فصل ۱

حل معادلات

۱ عامل یعنی چی؟ ۱

بچه‌ها! آیا می‌دونید تجزیه‌ی یک عبارت یعنی چی؟ آقا اجازه؟! این که کاری نداره .

تجزیه کردن یعنی تبدیل کردن یک عبارت به چند تیکه، طوری که بین هر دو تیکه‌ی دلخواه ، علامت ضرب یا تقسیم وجود داشته باشه.

مثلاً عبارت $a^۲-b^۲$ رو می‌تونیم به دو تیکه‌ی $(a-b)(a+b)$ تبدیل کنیم که بین‌شون علامت ضرب وجود داره:

$$a^۲-b^۲ \xrightarrow{\text{تجزیه}} (a-b)\times(a+b)$$

آفرین. حالا ازتون می‌خوام که عبارت‌های زیر رو تا اونجایی که جا داره تجزیه کنید. آقا اجازه؟! به روی چشم

$$۱)\ x^۳-x \xrightarrow{\text{تجزیه}} x(x^۲-۱) \xrightarrow{\text{تجزیه}} (x)\cdot(x-۱)\cdot(x+۱) \qquad ۲)\ \frac{x^۳-۱}{x^۲+۳x} \xrightarrow{\text{تجزیه}} \frac{(x-۱)\cdot(x^۲+x+۱)}{(x)\cdot(x+۳)}$$

بچه‌ها! در مثال‌های بالا به هر تیکه‌ی تجزیه شده ، عامل یا فاکتور می‌گیم. مثلاً:

$$۱)\ a^۲-b^۲=(\overset{\text{عامل}}{a-b})\cdot(\overset{\text{عامل}}{a+b}) \qquad ۲)\ x^۳-x=(\overset{\text{عامل}}{x})\cdot(\overset{\text{عامل}}{x-۱})\cdot(\overset{\text{عامل}}{x+۱}) \qquad ۳)\ \frac{x^۳-۱}{x^۲+۳x}=\frac{(\overset{\text{عامل}}{x-۱})\cdot(\overset{\text{عامل}}{x^۲+x+۱})}{(\overset{\text{عامل}}{x})\cdot(\overset{\text{عامل}}{x+۳})}$$

KonKurist.com
forum.KonKurist.com

آقا اجازه؟! پس اگه بین اجزای یک عبارت، جمع یا تفاضل وجود داشته باشه، اون اجزاء عامل نیستن. مگه نه؟

بله عزیزم، همینطوره. مثلاً:

$$۱)\ \overset{\text{غیرعامل}}{a^۳}+\overset{\text{غیرعامل}}{b^۳} \quad \text{اما} \quad \overset{\text{عامل}}{a^۳}\cdot\overset{\text{عامل}}{b^۳} \qquad ۲)\ \frac{\overset{\text{غیرعامل}}{a^۲}-\overset{\text{غیرعامل}}{b^۳}}{\underset{\text{غیرعامل}}{c}+\underset{\text{غیرعامل}}{d^۴}} \quad \text{اما} \quad \frac{\overset{\text{عامل}}{a^۲}\cdot\overset{\text{عامل}}{b^۳}}{\underset{\text{عامل}}{c}\cdot\underset{\text{عامل}}{d^۴}}$$

آقا اجازه؟! اگه در عبارت $\frac{a^۲-b^۳}{c+d^۴}$، صورت کسر، یعنی $a^۲-b^۳$ رو توی یک جعبه و مخرج کسر یعنی $c+d^۴$ رو توی یک جعبه‌ی دیگه قراربدیم. آیا این دو جعبه عامل نمی‌شن؟

بله عزیزم هر کدوم از جعبه ها عامل میشن. چون بین‌شون عمل تقسیم وجود داره. یعنی:

$$\overset{\text{عامل}}{\frac{a^۲-b^۳}{c+d^۴}}$$

آقا اجازه؟! اگه یک عبارت چندجمله‌ای قابل تجزیه نباشه،آیا معنیش اینه که اون عبارت هیچ عاملی نداره؟

نه عزیزم. هرعبارت چندجمله‌ای،حداقل دو تا عامل داره : خودش و ۱ مثلاً: $a^۲+b^۲=(a^۲+b^۲)\times(۱)$ (عامل: $a^۲+b^۲$، عامل: ۱)

بچه‌ها! بحث‌هایی که بین من و شما رد و بدل شد بخاطر این بود که یک مطلب خیلی مهمی رو بهتون بگم. اگه به مطلبی که می‌خوام بگم خوب توجه کنید ،دیگه مرتکب یکسری اشتباه‌های متداولی که خیلی از دانش‌آموزها دچارش هستن، نمی‌شید.

۱) رادیکال

رادیکال تک‌تک عامل ها رو از هم جدا می‌کنه.

$$\sqrt{a^۲ \cdot b^۲} = \sqrt{a^۲} \cdot \sqrt{b^۲}$$

(عامل، عامل)

اما رادیکال قدرت جدا کردن غیر عاملها رو نداره.

$$\sqrt{a^۲ + b^۲} \neq \sqrt{a^۲} + \sqrt{b^۲}$$

(غیر عامل، غیر عامل)

استثناء: رادیکال با فرجه‌ی زوج نمیتونه حاصل‌ضرب دو عامل منفی رو از هم جدا کنه. مثلاً: $\sqrt{(-۲)(-۳)} \neq \sqrt{-۲} \times \sqrt{-۳}$

۲) توان

توان تک‌تک عامل‌ها رو از هم جدا می‌کنه. مثلاً:

$$(a \cdot b)^۲ = (a)^۲ \cdot (b)^۲$$

(عامل، عامل)

اما توان نمی‌تونه غیر عامل‌ها رو به صورت مستقیم از هم جدا کنه. نگاه کنید:

$$(a + b)^۲ \neq (a)^۲ + (b)^۲$$

(غیر عامل، غیر عامل)

۳) تقسیم

در عمل تقسیم میشه عامل‌های مشترک صورت و مخرج رو با هم ساده کرد. مثلاً $a,b \neq ۰$

$$\frac{a^۴ \times b^۲}{a^۴ \times b^۳} = ۱ \times \frac{۱}{b}$$

اما نمی‌شه ، غیرعامل‌های مشترک رو با هم ساده نمود. مثلاً:

$$\frac{a^۲ + b^۲}{a^۲ + b^۳} \neq ۱ + \frac{۱}{b}$$

۲ جابه‌جایی عامل‌ها از یک طرف تساوی به طرف دیگر (طرفین وسطین ناقص) ۲

بچه‌ها! به معادله‌ی $\frac{ax}{b} = \frac{c}{d}$ توجه کنید. شما برای پیدا کردن x ، می‌تونید عامل‌های b و a رو از سمت چپ معادله و به‌صورت مورب (ضربدری)، به طرف راست معادله انتقال بدید. یعنی: $\frac{ax}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow x = \frac{bc}{ad}$

به این حرکت می‌گیم طرفین وسطین ناقص.

KonKurist.com
forum.KonKurist.com

مثال معادله‌ی $\frac{x+۱}{۲} = \frac{۸}{۲۵(x+۱)}$ چند جواب منفی دارد؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

$$\frac{x+۱}{۲} = \frac{۸}{۲۵(x+۱)} \Rightarrow (x+۱)^۲ = \frac{۱۶}{۲۵} \Rightarrow x+۱ = \pm\frac{۴}{۵} \Rightarrow \begin{cases} x+۱ = \frac{۴}{۵} \Rightarrow x = \frac{-۱}{۵} \\ x+۱ = \frac{-۴}{۵} \Rightarrow x = \frac{-۹}{۵} \end{cases}$$

معادله دو جواب منفی داره. پس گزینه‌ی «۳» صحیح است.

۳ (ب.م.م) و (ک.م.م) ۳

ب.م.م

بچه‌ها! آیا می‌دونید بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد a و b یعنی چی؟ $(a,b \in N)$

آقا اجازه؟! ب.م.م دو عدد a و b یعنی بزرگترین عددی که a و b بهش بخش‌پذیرن.

مثلاً برای پیدا کردن ب.م.م دو عدد ۲۴ و ۱۸ باید بزرگترین عددی رو پیدا کنیم که ۲۴ و ۱۸ بهش بخش‌پذیر باشن. پس:

۱) مقسوم‌علیه‌ها یا بچه‌های دو عدد ۲۴ و ۱۸ رو جداگونه می‌نویسیم:

مقسوم‌علیه‌های ۲۴ = {۱, ۲, ۳, ۴, ۶, ۸, ۱۲, ۲۴}

مقسوم‌علیه‌های ۱۸ = {۱, ۲, ۳, ۶, ۹, ۱۸}

۲) مشترک‌هاشون رو انتخاب می‌کنیم (یعنی مقسوم‌علیه‌های مشترک):

مقسوم‌علیه‌های مشترک ۲۴ و ۱۸ = {۱, ۲, ۳, ۶}

بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک ۲۴ و ۱۸

در واقع ۶ بزرگترین عددیه که ۲۴ و ۱۸ بهش بخش‌پذیرن.

آقا اجازه؟! از اونجایی که بچه‌های یک خانواده بخشی از پدر و مادرشون هستن،میشه گفت پدرمادر یک خانواده به بچه‌هاشون بخش‌پذیرن.

مقسوم علیه های مشترک

ب.م.م

پس اگه a و b پدر و مادر یک خانواده باشن، بزرگترین بچه‌شون میشه ب.م.م اونها.

آفرین به تو دانش‌آموز خوش فکرم که سریع، مفاهیم ریاضی رو برای خودت شبیه‌سازی می‌کنی!

البته می‌تونستی اینطوری هم بگی: در بین نسل‌های مشترک دو نفر، به بزرگترینشون میگیم ب.م.م.

بچه‌ها! برای پیدا کردن ب.م.م دو عدد a و b روش سریعی وجود داره:

۱) a و b رو به عامل‌های اول تجزیه کنید. ۲) عامل‌های مشترک با توان کمتر رو در هم ضرب کنید. (چرا؟)

KonKurist.com
forum.KonKurist.com

مثال ب.م.م دو عدد ۲۴ و ۱۸ را به دست آورید.

$$\begin{cases} ۲۴ = ۲^{۳} \times ۳^{۱} \\ ۱۸ = ۲^{۱} \times ۳^{۲} \end{cases} \Rightarrow (۲۴,۱۸) = ۲^{۱} \times ۳^{۱} = ۶$$

همونطور که می‌دونید، ب‌م‌م رو با نماد ( ) نشون میدن.

اگه دو عدد a و b نسبت به هم اول باشن، معنیش اینه که a و b بجز ۱ هیچ عامل مشترکی ندارن. پس $(a,b)=۱$

اگه a به b بخش‌پذیر باشه، اون موقع $(a,b)=b$ بچه ها! فکر می‌کنید چرا؟

آقا اجازه؟! آیا قانونی وجود داره که بشه تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد a رو به کمک اون بدست آورد؟

عزیزم! اگه در مثال زیر با من همکاری کنی با هم راهش رو پیدا می‌کنیم.

مثلاً می‌خوایم تعداد مقسوم‌های طبیعی عدد ۷۵ رو به دست بیاریم.

با توجه به اینکه $۷۵ = ۳^{۱} \times ۵^{۲}$ آیا می‌تونم مقسوم‌علیه‌های ۷۵ رو به صورت $۳^{\square} \times ۵^{\bigcirc}$ بنویسم؟

آقا اجازه؟! در صورتی حرف شما درسته که داخل □ توان‌های ۰ یا ۱ و داخل ○ توان‌های ۰ یا ۱ یا ۲ قرار بگیرن. یعنی:

$$\text{مقسوم‌علیه‌های } ۳^{۱} \times ۵^{۲} = \{\underbrace{۳^{۰} \times ۵^{۰}}_{۱}, \underbrace{۳^{۰} \times ۵^{۱}}_{۵}, \underbrace{۳^{۰} \times ۵^{۲}}_{۲۵}, \underbrace{۳^{۱} \times ۵^{۰}}_{۳}, \underbrace{۳^{۱} \times ۵^{۱}}_{۱۵}, \underbrace{۳^{۱} \times ۵^{۲}}_{۷۵}\}$$

تعداد مقسوم‌علیه‌ها

(۶حالت) = (سه حالت) × (دو حالت) ← اصل شمارش

مقسوم‌علیه‌های $۳^{۱} \times ۵^{۲}$ ⟸ ۳×۳ (سه حالت: ۲ یا ۱ یا ۰؛ دو حالت: ۱ یا ۰)

عزیزم، آیا می‌تونی مدلی درست کنی که $۳^{۱} \times ۵^{۲}$ رو با تعداد مقسوم‌علیه‌هاش مرتبط کنه؟

آقا اجازه؟! فیلی راحته:

$۳^{\boxed{۱}} \times ۵^{\textcircled{۲}}$ تعداد مقسوم‌علیه‌های عدد $= (\boxed{۱}+۱)(\textcircled{۲}+۱)$

آیا می‌تونی بگی که یه عدد طبیعی، بعد از تجزیه‌شدن به عامل‌های اول، اگه به شکل $m^{\alpha} \cdot n^{\beta}$ دربیاد، تعداد مقسوم‌علیه‌هاش چندتاست؟

آقا اجازه؟! به کمک مدل‌سازی بالا میشه گفت:

$(m^{\alpha} \cdot n^{\beta}$ تعداد مقسوم‌علیه‌های عدد$) = (\alpha+۱)(\beta+۱)$

اگه یک عدد طبیعی بعد از تجزیه‌شدن به عامل‌های اول به صورت $m^{\alpha} \cdot n^{\beta} \cdot k^{\gamma} \cdots$ دربیاد، تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعیش برابره با:

$(\alpha+۱)(\beta+۱)(\gamma+۱)\ldots$

مثال تعداد مقسوم‌علیه‌های عدد ۳۶۰ را به دست آورید.

$۳۶۰ = ۲^{۳} \times ۳^{۲} \times ۵^{۱} \Longrightarrow$ تعداد مقسوم‌علیه‌های ۳۶۰ $= (۳+۱)(۲+۱)(۱+۱) = ۲۴$

تمرین ٤ تعداد مقسوم‌علیه‌های مشترک دو عدد ۳۶۰ و ۳۰۰ چیست؟

راهنمایی: ب‌م‌م دو عدد ۳۶۰ و ۳۰۰ رو بدست بیارید. توجه داشته باشید که ب‌م‌م دوعدد به تمام مقسوم‌علیه‌های مشترک اون دو عدد بخش پذیره.

ک.م.م

بچه‌ها! کوچکترین مضرب مشترک دو عدد a و b یعنی: در بین اعدادی که هم به a هم به b بخش‌پذیرن، کوچکترینشون.

مثلاً برای پیدا کردن ک.م.م دو عدد ۶ و ۴ باید:

۱) مضرب‌های (آبا و اجداد) دو عدد ۶ و ۴ رو جداگونه بنویسید.

مضرب‌های ۶ $= \{۶, \textcircled{۱۲}, ۱۸, \textcircled{۲۴}\}$

مضرب‌های ۴ $= \{۴, ۸, \textcircled{۱۲}, ۱۶, \textcircled{۲۰}, ۲۴, \ldots\}$

۲) مشترک هاشون رو انتخاب کنید (یعنی مضرب‌های مشترک):

مضرب‌های مشترک دو عدد ۶ و ۴ $= \{\textcircled{۱۲}, ۲۴, ۳۶, \ldots\}$

کوچکترین مضرب مشترک ۶ و ۴

در واقع ۱۲ کوچکترین عددیه که هم به ۶ و هم به ۴ بخش‌پذیره.

آقا اجازه؟! اگه a و b رو بچه‌های یک خانواده در نظر بگیریم، به کوچکترین سرپرست این بچه ها میگیم ک.م.م اونها.

کاملاً درسته عزیزم. میتونی اینطوری هم بگی: در بین اجداد مشترک دو نفر، به کوچکترین شون میگیم ک‌م‌م.

بچه‌ها! در مقایسه ی بین ک‌م‌م و ب‌م‌م دو عدد مختلف ، کدوم بزرگتره؟

آقا اجازه؟ ک‌م‌م بزرگتره. مثلاً:

$\{\textcircled{۱۲}, ۲۴, ۳۶, ۴۸, \ldots\}$ ← مضرب‌های مشترک ← $\boxed{۴, ۶}$ ← مقسوم‌علیه‌های مشترک ← $\{۱, \textcircled{۲}\}$

ک‌م‌م — ب‌م‌م

بچه‌ها! برای پیدا کردن ک‌م‌م دو عدد a وb روش سریعی وجود داره:

۱) a و b رو به عامل‌های اول تجزیه کنید. ۲) عامل‌های مشترک با توان بیشتر رو در عامل‌های غیرمشترک ضرب کنید. (چرا؟)

KonKurist.com
forum.KonKurist.com

مثال ک‌م‌م دو عدد ۷۵ و ۹۰ را بدست آورید.

$۷۵ = ۵^{۲} \times ۳^{۱}$

$۹۰ = ۵^{۱} \times ۳^{۲} \times ۲^{۱}$

$\Longrightarrow \quad [۷۵ , ۹۰] = ۵^{۲} \times ۳^{۲} \times ۲^{۱} = ۴۵۰$

همونطور که می‌دونید، ک.م.م رو با نماد [ ] نشون میدن.

اگه دو عدد a و b نسبت به هم اول باشن، اون موقع هیچ عامل مشترکی بین شون وجود نداره. پس: $[a,b] = a.b$

اگه a به b بخش‌پذیر باشه، اون موقع $[a,b] = a$ (چرا؟)

ک‌م‌م دو عدد کسری به صورت $\left[\frac{a}{b},\frac{c}{d}\right] = \frac{[a,c]}{(b,d)}$ محاسبه میشه. (شرط داشتن ک م م اینه که هر دو کسر ، گویا و یا هر دو کسر، گنگ باشن)

مثال ک‌م‌م دو عدد $\frac{۳}{۲}$ و $\frac{۲}{۳}$ چیست؟

$\left[\frac{۲}{۳},\frac{۳}{۲}\right] = \frac{[۲,۳]}{(۳,۲)} = \frac{۶}{۱} = ۶$

ک‌م‌م و ب‌م‌م چندجمله‌ای‌ها

بچه‌ها! پیدا کردن ب.م.م و ک.م.م دو چندجمله‌ای، مثل پیدا کردن ب‌م‌م و ک‌م‌م دوعدده .

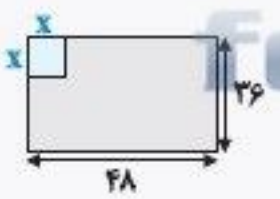
مثال ب‌م‌م و ک‌م‌م دو عبارت $(x^{۴} - x^{۲})$ و $(x^{۳} - ۲x^{۲} + x)$ را بدست آورید.

$$\begin{cases} x^{۴} - x^{۲} = x^{۲}(x-۱)^{۱}(x+۱)^{۱} \\ x^{۳} - ۲x^{۲} + x = x^{۱}(x-۱)^{۲} \end{cases} \Longrightarrow \begin{matrix} \text{ب‌م‌م} = x(x-۱) \\ \text{ک‌م‌م} = x^{۲}(x-۱)^{۲}(x+۱) \end{matrix}$$

۴ کاربرد (ب.م.م) و (ک.م.م) در مسائل روزمره ۴

بچه‌ها! بدون هیچ توضیحی می‌خوام برم سراغ چند مثال کاربردی:

مثال می‌خواهیم کف سالنی مستطیل شکل به ابعاد ۴۸ × ۳۶ متر را با فرش‌های مربع شکل یکسان بطور کامل بپوشانیم. اندازه‌ی ضلع هر تخته فرش چند متر باشد تا کمترین تعداد فرش مورد استفاده قرار گیرد؟ (اندازه‌ی هر ضلع فرش عددی طبیعی بر حسب متر می‌باشد.)



بچه‌ها! اگه x اندازه‌ی هر ضلع فرش باشه، برای اینکه کل سالن پوشیده بشه، باید ۴۸ و ۳۶ به x بخش‌پذیر باشن. به عبارت دیگه x باید مقسوم‌علیه مشترک ۳۶ و ۴۸ باشد. حالا اگه بخوایم کمترین تعداد فرش رو مورد استفاده قرار بدیم، باید x به بزرگترین مقدارش برسه.

نتیجه اینکه x باید ب.م.م دو عدد ۳۶ و ۴۸ باشد.

$۴۸ = ۲^{۴} \times ۳^{۱}$

$۳۶ = ۲^{۲} \times ۳^{۲}$

$\Longrightarrow \quad (۴۸,۳۶) = ۲^{۲} \times ۳^{۱} = ۱۲$

پس کافیه که فرشهای ۱۲× ۱۲ انتخاب کنیم تا کل سالن با کمترین تعداد فرش پوشیده بشه.

بچه‌ها! در مثال قبل به چند طریق میشه کل سالن رو با فرش‌های مربع شکل پوشش داد؟

آقا اجازه؟! می‌دونیم اندازه‌ی ضلع این فرش‌ها باید مقسوم‌علیه مشترک اعداد ۳۶ و ۴۸ باشه تا بشه سالن رو باهاشون پوشوند.

پس تعداد مقسوم‌علیه‌های مشترک ۳۶ و ۴۸ همون تعداد حالت‌هائیه که سؤال ، از ما خواسته:

مقسوم‌علیه‌های مشترک ۳۶ و ۴۸ $= \{۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۶ , ۱۲\}$

بنابراین با فرش‌های ۱×۱، ۲×۲، ... ، ۱۲×۱۲ میشه سالن رو پوشوند. (یعنی به ۶ طریق)

روش ۲: بچه‌ها! همونطور که می‌دونید تعداد مقسوم‌علیه‌های مشترک ۳۶ و ۴۸ با تعداد مقسوم‌علیه‌های ب.م.م اونها (یعنی ۱۲) برابره. پس:

$$\text{تعداد مقسوم‌علیه‌های } \underbrace{۲^{۲} \times ۳^{۱}}_{۱۲} = (۲+۱)(۱+۱) = ۶ \text{ تعداد مقسوم‌علیه‌های ۳۶ و ۴۸}$$

KonKurist.com
Forum.KonKurist.com

مثال چند دقیقه‌ی قبل، دو ماشین A و B از تهران روانه شدند و الان در یک مسیر به سمت بندرعباس در حال حرکتند. اگراز لحظه‌ی شروع حرکت، ماشین A هر ۲۵ کیلومتر یک بار و ماشینB هر ۶۰ کیلومتر یکبار توقف نماید، با فرض اینکه فاصله‌ی تهران تا بندرعباس ۱۰۰۰ کیلومتر باشد، اولین نقطه‌ای که محل مشترک توقف هر دو ماشین می‌باشد تا بندرعباس چند کیلومتر فاصله دارد؟

بچه‌ها! همونطور که می‌بینید نقاط توقف ماشین A مضربی از ۲۵ و نقاط توقف ماشین B مضربی از ۶۰ هست. پس نقاط مشترک توقف هر دو ماشین، باید مضرب مشترک ۲۵ و ۶۰ بشه. بنابراین اولین نقطه‌ی مشترک توقف ، میشه ک‌م‌م ۲۵ و ۶۰:

$$\begin{cases} ۶۰ = ۲^۲ \times ۳^۱ \times ۵^۱ \\ ۲۵ = ۵^۲ \end{cases} \Longrightarrow [۶۰,۲۵] = ۵^۲ \times ۲^۲ \times ۳^۱ = ۳۰۰$$

پس ۳۰۰ کیلومتر بعد از تهران و یا ۷۰۰ کیلومتر مانده به بندرعباس میشه اولین نقطه‌ی مشترک توقف هر دو ماشین.

