان طی شده مربوط موتورسوار ۲ را t_2 بگیریم و کل فاصله A تا B را x اسم‌گذاری کنیم. معلوم است که موتور سوار ۱ کل x را با سرعت ۱۲۰ و موتور سوار ۲، $x - 50$ را با سرعت ۸۰ رفته است، پس.

$$t_1 = \frac{x}{120} \quad , \quad t_2 = \frac{x - 50}{80}$$

$$\text{طرفی از}: t_2 - t_1 = 1 \Rightarrow \frac{x - 50}{80} - \frac{x}{120} = 1 \Rightarrow \frac{3x - 150 - 2x}{240} = 1 \Rightarrow x - 150 = 240 \Rightarrow x = 390$$

۱۸۴) گزینه‌ی ۲

$$\text{مقدار نمک موجود در محلول فعلی} = \frac{4}{100} \times 250 = 10$$

اگر x کیلوگرم نمک به این محلول اضافه شود ، میزان نمک در آب $x+10$ و وزن کل محلول $x+250$ کیلو می‌شود و پس برای داشتن محلول ۸ درصدی نمک داریم:

$$\frac{10 + x}{250 + x} = \frac{8}{100} \Rightarrow 100(10 + x) = 8(250 + x)$$

$$1000 + 100x = 2000 + 8x \Rightarrow 100x - 8x = 2000 - 1000$$

$$۹۲x = ۱۰۰۰ \Rightarrow x = \frac{۱۰۰۰}{۹۲} \approx ۱۰/۸۶$$

۱۸۵) گزینه‌ی ۱ فرض می‌کنیم تراکتور در هر ساعت X هکتار شخم می زند و اسب y هکتار بنابراین تراکتور هر هکتار زمین را در $\frac{۱}{x}$ ساعت و اسب هر هکتار را در $\frac{۱}{y}$ ساعت شخم می‌زند، داریم:

$$\begin{cases} ۴x - ۴y = ۷ \Rightarrow x - y = \frac{۷}{۴} \quad (۱) \\ \frac{۱}{y} - \frac{۱}{x} = ۳/۵ \Rightarrow \frac{x-y}{xy} = ۳/۵ \xrightarrow{(۱)} \frac{\frac{۷}{۴}}{xy} = \frac{۷}{۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow xy = \frac{۱}{۲} \Rightarrow x = \frac{۱}{۲y} \Rightarrow \frac{۱}{۲y} - y = \frac{۷}{۴} \Rightarrow \frac{۱-۲y^۲}{۲y} = \frac{۷}{۴}$$

$$۴y^۲ + ۷y - ۲ = ۰ \xrightarrow{\sqrt{\Delta}=۹} y = \frac{-۷ \pm ۹}{۸} \Rightarrow \begin{cases} y_۱ = \frac{۱}{۴} = ۰/۲۵ \\ y_۲ = -۲ \ (\text{غ ق ق}) \end{cases}$$

درسنامه سیزدهم

۱۸۶) گزینه‌ی ۴

$$\sqrt{x^۲ - ۴} = x^۲ - ۴ \xrightarrow{\text{طرفین را به توان دو می‌رسانیم}} x^۲ - ۴ = (x^۲ - ۴)^۲$$

$$\Rightarrow (x^۲ - ۴) - (x^۲ - ۴)^۲ = ۰ \Rightarrow (x^۲ - ۴)(۱ - x^۲ + ۴) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = \pm ۲ \\ x = \pm\sqrt{۵} \end{cases}$$

با جایگذاری هر چهار جواب به دست آمده، در معادله مشاهده می‌شود که هر چهار جواب قابل قبول است.

۱۸۷) گزینه‌ی ۲

$$\sqrt[۵]{۳ + \sqrt{x - x^۲}} = \sqrt[۵]{۳} \xrightarrow{\text{طرفین معادله را به توان ۵ می‌رسانیم}} ۳ + \sqrt{x - x^۲} = ۳$$

$$\sqrt{x - x^۳} = ۰ \Rightarrow x - x^۳ = ۰ \Rightarrow x(۱ - x^۲) = ۰ \Rightarrow x = ۰ \ \text{و} \ x = \pm ۱$$

با جایگذاری هر سه جواب به دست آمده، در معادله، مشاهده می‌شود که جواب $x = -۱$ قابل قبول نیست زیرا:

$$\sqrt{x - x^۲} \overset{x=-۱}{=\!=} \sqrt{-۱ - (-۱)^۲} = \sqrt{-۲}$$

۱۸۸) گزینه‌ی ۱

$$\sqrt{x - \sqrt{x + ۸}} = ۲ \xrightarrow{\text{توان دو}} x - \sqrt{x + ۸} = ۴ \Rightarrow \sqrt{x + ۸} = x - ۴ \xrightarrow{\text{توان دو}} x + ۸ = (x - ۴)^۲$$

$$\Rightarrow x + ۸ = x^۲ - ۸x + ۱۶ \Rightarrow x^۲ - ۹x + ۸ = ۰ \Rightarrow (x - ۱)(x - ۸) = ۰ \Rightarrow x = ۱ \ , x = ۸$$