۵ حل معادلات به کمک حذف عامل‌های مشترک از دو طرف (روشی سریع اما خطرناک) ۵

مثال آموزشی: بچه‌ها! می‌خوام معادله‌ی $(x^۲-۱)x^۲ = ۹(x^۲-۱)$ رو با دو روش براتون حل کنم.

روش کُند: یه طرف تساوی رو به طرف دیگه انتقال میدم و از عامل‌های مشترک فاکتور می‌گیرم، بعدش معادله‌ی تجزیه شده رو حل می‌کنم:

$$(x^۲-۱)x^۲ = ۹(x^۲-۱) \Longrightarrow (x^۲-۱)x^۲ - ۹(x^۲-۱) = ۰ \Longrightarrow (x^۲-۱)(x^۲-۹) = ۰ \Longrightarrow \begin{cases} x^۲-۱=۰ \Longrightarrow x = \pm ۱ \\ x^۲-۹=۰ \Longrightarrow x = \pm ۳ \end{cases}$$

روش سریع: عامل‌های مشترک رو از دو طرف معادله حذف کرده و معادله‌ی ساده شده رو حل می‌کنم:

$$(\cancel{x^۲-۱})x^۲ = ۹(\cancel{x^۲-۱}) \Longrightarrow x^۲ = ۹ \Longrightarrow x = \pm ۳$$

بچه‌ها، مثل این‌که تو روش سریع، اتفاق بدی افتاده. همون‌طور که می‌بینید دو تا از جواب‌های معادله، یعنی $x = \pm ۱$ غیبشون زده. فکر می‌کنید علّتش چیه؟

آقا اجازه؟! فیلی واضحه، دلیلش اینه‌که عامل‌های مشترک $(x^۲-۱)$ رو از دو طرف معادله حذف کردید، اما به این موضوع فکر نشده که ریشه‌های $(x^۲-۱)$ قسمت دیگه‌ای از جواب معادله هستن.

بچه‌ها! ببخشید .حالا می‌آم و اشتباهم رو جبران می‌کنم:

$$(\cancel{x^۲-۱})x^۲ = ۹(\cancel{x^۲-۱}) \xrightarrow{x^۲-۱=۰} x^۲ = ۹ \Longrightarrow \begin{cases} x = \pm ۱ \\ x = \pm ۳ \end{cases}$$

معادله ۴ جواب داره

بچه‌ها! یه سؤال: نظرتون راجع به جواب‌های معادله‌ی $\frac{x^۲}{x^۲-۱} = \frac{۹}{x^۲-۱}$ چیه؟

آقا اجازه؟! تفاوت این معادله با معادله قبلی اینه که تو معادله‌ی قبلی $x^۲-۱$ در صورت کسر بود ولی در این معادله $x^۲-۱$ در مخرجه. دراین معادله ما حق نداریم $x^۲-۱$ رو مساوی صفر قرار بدیم ، چون مخرج صفر میشه و معادله اصلاً تعریف نمی‌شه. پس با شرط $x^۲-۱ \neq ۰$ عامل‌های مشترک $x^۲-۱$ رو از مخرج حذف کرده و معادله‌ی ساده شده رو حل می‌کنیم. یعنی:

$$\frac{x^۲}{\cancel{x^۲-۱}} = \frac{۹}{\cancel{x^۲-۱}} \xrightarrow{x^۲-۱\neq ۰} x^۲ = ۹ \Longrightarrow \boxed{x = \pm ۳}$$

معادله دو جواب داره

$$f(x).g(x) = f(x).h(x) \Longrightarrow f(x)=۰ \text{ یا } g(x)=h(x) \Longrightarrow \text{اجتماع جواب‌ها}$$

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{h(x)}{f(x)} \Longrightarrow f(x)\neq ۰ \text{ و } g(x)=h(x) \Longrightarrow \text{اشتراک جواب‌ها}$$

KonKurist.com
forum.KonKurist.com

مثال معادله‌ی $(x-1)^۲=(x-1)(۲x+۳)$ چند جواب دارد؟ ۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

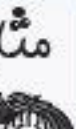
معادله ۲ جواب داره $\Rightarrow$ $x=-۴$ $\xrightarrow{x-۱=۰}$ $۲x+۳=x-۱$: روش سریع $(\cancel{x-۱})(۲x+۳)=(\cancel{x-۱})(x-۱)$ ($x=۱$)

مثال معادله‌ی $\frac{x^۲}{x-۲}=\frac{۴}{x-۲}$ چند جواب دارد؟ ۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

$\frac{x^۲}{\cancel{x-۲}}=\frac{۴}{\cancel{x-۲}}$ $\xrightarrow{x-۲\neq ۰}$ $x^۲=۴$ $\Rightarrow$ $x=\pm ۲$ ($x\neq ۲$)

با توجه به این‌که x نمی‌تونه ۲ باشه پس در بین جواب‌های $x=\pm ۲$ فقط $x=-۲$ قابل قبوله در نتیجه معادله یک جواب داره.

۶ حل معادلات درجه‌ی دوم $ax^۲+bx+c=۰$ ۶



بچه‌ها! روش‌های مختلفی برای حل معادلات درجه‌ی دوم وجود داره که چند تارو با هم بررسی می‌کنیم:

روش Δ

می‌دونیدکه در یک معادله‌ی درجه‌ی ۲ با کمک $\Delta=b^۲-۴ac$ میشه ریشه‌های معادله رو بدست آورد:

$$ax^۲+bx+c=۰ \xrightarrow{\Delta=b^۲-۴ac} x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}$$

مثال در معادله‌ی $۲x^۳-۵x^۲=-۲x$ فاصله‌ی بین کوچکترین و بزرگترین ریشه چیست؟

$x(۲x^۲-۵x+۲)=۰$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} x=۰ \\ ۲x^۲-۵x+۲=۰ \xrightarrow{\Delta=۲۵-۱۶} x=\frac{۵\pm\sqrt{۹}}{۴} \Rightarrow \begin{cases} x=۲ \\ x=\frac{۱}{۲} \end{cases} \end{cases}$

کوچکترین ریشه، $x=۰$ و بزرگترین ریشه، $x=۲$ هست. پس فاصله‌ی بین این دو ریشه برابره با ۲.

KonKurist.com
forum.KonKurist.com

روش Δ'

بچه‌ها! در معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^۲+bx+c=۰$ اگه b زوج باشه میتونید از $b'=\frac{b}{۲}$ استفاده کرده و ریشه‌های معادله‌رو به صورت زیر بدست بیارید:

$$ax^۲+bx+c=۰ \xrightarrow{\Delta'=b'^۲-ac} x=\frac{-b'\pm\sqrt{\Delta'}}{a}$$

مثال جواب‌های معادله ی $۳x^۲-۱۸x+۲=۰$ را به دست آورید.

آقا اجازه؟! با توجه به اینکه از روش Δ یه کمی محاسبات، سنگین میشه، بهتره که از روش Δ' استفاده کنیم. $(b'=-۹)$

$\Delta'=b'^۲-ac \Rightarrow \Delta'=۸۱-۶=۷۵$

$x=\frac{-b'\pm\sqrt{\Delta'}}{a} \Rightarrow x=\frac{۹\pm\sqrt{۷۵}}{۳} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{۹+۵\sqrt{۳}}{۳} \\ x=\frac{۹-۵\sqrt{۳}}{۳} \end{cases}$

روش اتحاد جمله‌ی مشترک

ریشه های معادلات درجه دومی که ساختارشون به صورت $x^۲+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=۰$ هست رو میشه به صورت زیر بدست آورد.

$$x^۲+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=۰ \Rightarrow (x+\alpha)(x+\beta)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=-\alpha \\ x=-\beta \end{cases}$$

مثال ریشه‌های معادلات زیر را بدست آورید.

۱) $x^۲-x-۴۲=۰ \Rightarrow (x-۷)(x+۶)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۷ \\ x=-۶ \end{cases}$

(−۷)(+۶) ، (−۷)+(+۶)

۲) $۲x^۲-x-۱۰=۰ \xrightarrow{\times ۲} (۲x)^۲-(۲x)-۲۰=۰ \Rightarrow (۲x-۵)(۲x+۴)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{۵}{۲} \\ x=-۲ \end{cases}$

(−۵)(+۴) ، (−۵)+(+۴)

روش ضرایب

A) بچه‌ها! همونطور که می‌دونید اگه در معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^۲+bx+c=۰$ مجموع ضرایب a، b و c برابر صفر باشه یک ریشه (۱) و ریشه‌ی دیگه $\left(\frac{c}{a}\right)$ میشه.

$$ax^۲+bx+c=۰ \xrightarrow{a+b+c=۰} \begin{cases} x=۱ \\ x=\frac{c}{a} \end{cases}$$

$$\text{علت}: \begin{cases} ax^۲+bx+c \xrightarrow{x=۱} a(۱)^۲+b(۱)+c=a+b+c \xrightarrow{\text{طبق فرض } a+b+c=۰} ۰ \\ ax^۲+bx+c \xrightarrow{x=\frac{c}{a}} a\left(\frac{c^۲}{a^۲}\right)+b\left(\frac{c}{a}\right)+c=\frac{c^۲}{a}+\frac{bc}{a}+\frac{ac}{a}=\frac{c(a+b+c)}{a} \xrightarrow{\text{طبق فرض } a+b+c=۰} ۰ \end{cases}$$

B) از طرفی اگه مجموع ضرایب جملات اول و آخر برابر با ضریب وسط باشد، یک ریشه (−۱) و ریشه‌ی دیگه $\left(-\frac{c}{a}\right)$ میشه.

یعنی:

$$ax^۲+bx+c=۰ \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x=-۱ \\ x=\frac{-c}{a} \end{cases}$$

توجه: برای چندجمله‌ای‌های درجه‌ی n قانون زیر هواره برقراره.

$ax^n+bx^{n-۱}+\cdots=۰ \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب}=۰}$ (یکی از ریشه‌ها $x=۱$ هست)

$ax^n+bx^{n-۱}+\cdots=۰ \xrightarrow{\text{(مجموع ضرایب جملاتی که توان فرد دارن) - (مجموع ضرایب جملاتی که توان زوج دارن)}}$ (یکی از ریشه‌ها $x=-۱$ هست)

مثال ریشه‌های معادلات زیر را در صورت وجود به دست آورید.

۱) $\sqrt{۳}x^۲-x+۱-\sqrt{۳}=۰ \xrightarrow{(\sqrt{۳})+(-۱)+(۱-\sqrt{۳})=۰} \begin{cases} x=۱ \\ x=\frac{۱-\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}-۱ \end{cases}$

۲) $۶x^۲-۱۹x-۲۵=۰ \xrightarrow{(۶)+(-۲۵)=-۱۹} \begin{cases} x=-۱ \\ x=-\frac{-۲۵}{۶}=\frac{۲۵}{۶} \end{cases}$

KonKurist.com
forum.KonKurist.com

مثال معادله‌ی $x^۳-۲x^۲-۵x+۶=۰$ چند ریشه‌ی منفی دارد؟

$$x^۳-۲x^۲-۵x+۶=۰ \xrightarrow{(-۱)+(-۲)+(-۵)+(۶)=۰} \begin{cases} x=۱ \\ ? \end{cases} \Rightarrow x^۳-۲x^۲-۵x+۶=(x-۱)(?)$$

اگه $x^۳-۲x^۲+۵x+۶$ رو به $x-۱$ تقسیم کنیم، قسمت دوم عبارت تجزیه شده، مشخص میشه.

$$\begin{array}{r|l} x^۳-۲x^۲-۵x+۶ & x-۱ \\ \hline x^۳-x^۲ & x^۲-x-۶ \\ \hline -x^۲-۵x+۶ & \\ -x^۲+x & \\ \hline -۶x+۶ & \\ -۶x+۶ & \\ \hline -۱۲x+۱۲ & \end{array}$$

$$\Rightarrow x^۳-۲x^۲-۵x+۶=(x-۱)(x^۲-x-۶)=(x-۱)(x-۳)(x+۲)$$

همونطور که می‌بینید معادله ی $x^۳-۲x^۲-۵x+۶=۰$ سه ریشه داره $(x=۱, x=۳, x=-۲)$ که یکی‌شون منفیه.

۷ حل معادلات مرکب ۷

مثال آموزشی؛ معادله‌ی $\left(\frac{x}{۲x-۱}\right)^۲+۵\left(\frac{x}{۲x-۱}\right)+۴=۰$ **رو حل کنید.**

بچه‌ها! معادله‌ی بالا معادله‌ایست با ظاهری درجه‌ی ۲، اما نه برحسب x، بلکه برحسب $\left(\frac{x}{۲x-۱}\right)$.

حل معادله‌ی بالا در دو مرحله صورت میگره:

۱) عبارت $\left(\frac{x}{۲x-۱}\right)$ رو درون جعبه‌ای به‌نام X قرار می‌دیم و معادله رو به صورت $X^۲+۵X+۴=۰$ می‌نویسیم. از حل این معادله مقادیر X پیدا میشه.

$$X^۲+۵X+۴=۰ \Rightarrow \begin{cases} X=-۱ \\ X=-۴ \end{cases}$$

۲) در واقع با معلوم شدن X، مقدار $\left(\frac{x}{۲x-۱}\right)$ رو مشخص کردیم. پس میتونیم مقدار x رو پیدا کنیم.

$$\begin{cases} X=-۱ \Rightarrow \frac{x}{۲x-۱}=-۱ \Rightarrow x=-۲x+۱ \Rightarrow ۳x=۱ \Rightarrow x=\frac{۱}{۳} \\ X=-۴ \Rightarrow \frac{x}{۲x-۱}=-۴ \Rightarrow x=-۸x+۴ \Rightarrow ۹x=۴ \Rightarrow x=\frac{۴}{۹} \end{cases}$$

KonKurist.com
forum.KonKurist.com

برای حل معادلات مرکب به فرم $f\left(g(x)\right)=۰$
- اول مقدار $g(x)$ رو پیدا کنید.
- بعدش با معلوم شدن $g(x)$، مقدار x رو به دست بیارید.

مثال در مورد معادله‌ی $\left(\frac{x^۲}{x^۲+۱}\right)^۲+\left(\frac{x^۲}{x^۲+۱}\right)-۶=۰$ **کدام گزینه صحیح است؟**

۱) ریشه‌ی مضاعف دارد. ۲) ریشه‌ی حقیقی ندارد. ۳) چهار ریشه دارد. ۴) دو ریشه دارد.

$$\left(\frac{x^۲}{x^۲+۱}\right)^۲+\left(\frac{x^۲}{x^۲+۱}\right)-۶=۰ \xrightarrow{\frac{x^۲}{x^۲+۱}=X} X^۲+X-۶=۰ \Rightarrow (X+۳)(X-۲)=۰$$

$$\begin{cases} X=-۳ \Rightarrow \frac{x^۲}{x^۲+۱}=-۳ & \text{(عبارت } \frac{x^۲}{x^۲+۱} \text{ نامنفیه و نمی‌تونه ۳- بشه)} \\ X=۲ \Rightarrow \frac{x^۲}{x^۲+۱}=۲ \Rightarrow ۲x^۲+۲=x^۲ \Rightarrow x^۲=-۲ & \text{(} x^۲ \text{ نامنفیه و نمی‌تونه ۲- بشه)} \end{cases}$$

بنابراین معادله‌ی بالا ریشه‌ی حقیقی نداره. پس گزینه‌ی «۲» صحیح است.

۸ حل معادلات قدر مطلقی ۸

بچه‌ها! آیا می‌تونید معادله‌ی $|x|=۳$ روبه فارسی ترجمه کنید؟

آقا اجازه؟! بله. همه‌مون می‌دونیم که قدرمطلق، کارش مثبت کردنه. پس معنی معادله‌ی $|x|=۳$ اینه:

«xهایی رو به دست بیارید که وقتی مثبتشون کنیم، بشن ۳»

با توجه به این ترجمه، فقط ۳ یا ۳- میتونن جای x رو بگیرن. یعنی: $|x|=۳$

بچه‌ها! جواب معادله‌ی $|x|=-۳$ چی میشه؟

آقا اجازه؟! $|x|$ مقدارش مثبته. پس نمی‌تونه با -۳ برابر بشه. یعنی این معادله جواب نداره.

$|x|=a \xrightarrow{a<۰\ \text{اگه}}$ معادله جواب نداره

$|x|=a \xrightarrow{a\geq ۰\ \text{اگه}} x=\pm a$

بچه‌ها! میشه بگید جواب معادله‌ی $|x|=|a|$ چی میشه؟

آقا اجازه؟! کاملاً واضحه که دو عدد x و a اگه با هم برابر و یا قرینه‌ی هم باشن، قدرمطلقشون با هم برابر میشه. مثلاً:

$|۲|=|-۲|$ یا $|-۲|=|-۲|$ یا $|۲|=|۲|$

پس میشه گفت: « اگه $|x|=|a|$ باشه، اون موقع x و a یا با هم برابرن و یا قرینه‌ی هم دیگه هستن. »

$|x|=|a| \xrightarrow{\text{بی‌قید و شرط}} x=\pm a$

مثال معادلات زیر را حل کنید.

۱) $|۲x-۱|=|۳x| \xrightarrow{\text{شرط: } ۳x\geq ۰ \Rightarrow x\geq ۰} ۲x-۱=\pm ۳x \Rightarrow \begin{cases} x=-۱ & \text{(جواب نیست، چون با شرط، مطابقت نداره)} \\ x=\frac{۱}{۵} & \text{(جوابه، چون با شرط، مطابقت داره)} \end{cases}$

۲) $|۲x-۱|=|۳x| \xrightarrow{\text{بی‌قید و شرط}} ۲x-۱=\pm ۳x \Rightarrow \begin{cases} x=-۱ & \text{(جواب)} \\ x=\frac{۱}{۵} & \text{(جواب)} \end{cases}$

۳) $\left|\frac{x+۱}{x-۱}\right|=|۲x+۱| \Rightarrow \frac{|x+۱|}{|x-۱|}=|۲x+۱| \Rightarrow |x+۱|=|\underbrace{(x-۱)(۲x+۱)}_{۲x^۲-x-۱}| \Rightarrow ۲x^۲-x-۱=\pm(x+۱) \Rightarrow$

$\begin{cases} ۲x^۲-۲x-۲=۰ \\ ۲x^۲=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{۱\pm\sqrt{۵}}{۲} \\ x=۰ \end{cases}$

هر سه مقدار بدست اومده، جواب این معادله هستن. چون در دامنه‌ی معادله اولیه (یعنی $R-\{۱\}$) قرار دارن.

KonKurist.com
forum.KonKurist.com

۹ حل معادلات گویا ۹

بچه‌ها! اگه می‌خواید یک معادله‌ی گویا رو حل کنید بهتره که مراحل زیر رو طی کنید:

۱) اگه معادلتون کسری بود، دو طرف معادله رو در مخرج مشترکشون یا کم‌م مخرجها ضرب کنید تا به یک معادله‌ی بدون مخرج برسید.

۲) جواب معادله‌ی بدون مخرج رو به دست بیارید و در معادله‌ی اولیه (معادله‌ی کسری) چک کنید. اگه مقادیر به دست اومده دردامنه‌ی معادله‌ی اولیه قرار داشتن(یعنی در معادله ی اولیه صدق کردن) به عنوان جواب معادله محسوب می‌شن و در غیراین صورت خیر.

مثال معادله‌ی زیر چند جواب دارد؟

$$\frac{x-2}{x+2}+\frac{x}{x-2}=\frac{8}{x^2-4} \xrightarrow{\times(x^2-4)} (x-2)^2+x(x+2)=8 \Rightarrow x^2-4x+4+x^2+2x-8=0$$

$$\Rightarrow 2x^2-2x-4=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \xrightarrow{\text{ق.ق}} & \text{در دامنه‌ی معادله‌ی اولیه قرار داره پس جوابه.} \\ x=2 \xrightarrow{\text{غ.ق.ق}} & \text{در دامنه‌ی معادله‌ی اولیه قرار نداره پس جواب نیست.} \end{cases}$$

۱۰ حل معادلات گنگ (از طریق به توان رساندن دو طرف معادله) ۱۰

بچه‌ها! بعضی از شماها برای حل یک معادله ممکنه دو طرف معادله رو به توان ۲ برسونید و از این طریق به جواب برسید. اما آیا به این موضوع فکر کردید که به توان زوج رسوندن یک معادله، ممکنه جواب‌های زائدی رو تولید کنه که در معادله‌ی اولیه صادق نباشه؟ اگه تا حالا به این موضوع فکر نکردید ،پس به این مثال توجه کنید:

$$\sqrt{5-4x}=x \xrightarrow{()^2} 5-4x=x^2 \Rightarrow x^2+4x-5=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-5 \end{cases}$$

امتحان:
$$\begin{cases} \sqrt{5-4x}=x \xrightarrow{x=1} 1=1 & \text{(ق.ق)} \\ \sqrt{5-4x}=x \xrightarrow{x=-5} 5=-5 & \text{(غ.ق.ق)} \end{cases} \Rightarrow \text{جواب معادله } \boxed{x=1}$$

اگه دو طرف معادله‌ای رو به توان زوج رسوندید حتماً جواب‌های به دست اومده رو در معادله‌ی اولیه چک کنید.
چون‌که ممکنه بعضی از جواب‌های به دست اومده، زائد باشن و در معادله‌ی اولیه صدق نکنن.

مثال معادله‌ی $x-2\sqrt{x-1}=0$:

۱) یک ریشه‌ی ساده دارد. ۲) دو ریشه‌ی متمایز دارد. ۳) ریشه‌ی حقیقی ندارد. ۴) یک ریشه‌ی مضاعف دارد.

$$x=2\sqrt{x-1} \xrightarrow{\text{توان (۲)}} x^2=4(x-1) \Rightarrow x^2-4x+4=0 \Rightarrow (x-2)^2=0 \Rightarrow x=2$$

حالا $x=2$ را تو معادله امتحان می‌کنیم: (ق.ق $2=2$ $\Rightarrow$ $2=2\sqrt{2-1}$) بنابراین معادله یک ریشه داره.

در ضمن $x=2$ از معادله‌ی $(x-2)^2=0$ به دست اومده . پس $x=2$ ریشه‌ی مضاعفه !!!!

مثال در معادله‌ی $\sqrt{9+\sqrt{x^3-2x^2+x}}=3$ تعداد ریشه‌ها کدامست؟ ۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۳

$$\sqrt{9+\sqrt{x^3-2x^2+x}}=3 \xrightarrow{\text{توان (۲)}} 9+\sqrt{x^3-2x^2+x}=9 \Rightarrow \sqrt{x(x^2-2x+1)}=0$$

$$x(x-1)^2=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow$$ چون $x=0$ و $x=1$ در معادله‌ی اولیه صدق می‌کنن پس معادله دو ریشه داره .

۱۱ حل معادلات گنگ (به کمک دامنه) ۱۱

بچه‌ها! تو بعضی از معادلات، دامنه‌ی معادله تعداد عضوهای بسیار کمی داره. یعنی دامنه ی معادله، مجموعه‌ای یک عضوی یا چند عضویه. در این حالت شما می‌تونید هر یک از اعضای دامنه رو تو معادله قرار بدید، اگه تو معادله صدق کردن ، به عنوان جواب در نظر بگیرید و در غیراینصورت خیر.

KonKurist.com
Forum.KonKurist.com

مثال معادله‌ی $\sqrt{x+\sqrt{x-2}}=\sqrt{2-x}+\sqrt{2x-2}$ چند ریشه‌ی حقیقی دارد؟

$$\begin{cases} x-2\geq 0 \Rightarrow x\geq 2 \\ 2-x\geq 0 \Rightarrow x\leq 2 \\ 2x-2\geq 0 \Rightarrow x\geq 1 \end{cases} \xrightarrow{\cap} D=\{2\} \xrightarrow{x=2 \text{ رو توی معادله قرار می‌دیم}} \sqrt{2+\sqrt{2-2}}=\sqrt{2-2}+\sqrt{2(2)-2} \Rightarrow \sqrt{2}=\sqrt{2}$$

بنابراین $x=2$ تنها جواب این معادله هست، چون در معادله‌ی اولیه صدق کرد.

۱۲ حل معادلات گویا و گنگ (به کمک برد) ۱۲

مثال آموزشی؛ تعداد جواب‌های معادله‌ی $\sqrt{x^2+9}=3-x^4$ چیست؟

$$\begin{cases} x^2\in[0,+\infty) \xrightarrow{+9} x^2+9\in[9,+\infty) \xrightarrow{\sqrt{\ }} \sqrt{x^2+9}\in[3,+\infty) \\ x^4\in[0,+\infty) \xrightarrow{\text{قرینه}} -x^4\in(-\infty,0] \xrightarrow{+3} 3-x^4\in(-\infty,3] \end{cases}$$

آقا اجازه؟! عبارت $\sqrt{x^2+9}$ بزرگ‌تر یا مساوی ۳ و عبارت $3-x^4$ هم کوچک‌تر یا مساوی ۳ هست.پس امکان نداره $\sqrt{x^2+9}=3-x^4$ بشه. در نتیجه این معادله جواب نداره.

عزیزم اگه یه کم دقتت رو بیش‌تر کنی می‌فهمی که این معادله جواب داره.

آقا اجازه؟! حواس‌مون نبود که برد $3-x^4$ و برد $\sqrt{x^2+9}$ در عدد ۳ مشترک هستن. پس معادله‌ی $\sqrt{x^2+9}=3-x^4$ فقط در صورتی جواب داره که هر دو طرف تساوی برابر با ۳ بشه. یعنی:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+9}=3 \Rightarrow (x=0) \\ 3-x^4=3 \Rightarrow (x=0) \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x=0 \text{ جواب این معادله هست.}$$

KonKurist.com
forum.KonKurist.com

در حل معادله‌ی $f(x)=g(x)$ اگه برد f و g فقط در یک نقطه مانند L مشترک بودند، کافیه یکبار $f(x)$ و بار دیگه $g(x)$ رو مساوی L قرار بدید و جواب‌های این دو معادله رو به‌دست بیارید. اشتراک جواب‌های به دست اومده، جواب نهایی معادله‌ی $f(x)=g(x)$ خواهد بود.

۱۳ حل معادلاتی که در آن مجموع چند عبارت نامنفی برابر صفر می‌شود ۱۳

مثال آموزشی؛ معادله‌ی $|x-1|+\sqrt{x^2-1}+(2x-2)^2=0$ رو حل کنید.

بچه‌ها! این معادله از ۳ تا عبارت نامنفی(بزرگ‌تر یا مساوی صفر) تشکیل شده که جمع‌شون برابر صفره. این تساوی امکان نداره مگر این‌که هر سه عبارت با هم صفر بشن. یعنی:

$$\begin{cases} |x-1|=0 \Rightarrow (x=1) \\ \sqrt{x^2-1}=0 \Rightarrow (x=\pm 1) \\ (2x-2)^2=0 \Rightarrow (x=1) \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x=1$$

بچه‌ها! فکر می‌کنید چرا از جواب‌های پیدا شده اشتراک گرفتم؟

آقا اجازه؟! خب معلومه، چون فقط ریشه‌ی مشترک میتونه هر سه عبارت رو همزمان صفر کنه.

اگه مجموع n تا عبارت بزرگ‌تر یا مساوی صفر، برابر صفرشد ، بدونید که این تساوی امکان نداره ، مگه این‌که هر n عبارت، همزمان صفر بشن.

۱۴ حل معادلات تو در تو (مسلسل) ۱۴

مثال معادله‌ی $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\dots}}}=2$ را حل کنید.

بچه‌ها! همون‌طور که می‌بینید، این معادله تودرتو هست. یعنی در سمت چپ این معادله دریایی از $\sqrt{x}$ می‌بینید که به صورت تودرتو باهم جمع شدند.برای حل این معادله، با لایه‌ی اول (یعنی $\sqrt{x+\dots}$) کاری نداشته باشید و لایه‌های دوم، سوم، چهارم و ... رو درون جعبه‌ای قرار بدید. یعنی:

$$\sqrt{x+\boxed{\sqrt{x+\sqrt{x+\dots}}}}=2$$

آیا به نظر شما عبارت درون جعبه، همون سمت چپ معادله‌ی اولیه‌ای نیست که در صورت سؤال نوشته شده؟

آقا اجازه؟! دقیقاً همینطوره، عبارت درون جعبه با سمت چپ معادله‌ی اولیه برابره. پس اگه به جای عبارت درون جعبه، عدد ۲ رو قرار بدیم، معادله به راحتی حل میشه. یعنی:

$$\sqrt{x+\boxed{\sqrt{x+\sqrt{x+\dots}}}}=2 \Rightarrow \sqrt{x+2}=2 \Rightarrow x+2=4 \Rightarrow \boxed{x=2}$$

جواب معادله

(زیر جعبه: $=2$)

مثال اگر $\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{x+\dots}}}=2$ باشد، x^2-2x+3 کدام است؟ ۱) ۴- ۲) ۶- ۳) ۴ ۴) ۶

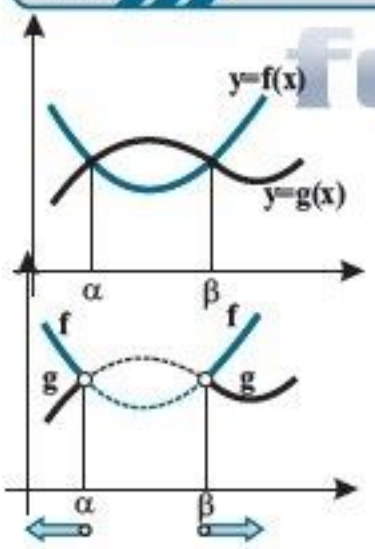
$$\cfrac{1}{x+\boxed{\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{x+\dots}}}}=2 \xrightarrow[\text{سمت چپ معادله‌ی اولیه هست}]{\text{عبارت درون جعبه، همون}} \frac{1}{x+2}=2 \Rightarrow x+2=\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{x=\frac{-3}{2}}$$

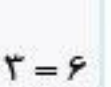
(زیر جعبه: $=2$)

$$\Rightarrow -2x+3=-2\left(\frac{-3}{2}\right)+3=6$$

KonKurist.com
forum.KonKurist.com

۱۵ حل معادله‌ی $f(x)=g(x)$ به روش برخورد (روش هندسی) ۱۵

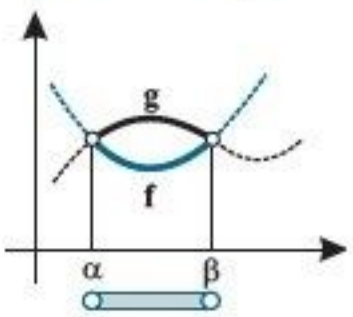




بچه‌ها یه مثال: در شکل روبرو نمودار دو تابع $y=f(x)$ و $y=g(x)$ در یک دستگاه مختصات رسم شده. همونطور که می‌بینید ایندو تابع، یکدیگه رو در دو نقطه به طول‌های $x=\beta$ و $x=\alpha$ قطع کردن.

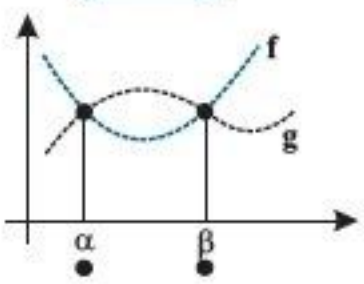
سوال ۱) به نظر شما در چه محدوده‌ای از x، تابع f از g بزرگ‌تره؟

آقا اجازه؟! در محدوده‌ی $x>\beta$ یا $x<\alpha$، تابع f بالاتر از g قرار داره. یعنی $f(x)>g(x)$



سوال ۲) فکر می‌کنید در کدوم محدوده از x، تابع f از g کوچک‌تره؟

آقا اجازه؟! در محدوده‌ی $\alpha<x<\beta$، تابع f پایین‌تر از g قرار داره، یعنی $f(x)<g(x)$



سوال ۳) آیا x یا xهایی سراغ دارید که در اونجا دو تابع f و g با هم مساوی بشن؟

آقا اجازه؟! بله. در $x=\alpha$ و $x=\beta$ دو تابع f و g با هم برابرند. یعنی $f(x)=g(x)$

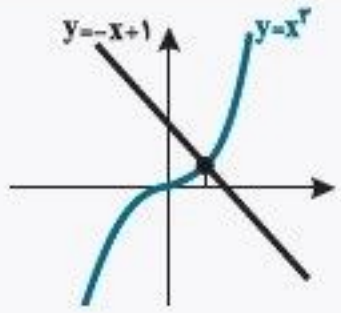
برای حل معادله‌ی $f(x)=g(x)$ به روش هندسی (برخورد):

۱) نمودار دو تابع $y=g(x)$ و $y=f(x)$ رو در یک دستگاه رسم کنید.

۲) طول نقاط برخورد این دو تابع، جواب‌های معادله‌ی $f(x)=g(x)$ هستند.

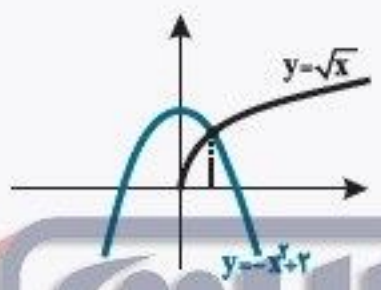
تعداد جواب‌های معادله‌ی $f(x)=g(x)$، همون تعداد نقاط برخورد دو تابع f و g هست.

مثال **معادله‌ی $x^3+x-1=0$ چند جواب دارد؟**

$x^3=-x+1$ ⟹ 

⟹ معادله یک جواب داره

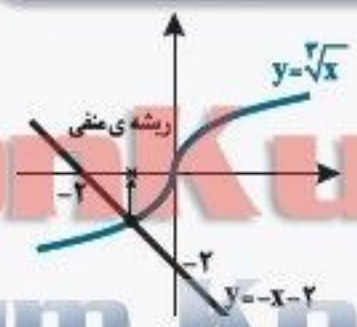
مثال **معادله‌ی $\sqrt{x}-x^2+2=0$ چند جواب دارد؟**

$\sqrt{x}=-x^2+2$ ⟹ 

⟹ معادله یک جواب داره

مثال **معادله‌ی $x+\sqrt[3]{x}+2=0$:**

۱) یک ریشه‌ی مثبت دارد. ۲) یک ریشه‌ی منفی دارد. ۳) یک ریشه‌ی مثبت و یک ریشه‌ی منفی دارد. ۴) ریشه ندارد.

$\sqrt[3]{x}=-x-2$ ⟹ 

⟹ معادله یک ریشه‌ی منفی داره.

KonKurist.com
forum.KonKurist.com

بچه‌ها! آیا می‌تونید مسائل زیر رو با تبدیل کردن به معادله، حل کنید.

آقا اجازه؟! سعی خودمون رو می‌کنیم.

مثال **رضا و محسن با هم پروژه‌ای را در ۲۰ روز به اتمام می‌رسانند. اگر رضا این پروژه را به تنهایی ۹ روز دیرتر از محسن انجام دهد، محسن ظرف چند روز پروژه‌ی مذکور را به تنهایی انجام خواهد داد.**

آقا اجازه؟! سخته

عزیزم! اصلاً اینطوری نیست. برای اینکه به سادگی این سؤال پی ببری، لطفاً به سؤالات من جواب بده!

سؤال ۱) به نظرت در ۱ روز، رضا و محسن با هم چه کسری از پروژه رو تموم می‌کنن؟

آقا اجازه؟! وقتی دوتایی در ۲۰ روز یک پروژه رو انجام می‌دن، پس در ۱ روز، $\frac{1}{20}$ پروژه رو انجام می‌دن.

سؤال ۲) فکر می‌کنی در ۱ روز، محسن چه کسری از پروژه رو تموم می‌کنه؟

آقا اجازه؟! اگه محسن در x روز یک پروژه رو به تنهایی تموم کنه، پس محسن در ۱ روز، $\frac{1}{x}$ پروژه رو تموم می‌کنه.

سؤال ۳) حالا بگو در ۱ روز، رضا چه کسری از پروژه رو انجام میده؟

آقا اجازه؟! چون رضا در $x+۹$ روز، پروژه رو به تنهایی انجام میده پس رضا در ۱ روز، $\frac{۱}{x+۹}$ پروژه رو انجام میده.

سؤال ۴) به نظرت در ۱ روز چه ارتباطی بین کار انجام شده توسط (محسن)، (رضا) و (هردوشون) وجود داره؟ آقا اجازه؟! در ۱ روز:

(کار انجام شده توسط رضا) + (کار انجام شده توسط محسن) = (کار انجام شده توسط هر دو)

$$\frac{۱}{۲۰}=\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x+۹} \Rightarrow \frac{۱}{۲۰}=\frac{(x+۹)+(x)}{(x)(x+۹)} \Rightarrow \frac{۲x+۹}{x^۲+۹x}=\frac{۱}{۲۰} \Rightarrow x^۲+۹x=۴۰x+۱۸۰$$

$$x^۲-۳۱x-۱۸۰=۰ \Rightarrow (x+۴)(x-۴۵) \Rightarrow \begin{cases} \cancel{x=-۴} & \text{چرا؟} \\ x=۴۵ \end{cases}$$

محسن و رضا به تنهایی و به ترتیب ظرف ۴۵ روز و $(۹+۴۵)$ روز پروژه رو به اتمام می‌رسونن.

آقا اجازه؟! تازه فهمیدیم کلید حل این نوع مسائل ، واحد زمانه!

در واقع شما اومدید در ۱ واحد زمان کار انجام شده توسط رضا، محسن و هر دوشون رو مشخص کردید و بعد گفتید در ۱ واحد زمان:

کار انجام شده توسط رضا + کار انجام شده توسط محسن = کار انجام شده توسط هر دو

آقا اجازه؟! به نظر می‌رسه که این نوع مسائل رو میشه تعمیم داد و قانونمندشون کرد. یعنی:

اگه n نفر کاری رو با هم ظرف a واحد زمانی انجام بدن و نفر اول، دوم، ... و n ام همون کار رو به تنهایی و به ترتیب در $b_۱, b_۲, ..., b_n$ واحد زمانی به اتمام برسونن، اون موقع:

$$\frac{۱}{a}=\frac{۱}{b_۱}+\frac{۱}{b_۲}+\cdots+\frac{۱}{b_n}$$

مثال لیلی به همراه تعدادی از دوستانش به یک موزه‌ی تاریخی رفت و پول بلیط همه‌ی آنها ۱۰۰۰ تومان شد. اما هر کدام از دوستانش تصمیم گرفتند که ۵۰ تومان اضافه بدهند تا لیلی پول بلیط خود را ندهد. دوستان لیلی چند نفر بودند؟

KonKurist.com
forum.KonKurist.com

آقا اجازه؟! مدل این سؤال با سؤال قبلی فرق می‌کنه. اگه یه کم ما رو راهنمایی کنید خودمون می‌تونیم به جواب برسیم.

عزیزم! در حل مسائل کاربردی اگه شما یاد بگیری چه جوری زبون فارسی رو به زبون ریاضی ترجمه کنی، به راحتی می‌تونی از پسشون بربیای.

آقا اجازه؟! با توجه به توصیه‌ی شما، میرم سراغ ترجمه‌ی جمله‌ی اول به زبون ریاضی:

* اگه لیلی و دوستانش n نفر باشن و قیمت هر بلیط x تومان باشه پس: $nx=۱۰۰۰$

حالا جمله‌ی دوم رو به زبون ریاضی ترجمه می‌کنیم:

* چون لیلی پول بلیطش رو نمی‌ده، پس تعداد خریداران بلیط، $(n-۱)$ نفر میشن. اما هر کدومشون باید $(x+۵۰)$ تومان پول بدن تا بتونن ۱۰۰۰ تومان رو پر کنن. پس: $(n-۱)(x+۵۰)=۱۰۰۰$

$$\begin{cases} nx=۱۰۰۰ \Rightarrow \boxed{x=\frac{۱۰۰۰}{n}} \\ (n-۱)(x+۵۰)=۱۰۰۰ \end{cases}$$

$$(n-۱)\left(\frac{۱۰۰۰}{n}+۵۰\right)=۱۰۰۰ \Rightarrow \cancel{۱۰۰۰}+۵۰n-\frac{۱۰۰۰}{n}-۵۰=\cancel{۱۰۰۰}$$

$$\xrightarrow{\times n} ۵۰n^۲-۵۰n-۱۰۰۰=۰ \Rightarrow n^۲-n-۲۰=۰ \Rightarrow (n+۴)(n-۵)=۰ \Rightarrow \begin{cases} \cancel{n=-۴} \\ n=۵ \end{cases}$$

$(+۴)(-۵)$

از اونجایی که لیلی و دوستانش ۵ نفر هستن، پس دوستان لیلی میشن ۴ نفر.

آقا اجازه؟! راست می‌گفتید که: «کافیه مسائل کاربردی رو از فارسی به ریاضی ترجمه کنید تا حل بشن»

۱۷ به چه معادله ای ، اتحاد می گویند ؟ ۱۷

بچه‌ها به معادله‌ی روبرو نگاه کنید:

$$\frac{۱}{۷} = \frac{۱}{x+۳}$$

به نظر شما دامنه‌ی این معادله چیه؟

آقا اجازه؟! یه x خرابکار توی این معادله وجود داره، اونهم $x=-۳$. در واقع $x=-۳$ باعث تعریف نشدن یک طرف معادله میشه. بنابراین دامنه‌ی این معادله هر x حقیقی می‌تونه باشه بجز ۳-. یعنی: $D=\mathbb{R}-\{-۳\}$

فکر می‌کنید به‌جای x چه عددی بذاریم تا دو کفه‌ی ترازو با هم برابر بشه؟

آقا اجازه؟! جواب این معادله فقط میتونه $x=۴$ باشه و اگه به‌جای x هر عدد دیگه‌ای غیر از ۴ بذاریم تعادل ترازو بهم میریزه.

به نظر شما جواب این معادله(یعنی {۴})قسمتی از دامنه‌ی این معادله، یعنی $\mathbb{R}-\{-۳\}$ هست یا نه؟

آقا اجازه؟! فهمیدیم چی می‌خواید بگید. شما می‌خواید بگید که: همیشه مجموعه جواب یک معادله قسمتی از دامنه‌ی اون معادله هست.

بچه‌ها! حالا به من بگید که دامنه‌ی معادله‌ی روبرو چیه؟

$$\frac{۱}{(x-۱)(x+۱)} = \frac{۱}{x^۲-۱}$$

آقا اجازه؟! در این معادله دو تا x خرابکار داریم بنام‌های $x=-۱$ و $x=۱$ که مخرج کسر رو صفر می‌کنن و باعث تعریف نشدن معادله می‌شن بنابراین: $D=\mathbb{R}-\{\pm ۱\}$

به نظر شما به‌جای x چه عددی یا عددهایی می‌تونیم بذاریم تا دو کفه‌ی ترازو با هم برابر بشه؟

آقا اجازه؟! از اونجایی که مخرج‌های این دو کفه همیشه با هم برابرن پس میشه به‌جای x هر عددی بجز ± ۱ قرارداد، طوری که دو کفه‌ی ترازو با هم برابر بشن، یعنی مجموعه‌ی جواب این معادله برابره با: $\mathbb{R}-\{\pm ۱\}$.

به‌نظر شما مجموعه جواب این معادله، قسمتی از دامنه هست یا تمام دامنه؟

آقا اجازه؟! در سؤال قبلی مجموعه جواب ، قسمتی از دامنه بود امّا در این سؤال مجموعه‌ی جواب ، همه‌ی دامنه هست.

بچه‌ها!