حال هر یک از مقادیر به دست آمده برای x را در معادله قرار می‌دهیم.

$$x = ۱ \Rightarrow \sqrt{۱ - \sqrt{۱ + ۸}} = ۲ \Rightarrow \sqrt{-۲} = ۲ \ \text{تعریف نشده} \qquad \text{و} \qquad x = ۸ \Rightarrow \sqrt{۸ - \sqrt{۸ + ۸}} = ۲ \Rightarrow \sqrt{۴} = ۲ \ \text{قابل قبول}$$

بنابراین تنها مقدار $x = ۸$ ریشه‌ای این معادله است.

۱۸۹) گزینه‌ی ۳ باید معادله‌ی تلاقی دو منحنی $\sqrt{۲x + ۱} = ۲ + \sqrt{x - ۳}$ را حل کنیم، تا تعدا نقاط تلاقی دو منحنی معلوم شود.

$$(۱) \quad \sqrt{۲x + ۱} = ۲ + \sqrt{x - ۳} \xrightarrow{\text{طرفین را به توان دو می‌رسانیم}} (\sqrt{۲x + ۱})^۲ = (۲ + \sqrt{x - ۳})^۲$$

$$\Rightarrow ۲x + ۱ = ۴ + ۴\sqrt{x - ۳} + x - ۳ \Rightarrow x = ۴\sqrt{x - ۳} \xrightarrow{\text{توان دو}}$$

$$x^۲ = ۱۶(x - ۳) \Rightarrow x^۲ - ۱۶x + ۴۸ = ۰ \Rightarrow (x - ۴)(x - ۱۲) = ۰ \Rightarrow x = ۴ \quad \text{یا} \quad x = ۱۲$$

هر دو جواب در معادله‌ی شماره‌ی (۱) صدق می‌کنند، بنابراین دو منحنی فوق یکدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند.

۱۹۰) گزینه‌ی ۳

$$(x-۳)\sqrt{x^۲-۵x+۴}=۲x-۶$$

$$\Rightarrow (x-۳)\sqrt{x^۲-۵x+۴}-(۲x-۶)=۰ \Rightarrow (x-۳)\sqrt{x^۲-۵x+۴}-۲(x-۳)=۰$$

$$(x-۳)\left(\sqrt{x^۲-۵x+۴}-۲\right)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x-۳=۰ \Rightarrow x=۳ \\ \text{یا} \\ \sqrt{x^۲-۵x+۴}=۲ \qquad (۱) \end{cases}$$

$$(۱) \Rightarrow \sqrt{x^۲-۵x+۴}=۲ \Rightarrow x^۲-۵x+۴=۴ \Rightarrow x^۲-۵x=۰ \Rightarrow x(x-۵)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ \text{یا} \\ x=۵ \end{cases}$$

که فقط جواب‌های $x=۰$ و $x=۵$ قابل قبول هستند، $x=۳$ جواب معادله نمی‌باشد، زیرا به ازای آن زیر رادیکال منفی می‌شود. لذا شامل دو عدد حسابی ۵ و ۰ است.

۱۹۱) گزینه‌ی ۳

$$\sqrt[۵]{x^۷+۲-\sqrt{x^۲+x+۴}}=x\sqrt[۵]{x^۲} \xrightarrow{\text{توان ۵}}$$

$$x^۷+۲-\sqrt{x^۲+x+۴}=x^۷ \Rightarrow \sqrt{x^۲+x+۴}=۲ \Rightarrow x^۲+x=۰ \Rightarrow x=۰ \ \text{و}\ x=-۱$$

دو جواب در معادله صدق می‌کند، بنابراین مجموع جواب‌ها برابر است با ۱-.

۱۹۲) گزینه‌ی ۱ برای به دست آوردن تعداد جواب‌های معادله‌ی $\sqrt{x-۱}-\frac{۲}{\sqrt{x-۱}}=-۱$ ابتدا مخرج مشترک می‌گیریم.

$$\frac{(\sqrt{x-۱})^۲-۲}{\sqrt{x-۱}}=-۱ \Rightarrow \frac{x-۳}{\sqrt{x-۱}}=-۱ \Rightarrow x-۳=-\sqrt{x-۱}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان دو}} (x-۳)^۲=x-۱ \Rightarrow x^۲-۶x+۹=x-۱$$

$$x^۲-۷x+۱۰=۰ \Rightarrow (x-۲)(x-۵)=۰ \Rightarrow x=۲ \ \text{یا}\ x=۵$$

در نتیجه $x=۲$ یا $x=۵$ که با توجه به دامنه‌ی این معادله یعنی $[۱,۳]$، تنها $x=۲$ قابل قبول است.