به معادلاتی که مجموعه‌ی جوابشون تمام دامنه‌ی اون معادله باشه اتحاد میگیم.
در واقع یک اتحاد، معادله‌ایه که به ازای تمام xهای دامنه برقراره.

آقا اجازه؟! از صحبت‌های شما فهمیدم که: هر اتحاد یک معادله هست امّا هر معادله ممکنه یک اتحاد نباشه.

کاملاً درست فهمیدی عزیزم.

بچه‌ها! در مبحث دیفرانسیل و پایه چند اتحاد مهم داریم که دونستن اونها برای شما الزامیه. پس لطفاً دقّت کنید:

۱) اتحاد مربع

$$(a-b)^۲ = a^۲-۲ab+b^۲$$

$$(a+b)^۲ = a^۲+۲ab+b^۲$$

مثال

A) $(۲x+۳y)^۲ = (۲x)^۲+۲(۲x)(۳y)+(۳y)^۲ \Rightarrow (۲x+۳y)^۲ = ۴x^۲+۱۲xy+۹y^۲$

B) $(x^۲-۲y)^۲ = (x^۲)^۲-۲(x^۲)(۲y)+(۲y)^۲ \Rightarrow (x^۲-۲y)^۲ = x^۴-۴x^۲y+۴y^۲$

C) $x^۲\pm ۲x+۱=(x\pm ۱)^۲$ E) $x^۲\pm ۶x+۹=(x\pm ۳)^۲$

D) $x^۲\pm ۴x+۴=(x\pm ۲)^۲$ F) $۴x^۲\pm ۴x+۱=(۲x\pm ۱)^۲$

KonKurist.com
forum.KonKurist.com

۲) اتحاد مکعب

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

بچه‌ها! همونطور که می‌بینید اگه در سمت چپ ترازو، علامت بین دو جمله ، مثبت باشه حتماً علامت‌های سمت راست معادله، همگی مثبت می‌شن. اما اگه در سمت چپ ترازو، علامت بین دو جمله،منفی باشه در اون صورت علامت‌های سمت راست معادله، یه در میون مثبت و منفی می‌شن.

مثال

$$(x\pm1)^3 = (x)^3 \pm 3(x)^2(1) + 3(x)(1)^2 \pm (1)^3 \Rightarrow (x\pm1)^3 = x^3 \pm 3x^2 + 3x \pm 1$$

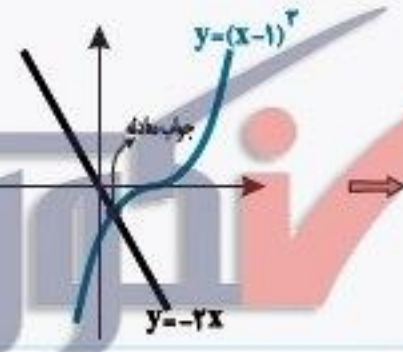
$$(x\pm2)^3 = (x)^3 \pm 3(x)^2(2) + 3(x)(2)^2 \pm (2)^3 \Rightarrow (x\pm2)^3 = x^3 \pm 6x^2 + 12x \pm 8$$

مثال جواب معادله‌ی $x^3 + 3x^2 + 3x + 9 = 0$ را به دست آورید.

$$\underbrace{x^3 + 3x^2 + 3x + 1} + 8 = 0 \Rightarrow (x+1)^3 = -8 \xrightarrow{\sqrt[3]{\ }} x+1 = -2 \Rightarrow \boxed{x = -3}$$

مثال معادله‌ی $x^3 - 3x^2 + 5x - 1 = 0$ چند جواب دارد؟

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 2x = 0 \Rightarrow (x-1)^3 = -2x \xrightarrow{\text{روش برخورد}}$$



معادله یک جواب داره

۳) اتحاد مزدوج

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

KonKurist.com
forum.KonKurist.com

مثال عبارت‌های زیر را تجزیه کنید.

۱) $4x^2 - 9y^4 = (2x - 3y^2)(2x + 3y^2)$

۲) $x^2 - 3 = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$

۳) $x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = (x^2+2)^2 - (2x)^2 \Rightarrow x^4 + 4 = (x^2 + 2 - 2x)(x^2 + 2 + 2x)$

مثال صورت عبارت‌های زیر را گویا کنید. (از حالت رادیکالی خارج کنید)

۱) $\sqrt{x} - 2 = \dfrac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+2)} = \dfrac{(\sqrt{x})^2 - 2^2}{\sqrt{x}+2} = \dfrac{x-4}{\sqrt{x}+2}$

۲) $2x - \sqrt{3} = \dfrac{(2x-\sqrt{3})(2x+\sqrt{3})}{(2x+\sqrt{3})} = \dfrac{(2x)^2 - (\sqrt{3})^2}{2x+\sqrt{3}} = \dfrac{4x^2-3}{2x+\sqrt{3}}$

۳) $\sqrt{x} + \sqrt{x-1} = \dfrac{(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})}{(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})} = \dfrac{(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{x-1})^2}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}} = \dfrac{x-(x-1)}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}$

۴) اتحاد یک جمله ی مشترک

$$x^2 + (\alpha+\beta)x + (\alpha\cdot\beta) = (x+\alpha)(x+\beta)$$

بچه‌ها! به اتحاد روبرو، اتحاد یک جمله‌ی مشترک میگیم:

مثال معادلات زیر راحل کنید.

$x^{۲}-۵x+۶=۰ \Rightarrow (x-۲)(x-۳)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۲ \\ x=۳ \end{cases}$ ($(-۲)+(-۳)=-۵$ ، $(-۲)\cdot(-۳)=+۶$)

$x^{۲}-x-۳۰=۰ \Rightarrow (x+۵)(x-۶)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=-۵ \\ x=۶ \end{cases}$ ($(+۵)+(-۶)=-۱$ ، $(+۵)\cdot(-۶)=-۳۰$)

$۹x^{۲}+۲۱x+۱۰=۰ \Rightarrow (۳x)^{۲}+۷(۳x)+۱۰=۰ \Rightarrow (۳x+۲)(۳x+۵)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=-\frac{۲}{۳} \\ x=-\frac{۵}{۳} \end{cases}$ ($(+۲)+(+۵)=+۷$ ، $(+۲)\cdot(+۵)=+۱۰$)

۵) اتحاد چاق و لاغر

$a^{۳}\ominus b^{۳} = (a\ominus b)(aa\oplus ab+bb)$ (تغییر علامت)

$a^{۳}+b^{۳} = (a\oplus b)(aa\ominus ab+bb)$ (تغییر علامت)

بچه‌ها! فکر می‌کنید در اتحاد چاق و لاغر چه ارتباطی بین سمت چپ اتحاد و قسمت لاغر وجود داره؟

آقا اجازه؟! کلاهبرداری!!!

منظورم اینه‌که اگه کلاه رو از روی سر $a^{۳}+b^{۳}$ یا $a^{۳}-b^{۳}$ برداریم قسمت لاغر بوجود می‌آد. یعنی:

$a^{۳}+b^{۳}=(a+b)(\ ?\ )$ (لاغر: $a+b$، چاق: ؟)

$a^{۳}-b^{۳}=(a-b)(\ ?\ )$ (لاغر: $a-b$، چاق: ؟)

بچه‌ها! پس فهمیدیم که با یک کلاهبرداری میشه قسمت لاغر رو بوجود آورد. حالا به نظر شما چه‌جوری میشه از قسمت لاغر ،قسمت چاق رو نتیجه گرفت؟

جمله‌ی اول، جمله‌ی وسط، جمله‌ی سوم

$(\ aa \quad ab \quad bb\ )$

آقا اجازه؟! قسمت چاق،سه جمله داره. یعنی علامت جملات اول و سوم مثبته، اما علامت جمله‌ی وسط،ممکنه مثبت باشه ممکنه منفی. یعنی:

$(a\oplus b)(aa\ominus ab+bb)$ (لاغر: $a+b$، چاق: $aa-ab+bb$) $\qquad$ $(a\ominus b)(aa\oplus ab+bb)$ (لاغر: $a-b$، چاق: $aa+ab+bb$)

KonKurist.com
forum.KonKurist.com

مثال عبارت‌های زیر را تجزیه کنید.

۱) $x^{۳}+۱=x^{۳}+۱^{۳}=(x\oplus ۱)(xx-x(۱)+(۱)(۱)) \Rightarrow x^{۳}+۱=(x+۱)(x^{۲}-x+۱)$

۲) $x^{۳}-۱=x^{۳}-۱^{۳}=(x\ominus ۱)(xx+x(۱)+(۱)(۱)) \Rightarrow x^{۳}-۱=(x-۱)(x^{۲}+x+۱)$

۳) $x^{۳}+۸=x^{۳}+۲^{۳}=(x\oplus ۲)(xx-x(۲)+(۲)(۲)) \Rightarrow x^{۳}+۸=(x+۲)(x^{۲}-۲x+۴)$

۴) $x^{۳}-۲۷=x^{۳}-۳^{۳}=(x\ominus ۳)(xx+x(۳)+(۳)(۳)) \Rightarrow x^{۳}-۲۷=(x-۳)(x^{۲}+۳x+۹)$

۵) $۸x^{۳}-۲۷y^{۶}=(۲x)^{۳}-(۳y^{۲})^{۳}=(۲x\ominus ۳y^{۲})((۲x)(۲x)+(۲x)(۳y^{۲})+(۳y^{۲})(۳y^{۲}))=(۲x-۳y^{۲})(۴x^{۲}+۶xy^{۲}+۹y^{۴})$

مثال صورت عبارات زیر را گویا کنید.

۱) $\sqrt[۳]{x}-۲=\frac{\overbrace{(\sqrt[۳]{x}-۲)}^{\text{لاغر}}\overbrace{((\sqrt[۳]{x})(\sqrt[۳]{x})+(۲)(\sqrt[۳]{x})+(۲)(۲))}^{\text{چاق}}}{\sqrt[۳]{x^{۲}}+۲\sqrt[۳]{x}+۴}=\frac{(\sqrt[۳]{x})^{۳}-۲^{۳}}{\sqrt[۳]{x^{۲}}+۲\sqrt[۳]{x}+۴}=\frac{x-۸}{\sqrt[۳]{x^{۲}}+۲\sqrt[۳]{x}+۴}$

بچه‌ها! در مثال قبل، $۲-\sqrt[۳]{x}$ رو قسمت لاغر در نظر گرفتم واین عبارت رو در قسمت چاقش ضرب و تقسیم کردم تا بتونم روی سر $(\sqrt[۳]{x})$ و (۲) ، کلاه (۳) رو قرار بدم.

۲) $\sqrt[۳]{x}+۱=\frac{\overbrace{(\sqrt[۳]{x}+۱)}^{\text{لاغر}}\overbrace{((\sqrt[۳]{x})(\sqrt[۳]{x})-\sqrt[۳]{x}(۱)+(۱)(۱))}^{\text{چاق}}}{\sqrt[۳]{x^{۲}}-\sqrt[۳]{x}+۱}=\frac{(\sqrt[۳]{x})^{۳}+۱^{۳}}{\sqrt[۳]{x^{۲}}-\sqrt[۳]{x}+۱}=\frac{x+۱}{\sqrt[۳]{x^{۲}}-\sqrt[۳]{x}+۱}$

۶) بسط دو جمله ای $(a+b)^n$

بچه‌ها! به بسط دو جمله‌ای های روبرو توجّه کنید:

$$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$$
$$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$$
$$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$$
$$(a+b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$$
$$\vdots$$

سؤال: بدون اینکه به ضرایب سمت راست تساوی توجهی داشته باشید میشه بگید ساختار (اسکلت) این بسط از چه قانونی تبعیت می‌کنه؟

آقا اجازه؟! در بسط $(a+b)^n$ (عضو اول) اگه عضو اول رو به توان n برسونیم، جمله‌ی اول بسط پیدا میشه. یعنی: $(a+b)^n = a^n + \cdots$

در نوشتن جملات بعدی باید به ترتیب از توان a یکی یکی کم و به توان b یکی یکی اضافه کنیم و این عمل رو تا اونجایی ادامه بدیم که a حذف بشه و b به بیشترین توان خودش برسه. یعنی: $(a+b)^n = 1a^n + \square a^{n-1}\cdot b^1 + \square a^{n-2}\cdot b^2 + \cdots + \square b^n$

آقا اجازه؟! میشه بگید ضرایب این بسط رو چه‌جوری بنویسم. چون ضرایب هر کدوم از بسط‌های بالا ساز خودشون رو می‌زنن.

عزیزم اصلاً اینطوری نیست، اتفاقاً ضرایب بسط دو جمله‌ای از یک قانون خاصی تبعیت می‌کنن.

به عنوان مثال می‌خوایم ضرایب بسط $(a+b)^5$ رو بدست بیاریم. شما اوّل باید اسکلت یا ساختار بسط رو بنویسید و جای ضرایب رو خالی بذارید. یعنی:

$$(a+b)^5 = \underbrace{1a^5}_{\text{جمله‌ی اول}} + \underbrace{\square a^4b^1}_{\text{جمله‌ی دوم}} + \underbrace{\square a^3b^2}_{\text{جمله‌ی سوم}} + \underbrace{\square a^2b^3}_{\text{جمله‌ی چهارم}} + \underbrace{\square ab^4}_{\text{جمله‌ی پنجم}} + \underbrace{\square b^5}_{\text{جمله‌ی ششم}}$$

شما می‌تونید طی مراحل زیر، ضریب هر جمله رو به کمک جمله‌ی قبل محاسبه کنید. یعنی:

$$(a+b)^5 = 1a^5 + \square a^4b^1 + \square a^3b^2 + \square a^2b^3 + \square ab^4 + \square b^5$$

$$(a+b)^5 = 1a^5 + 5a^4b^1 + \square a^3b^2 + \square a^2b^3 + \square ab^4 + \square b^5 \quad (\times 5 \div 1)$$

$$(a+b)^5 = 1a^5 + 5a^4b^1 + 10a^3b^2 + \square a^2b^3 + \square ab^4 + \square b^5 \quad (\times 4 \div 2)$$

(سومین جمله) $n=3$ **توجه:**

$$(a+b)^5 = 1a^5 + 5a^4b^1 + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + \square ab^4 + \square b^5 \quad (\times 3 \div 3)$$

$$(a+b)^5 = 1a^5 + 5a^4b^1 + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + \square b^5 \quad (\times 2 \div 4)$$

(پنجمین جمله) $m=5$ **توجه:**

$$(a+b)^5 = 1a^5 + 5a^4b^1 + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5 \quad (\times 1 \div 5)$$

مثال بسط دو جمله‌ای‌های زیر را بنویسید.

۱) $(x+1)^6$

$$1x^6 + 6x^5(1)^1 + 15x^4(1)^2 + 20x^3(1)^3 + 15x^2(1)^4 + 6x(1)^5 + 1(1)^6 \quad (\times 6 \div 1,\ \times 5 \div 2,\ \times 4 \div 3,\ \times 3 \div 4,\ \times 2 \div 5,\ \times 1 \div 6)$$

$$\Rightarrow (x+1)^6 = x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 1$$

۲) $(x^3+2x)^5$

$$1(x^3)^5 + 5(x^3)^4(2x)^1 + 10(x^3)^3(2x)^2 + 10(x^3)^2(2x)^3 + 5(x^3)^1(2x)^4 + 1(2x)^5 \quad (\times 5 \div 1,\ \times 4 \div 2,\ \times 3 \div 3,\ \times 2 \div 4,\ \times 1 \div 5)$$

$$\Rightarrow (x^3+2x)^5 = x^{15} + 10x^{13} + 40x^{11} + 80x^9 + 80x^7 + 32x^5$$

KonKurist.com
forum.KonKurist.com

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
$$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$$
$$(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$$
$$\vdots$$

بچه‌ها! بسط دو جمله‌ای $(a-b)^n$ مثل بسط دو جمله‌ای $(a+b)^n$ هست، فقط با یک تفاوت. یعنی: جملات دوم، چهارم و ... بسط $(a-b)^n$ علامت منفی دارن. نگاه کنید:

بچه‌ها! بسط دوجمله‌ای $(a+b)^n$ در حالت کلی به صورت زیره:

$$(a+b)^n = \underbrace{\binom{n}{0}a^n}_{\text{جمله‌ی اول}} + \underbrace{\binom{n}{1}a^{n-1}b^1}_{\text{جمله‌ی دوم}} + \underbrace{\binom{n}{2}a^{n-2}b^2}_{\text{جمله‌ی سوم}} + \cdots + \underbrace{\binom{n}{?}a^{n-?}b^?}_{\text{جمله‌ی } k+1 \text{ ام}} + \cdots + \binom{n}{n}b^n$$

حالا ازتون خواهش می‌کنم به بسط بالا دقت کنید و با توجه به جملات اول، دوم و سوم حدس بزنید جمله‌ی $k+1$ ام این بسط ، چیه؟

جمله‌ی اول : $\binom{n}{0}a^{n-0}b^0$

جمله‌ی دوم : $\binom{n}{1}a^{n-1}b^1$ ⟵ تعمیم

جمله‌ی سوم : $\binom{n}{2}a^{n-2}b^2$

$$\text{جمله‌ی } (k+1) \text{ ام} = \binom{n}{k}a^{n-k}.b^k$$

بچه‌ها! بسط $(a-b)^n$ هم مثل $(a+b)^n$ هست. اما با این تفاوت که در بسط $(a-b)^n$ جملات زوج (یعنی جملات دوم، چهارم و ...) علامت منفی دارن.

$$(a-b)^n = \binom{n}{0}a^n - \underbrace{\binom{n}{1}a^{n-1}b^1}_{\text{جمله‌ی دوم}} + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 - \underbrace{\binom{n}{3}a^{n-3}b^3}_{\text{جمله‌ی چهارم}} + \cdots + \underbrace{\binom{n}{k}a^{n-k}.b^k}_{\text{جمله‌ی } k \text{ ام}} + \cdots$$

اگه $k+2$ زوج باشه

مثال در بسط $(x-\frac{2}{x})^7$ جمله‌ی چهارم چیست؟

$$\text{جمله‌ی چهارم} = -\binom{7}{3}(x)^{7-3}\left(\frac{2}{x}\right)^3 = \frac{-7!}{3!(7-3)!} \times x^4 \times \frac{8}{x^3} = -280x$$

۷) اتحاد چاق و لاغر تعمیم یافته

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$
$$a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$$
$$a^5 - b^5 = (a-b)(+a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$$
$$\vdots$$

همگی مثبت

بچه‌ها! به اتحادهای چاق و لاغر روبرو نگاه کنید:

شما می‌تونید کامل کردن طرف دوّم $a^n - b^n$ رو در ۳ مرحله انجام بدید:

مرحله‌ی ۱: کلاهِ $a^n - b^n$ رو بردارید تا به قسمت لاغر برسید. یعنی: $a^n - b^n = (a-b)(\ldots\ldots)$

مرحله‌ی ۲: در قسمت چاق، ابتدا a^{n-1} رو بنویسید و در جملات بعدی به ترتیب از توان a یکی یکی کم و به توان b یکی یکی اضافه کنید.

البته این عمل رو تا زمانی انجام بدید که از a چیزی باقی نمونه و b به بیشترین توان خودش برسه. یعنی:

$$a^n - b^n = (a \overset{\text{منفی}}{\uparrow} b)(?a^{n-1} \; ?a^{n-2}.b^1 \; ?a^{n-3}.b^2 \; \ldots \; ?b^{n-1})$$

مرحله‌ی ۳: با توجه به این که در قسمت لاغر علامت بین دو جمله منفیه، پشت تمام جملات چاق، علامت مثبت بذارید. یعنی:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}.b^1 + a^{n-3}.b^2 + \cdots + b^{n-1})$$

KonKurist.com
Forum.KonKurist.com

بچه‌ها! تفاوت a^n+b^n , a^n-b^n فقط در مرحله‌ی سومه.

یعنی با توجه به اینکه در قسمت لاغر علامت بین دو جمله مثبته، پشت جملات چاق، یک در میون علامت مثبت و منفی بذارید.

اتحاد چاق و لاغر رو برای a^n+b^n فقط وقتی می‌تونید بنویسید که n فرد باشه.

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

$$a^5+b^5=(a+b)(+a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$$

$$\vdots$$

(مثبت، منفی، مثبت، منفی، مثبت)

مثال عبارت‌های زیر را تجزیه کنید.

۱) $x^3-1=x^3-1^3=(x-1)\left(x^2+(x)(1)+(1)^2\right) \Longrightarrow x^3-1=(x-1)\left(x^2+x+1\right)$

۲) $x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$

۳) $x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)$

۴) $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$

۵) $x^5+1=(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)$

۶) $x^n+1=(x+1)(x^{n-1}-x^{n-2}+\cdots+1)$ توجه: (n فرد است)

۷) $x^4-16=x^4-2^4=(x-2)\left(x^3+x^2(2)+x(2)^2+(2)^3\right) \Longrightarrow x^4-16=(x-2)\left(x^3+2x^2+4x+8\right)$

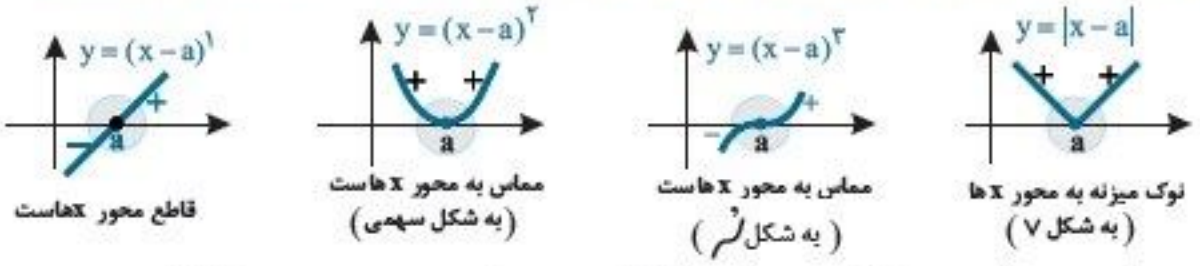
۸) $x^5+32=x^5+2^5=(x+2)\left(x^4-x^3(2)^1+x^2(2)^2-x(2)^3+(2)^4\right) \Longrightarrow x^5+32=(x+2)\left(x^4-2x^3+4x^2-8x+16\right)$

KonKurist.com
forum.KonKurist.com

بچه‌ها! به نظر شما ریشه ی توابع زیر چیه و قیافه‌ی نمودار این توابع در اطراف ریشه‌شون چه شکلیه؟ توجه: ($a>0$)

۱) $y=x-a$ ۲) $y=(x-a)^2$ ۳) $y=(x-a)^3$ ۴) $y=|x-a|$

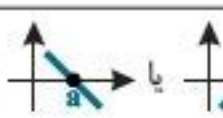
آقا اجازه؟! با اینکه ریشه‌ی توابع بالا $x=a$ هست، اما با توجه به شکلهای زیر، قیافه‌ی نمودارها در اطراف $x=a$ یک جور نیست؟



عزیزم! این تفاوت به نوع ریشه‌ی یک تابع مربوط میشه. در واقع،تعیین کننده ی قیافه ی نمودار در اطراف ریشه،نوع اون ریشه هست، نه مقدار اون ریشه.

توضیح ۱) در تابع $y=x-a$، مقدار ریشه، $x=a$ و نوع ریشه، ساده هست. چون وقتی تابع رو مساوی صفر قرار میدی، $x=a$ یکبار رخ میده:

$$y=0 \Longrightarrow x-a=0 \Longrightarrow x=a$$

قیافه‌ی نمودار یک تابع در اطراف ریشه‌ی ساده به شکل قاطع () **هست.** ($a>0$)

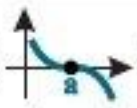
توضیح ۲) در تابع $y=(x-a)^2$، مقدار ریشه، $x=a$ و نوع ریشه، مکرر مرتبه‌ی ۲ (ریشه‌ی مضاعف) هست. چون وقتی تابع رو مساوی صفر قرار بدید، $x=a$ دو بار تکرار میشه:

$$y=0 \Longrightarrow (x-a)^2=0 \Longrightarrow (x-a)(x-a)=0 \Longrightarrow \begin{cases} x=a \\ x=a \end{cases}$$

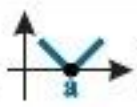
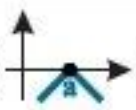
قیافه‌ی نمودار یک تابع در اطراف ریشه‌ی مکرر مرتبه‌ی زوج شبیه سهمی ( ) **هست.** ($a>0$)

توضیح ۳) در تابع $y=(x-a)^{3}$، مقدار ریشه، $x=a$ و نوع ریشه، مکرر مرتبه‌ی ۳ هست. چون وقتی تابع رو مساوی صفر قرار بدید، $x=a$ سه بار تکرار میشه:

$$y=0 \Rightarrow (x-a)^{3}=0 \Rightarrow (x-a)(x-a)(x-a)=0 \Rightarrow x=a \text{ یا } x=a \text{ یا } x=a$$

قیافه‌ی نمودار یک تابع در اطراف ریشه‌ی مکرر مرتبه‌ی فرد شبیه لرُ (یا ) **هست.** $(a>0)$

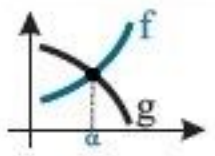
توضیح ۴) در تابع $x=|x-a|$، ریشه‌ی $x=a$ معروفه به ریشه‌ی ساده‌ی درون قدرمطلق.

قیافه‌ی نمودار یک تابع در اطراف ریشه‌ی ساده‌ی درون قدرمطلق شبیه ∨ یا ∧ ( یا ) **هست.** $(a>0)$

بچه‌ها! نمودار تابع $y=|x-1|(x-2)(x-3)^{2}(x-4)^{3}$ به شکل مقابله :

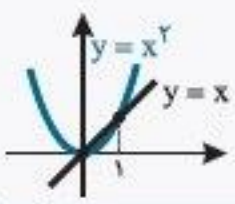
اگه توضیحات ۱ تا ۴رو خوب متوجه شده باشید ، به راحتی می تونید نمودار این تابع رو رسم کنید.

بچه‌ها! فرض کنید $x=\alpha$ ریشه‌ی معادله‌ی $f(x)=g(x)$ باشه:

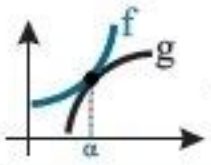
الف)  **اگه $x=\alpha$ ریشه‌ی ساده باشه، نمودارهای f و g همدیگر رو در $x=\alpha$ قطع می‌کنن.**

مثلاً در حل معادله‌ی $x^{2}=x$ به روش جبری $x^{2}=x \Rightarrow x^{2}-x=0 \Rightarrow x(x-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$

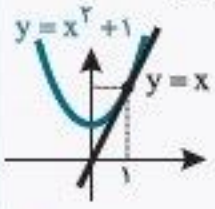
می‌بینیم که $x=0$ و $x=1$ ریشه‌های ساده‌ی معادله‌ی $x^{2}=x$ هستن. از طرفی، اگه نمودارهای $y=x^{2}$ و $y=x$ رو رسم کنیم ، مشاهده می‌کنیم که این دو نمودار همدیگه رو در $x=0$ و $x=1$ قطع می‌کنن.



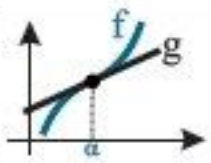
KonKurist.com
forum.KonKurist.com

ب)  **اگه $x=\alpha$ ریشه‌ی مکرر زوج معادله‌ی $f(x)=g(x)$ باشه، نمودارهای f و g در $x=\alpha$ بدون عبور از هم به هم مماس میشن.**

مثلاً در حل معادله‌ی $x^{2}+1=2x$ به روش جبری $x^{2}+1=2x \Rightarrow x^{2}-2x+1=0 \Rightarrow (x-1)^{2}=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=1 \end{cases}$ می‌بینیم



که $x=1$ ریشه‌ی مکرر زوجه. از طرفی نمودارهای $y=x^{2}+1$ و $y=2x$ در $x=1$ بدون عبور از هم به هم مماس میشن.

ج)  **اگه $x=\alpha$ ریشه‌ی مکرر فرد معادله‌ی $f(x)=g(x)$، نمودارهای f و g از هم عبور کرده و به هم مماس میشن.**

مثال نمودار تابع $f(x)=\dfrac{x^{2}}{x^{2}+x+1}$ **کدامیک از شکل‌های زیر است؟**

آقا اجازه؟! اگه وضعیت برخورد نمودار تابع $f(x)=\dfrac{x^{2}}{x^{2}+x+1}$ با خط $y=1$ رو بررسی کنیم خیلی چیزها روشن میشه. پس کافیه ایندو تابع رو با هم مساوی قرار بدیم:

$$\frac{x^{2}}{x^{2}+x+1}=1 \Rightarrow x^{2}=x^{2}+x+1 \Rightarrow x+1=0 \Rightarrow x=-1$$

از اونجایی که ریشه‌ی این معادله (یعنی $x=-1$) ساده هست پس نمودار تابع و نمودار $y=1$ همدیگه رو در $x=-1$ قطع می‌کنن.

آموزش تکمیلی فصل (۱) در قالب تست

۱ ۷۲ لیتر آبمیوه ، ۴۰ لیتر شیر و ۴۸ لیتر دوغ در شیشه هایی با حجم یکسان بسته بندی شده اند . اگر حجم هر شیشه عدد طبیعی باشد حداقل تعداد شیشه ها چقدر است ؟ متن کتاب

۱) ۱۶ ۲) ۱۸ ۳) ۲۰ ۴) ۲۴

۲ چندجمله ای درجه دوم $h(x)$ ب.م.م عبارت های $f(x)=x^5-2x^3+x$ و $g(x)=x^4+2ax^3+ax^2$ می باشد . مجموعه مقادیر a کدام است ؟

۱) $\{-\frac{1}{3},1\}$ ۲) $\{-\frac{1}{3}\}$ ۳) $\{1\}$ ۴) $\varnothing$

۳ طول قطر چرخ کوچک و بزرگ یک تراکتور به ترتیب ۱۰۰ و ۱۶۰ سانتی متر است . در ابتدای حرکت نقاط روی زمین این چرخ ها را علامتگذاری می کنیم . این تراکتور حداقل چه مسافتی را باید طی کند تا دوباره نقاط روی چرخ ها با هم به زمین برسند ؟ متن کتاب

۱) 200π ۲) 800π ۳) 600π ۴) 400π

۴ سه زنگ در یک کارخانه برای موارد مختلف وجود دارد . اولین زنگ در هر ۱۸ دقیقه ، دومین زنگ در هر ۲۴ دقیقه و سومین زنگ در هر ۳۲ دقیقه می زند . بعد از اولین بار که آنها با هم به صدا در می آیند حداقل چند دقیقه می گذرد تا دوباره با هم به صدا در آیند ؟ متن کتاب

۱) ۱۷۸ ۲) ۲۸۸ ۳) ۴۲۸ ۴) ۹۳۶

۵ نمودار توابع چند جمله ای $g\ ,f$ در شکل زیررسم شده اند . ب.م.م و ک.م.م ضابطه های $g\ ,f$ به ترتیب چه درجه ای دارند ؟ استاد مجتبی بیات (سر گروه همدان)

۱) ۴,۱ ۲) ۸,۳ ۳) ۶,۲ ۴) ۷,۴

۶ در یک کیسه گردو بین ۱۵۰ تا ۲۰۰ گردو وجود دارد . اگر این گردوها را چهارتا ، چهارتا ، پنج تا پنج تا و شش تا ، شش تا بشمریم در هر حالت ۳ گردو باقی می ماند . تعداد گردو ها چندتاست ؟ متن کتاب

۱) ۱۸۳ ۲) ۱۸۸ ۳) ۱۷۸ ۴) ۱۵۸

۷ اگر معادله ی $x^2+bx+c=0$ یک ریشه ی مضاعف داشته باشد ، معادله ی $x^2+bx+c-3=0$ چه وضعی دارد؟ $(b\in Q)$

۱) ریشه ی مضاعف دارد ۲) دو ریشه ی گنگ دارد.
۳) دو ریشه ی گویا دارد. ۴) ریشه ندارد.

۸ α و β ریشه های معادله ی $7x^2+3x-1=0$ هستند و $\alpha<\beta$.کدامیک همواره صحیح است؟

۱) $\alpha<-1<\beta$ ۲) $-1<\alpha<\beta<1$ ۳) $\alpha<\beta<2$ ۴) $\alpha<2<\beta$

۹ معادله ی $(x^2+\frac{1}{x^2})+3(x+\frac{1}{x})=2$ چند ریشه ی حقیقی متمایز دارد ؟ دکتر سازگار (سر گروه مازندران)

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۰ فاصله ی بین ریشه های معادله ی $x-4\sqrt{x-2}+1=0$ کدام است ؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۱۱ ازحل دستگاه معادلات $\begin{cases}\sqrt{x}-\sqrt{y}=2\sqrt{xy}\\ x+y=12\end{cases}$ مقدار $x.y$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) $\frac{9}{4}$

۱۲ معادله ی $\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}=x-1$ چند جواب دارد؟ متن کتاب با کمی تغییر

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۳ برروی محور اعداد حقیقی دو عدد وجود دارد که فاصله آن ها از نقطه ای به طول ۳ ، نصف فاصله شان از نقطه ای به طول ۱- است . مجموع آن دو عدد کدام است؟

۱) $\frac{14}{3}$ ۲) $\frac{26}{3}$ ۳) $\frac{20}{3}$ ۴) $\frac{32}{3}$

KonKurist.com
forum.KonKurist.com

آموزش تکمیلی فصل (۱) در قالب تست

۱۴) نمودار دو تابع $y = x^۶ - ۲x + ۳$ و $y = x^۶ - ۵x - ۲$ در یک دستگاه مختصات رسم شده اند . درکدام طول فاصله ی عرضهای دو تابع ۷ می باشد؟ استاد موسوی (سر گروه هرمز گان)

۱) -۴ ۲) ۴ ۳) $-\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۱۵) معادله ی $(|x-۱|-۱)! = ۰$ چند جواب دارد ؟ استاد عادل مهر پاک (همدان)

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۱۶) جواب معادله $\sqrt{۱۲} = \sqrt{۴-۲\sqrt{۳}} + \sqrt{x^۴ + ۲x^۲ + ۱}$ کدام است؟ استاد غفار پور (سر گروه اصفهان)

۱) $\pm\sqrt[۴]{\sqrt{۴}+\sqrt{۳}}$ ۲) $\pm\sqrt[۴]{\sqrt{۴}-\sqrt{۳}}$ ۳) $\pm\sqrt[۴]{۴}$ ۴) $\pm\sqrt[۴]{۳}$

۱۷) معادله ی $\sqrt{۳x-۳} + \sqrt{۲x-۲} = \frac{x}{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}$ چند جواب دارد ؟ استاد عادل مهر پاک (همدان)

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۸) مجموع جواب های معادله ی رادیکالی $\sqrt{۳x+۴} - \sqrt{۲x+۱} = ۱$ کدام است ؟ استاد خامدا (سر گروه قزوین)

۱) ۰ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۹) معادله ی $۳x - ۲ = ۵\sqrt{۱-۹x^۲}$: (آزاد-۷۶)

۱) ریشه ندارد .
۲) یک ریشه ی مضاعف دارد .
۳) یک ریشه ی ساده دارد .
۴) دو ریشه دارد.

۲۰) معادله ی $\sqrt[۴]{x^۳ + x - ۱۰} + \sqrt{x^۲ - ۳x + ۲} = ۰$ چند جواب دارد ؟ استاد مریم عالی (سر گروه کرمان)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) فاقد جواب است.

۲۱) معادله ی $۲\sqrt{x+۵} + \sqrt{x-۳} = \frac{۱۱}{۲}$ چند جواب دارد ؟ دکتر سازگار (سر گروه مازندران)

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۲) معادله ی $۲^x = \frac{۴^x + ۱}{۲ - x^۴}$ چند جواب دارد ؟ دکتر ثنائی (سر گروه گلستان)

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۳) معادله ی $\sqrt{x^۲ - x + ۲} + \frac{۱}{۲} - x^۲ = \left|x - \frac{۱}{۲}\right|$ چند جواب دارد ؟ استاد مجتبی بیات (سر گروه همدان)

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۲۴) معادله ی $\sqrt{|x| - ۳} = ۱۵ - ۲|x| + x^۲$ چند جواب دارد ؟

۱) ۰ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۸

۲۵) دو نقطه ی A و B روی خط $y = x$ مفروضند به طوری که فاصله ی هر نقطه از نقطه ی $w(۱,۲)$ برابر طول آن نقطه می باشد . مساحت مثلث ABW کدام است ؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) ۲ ۴) ۴

۲۶) جواب معادله ی $\frac{۲}{x-۲} + \frac{k}{x+۱} = ۰$ کدام است؟

۱) $\frac{k+۱}{۲k-۲}$, $k \neq ۱$ ۲) $\frac{۲k+۱}{k-۲}$, $k \neq ۲$ ۳) $\frac{۲k-۲}{k+۲}$, $k \neq -۲ , ۰$ ۴) $\frac{۲k-۲}{۲k+۱}$, $k \neq -\frac{۱}{۲}$

KonKurist.com
forum.KonKurist.com

آموزش تکمیلی فصل (۱) در قالب تست

۲۷ دراتحاد $\frac{A}{x} = \frac{۳}{۳-x} + \frac{۸x-۱۵}{x^۲-۳x}$ عدد A کدام است ؟ استاد عادل ابراهیمی (تهران)

۱) ۱۲ ۲) ۵ ۳) -۱۲ ۴) -۵

۲۸ معادله ی $|x^۳-۱|-x=۰$ چند ریشه دارد ؟ استاد رجب زاده (سر گروه فارس)

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۹ چه تعداد از معادلات روبرو جواب دارند ؟ $۲^x = x^۲$ $\sqrt{x-۱} = x-۳$ $\sqrt{x}-x=۱$ $\sqrt{x}+\cos x=۰$

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳ استاد عادل ابراهیمی (تهران)

۳۰ کدامیک از معادلات زیر تعداد ریشه ی بیشتری دارد؟ امیر حسین نصیری (تهران)

۱) $||x|-۱|=۵$ ۲) $|x^۲-۲|=۲$ ۳) $x|x|=-۴$ ۴) $|۲x-۱|+|x|=۷$

۳۱ معادله ی $۲x+۲=a^x$ باشرط $(a>۰ , a\neq ۱)$:

۱)فقط یک ریشه دارد . ۲)ریشه ندارد .

۳)حداکثر یک ریشه دارد. ۴)حداقل یک ریشه دارد. دکتر سازگار (سر گروه مازندران)

۳۲ معادله ی $\frac{۲x-۱}{x-۳} = \sqrt{x}$ چند جواب دارد ؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۳۳ کدام معادله دو ریشه متمایز دارد ؟ خانم نسرین باقری (قم)

۱) $\frac{۲x-۱}{x-۱} = ۵-x$ ۲) $\sqrt{x}+۲x = x^۲+۲$ ۳) $۲x-\sin x=۰$ ۴) $x^۳-\cos x=۰$

۳۴ طول قطعه ای از خط $y=۲$ که محصور بین دوخط $y=x+۲$ و $۲y+x=m$ است برابر ۳می باشد . m کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۷- ۳) ۱ ۴) ۳- استاد فاتح کریمیان (قم)

۳۵ جواب معادله ی $۲^{x+۲^{x+۲^{x+۲^{\cdots}}}} = ۱$ کدام است ؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۱- ۴) ۲- استاد فاندر (عضو گروه ریاضی اصفهان)

۳۶ بسط $(a+b)^{۱۳}+(a-b)^{۱۳}$ چند جمله دارد؟ استاد خضر لویی (سر گروه آذربایجان غربی)

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۱۴ ۴) ۱۶

۳۷ ضریب جمله ی سوم در بسط دو جمله ای $(\frac{۱}{x}+۲)^n$ برابر۲۴۰ است . این بسط چند جمله دارد؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۳۸ جمله ی چندم بسط دوجمله ای $(\frac{۱}{x}+۳x^۲)^{۱۵}$ مستقل از x است؟ استاد جوادی (سر گروه آذربایجان غربی)

۱) هشتم ۲) نهم ۳) دهم ۴) یازدهم

۳۹ بسط دوجمله ای $(\sqrt[۳]{a}+\sqrt[۵]{b})^{۲۱}$ چند جمله ی گویا دارد؟(منظور از گویا غیر رادیکالی است) استاد فاندر (عضو گروه ریاضی اصفهان)

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۴۰ دربسط $(a+b)^n$ جمله نهم بزرگترین ضریب عددی رادارد. n کدام عدد نمی تواند باشد؟ استاد درایش (عضو گروه ریاضی هرمزگان)

۱) ۱۵ ۲) ۱۶ ۳) ۱۷ ۴) ۱۸

KonKurist.com
forum.KonKurist.com

آموزش تکمیلی فصل (۱) در قالب تست

۴۱ مجموع ضرایب بسط $\left(\sqrt{3a-\sqrt[3]{b}}\right)^{2n+2}$ برابر ۲۰۴۸ می باشد . تعداد جملات این بسط کدام است ؟ استاد عادل مهر پاک (همدان)

۱) ۱۱ ۲) ۱۲ ۳) ۲۲ ۴) ۲۳

۴۲ در بسط $(\tan x-\cot x)^4$ حاصل ضرب جملات دوم و چهارم چند واحد از جمله ی مستقل از x بزرگتر است؟ $(x\neq\frac{k\pi}{2}, k\in Z)$

۱) ۶ ۲) ۱۰ ۳) ۴ ۴) ۸ استاد عادل مهر پاک (همدان)

۴۳ جسمی به وزن ۱۵ کیلوگرم از جنس آلیاژ نیکل وکُرُم بوده و ۸۰ درصد آن نیکل می باشد . برای رساندن درصد نیکل به ۶۰ باید چند کیلوگرم کُرُم به این آلیاژ اضافه نمود ؟ استاد مومنی (عضو گروه ریاضی کرمان)

۱) ۴ ۲) ۴/۵ ۳) ۵ ۴) ۵/۵

۴۴ یک راننده با پراید از تهران به سمت اصفهان حرکت کرد و پس از طی ۵۰ کیلومتر یک راننده با پژو و در همان مسیر از تهران حرکت کرد و ۱ ساعت زودتر از راننده ی پراید به اصفهان رسیده . اگر سرعت پراید ۸۰ کیلومتر بر ساعت و سرعت پژو ۱۲۰ کیلومتر بر ساعت باشد فاصله ی تهران تا اصفهان چند کیلومتر است ؟ استاد غفار پور (سر گروه اصفهان)

۱) ۳۵۰ ۲) ۳۷۰ ۳) ۳۹۰ ۴) ۴۱۰

۴۵ درون ظرفی ۴۹ لیتر آب موجود است . x لیتر آب ازظرف خارج نموده و x لیتر متانول درون ظرف می ریزیم . سپس x لیتر از محلول را برمی داریم . اگر در محلول باقی مانده ۳۶ لیتر آب موجود باشد ، x کدام است؟ استاد موسوی (سر گروه هرمز گان)

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۴۶ زهرا مقداری عدس و لوبیا خرید . وزن عدس ۲ کیلو گرم بیشتر از لوبیا بود . او برای خرید عدس ۱۵۰ تومان و برای خرید لوبیا ۱۲۰ تومان پول داد . اگر قیمت یک کیلو لوبیا ۵ تومان گرانتر از قیمت یک کیلو عدس باشد ، زهرا در مجموع چند کیلو عدس و لوبیا خرید ؟ خانم نسرین باقری (قم)

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۴۷ فاصله ی بین تهران و قم ۱۰۰ کیلومتر است . راننده ای با پژو ۳۰ دقیقه زودتر از راننده ای با پراید این فاصله را طی کرد . چون سرعت پژو ۱۰ کیلومتر بر ساعت بیشتر از سرعت پراید بود . سرعت پژو چند کیلومتر بر ساعت بوده است ؟ دکتر ثنائی (سر گروه گلستان)

۱) ۴۰ ۲) ۵۰ ۳) ۶۰ ۴) ۷۰

۴۸ آقای عمادچند اسباب بازی برای هدیه به مهدکودک خرید که در مجموع قیمت آنها ۱۲۰۰۰ تومان شد.اگر فروشنده برای هر اسباب بازی ۱۰۰ تومان به او تخفیف می داد او ۴ اسباب بازی بیشترمی توانست بخرد. قیمت هر اسباب بازی بدون تخفیف چقدر است؟ متن کتاب

۱) ۲۰۰ تومان ۲) ۶۰۰ تومان ۳) ۸۰۰ تومان ۴) ۵۰۰ تومان

۴۹ حامد در دفترچه ی پس انداز بانکش ۱۰۰۰۰ تومان داشت . بعد از یکسال نصف آنرا برداشت و پس از گذشت دو سال از افتتاح حساب معلوم شد که ۸۴۰۰ تومان در دفترچه اش وجود دارد . بانک در سال چند درصد به حامد سود می دهد؟ استاد مجتبی بیات (سر گروه همدان)

۱) ۱۵ ۲) ۱۰ ۳) ۲۰ ۴) ۱۷

۵۰ در ضرب دو عدد که یکی از دیگری ۱۰ واحد بزرگتر است اشتباهی رخ می دهد ، در نتیجه رقم دهگان ۴ واحد کوچکتر می شود. برای آزمایش حاصلضرب را بر عدد کوچکتر تقسیم می کنند ، خارج قسمت ۳۹ و باقی مانده ۲۲ می شود . عدد کوچکتر کدام است ؟ متن کتاب

۱) ۲۸ ۲) ۳۱ ۳) ۳۴ ۴) ۳۵

KonKurist.com
forum.KonKurist.com

۱: (۳) بچه ها ! اگه حجم شیشه ها ۱ لیتری باشه ، ۷۲ شیشه برای آب میوه ، ۴۰ شیشه برای شیر و ۴۸ شیشه برای دوغ لازمه .
اما اگه حجم شیشه ها ۲ لیتری باشه ، ۳۶ شیشه برای آب میوه ، ۲۰ شیشه برای شیر و ۲۴ شیشه برای دوغ لازم داریم . همونطور که دیدید ،
حجم شیشه ها باید مقسوم علیه های مشترک اعداد ۷۲ ، ۴۰ و ۴۸ باشن تا بشه ۷۲ لیتر آب میوه .
۴۰ لیتر شیر و ۴۸ لیتر دوغ رو در حجم های یکسان بسته بندی کرد .
در صورتی که حجم شیشه ها رو بزرگترین مقسوم علیه مشترک این سه عدد انتخاب کنیم ، کمترین تعداد شیشه رو برای بسته بندی لازم داریم . بنابراین :

$$\left(۷۲\ ,۴۰\ ,۴۸\right)=\left(۲^۳\times۳^۲\ ,\ ۲^۳\times ۵^۱\ ,\ ۲^۴\times۳^۱\right)=۲^۳=۸$$

حالا که فهمیدیم حجم شیشه ها باید ۸ لیتری باشه و با توجه به اینکه ۱۶۰ لیتر مایع داریم ، میشه نتیجه گرفت که برای بسته بندی ۲۰شیشه لازمه.