۱۹۳) گزینه‌ی ۲

$$\sqrt{x^۲-۱۰x+۲۵}-\sqrt{x^۲-۶x+۹}=\sqrt{k^۵+۳۶} \Rightarrow \sqrt{(x-۵)^۲}+\sqrt{(x-۳)^۲}=\sqrt{k^۵+۳۶}$$

$$\Rightarrow |x-۵|-|x-۳|=\sqrt{k^۵+۳۶} \xrightarrow{۲<x<۳ \quad x-۵<۰ \ \text{و}\ x-۳<۰}$$

$$-(x-۵)+(x-۳)=\sqrt{k^۵+۳۶}$$

$$\Rightarrow -x+۵+x-۳=\sqrt{k^۵+۳۶} \Rightarrow ۲=\sqrt{k^۵+۳۶} \Rightarrow k^۵+۳۶=۴ \Rightarrow k^۵=-۳۲ \Rightarrow k=-۲$$

۱۹۴) گزینه‌ی ۳ به ازای $x \ge ۱$ می‌توان طرفین معادله را به توان دو رساند و ساده کرد.

$$\left(\sqrt{x+۲\sqrt{x-۱}}+\sqrt{x-۲\sqrt{x-۱}}\right)^۲=۴$$

$$\Rightarrow x+۲\sqrt{x-۱}+x-۲\sqrt{x-۱}+۲\sqrt{(x+۲\sqrt{x-۱})\ (x-۲\sqrt{x-۱})}=۴$$

$$\Rightarrow ۲x+۲\sqrt{x^۲-۴(x-۱)}=۴ \Rightarrow ۲x+۲\sqrt{\underbrace{x^۲-۴x+۴}_{\text{اتحاد مربع کامل}}}=۴$$

$$\Rightarrow ۲x+۲\sqrt{(x-۲)^۲}=۴ \Rightarrow ۲x+۲|x-۲|=۴ \Rightarrow |x-۲|=۲-x \xrightarrow{|f(n)|=-f(n) \Rightarrow \quad f(n)\le ۰} x-۲\le ۰ \Rightarrow x\le ۲$$

با توجه به شرط $x \ge ۱$ و $x \le ۲$ جواب معادله به صورت $۱ \le x \le ۲$ در می‌آید.

۱۹۵) گزینه‌ی ۲ مجموع چند عبارت نامنفی زمانی صفر است که تک‌تک آن عبارات صفر باشند بنابراین:

$$\sqrt{2x^2-3x-2}+\sqrt{x^2+2ax-x-2a}=0\Rightarrow\begin{cases}2x^2-3x-2=0\\x^2+2ax-x-2a=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x^2-3x-2=0\\x^2+(2a-1)-2a=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}(2x+1)(x-2)=0\\(x-1)(x+2a)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-\frac{1}{2}\ ,\ x=2\\x=1\ ,\ x=-2a\end{cases}$$

جواب مشترک هر دو معادله در حالت $-2a=2$ و $-2a=-\frac{1}{2}$ حاصل می‌شود که داریم -1 , $a=\frac{1}{4}$.

۱۹۶) گزینه‌ی ۳ هر یک از عبارات را مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$$\begin{cases}x^2+3x-4=0\Rightarrow x=1\ ,\ x=-4\\x^2-1=0\Rightarrow x=\pm1\\x^2-x-6=0\Rightarrow x=-2\ ,\ x=3\end{cases}$$

پس اجتماع ریشه‌ها $\{-4$ و 3 و $2-$ و 1 و $-1\}$ می‌باشد اما چون فرجه‌ی رادیکال زوج است و به ازای $x=-1$ و $x=1$ زیر رادیکال منفی می‌شود لذا این دو عدد ریشه‌ی معادله نیستند، در نتیجه مجموعه ریشه‌های معادله‌ی فوق $\{3$ و $2-$ و $-4\}$ است، یعنی معادله سه ریشه دارد.