۲ : (۲)

$$\begin{cases} f(x)=x(x^۴-۲x^۲+۱)=x(x^۲-۱)^۲=x^۱(x-۱)^۲(x+۱)^۲ \\ g(x)=x^۲(x^۲-۲ax+a) \end{cases} \xrightarrow{\text{ب م م}} h(x)=x^۱(?)$$

بچه ها ! برای اینکه درجه ی $h(x)$ از یک بیشتر بشه لازمه که $x^۲-۲ax+a$ بعد از تجزیه شدن حتماً یکی از عامل های $(x-۱)$ یا $(x+۱)$ رو داشته باشه . به عبارت دیگه ، لازمه که $x=۱$ یا $x=-۱$ ریشه ی $x^۲-۲ax+a$ باشه :

$x^۲-۲ax+a$ باشه $x=۱$ ریشه ی $x^۲-۲ax+a$ اگه $\Longrightarrow (۱)^۲-۲a(۱)+a=۰ \Longrightarrow a=۱$

$x^۲-۲ax+a$ باشه $x=-۱$ ریشه ی $x^۲-۲ax+a$ اگه $\Longrightarrow (-۱)^۲-۲a(-۱)+a=۰ \Longrightarrow a=\frac{-۱}{۳}$

حالا اگه موافق باشید $a=۱$ و $a=\frac{-۱}{۳}$ رو درون $g(x)$ جایگذاری کنیم تا ببینیم ب م م f و g چی میشه .

$$a=۱ \Longrightarrow \begin{cases} f(x)=(x)^۱(x-۱)^۲(x+۱)^۲ \\ g(x)=(x)^۲(x-۱)^۲ \end{cases} \Longrightarrow h(x)=(x)^۱(x-۱)^۲$$

(غ ق ق) چون $x|h$ درجه ۲ نشد :

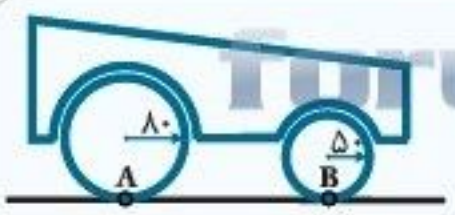
$$a=\frac{-۱}{۳} \Longrightarrow \begin{cases} f(x)=(x)^۱(x-۱)^۲(x+۱)^۲ \\ g(x)=(x)^۲(x^۲+\frac{۲}{۳}x-\frac{۱}{۳})=x^۲(x-۱)(x+\frac{۱}{۳}) \end{cases} \Longrightarrow h(x)=(x)(x-۱)$$

(ق ق) چون $x|h$ درجه ۲ شد :

همونطور که دیدید باید $a=\frac{-۱}{۳}$ باشه تا $h(x)$ درجه ۲ بشه .

KonKurist.com
Forum.Konkurist.com

۳: (۲) وقتی تراکتور شروع به حرکت میکنه ، اگه چرخ بزرگ ۱ دور ،
۲ دور ، ۳ دور و ... بچرخه ، نقطه ی A روی زمین قرار میگیره .



پس هر وقت مضربی از محیط چرخ بزرگ رو طی کنیم نقطه ی A روی زمین قرار میگیره .
به همین ترتیب هر وقت مضربی از محیط چرخ کوچیک رو طی کنیم نقطه ی B روی زمین قرار میگیره .
اما اگه بخوایم نقاط A و B همزمان روی زمین قرار بگیرن باید مضرب مشترک محیطها رو طی کنیم .
بنابراین کوچکترین مضرب مشترک محیط چرخ ها ، میشه اولین باری که بعد از حرکت تراکتور ، نقاط A و B همزمان روی زمین قرار می گیرن .

$$[۱۶۰\pi,۱۰۰\pi]=۲۰\pi[۵,۸]=۲۰\pi\times۴۰=۸۰۰\pi\ \text{cm}$$

۴ : (۲) بچه ها ! می دونید که زنگ اول در هر مضرب ۱۸ دقیقه به صدا در می آد و زنگ دوم در هر مضرب ۲۴ دقیقه و زنگ سوم در هر مضرب ۳۲ دقیقه به صدا در می آد :
پس در مضرب های مشترک ۱۸ و ۲۴ و ۳۲ دقیقه ، هر سه زنگ همزمان به صدا در می آن .
کوچکترین مضرب مشترک این سه عدد ، حداقل زمانیه که باید سپری بشه تا هر سه زنگ مجدداً و به طور همزمان به صدا در بیان.

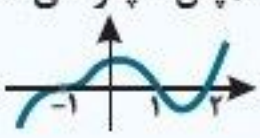
$$\left[۱۸\ ,۲۴\ ,۳۲\right]=\left[۲\times۳^۲\ ,\ ۲^۳\times۳^۱\ ,\ ۲^۵\right]=۲^۵\times۳^۲=۲۸۸$$

۵ : (۲) بچه ها ! همونطور که در آخراین فصل گفتم ، میشه از نوع ریشه های یک تابع قیافه ی نمودار اون تابع ر و در اطراف ریشه مشخص کرد و بالعکس .
مثلا در نمودار تابع f (

) چون قیافه ی نمودار در اطراف ۱- سهمی شکله ، $x=-۱$ ریشه ی مکرر زوجه .
چون قیافه ی نمودار در اطراف ۲ لُره ، $x=۲$ ریشه ی مکرر فرده .
چون نمودار در اطراف ۳ قاطع محور xهاست ، $x=۳$ ریشه ی ساده هست .

بنابراین تابع f دارای عامل های $(x+۱)^{۲n}$ و $(x-۲)^{۲n+۱}$ و $(x-۳)^۱$ هست . $(n\in N)$

از اونجایی که درجه ی تابع f برابره با ۶ پس f چاره ای نداره جز اینکه به صورت $f(x)=A(x+1)^{2}(x-2)^{3}(x-3)^{1}$ باشه . (چرا ؟)

به همین ترتیب اگه به نمودار تابع g (

)نگاه کنید می فهمید که : $g(x)=B(x+1)^{3}(x-1)^{1}(x-2)^{1}$

با توجه به ضابطه های f و g میشه درجه ی ب.م.م و ک.م.م رو تشخیص داد .

$g\ o\ f$ ک م م $= \underbrace{\text{عدد}\times(x+1)^{3}(x-2)^{3}\times(x-1)^{1}(x-3)^{1}}_{\text{درجه ی ۸}}$ $\qquad$ $g\ o\ f$ ب م م $= \underbrace{\text{عدد}\times(x+1)^{2}(x-2)^{1}}_{\text{درجه ی ۳}}$

۶ : (۱) بچه ها! فرض کنید تعداد گردوها برابره با x . (توجه : $n,m,k\in N$)

وقتی x تا گردو رو چهار تا چهار تا بردارید و ۳ تا ازش باقی بمونه ، معنیش اینه که : $x=4n+3$

وقتی x تا گردو رو پنج تا پنج تا بردارید و ۳ تا ازش باقی بمونه ، یعنی : $x=5m+3$

در صورتی که x تا گردو رو شش تا شش تا بردارید و ۳ تا ازش باقی بمونه ، معنیش اینه که : $x=5k+3$

با توجه به اینکه $x-3=4n=5m=6k$ پس میشه گفت : $x-3$ مضرب مشترک ۴ و ۵ و ۶ هست . یعنی :

$x-3=$ ۰۶ یا ۰۲۱ یا ۰۸۱ یا ۰۴۲ ..... $\Longrightarrow x=$ ۳۲۱ یا ۳۸۱ یا ۳۴۲ .....

از اونجایی که تعداد گردوهای درون کیسه بین ۱۵۰ تا ۲۰۰ هست ، پس $x=183$ قابل قبوله .

۷ : (۲) از اونجایی که معادله ی $x^{2}+bx+c=0$ یک ریشه ی مضاعف داره پس :($b^{2}-4c=0$)

اما ما می خوایم وضعیت ریشه های معادله ی $x^{2}+bx+c-3=0$ رو مشخص کنیم. پس اول میریم سراغ Δ ی این معادله :

$\Delta=b^{2}-4(c-3)\Longrightarrow\Delta=\underbrace{b^{2}-4c}+12\Longrightarrow\Delta=12$

با توجه به اینکه $\Delta>0$ شد، پس این معادله دو ریشه ی حقیقی و متمایز داره. حالا می خوایم ببینیم ریشه های این معادله (یعنی $x=\frac{-b\pm\sqrt{12}}{2}$) گویا هستن یا گنگ. در فرض مسئله گفته شده که b گویاست، از طرفی $\sqrt{12}$ گنگه.پس $x=\frac{-b\pm\sqrt{12}}{2}$ گنگ میشه.

۸ : (۲)

$$7x^{2}+3x-1=0\xrightarrow[(\alpha<\beta)]{\Delta=9+28=37}\begin{cases}\alpha=\dfrac{-3-\sqrt{37}}{14}\xrightarrow{\sqrt{37}=6/1}\alpha=\dfrac{-9/1}{14}\\ \beta=\dfrac{-3+\sqrt{37}}{14}\xrightarrow{\sqrt{37}=6/1}\beta=\dfrac{3/1}{14}\end{cases}$$

همونطور که می بینید هر دو ریشه بین ۱- و ۱ قرار دارن. یعنی : $-1<\alpha<\beta<1$

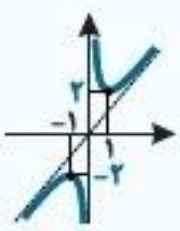
۹ : (۳)

$$3(x+\frac{1}{x})+(x^{2}+\frac{1}{x^{2}})=2\Longrightarrow 3(x+\frac{1}{x})+(x+\frac{1}{x})^{2}-2=2\Longrightarrow(x+\frac{1}{x})^{2}+3(x+\frac{1}{x})-4=0$$

$$\xrightarrow{x+\frac{1}{x}=A}A^{2}+3A-4=0\xrightarrow{\text{مجموع ضرایب}=0}\begin{cases}A=1\\ A=-4\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x+\frac{1}{x}=1\\ x+\frac{1}{x}=-4\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x^{2}+1=x\\ x^{2}+1=-4x\end{cases}\Longrightarrow$$

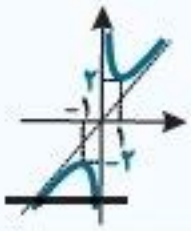
$$\begin{cases}x^{2}-x+1=0\xrightarrow{\Delta<0}\text{ریشه ی حقیقی نداره}\\ x^{2}+4x+1=0\xrightarrow{\Delta>0}\text{۲ ریشه ی حقیقی داره}\end{cases}\Longrightarrow\text{این معادله دو ریشه ی حقیقی و متمایز داره}$$

روش دوم:

توجه : بچه ها ! در آینده خواهید دید که نمودار تابع $y=x+\frac{1}{x}$ به صورت 

هست . $(x+\frac{1}{x}\le-2$ یا $x+\frac{1}{x}\ge2)$

پس معادله ی $x+\frac{1}{x}=1$ جواب نداره . چون هیچ نقطه ای روی منحنی $y=x+\frac{1}{x}$ پیدا نمی شه که مقدار تابع در اون نقطه برابر (۱) بشه .

اما معادله ی $x+\frac{1}{x}=-4$ دو جواب داره . چون دو نقطه روی منحنی $y=x+\frac{1}{x}$ وجود داره که مقدار تابع در اونجا برابر ۴- بشه . 

KonKurist.com
forum.KonKurist.com

۱۰ : (۳)

روش اول : $x-۴\sqrt{x-۲}+۱=۰ \xrightarrow{\text{دامنه}=[۲,+\infty)} x-۲-۴\sqrt{x-۲}+۳=۰ \Rightarrow (\sqrt{x-۲})^۲-۴(\sqrt{x-۲})+۳=۰$

$\xrightarrow{\sqrt{x-۲}=A} A^۲-۴A+۳=۰ \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب}=۰} \begin{cases} A=۱ \Rightarrow \sqrt{x-۲}=۱ \Rightarrow x=۳ \\ A=۳ \Rightarrow \sqrt{x-۲}=۳ \Rightarrow x=۱۱ \end{cases} \Rightarrow$ فاصله ی دو ریشه $=۸$

روش دوم : $x-۴\sqrt{x-۲}+۱=۰ \xrightarrow{\text{دامنه}=[۲,+\infty)} x+۱=۴\sqrt{x-۲} \xrightarrow{\text{به توان (۲)}} x^۲+۲x+۱=۱۶(x-۲)$

$\Rightarrow x^۲-۱۴x+۳۳=۰ \xrightarrow{\Delta'=۴۹-۳۳=۱۶} x=\frac{۷\pm\sqrt{۱۶}}{۱} \Rightarrow \begin{cases} x=۱۱ \\ x=۳ \end{cases} \Rightarrow$ فاصله ی دو ریشه $=۸$

۱۱ : (۴)

$\begin{cases} x+y=۱۲ \\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=۲\sqrt{xy} \end{cases} \xrightarrow{\text{به توان (۲)}} \boxed{x+y}-۲\sqrt{xy}=۴xy \Rightarrow ۴(xy)+۲\sqrt{(xy)}-۱۲=۰$

$\Rightarrow ۴(\sqrt{xy})^۲+۲(\sqrt{xy})-۱۲=۰ \xrightarrow{\sqrt{xy}=A} ۴A^۲+۲A-۱۲=۰ \Rightarrow (۲A)^۲+(۲A)-۱۲=۰$

$(۴).(-۳)$

$(۲A+۴)(۲A-۳)=۰ \Rightarrow \begin{cases} A=-۲ \Rightarrow \sqrt{xy}=-۲ \Rightarrow$ غ.ق.ق \\ A=\frac{۳}{۲} \Rightarrow \sqrt{xy}=\frac{۳}{۲} \Rightarrow \boxed{xy=\frac{۹}{۴}} \end{cases}$

۱۲ : (۳)

$\frac{\sqrt{x}-۱}{\sqrt{x}+۱}=x-۱ \xrightarrow{D=[۰,+\infty)} \frac{(\sqrt{x}-۱)}{\sqrt{x}+۱}=\frac{(\sqrt{x}-۱)(\sqrt{x}+۱)}{۱} \xrightarrow{\text{حذف عامل های مشترک}} (\sqrt{x}-۱=۰)$ یا $\left(\frac{۱}{\sqrt{x}+۱}=\frac{\sqrt{x}+۱}{۱}\right)$

$\Rightarrow \sqrt{x}=۱$ یا $(\sqrt{x}+۱)^۲=۰ \Rightarrow x=۱$ یا $x=۰$

۱۳ : (۲) بچه ها ! عدد مورد نظر رو x فرض می کنیم .

مسئله گفته که : فاصله ی x از عدد ۳ برابره با نصف فاصله ی x از عدد ۱- . بنابراین :

$\underbrace{|x-۳|}_{\text{فاصله ی x از عدد ۳}} = \underbrace{\frac{۱}{۲}|x-(-۱)|}_{\text{نصف فاصله ی x از عدد ۱-}}$

$|x-۳|=\frac{۱}{۲}|x+۱| \xrightarrow{\text{به توان (۲)}} x^۲-۶x+۹=\frac{۱}{۴}(x^۲+۲x+۱) \xrightarrow{\times ۴} ۴x^۲-۲۴x+۳۶=x^۲+۲x+۱$

$\Rightarrow ۳x^۲-۲۶x+۳۵=۰ \xrightarrow{\Delta'=b'^۲-ac=(-۱۳)^۲-۳(۳۵)=۶۴} x=\frac{-b'\pm\sqrt{\Delta'}}{a}=\frac{۱۳\pm۸}{۳} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{۲۱}{۳} \\ x=\frac{۵}{۳} \end{cases}$

بنابراین مجموع دو مقدار بدست اومده برابره با : $\frac{۲۶}{۳}$

۱۴ : (۱) فاصله ی عرض های دو تابع برابره با ۷ یعنی اینکه قدر مطلق تفاضل دو تابع برابره با ۷ :

$|(x^۶-۲x+۳)-(x^۶-۵x-۲)|=۷ \Rightarrow |۳x+۵|=۷ \Rightarrow \begin{cases} ۳x+۵=۷ \Rightarrow x=\frac{۲}{۳} \\ ۳x+۵=-۷ \Rightarrow x=-۴ \end{cases}$

با توجه به گزینه ها می فهمیم که در $x=-۴$ فاصله ی دو تابع برابره با ۷

۱۵ : (۱)

$(|x-۱|-۱)!=۰ \begin{cases} |x-۱|-۱=۰ \Rightarrow |x-۱|=۱ \Rightarrow x-۱=\pm۱ \Rightarrow x=۲ \ , \ x=۰ \\ |x-۱|-۱=۱ \Rightarrow |x-۱|=۲ \Rightarrow x-۱=\pm۲ \Rightarrow x=۳ \ , \ x=-۱ \end{cases}$

KonKurist.com
forum.KonKurist.com

۱۶ : (۴)

$$\sqrt{x^4+2x^2+1}+\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{12} \Rightarrow \sqrt{(x^2+1)^2}+\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}=\sqrt{12} \Rightarrow \underset{\text{مثبت}}{|x^2+1|}+\underset{\text{مثبت}}{|\sqrt{3}-1|}=2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow x^2+1+(\sqrt{3}-1)=2\sqrt{3} \Rightarrow x^2=\sqrt{3} \Rightarrow x=\pm\sqrt[4]{3}$$

توجه : $\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{3-2\sqrt{3}+1}=\sqrt{(\sqrt{3})^2-2(\sqrt{3})+1}=\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}$

۱۷ : (۱)

$$\sqrt{3}\sqrt{x-1}+\sqrt{2}\sqrt{x-1}=\frac{x}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \Rightarrow (\sqrt{3}+\sqrt{2})\sqrt{x-1}=\frac{x}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} (\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})\sqrt{x-1}=x$$

$$\Rightarrow \sqrt{x-1}=x \Rightarrow x-1=x^2 \Rightarrow x^2-x+1=0 \xrightarrow{\Delta<0} \text{ریشه نداره}$$

۱۸ : (۴)

$$\sqrt{3x+4}=\sqrt{2x+1}+1 \xrightarrow{\text{طرفین معادله رو به توان ۲ می رسونیم}} 3x+4=(2x+1)+2\sqrt{2x+1}+1 \Rightarrow x+2=2\sqrt{2x+1}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} x^2+4x+4=4(2x+1) \Rightarrow x^2-4x=0 \Rightarrow x=0 \text{ و } x=4$$

چون هر دو مقدار بدست اومده در معادله ی اولیه صدق می کنن پس این معادله دو جواب داره و مجموع جوابها برابره با ۴ .

۱۹ : (۱)

بچه ها ! اگه برید سراغ دامنه ی معادله ی $3x-2=5\sqrt{1-9x^2}$ متوجه می شید که ...

$$1-9x^2\geq 0 \Rightarrow x^2\leq\frac{1}{9} \Rightarrow -\frac{1}{3}\leq x\leq\frac{1}{3}$$

$$3x-2\geq 0 \Rightarrow 3x\geq 2 \Rightarrow x\geq\frac{2}{3} \quad \text{چرا؟}$$

اشتراک $\Rightarrow D=\varnothing$

همونطور که می دونید ، جواب های یک معادله ، درون دامنه ی اون معادله قرار دارن . پس معادله ای که دامنه اش تهی باشه اصلاً جواب نداره .

۲۰ : (۱)

بچه ها اسمت چپ معادله ی $\sqrt[4]{x^3+x-10}+\sqrt{x^2-3x+2}=0$ از ۲تا عبارت بزرگتر یا مساوی صفر تشکیل شده که جمعشون برابر صفره . این تساوی امکان نداره مگه اینکه xیا xهایی پیدا بشن که هر دوعبارت رو همزمان صفر کنن. یعنی :

$$\begin{cases} x^3+x-10=0 \\ x^2-3x+2=0 \Rightarrow x=1 \ , \ x=2 \end{cases}$$

$x=1$ نمی تونه x^3+x-10 رو صفر کنه اما $x=2$ باعث صفر شدن x^3+x-10 میشه . پس $x=2$ تنها عددیه که تو معادله صدق می کنه . یعنی معادله یک جواب داره .

۲۱ : (۱)

بچه ها! برای حل معادله ی $\sqrt{x-3}+2\sqrt{x+5}=\frac{11}{2}$ (۱) می خوام از روش برد استفاده کنم و برد سمت چپ معادله(یعنی (۱)) رو بدست بیارم.

همونطور که می دونید توابع $y=\sqrt{x-3}$ و $y=2\sqrt{x+5}$ اکیداً صعودی هستن . پس جمع دو تابع (یعنی $y=\sqrt{x-3}+2\sqrt{x+5}$) هم اکیداً صعودیه .کاملاً واضحه که برای پیدا کردن بردیک تابع اکیداً یکنوا باید ابتدا و انتهای دامنه ی تابع رو درون ضابطه ی تابع قرار بدیم تا ابتدا و انتهای برد بدست بیاد. بنابراین :

$$y=\sqrt{x-3}+2\sqrt{x+5} \xrightarrow{\text{دامنه}} \begin{cases} x-3\geq 0 & x\geq 3 \\ x+5\geq 0 & x\geq -5 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} D=[3,+\infty)$$

$$\begin{cases} x=3 \Rightarrow y=2\sqrt{8} \\ x=+\infty \Rightarrow y=+\infty \end{cases} \Rightarrow \text{برد (۱)} = \Big[\underset{\simeq 5/6}{4\sqrt{2}},+\infty\Big)$$

همونطور که دیدید ، برد سمت چپ معادله ی $\sqrt{x-3}+2\sqrt{x+5}=\frac{11}{2}$ از ۵/۶ به بالاست ، در صورتی که مقدار سمت راست معادله برابره با ۵/۵ و این امکان نداره . پس معادله ی بالا جواب نداره .

KonKurist.com
forum.KonKurist.com

۲۲ : (۲)

$$\frac{۴^x+۱}{۲-x^۴}=۲^x \Rightarrow \frac{۴^x+۱}{۲^x}=۲-x^۴ \xrightarrow{\text{بازنویسی}} ۲^x+\frac{۱}{۲^x}=۲-x^۴$$

اگه به سمت چپ این معادله ی بازنویسی شده خوب دقت کنید می بینید که همواره ۲^x مثبته و هر عدد مثبت بعلاوه ی معکوسش ، بزرگتریا مساوی ۲ میشه . پس : $۲^x+\frac{۱}{۲^x}\geq ۲$ ①

از طرفی در سمت راست معادله داریم $-x^۴\leq ۰$ در نتیجه : $-x^۴+۲\leq ۲$ ②

با توجه به ① و ② می فهمیم که تساوی بین طرفین معادله ممکن نیست مگر اینکه هر دو طرف همزمان مساوی ۲ بشن.یعنی :

$$\begin{cases} ۲^x+\frac{۱}{۲^x}=۲ \Rightarrow ۲^x=۱ \Rightarrow x=۰ \\ -x^۴+۲=۲ \Rightarrow -x^۴=۰ \Rightarrow x=۰ \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x=۰$$

پس این معادله فقط یک ریشه داره .

۲۳ : (۱)

$$\left|x-\frac{۱}{۲}\right|-x^۲=\sqrt{x^۲-x+۲}+\frac{۱}{۲} \Rightarrow \underbrace{\sqrt{x^۲-x+\frac{۱}{۴}}-\sqrt{x^۲-x+۲}}_{①}=x^۲+\frac{۱}{۲}$$

$$\left|x-\frac{۱}{۲}\right|=\sqrt{(x-\frac{۱}{۲})^۲}=\sqrt{x^۲-x+\frac{۱}{۴}}$$

کاملا مشخصه که : $\sqrt{x^۲-x+\frac{۱}{۴}}<\sqrt{x^۲-x}+۲$ پس سمت چپ معادله ی ① منفیه . از طرفی سمت راست معادله ی ① مثبته و این غیرممکنه . بنابراین معادله ی ① جواب نداره .

۲۴ : (۲)

$$x^۲+۲|x|+\sqrt{|x|-۳}=۱۵ \Rightarrow \text{تعداد جوابها}=?$$

در معادله ی بالا با توجه به اینکه $|x|-۳$ درون رادیکال قرار داره، پس : $|x|-۳\geq ۰$ و در نتیجه : $|x|\geq ۳$

حالا که فهمیدیم $|x|\geq ۳$ ، ببینیم سمت چپ معادله ی بالا در چه محدوده ای قرار داره :

$$|x|\geq ۳ \begin{cases} |x|^۲\geq ۹ \\ ۲|x|\geq ۶ \\ \sqrt{|x|-۳}\geq ۰ \end{cases} \Rightarrow \underbrace{x^۲+۲|x|+\sqrt{|x|-۳}}_{\text{سمت چپ}}\geq ۱۵$$

بچه ها ! همونطور که می بینید سمت چپ معادله ی $x^۲+۲|x|+\sqrt{|x|-۳}=۱۵$ بزرگتر یا مساوی ۱۵ هست .

در صورتی که سمت راست معادله برابر ه با ۱۵ ، پس این معادله فقط در صورتی جواب داره که سمت چپ هم با ۱۵ برابر بشه و این امکان پذیر نیست مگه اینکه $|x|=۳$ بشه . پس این معادله دو جواب داره : $x=\pm ۳$

۲۵ : (۳) باتوجه به صورت مسئله ، دو نقطه ی A , B روی خط $y=x$ قرار دارن ، پس مختصاتشون رو بصورت (x,x) می نویسیم.

از طرفی گفته شده که فاصله ی نقطه ی (x,x) از نقطه ی $(۲,۱)$ برابره با طول نقطه (یعنی x) . پس کافیه که فاصله ی نقاط (x,x) و $(۲و۱)$ رو بدست بیاریم و برابر x قرار بدیم تا از حل این معادله مقدار x بدست بیاد :

$$\sqrt{(x-۲)^۲+(x-۱)^۲}=x \xrightarrow{\text{به توان ۲}} (x^۲-۴x+۴)+(x^۲-۲x+۱)=x^۲ \Rightarrow x^۲-۶x+۵=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۱ \\ x=۵ \end{cases}$$

پس مختصات نقاط A , B به صورت $A(۱,۱)$ و $B(۵,۵)$ میشه . حالا بریم سراغ مساحت مثلث ABW :

$$S_{\underset{ABW}{\Delta}}=\frac{BW\times BH}{۲}=\frac{۱\times ۴}{۲}=۲$$

۲۶ : (۳)

$$\frac{۲}{x-۲}+\frac{k}{x+۱}=۰ \Rightarrow \frac{۲(x+۱)+k(x-۲)}{(x-۲)(x+۱)}=۰ \Rightarrow \frac{۲x+۲+kx-۲k}{(x-۲)(x+۱)}=۰ \Rightarrow \frac{x(۲+k)-۲k+۲}{(x-۲)(x+۱)}=۰$$

$$x(۲+k)-۲k+۲=۰ \Rightarrow x(۲+k)=۲k-۲ \Rightarrow x=\frac{۲k-۲}{۲+k} \ , \ k\neq ۰,-۲$$

بچه ها ! آیا میدونید اگه $k=۰$ بشه، چی میشه؟

KonKurist.com
forum.KonKurist.com

۲۷ : (۲)

روش اول :

$$\frac{8x-15}{x^2-3x}+\frac{3}{3-x}=\frac{A}{x} \Rightarrow \frac{8x-15}{x^2-3x}-\frac{3}{x-3}=\frac{A}{x} \xrightarrow{\text{کل تساوی رو در مخرج مشترک ضرب میکنیم}} 8x-15-3x=A(x-3)$$

$$\Rightarrow 5x-15=A(x-3) \Rightarrow 5(x-3)=A(x-3) \Rightarrow A=5$$

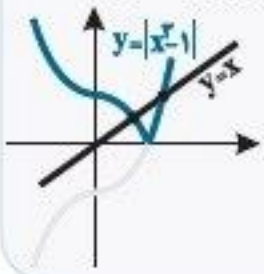
روش دوم : بچه ها ! از اونجایی که این معادله یک اتحاده پس به ازای تمام xهای دامنه برقراره. در نتیجه کافیه یک x از دامنه انتخاب کنیم و درون این اتحاد بندازیم تا A پیدا بشه یعنی :

$$\frac{8x-15}{x^2-3x}+\frac{3}{3-x}=\frac{A}{x} \xrightarrow{x=1} \frac{8-15}{1-3}+\frac{3}{3-1}=\frac{A}{1} \Rightarrow \frac{7}{2}+\frac{3}{2}=A \Rightarrow A=5$$

۲۸ : (۳)

$$|x^2-1|-x=0 \Rightarrow |x^2-1|=x$$

برای رسم نمودار $y=|x^2-1|$ اول نمودار $y=x^2$ رو رسم می کنیم و بعد یک واحد به پایین انتقال می دیم . در نهایت از نمودار انتقال یافته قدر مطلق می گیریم .



تعداد نقاط برخورد = ۲ ⟹ معادله ۲ جواب داره

۲۹ : (۴)

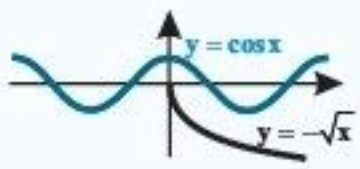
می خوایم ببینیم در بین چهار معادله ی الف) $\sqrt{x}-x=1$ ب) $\sqrt{x-1}=x-3$ ج) $2^x=x^2$ د) $\sqrt{x}+\cos x=0$ چند تاشون جواب دارن:

$\sqrt{x}=x+1$ ⟸ روش هندسی ⟹ دو تابع در یک نقطه برخورد دارن ⟹ معادله یک جواب داره

$\sqrt{x-1}=x-3$ ⟸ روش هندسی ⟹ دو تابع در یک نقطه برخورد دارن ⟹ معادله یک جواب داره

$2^x=x^2$ ⟸ روش هندسی ⟹ دو تابع در سه نقطه برخورد دارن ⟹ معادله سه جواب داره

$\cos x=-\sqrt{x}$ ⟸ روش هندسی ⟹ دو تابع، برخوردی باهم ندارن ⟹ معادله جواب نداره



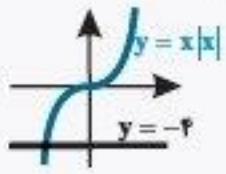
همونطور که در قسمت ج دیدید ، در محدوده ی $x>0$ ابتدا رشد نمودار تابع $y=x^2$ بیشتره و سپس رشد نمودار تابع $y=2^x$ بیشترمیشه .
به همین دلیله که این دو نمودار یک بار همدیگه رو در $x=2$ و بار دیگه در $x=4$ قطع می کنن .

۳۰ : (۲)

بررسی گزینه ی (۱) : $||x|-1|=5 \Rightarrow |x|-1=\pm 5 \Rightarrow \begin{cases} |x|=6 \Rightarrow \boxed{x=\pm 6} \\ |x|=-4 \Rightarrow \text{غ ق ق} \end{cases}$ ⟹ دو ریشه

بررسی گزینه ی (۲) : $|x^2-2|=2 \Rightarrow x^2-2=\pm 2 \Rightarrow \begin{cases} x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2 \\ x^2=0 \Rightarrow x=0 \end{cases}$ ⟹ سه ریشه

بررسی گزینه ی (۳) : $x|x|=-4$ ⟸ روش هندسی



⟹ یک برخورد ⟹ یک ریشه

بررسی گزینه ی (۴) : $|2x-1|+|x|=7$

KonKurist.com
forum.KonKurist.com

بچه ها ! در فصل قدر مطلق ، حل این نوع معادلات رو با روش سریعتر خواهید دید . اما بریم سراغ روش مفهومی :
دوستان من ! آیا قبول دارید که اگه این دیوارهای قدر مطلقی نبودن خیلی راحت می تونستیم معادله رو حل کنیم ؟ به همین منظور باب مذاکره رو با قدر مطلق باز می کنیم :

منتظری : جناب قدر مطلق خواهش می کنم عبارت های درونت رو مثبت کن و بفرستشون بیرون تا من بتونم معادله رو حل کنم .

قدر مطلق : آخه آقای منتظری ، عبارت های درون من حالشون خوش نیست . بعضی جاها مثبتن ، بعضی جاها منفی .
پس شما یه زحمتی بکش و $(۲x-۱)$ و (x) رو تعیین علامت کن تا من بفهمم که چه برخوردی باهاشون داشته باشم .

منتظری : باشه جناب قدر مطلق بفرما :

x		$\frac{۱}{۲}$	
۲x-۱	−	− ۰ +	
x	− ۰	+	+

قدر مطلق : $|۲x-۱|+|x|=۷$

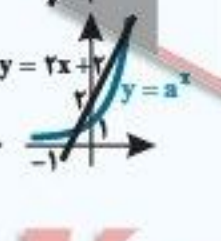
- $x<۰$: $-(۲x-۱)-(x)=۷ \Rightarrow -۳x=۶ \Rightarrow \boxed{x=-۲}$
- $۰\le x<\frac{۱}{۲}$: $-(۲x-۱)+(x)=۷ \Rightarrow -x=۶ \Rightarrow \cancel{x=-۶}$ (چرا ؟)
- $x>\frac{۱}{۲}$: $+(۲x-۱)+(x)=۷ \Rightarrow ۳x=۸ \Rightarrow \boxed{x=\frac{۸}{۳}}$

---

۳۱ : (۴) برای پیدا کردن تعداد ریشه های معادله ی $۲x+۲=a^x$ با شرط $(a>۰ , a\neq ۱)$ از روش هندسی استفاده می کنیم .
یعنی نمودارهای دو تابع $y=۲x+۲$ و $y=a^x$ رو در یک دستگاه مختصات رسم می کنیم تا ببینیم در چند نقطه با هم برخورد دارن . اما
بچه ها ! حواستون باشه که نمودار تابع نمایی $y=a^x$ با توجه به شرط $(a>۰ , a\neq ۱)$ دو حالت داره :

اگه $۰<a<۱$ ⟹

⟹ دو تابع در یک نقطه برخورد دارن ⟹ معادله یک جواب داره

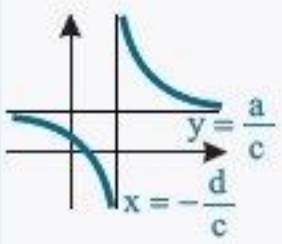
اگه $a>۱$ ⟹ 

⟹ دو تابع در دو نقطه برخورد دارن ⟹ معادله دو جواب داره

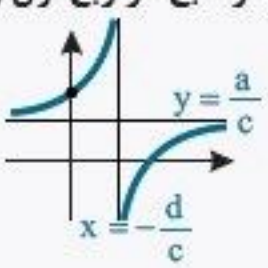
پس این معادله حداقل یک ریشه داره .

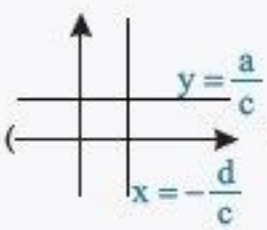
---

۳۲ : (۳) بچه ها! در فصل آخر این کتاب با نمودار تابع $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ با شرط $\frac{a}{c}\neq\frac{b}{d}$ و $c\neq ۰$ آشنا می شید که اسمش هست تابع هموگرافیک . اما به دلیل اهمیت زیاد این تابع ، مجبورم روش سریع رسم نمودارش رو براتون توضیح بدم . پس خوب دقت کنید :
خط افقی $y=\frac{a}{c}$ وخط عمودی $x=\frac{-d}{c}$ نقش اساسی رو توی رسم تابع $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ بازی می کنن که به این دو خط ، مجانب های افقی و قائم تابع هموگرافیک می گیم .($\frac{a}{c}$ از تقسیم ضرایبx به هم ایجاد میشه و $\frac{-d}{c}$ ریشه ی مخرجه)
نمودار این تابع از دو حالت خارج نیست . ممکنه نمودار تابع در ربع اول و سوم مجانب هاش قرار بگیره

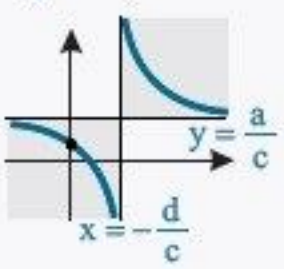


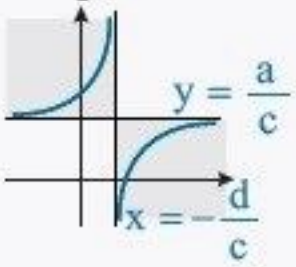
و ممکنه درربع دوم یا چهارم مجانب ها رسم بشه .





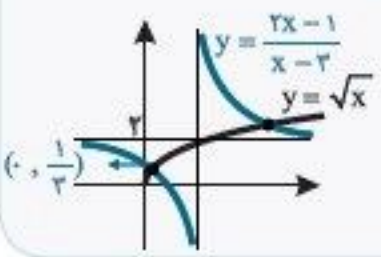
روش رسم : پس برای رسم تابع هموگرافیک $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ دو حرکت لازمه : ۱) خطوط $y=\frac{a}{c}$ و $x=\frac{-d}{c}$ رو رسم کنید . (و یک نقطه ی دلخواه از تابع(ترجیحاً نقطه ای به طول صفر) رو مشخص کنید .
۲)اگه این نقطه در ربع اول یا سوم مجانب ها بود، نمودار تابع رو در ربع اوّل و سوم مجانبها رسم کنید. ۳) اگه نقطه ی بدست اومده در ربع دوم یا چهارم مجانب ها بود ، نمودار تابع رو در ربع دوم و چهارم مجانب ها رسم کنید .

شکل۲


شکل۳


حالا اگه موافق باشید بریم سراغ حل این تست :

برای اینکه بفهمیم معادله ی $\frac{۲x-۱}{x-۳}=\sqrt{x}$ چند جواب داره کافیه نمودارهای دو تابع $y=\frac{۲x-۱}{x-۳}$ و $y=\sqrt{x}$ رو در یک دستگاه مختصات رسم کنیم . تعداد نقاط برخورد این دو تابع ، همون تعداد جواب های معادله هست :
از اونجایی که این دو تابع در دو نقطه با هم برخورد دارن پس این معادله دو جواب داره .

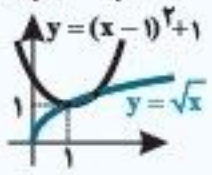


KonKurist.com
Forum.KonKurist.com

۳۳ : (۲)

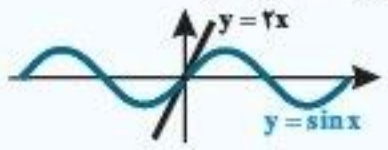
گزینه ی (۱) : $\frac{۲x-۱}{x-۱}=۵-x \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} ۵x-x^۲-۵+x=۲x-۱ \Rightarrow x^۲-۴x+۴=۰ \Rightarrow (x-۲)^۲=۰ \Rightarrow x=۲$ ریشه مضاعف

گزینه ی (۲) : $\sqrt{x}+۲x=x^۲+۲ \Rightarrow \sqrt{x}=x^۲-۲x+۲ \Rightarrow \sqrt{x}=(x-۱)^۲+۱$ روش هندسی



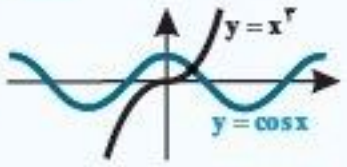
چون دو تابع در دو نقطه ی متفاوت برخورد دارن پس این معادله دو ریشه ی متمایز داره .

گزینه ی (۳) : $۲x-\sin x=۰$ روش هندسی



یک برخورد ⟸ یک ریشه

گزینه ی (۴) : $x^۳-\cos x=۰ \Rightarrow x^۳=\cos x$ روش هندسی

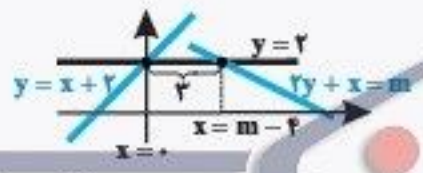


یک برخورد ⟸ یک ریشه

۳۴ : (۳) بچه ها اسوال گفته که خط $y=۲$ با خطوط $y=x+۲$ و $۲y+x=m$ درد و نقطه برخورد داره و فاصله ی این دو نقطه برابره با ۳ . بنابراین:

$\begin{cases} y=x+۲ \\ y=۲ \end{cases}$ برخورد $\rightarrow x+۲=۲ \Rightarrow \boxed{x=۰}$ طول نقطه ی برخورد

$\begin{cases} ۲y+x=m \\ y=۲ \end{cases}$ برخورد $\rightarrow ۲(۲)+x=m \Rightarrow \boxed{x=m-۴}$ طول نقطه ی برخورد



همانطور که می دونید فاصله ی دو نقطه ی a, b که روی محور x ها قرار دارن برابره با $|a-b|$. از طرفی گفته شده که فاصله ی $m-۴$ تا صفر برابره با ۳

بنابراین : $|(m-۴)-۰|=۳ \Rightarrow m-۴=\pm ۳ \Rightarrow \begin{cases} m=۷ \\ m=۱ \end{cases}$

۳۵ : (۳)

$۲^{x+\boxed{۱+۲^{x+\cdots}}=۱}=۱ \Rightarrow ۲^{x+۱}=۱ \Rightarrow ۲^{x+۱}=۲^۰ \Rightarrow x+۱=۰ \Rightarrow x=-۱$

۳۶ : (۱)

$$(a+b)^{۱۳}=\binom{۱۳}{۰}a^{۱۳}+\binom{۱۳}{۱}a^{۱۲}b^۱+\binom{۱۳}{۲}a^{۱۱}b^۲+\binom{۱۳}{۳}a^{۱۰}b^۳+\cdots$$

$$(a-b)^{۱۳}=\binom{۱۳}{۰}a^{۱۳}-\binom{۱۳}{۱}a^{۱۲}b^۱+\binom{۱۳}{۲}a^{۱۱}b^۲-\binom{۱۳}{۳}a^{۱۰}b^۳+\cdots$$

$+$

توان بسط های بالا ۱۳ هست . پس تعداد جملات هر بسط ۱۴ میشه که اگه جملات این دو بسط رو به صورت ستونی با هم جمع کنیم می بینیم که جملات دوم ،چهارم و...و چهاردهم حذف می شن . پس هفت جمله باقی میمونه.