۱۹۷) گزینه‌ی ۴

$$3x^{\frac{1}{2}}+3x^{-\frac{1}{2}}=7\Rightarrow3\sqrt{x}+\frac{3}{\sqrt{x}}=7\xrightarrow{\text{توان دو}}$$

$$9x+\frac{9}{x}+18=49\Rightarrow9x+\frac{9}{x}-31=0\xrightarrow{\times(x)}$$

$$9x^2+9-31x=0\Rightarrow9x^2-31x+9=0$$

۱۹۸) گزینه‌ی ۲ فرض $\sqrt[6]{x}=x^{\frac{1}{6}}=A\geq0$ به معادله زیر می‌رسیم.

$$A^2-3A+2=0\Rightarrow(A-1)(A-2)=0\Rightarrow A=1\ \text{ یا }\ A=2$$

$$\begin{matrix}A=1\Rightarrow\sqrt[6]{x}=1\Rightarrow x=1\\A=2\Rightarrow\sqrt[6]{x}=2\Rightarrow x=64\end{matrix}\Rightarrow\ \text{حاصل ضرب ریشه‌ها}=64$$

۱۹۹) گزینه‌ی ۱ با استفاده از خواص رادیکال‌ها، معادله را ساده‌تر می‌کنیم.

$$\sqrt{x\sqrt[5]{x}}=\sqrt{\sqrt[5]{x^6}}=\sqrt[10]{x^6}\ \text{ و }\ \sqrt[5]{x\sqrt{x}}=\sqrt[5]{\sqrt{x^3}}=\sqrt[10]{x^3}$$

بنابراین:

$$\sqrt[10]{x^6}-\sqrt[10]{x^3}=56\xrightarrow{\sqrt[10]{x^3}=A}A^2-A-56=0\Rightarrow(A-8)(A+7)=0\Rightarrow A=-7\ \text{ و }\ A=8$$

$$A=-7\Rightarrow\sqrt[10]{x^3}=-7\qquad\text{معادله جواب ندارد}$$

$$A=8\Rightarrow\sqrt[10]{x^3}=8\Rightarrow x^3=(2^3)^{10}\Rightarrow x=2=1024$$

لذا معادله یک جواب دارد.

۲۰۰) گزینه‌ی ۱

$$\sqrt{\frac{2x}{1+2x}}+\sqrt{\frac{1+2x}{2x}}=\frac{5}{2}\xrightarrow{\sqrt{\frac{2x}{1+2x}}=A}A+\frac{1}{A}=\frac{5}{2}$$

$$\frac{A^2+1}{A}=\frac{5}{2}\Rightarrow2A^2+2=5A\Rightarrow2A^2-5A+2=0\xrightarrow{\sqrt{\Delta}=3}A=\frac{5\pm3}{4}\Rightarrow\begin{cases}A_1=2\\A_2=\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$A_1=2\Rightarrow\sqrt{\frac{2x}{1+2x}}=2\Rightarrow\frac{2x}{1+2x}=4\Rightarrow x_1=-\frac{2}{3}$$

$$A_2=\frac{1}{2}\Rightarrow\sqrt{\frac{2x}{1+2x}}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{2x}{1+2x}=\frac{1}{4}\Rightarrow x_2=\frac{1}{6}\Rightarrow x_1^2+x_2^2=\frac{4}{9}+\frac{1}{36}=\frac{16+1}{36}=\frac{17}{36}$$

۲۰۱) گزینه‌ی ۲ صورت فارسی مسأله را به بیان ریاضی تبدیل می‌کنیم و مسأله را حل می‌کنیم.

$$\sqrt{۳۶+x}=\sqrt{x}+۲ \xrightarrow{\text{توان دو}} ۳۶+x=(۲+\sqrt{x})^۲$$

$$\Rightarrow ۳۶+x=۴+۴\sqrt{x}+x \Rightarrow ۳۲=۴\sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x}=۸ \Rightarrow x=۶۴$$

۲۰۲) گزینه‌ی ۲ اگر نقطه‌ی p به طول x روی خط $۳x+y+۴=۰$ باشد:

$$۳x+y_p+۴=۰ \Rightarrow y_p=-۴-۳x$$

بنابراین $p(x\ ,\ -۴-۳x)$ در نتیجه:

$$PM=PN \Rightarrow \sqrt{(x+۵)^۲+(-۴-۳x-۶)^۲}=\sqrt{(x-۳)^۲+(-۴-۳x-۲)^۲}$$

$$\Rightarrow (x+۵)^۲+(۳x+۱۰)^۲=(x-۳)^۲+(۳x+۶)^۲$$

$$\Rightarrow x^۲+۱۰x+۲۵+۹x^۲+۶۰x+۱۰۰=x^۲-۶x+۹+۹x^۲+۳۶x+۳۶$$

$$\Rightarrow x=-۲ \Rightarrow P(-۲ \text{ و } ۲) \Rightarrow \text{مجموع مربعات طول و عرض}=(-۲)^۲+۲^۲=۸$$