۳۷ : (۲) میدونیم جمله ی $(k+۱)$ ام بسط $(a+b)^n$ برابره با : $\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$

بنابراین جمله ی سوم بسط $(۲+\frac{۱}{x})^n$ برابره با : $\underbrace{\binom{n}{۲}(۲)^{n-۲}}_{\text{ضریب جمله ی سوم}}(\frac{۱}{x})^۲$

ازطرفی گفته شده که ضریب جمله ی سوم این بسط،برابره با۲۴۰ . پس:

$\binom{n}{۲}\times ۲^{n-۲}=۲۴۰ \Rightarrow \frac{n!}{(n-۲)!۲!}\times ۲^{n-۲}=۲۴۰ \Rightarrow \frac{n(n-۱)\cancel{(n-۲)!}}{\cancel{(n-۲)!}\times ۲}\times ۲^{n-۲}=۲۴۰$ ۰۴۲ رو تجزیه کنید

$n(n-۱)\times ۲^{n-۳}=۶\times ۵\times ۲^۳ \Rightarrow n=۶ \Rightarrow (۲+\frac{۱}{x})^۶$ دارای ۷ جمله هست

KonKurist.com
forum.KonKurist.com

۳۸ : (۴) جمله ی $(k+1)$ ام بسط $(\frac{1}{x}+3x^2)^{15}$ برابره با: $\binom{15}{k}(3x^2)^{15-k}(\frac{1}{x})^k$

برای اینکه جمله ی مذکور مستقل از x (یعنی فاقد x) باشه،باید x های صورت و مخرج ، هم توان باشن تا بتونن با هم ساده بشن. یعنی :

مستقل از x

$$\binom{15}{k}\times 3^{15-k}\times x^{2(15-k)}\times\frac{1}{x^k} \Rightarrow 2(15-k)=k \Rightarrow 30-2k=k \Rightarrow 3k=30 \Rightarrow k=10$$

ازاونجایی که $k=10$ بدست اومد پس جمله ی $(k+1)$ ام (یعنی جمله ی یازدهم) فاقد x هست .

۳۹ : (۳) دربسط دوجمله ای $(\sqrt[3]{a}+\sqrt[5]{b})^{21}$ جمله ی $k+1$ ام یا همون جمله ی عمومی برابره با : $\binom{21}{k}(\sqrt[3]{a})^{21-k}(\sqrt[5]{b})^k$

رادیکال های این جمله زمانی از بین میرن که همزمان k مضرب ۵ و($21-k$) مضرب ۳ باشه . بنابراین :

مضرب ۵ :	k	۰	۵	۱۰	۱۵	۲۰
مضرب ۳ :	$21-k$	۲۱	۱۶	۱۱	۶	۱

همونطور که معلومه فقط دو جمله ی این بسط فاقد رادیکال هست .

۴۰ : (۴)

$(a+b)^1$: ① ①

$(a+b)^2$: ۱ ② ۱

$(a+b)^3$: ۱ ③ ③ ۱

$(a+b)^4$: ۱ ۴ ⑥ ۴ ۱

همونطور که معلومه در بسط $(a+b)^n$:

اگه n فرد باشه اون موقع دو جمله ی وسط، یعنی جمله ی شماره $(\frac{n}{2}+\frac{1}{2})$ و جمله ی بعدیش، یعنی $(\frac{n}{2}+\frac{3}{2})$ بزرگترین ضریب رو دارن.

اما اگه n زوج باشه اون موقع جمله ی وسط ، یعنی جمله ی شماره ی $(\frac{n}{2}+1)$ بزرگترین ضریب رو داره.

از اونجایی که در سوال گفته شده ، جمله ی نهم بسط $(a+b)^n$ ، بزرگترین ضریب رو داره ، میشه گفت:

با شرط n فرد : $\frac{n}{2}+\frac{3}{2}=9\rightarrow\frac{n}{2}=\frac{15}{2}\rightarrow n=15$

باشرط n فرد : $\frac{n}{2}+\frac{1}{2}=9\rightarrow\frac{n}{2}=\frac{17}{2}\rightarrow n=17$

با شرط nزوج: $\frac{n}{2}+1=9\rightarrow\frac{n}{2}=8\rightarrow n=16$

بچه ها!اگه سوال اینطوری مطرح بشه:دربسط $(a+b)^n$ فقط جمله ی نهم بزرگترین ضریب رادارد.n کدام است؟اون موقع n=۱۷ , n=۱۵ قابل قبول نیستن.چرا؟

۴۱ : (۲)

$$\left(\sqrt{3a-\sqrt[3]{b}}\right)^{2n+2}=\left(3a-\sqrt[3]{b}\right)^{n+1}$$

$a=b=1$ → مجموع ضرایب بسط $=2^{n+1}$

با توجه به سوال → مجموع ضرایب بسط $=2048$

$$\Rightarrow 2^{n+1}=2^{11}$$

حالا که $n=10$ شد ، این مقدار رو درون $\left(3a-\sqrt[3]{b}\right)^{n+1}$ قرار میدیم . بنابراین بسط $\left(3a-\sqrt[3]{b}\right)^{11}$ ، دوازده جمله داره .

توجه : اگه k و k' دو عدد حقیقی بوده و بخوایم ضرایب بسط $(ka+k'b)^n$ رو بدست بیاریم کافیه بجای پارامترهای a و b مقدار ۱ رو قرار بدیم . یعنی :

$(ka+k'b)^n$ مجموع ضرایب بسط $=(k+k')^n$ ← مثال

- $(a+b)^n$ مجموع ضرایب بسط $=2^n$
- $(2a+b)^n$ مجموع ضرایب بسط $=3^n$

۴۲ : (۲)

$$(\tan x-\cot x)^4=\tan^4 x\underbrace{-4\tan^3 x.\cot x}_{\text{جمله دوم}}\underbrace{+6\tan^2 x.\cot^2 x}_{\text{جمله ی مستقل از x}}\underbrace{-4\tan x.\cot^3 x}_{\text{جمله ی چهارم}}+\cot^4 x$$

- جمله ی چهارم × جمله دوم = ۶۱
- جمله ی مستقل از x = ۶

تفاضل → ۰۱

KonKurist.com
Forum.KonKurist.com

۴۳ : (۳) طبق گفته ی مسئله : ۱۵ کیلوگرم آلیاژ نیکل و کُرُم داریم که ۸۰ درصدش نیکل و ۲۰ درصدش کُرُمه . یعنی :

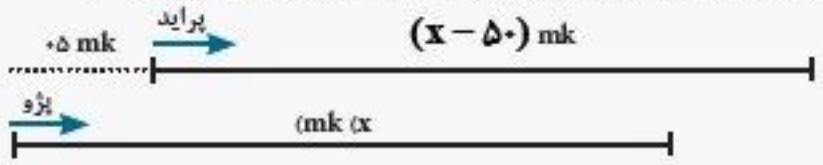
(درون آلیاژ ، ۳ کیلوگرم کُرُم و ۱۲ کیلوگرم نیکل وجود داره) $\frac{۲۰}{۱۰۰}\times ۱۵ = ۳ \Rightarrow$

حالا باید x کیلوگرم کُرُم به آلیاژ اضافه کنم تا درصدش به ۴۰ درصد برسه (یعنی درصد نیکل بشه ۶۰)

پس با اضافه کردن x کیلوگرم کُرُم ، وزن کُرُم به (x+۳) کیلوگرم و وزن کل آلیاژ به x+۱۵ کیلوگرم میرسه . از اونجایی که درصد کُرُم باید به ۴۰ درصد برسه ، پس :

$$\frac{x+۳}{x+۱۵}=\frac{۴۰}{۱۰۰} \Rightarrow \frac{x+۳}{x+۱۵}=\frac{۲}{۵} \Rightarrow ۵x+۱۵=۲x+۳۰ \Rightarrow ۳x=۱۵ \Rightarrow \boxed{x=۵}$$

۴۴ : (۳) فاصله ی تهران تا اصفهان رو x کیلومتر فرض می کنیم . می دونیم راننده ی پژو زمانی حرکت کرد که راننده ی پراید ۵۰ کیلومتر رو طی کرده بود .



از طرفی در سوال گفته شده که : مدت رانندگی توسط پژو (برای مسافت x کیلومتر)یک ساعت کمتره از مدت رانندگی توسط پراید (برای مسافت x-۵۰ کیلومتر) . بنابراین :

۱ = (مدت رانندگی توسط پژو برای طی x کیلومتر) − (مدت رانندگی توسط پراید برای طی (x-۵۰) کیلومتر)

پراید :	کیلومتر	ساعت
	۸۰	۱
	x − ۵۰	?

$\Rightarrow ? = \frac{x-۵۰}{۸۰}$

پژو :	کیلومتر	ساعت
	۱۲۰	۱
	x	?

$\Rightarrow ? = \frac{x}{۱۲۰}$

$$\frac{x-۵۰}{۸۰}-\frac{x}{۱۲۰}=۱ \Rightarrow \frac{۳(x-۵۰)-۲(x)}{۲۴۰}=۱ \Rightarrow x-۱۵۰=۲۴۰ \Rightarrow \boxed{x=۳۹۰}$$

فاصله ی تهران تا اصفهان

۴۵ : (۲) همونطور که سوال گفته، یک ظرف داریم که ۴۹ لیتر آب توشه. ابتدا x لیتر از آب رو بر می داریم و بجاش متانول می ریزیم . بنابراین از محلول ۴۹ لیتری آب و متانول ، سهم آب(x-۴۹) لیتره .

حالا از محلول ۴۹ لیتری آب و متانول ، x لیترش رو بر می داریم تا مقدار محلول بشه x-۴۹ لیتر.

اما سوال اینه که { وقتی در ۴۹ لیتر محلول ، به مقدار(x-۴۹) لیترآب وجود داره .
در(x-۴۹) لیتر محلول ، چند لیتر آب وجود داره ؟

محلول	آب
۴۹ lit	(۴۹ − x) lit
(۴۹ − x) lit	?

$\Rightarrow ? = \frac{(۴۹-x)^۲}{۴۹}$

KonKurist.com
forum.KonKurist.com

از اونجایی که در صورت سوال گفته شده که ۳۶ لیتر آب در محلول باقی می مونه پس :

$$\frac{(۴۹-x)^۲}{۴۹}=۳۶ \Rightarrow (۴۹-x)^۲=۶^۲\times ۷^۲ \Rightarrow ۴۹-x=\pm ۴۲ \Rightarrow \begin{cases} x=۷ \\ \cancel{x=۹۱} \end{cases}$$ (چرا؟)

اگه دقت کنید می بینید که x=۷ همون مقدار آبیه که در ابتدا برداشتیم .

۴۶ : (۴) زهرا { برای x کیلوگرم لوبیا ۱۲۰ تومان پول داد. پس برای ۱ کیلوگرم لوبیا $\frac{۱۲۰}{x}$ تومان پول داده .
برای x+۲ کیلوگرم عدس ۱۵۰ تومان داد پس برای ۱ کیلوگرم عدس $\frac{۱۵۰}{x+۲}$ تومان پول داده .

با توجه به اینکه قیمت ۱ کیلوگرم لوبیا ۵ تومان بیشتر از قیمت ۱ کیلوگرم عدسه ، پس :

$$\frac{۱۲۰}{x}-\frac{۱۵۰}{x+۲}=۵ \Rightarrow \frac{۱۲۰(x+۲)-۱۵۰x}{x(x+۲)}=۵ \Rightarrow \frac{-۳۰x+۲۴۰}{x^۲+۲x}=۵$$

$$۵x^۲+۱۰x=-۳۰x+۲۴۰ \Rightarrow ۵x^۲+۴۰x-۲۴۰=۰ \Rightarrow x^۲+۸x-۴۸=۰ \Rightarrow (x+۱۲)(x-۴)=۰ \Rightarrow \begin{cases} \cancel{x=-۱۲} \\ x=۴ \end{cases}$$

(+۱۲) (−۴)

وزن لوبیا ۴ کیلو و وزن عدس ۶ کیلو بوده ، پس وزن مجموعشون برابر ۱۰ کیلوگرمه .

۴۷ : (۲) اگه سرعت پراید رو x کیلومتردر ساعت فرض کنیم ، سرعت پژو میشه (x+۱۰) کیلومتر در ساعت . حالا می خوایم ببینیم هر کدوم از این دو راننده ، مسافت ۱۰۰ کیلومتری رو در چه زمانی طی کرده اند:

پراید : کیلومتر | ساعت → مدت مسافت پراید : $?=\frac{100}{x}$

پژو : کیلومتر | ساعت → مدت مسافت پژو : $?=\frac{100}{x+10}$

با توجه به سوال : مدت مسافت پژو − مدت مسافت پراید $=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{100}{x}-\frac{100}{x+10}=\frac{1}{2}$

$$\frac{1000}{x(x+10)}=\frac{1}{2} \Rightarrow x^2+10x=2000 \Rightarrow x^2+10x-2000=0 \Rightarrow (x-40)(x+50)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=40 \\ \cancel{x=-50} \end{cases}$$

$(-40).(+50)$

باتوجه به اینکه سرعت پراید ۴۰ کیلومتر در ساعته ، پس سرعت پژو میشه $50\frac{km}{h}$

۴۸ : (۲) قسمت اول سوال گفته که : آقا عماد ۱۲۰۰۰ تومان داد و n تا اسباب بازی خرید که قیمت هر کدوم x تومان بود .

پس : $nx=12000$ (قیمت هر کالا × تعداد کالا) دومین قسمت سوال میگه که : با ۱۲۰۰۰ تومان پولی که آقا عماد پرداخت کرد ، اگه ۱۰۰ تومان برای هر اسباب بازی تخفیف می گرفت (یعنی قیمت هر اسباب بازی x−۱۰۰ تومان بود) می تونست ۴ تا اسباب بازی بیشتر بخره (یعنی n+۴ تا اسباب بازی می خرید) پس میشه گفت : $(n+4)(x-100)=12000$ (تعداد کالا × قیمت هر کالا)

$$\begin{cases} nx=12000 \Rightarrow x=\frac{12000}{n} \\ (n+4)(x-100)=12000 \end{cases} \Rightarrow (n+4)\left(\frac{12000}{n}-100\right)=12000 \Rightarrow \cancel{12000}-100n+\frac{48000}{n}-400=\cancel{12000}$$

$$\xrightarrow{\times n} -100n^2+48000-400n=0 \xrightarrow{\div(-100)} n^2+4n-480=0 \Rightarrow (n+24)(n-20)=0 \Rightarrow \begin{cases} \cancel{n=-24} \\ n=20 \end{cases}$$

$480=2\times2\times\underbrace{2\times2\times2\times3}_{24}\times5$ $(+240).(-20)$

آقا عماد قبل از تخفیف می تونست ۲۰ اسباب بازی بخره و با توجه به رابطه ی ($nx=12000$) قیمت هر اسباب بازی ۶۰۰ تومان بود .

۴۹ : (۳) اگه بانک در هر سال x درصد به پول حامد سود بده ، بعد از گذشت یکسال ۱۰۰۰ تومان سپرده ی حامد برابر می شه با :

$$10000+\frac{x}{100}(10000)=10000+100x$$

سوال داره می گه: که حامد بعد از گذشت یکسال ۵۰۰۰ تومان از پولش رو بر می داره . پس بعد از یک سال پول حامد برابره با :

$$(10000+100x)-5000=5000+100x$$

اما اگه یک سال دیگه از این زمان بگذره (یعنی در سال دوم) x درصد به مقدار (۵۰۰۰+۱۰۰x) اضافه میشه و پول حامد برابر میشه با ۸۴۰۰ تومان . به عبارت دیگه :

(پول حامد در انتهای سال اول) + (مقدار سود ، در مدت یکسال) $=8400$

$$(5000+100x)+\frac{x}{100}(5000+100x)=8400 \Rightarrow 5000+100x+50x+x^2=8400 \Rightarrow x^2+150x-3400=0$$

$(-20)(+170)$

$$\Rightarrow (x-20)(x+170)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=20 \\ \cancel{x=-170} \end{cases}$$ سود بانک در یک سال برابره با ۲۰ در صد

۵۰ : (۲) بچه ها ! سوال میگه دو عدد داریم که یکی از اون یکی ۱۰ واحد کوچیکتره پس کوچیکه رو بگیرید x ، در نتیجه بزرگه میشه (x+۱۰) . از طرفی گفته شده که این دو عدد در هم ضرب شدند و اشتباهی رقم دهگان ۴ واحد از مقدار واقعی اش کمتر شد . این یعنی حاصلضرب دو عدد به طور اشتباهی شده : $x(x+10)-40$ اما در ادامه گفته شده که اگه همین مقدار اشتباه رو به عدد کوچیکتر (یعنی x) تقسیم کنید، خارج قسمت می شه ۳۹ و باقیمانده می شه ۲۲. به عبارت دیگه :

$$\frac{x(x+10)-40 \mid x}{22} \Rightarrow x(x+10)-40=39x+22 \Rightarrow x^2+10x-40=39x+22 \Rightarrow x^2-29x-62=0$$

$(+2)(-31)$

$$\Rightarrow (x+2)(x-31)=0 \Rightarrow \begin{cases} \cancel{x=-2} & \text{(چرا ؟)} \\ x=31 & \text{(عده کوچکتر)} \end{cases}$$

KonKurist.com
forum.KonKurist.com

آزمون فصل (۱)

۱ معادله ی $x\sqrt{1-x} = \sqrt{x}(1-x)$ چند جواب دارد؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲ اگرروی محور افق فاصله ۴a تاعدد ۳ با فاصله ۳a تاعدد۴ برابر باشد فاصلهa تا مبدا چه قدر است؟ دکتر سازگار (سر گروه مازندران)

۱) ۰ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۳ برای هر $x \in (-۱,۰)$ مقدار $\sqrt{۹x^۲+۲۴x+۱۶} - \sqrt{۴x^۲-۴x+۱}$ کدام است؟ استاد غفار پور (سر گروه اصفهان)

۱) $۵x+۳$ ۲) $x-۴$ ۳) $-x+۴$ ۴) $۵x+۵$

۴ جواب های معادله ی $\frac{۲}{x+۱} = \frac{۱}{x^۳+x^۲}$ عبارتند از:

۱) $\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\pm\sqrt{۲}$ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ،۱ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۵ معادله ی $x(x^۲-۹)\sqrt{x-۲} = ۰$ چند ریشه ی حقیقی دارد ؟ آزاد - ۶۷

۱) یک ۲) دو ۳) سه ۴) چهار

۶ معادله ی $۴\sqrt{x^۲-x} + ۲\sqrt{x^۲-x} = ۲$ چند ریشه ی حقیقی دارد ؟ دکتر ثنائی (سر گروه گلستان)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۷ معادله ی $x|x| = \frac{x}{x-۱}$ چند جواب دارد ؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۸ معادله ی $\cos x + ۱ - x^۲ = ۰$ چند جواب دارد ؟ استاد جوادی (عضو گروه ریاضی آذربایجان غربی)

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۹ عددی مثبت وجود دارد که اگر یک سوم آنرا با ۱ و همچنین یک چهارم آنرا با ۱ جمع کنیم و دو مقدار بدست آمده را در هم ضرب کنیم حاصل برابر ۲۰ می شود.آن عدد کدام است ؟ متن کتاب

۱) ۱۲ ۲) ۱۶ ۳) ۲۶ ۴) ۳۴

۱۰ از دبیر ریاضی یک مدرسه سنش را پرسیدند . پاسخ داد : ۲۱ سال بعد ، سن من توان دوم سنی خواهد بود که ۲۱ سال پیش از این داشتم . این دبیر چند سال داشته است؟ متن کتاب

۱) ۲۵ ۲) ۲۸ ۳) ۳۰ ۴) ۳۲

۱۱ اگر ۲ یکی از جواب های معادله ی $x^۳ - ۲x^۲ + ax + ۲ = ۰$ باشد ، مجموع جواب های این معادله کدام است ؟ متن کتاب

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۲ اگر چند جمله ای $x^۴ - ۳x^۳ + mx + n$ بر $x^۲ - ۵x + ۶ = ۰$ بخش پذیر باشد ، مقدار $m+n$ کدام است ؟ متن کتاب

۱) ۸- ۲) ۲۴ ۳) ۱۲- ۴) ۱۶

KonKurist.com
forum.KonKurist.com

آزمون فصل (۱)

۱۳ در بسط دو جمله ای $(\frac{۱}{\sqrt[۳]{x}}+\sqrt[۳]{x^۲})^{۱۲}$ ضریب جمله ی شامل $x^۶$ کدام است ؟ استاد خضر لویی (سر گروه آذربایجان غربی)

۱) ۶۶ ۲) ۲۲ ۳) $\frac{۲۲}{۳}$ ۴) $\frac{۱۱}{۳}$

۱۴ بزرگترین مقسوم علیه مشترک $P(x)=۴x^۲-۱$ و $Q(x)=۴x^۲+۱۰x+۴$ کدام است ؟ استاد درایش (عضو گروه ریاضی هرمزگان)

۱) $۲x+۱$ ۲) $۲x-۱$ ۳) ۱ ۴) $۴x^۲-۱$

۱۵ کوچکترین مضرب مشترک دو عبارت $x^۳+x^۲-x-۱$ و $x^۳-x^۲-x+۱$ کدام است ؟ امیر حسین نصیری (تهران)

۱) $(x^۲-۱)^۲$ ۲) $(x^۲+۱)^۲$ ۳) $(x^۲-۱)(x+۱)^۲$ ۴) $(x^۲+۱)(x-۱)^۲$

۱۶ ساده شده ی عبارت $\frac{۶(a^۲+۲)}{a^۳-۱}-\frac{۶}{a^۲+a+۱}-\frac{a+۵}{a-۱}$ کدام است ؟ متن کتاب

۱) $a-۱$ ۲) $a^۲+a+۱$ ۳) $a^۲-a+۱$ ۴) ۱

۱۷ معادله ی $\sqrt{۱-x}+\sqrt{۲-x}+۳=۰$ چند جواب دارد ؟ متن کتاب

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۸ معادله ی $\frac{|x+۲|}{|x-۲|}=۶$ چند جواب حقیقی دارد ؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۹ معادله ی $|x-۵|-۲x=۱$ چند جواب دارد ؟ متن کتاب با کمی تغییر

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۰ چه تعداد از روابط زیر به ازای هر n طبیعی، صحیح است ؟ استاد زمانی (سر گروه آذربایجان شرقی)

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

KonKurist.com
forum.KonKurist.com

A) $x^n-۱=(x-۱)(x^{n-۱}+x^{n-۲}+x^{n-۳}+...+۱)$

B) $x^n-۱=(x+۱)(x^{n-۱}-x^{n-۲}+x^{n-۳}+...-۱)$

C) $x^n+۱=(x+۱)(x^{n-۱}-x^{n-۲}+x^{n-۳}+...+۱)$