تاریخ :	وقت : دقیقه	۳۷۵۱۳۱ سریال
نام و نام خانوادگی :	تعداد سوالات: ۲۴	
موضوع ریاضی عمومی پیش دانشگاهی و پایه(× کاربرد مشتق)		دبیرستان کمال

۱.گزینه ۲   از روی شکل مشخص است که $x_{Max}=3$ و $x_{\text{عطف}}=0$ می باشد.

$$x_{Max}=3 \xrightarrow{\text{را صفر می کند } y'} y'=4ax^3+6x^2+2bx \xrightarrow{x=3} 0=108a+54+6b$$

$$x_{\text{عطف}}=0 \xrightarrow{\text{را صفر می کند } y''} y''=12ax^2+12x+2b \xrightarrow{x=0} 0=0+0+2b \Rightarrow b=0\ ,\ a=-\frac{1}{2}$$

۲.گزینه ۱   مشتق دوم باید مثبت باشد.

$$y=x\sqrt{x^2+2} \Rightarrow y'=\sqrt{x^2+2}+\frac{1(2x)}{2\sqrt{x^2+2}}x=\sqrt{x^2+2}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}=\frac{x^2+2+x^2}{\sqrt{x^2+2}}=\frac{2x^2+2}{\sqrt{x^2+2}}$$

$$\Rightarrow y''=\frac{4x\cdot\sqrt{x^2+2}-\frac{1(2x)}{2\sqrt{x^2+2}}(2x^2+2)}{x^2+2}=\frac{\frac{4x(x^2+2)-x(2x^2+2)}{\sqrt{x^2+2}}}{x^2+2}$$

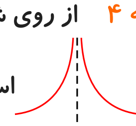
$$=\frac{4x^3+8x-2x^3-2x}{(x^2+2)\sqrt{x^2+2}}=\frac{2x^3+6x}{(x^2+2)\sqrt{x^2+2}}=\frac{x\overbrace{(2x^2+6)}^{+}}{\underbrace{(x^2+2)\sqrt{x^2+2}}_{+}}>0 \Rightarrow x>0$$

تابع در $(0,+\infty)$ تقعرش رو به بالا است بنابراین کمترین مقدار a برابر صفر است.

۳.گزینه ۱   برای نزولی بودن $y'<0$ و برای تقعر رو به بالا بودن باید $y''>0$ باشد.

$$\left.\begin{array}{l} y'<0 \Rightarrow -4x^3+24x^2-36x<0 \Rightarrow -4x(x^2-6x+9)<0 \\ \Rightarrow -4x\underbrace{(x-3)^2}_{+}<0 \Rightarrow -4x<0 \Rightarrow x>0\ \ (I) \\ y''>0 \Rightarrow -12x^2+48x-36>0 \xrightarrow{\div(-12)} x^2-4x+3<0 \\ \Rightarrow (x-1)(x-3)<0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 1<x<3\ \ (II) \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{اشتراک } I\ ,\ II} 1<x<3$$

۴.گزینه ۴   از روی شکل متوجه می‌شویم تابع دارای مجانب قائمی با طول مثبت است و چون شکل تابع در اطراف مجانب قائمش به

صورت  است مخرج کسر دارای ریشه‌ی مضاعف است.(با توجه به شکل، این ریشه‌ی مضاعف، مثبت است.)

$$\text{شرط ریشه‌ی مضاعف}: \Delta=0 \Rightarrow b^2-4ac=0 \Rightarrow b^2-16=0 \Rightarrow \begin{cases} b=4 & \times \\ b=-4 & \surd \end{cases}$$

$b=4$ قابل قبول نمی‌باشد زیرا مخرج به صورت x^2+4x+4 یا $(x+2)^2$ در می‌آید و مجانب قائم $x=-2$ است که غیر قابل قبول می‌باشد. توجه کنید نمودار تابع ، محور عرض‌ها را در نقطه‌ای با عرض مثبت قطع کرده است یعنی اگر به x صفر دهیم y باید مثبت باشد.

$$x=0 \xrightarrow{\text{تابع}} y=\frac{a}{4}>0 \Rightarrow a>0$$

۵.گزینه ۲   چون بازه‌ای داده نشده‌است دامنه‌ی تعریف این تابع را به‌عنوان بازه در نظر می‌گیریم $Df=(-\infty,+\infty)$

$$y=\frac{۱}{۴}x^۴-x^۳-۲x^۲ \Rightarrow y'=x^۳-۳x^۲-۴x=x(x^۲-۳x-۴)=x(x-۴)(x+۱)=۰ \begin{cases} x=۰ \\ x=۴ \\ x=-۱ \end{cases}$$

حال مقادیر تابع را به ازای طول‌های نقاط بحرانی و ابتدا و انتهای بازه بدست می‌آوریم.

$$f(\pm\infty)=\frac{۱}{۴}(\pm\infty)^۴=+\infty\ ,\ f(۰)=۰\ ,\ f(۴)=-۳۲\ ,\ f(-۱)=-\frac{۳}{۴}$$

کمترین مقدار تابع برابر -۳۲ می‌باشد.

۶.گزینه ۳ با توجه به شکل، نقطه‌ی $A\left|\begin{matrix}۱\\۲\end{matrix}\right.$ نقطه عطف تابع می‌باشد که در تابع صدق می‌کند و طولش، y'' را صفر می‌کند.

$$A\left|\begin{matrix}۱\\۲\end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{صدق در } y=ax^{\frac{۳}{۲}}+bx^{\frac{۱}{۲}}} ۲=a+b$$

$$y'=\frac{۳}{۲}ax^{\frac{۱}{۲}}+\frac{۱}{۲}bx^{-\frac{۱}{۲}} \Rightarrow y''=\frac{۳}{۴}ax^{-\frac{۱}{۲}}-\frac{۱}{۴}bx^{-\frac{۳}{۲}} \xrightarrow{x=۱\text{، } y'' \text{ را صفر می کند}} ۰=\frac{۳}{۴}a-\frac{۱}{۴}b \Rightarrow ۳a-b=۰$$

$$\begin{cases} a+b=۲ \\ ۳a-b=۰ \end{cases} \xrightarrow{\text{دستگاه}} a=\frac{۱}{۲},\ b=\frac{۳}{۲}$$

۷.گزینه ۱ توجه کنید دامنه تعریف تابع $x\geq ۰$ می‌باشد و چون تقعر تابع رو به پائین است مشتق دوم باید منفی باشد.

$$y=(x+۳)\sqrt{x} \Rightarrow y=x^{\frac{۳}{۲}}+۳x^{\frac{۱}{۲}} \Rightarrow y'=\frac{۳}{۲}x^{\frac{۱}{۲}}+\frac{۳}{۲}x^{-\frac{۱}{۲}}$$

$$\Rightarrow y''=\frac{۳}{۴}x^{-\frac{۱}{۲}}-\frac{۳}{۴}x^{-\frac{۳}{۲}}=\frac{۳}{۴}(x^{-\frac{۱}{۲}}-x^{-\frac{۳}{۲}})=\frac{۳}{۴}(\frac{۱}{\sqrt{x}}-\frac{۱}{x\sqrt{x}})=\frac{۳}{۴}(\frac{x-۱}{x\sqrt{x}})<۰$$

$$\Rightarrow x-۱<۰ \Rightarrow x<۱ \xrightarrow[\text{تعریف تابع}]{\text{اشتراک با دامنه}} ۰<x<۱ \rightarrow x\in(۰,۱)$$

بنابراین بیشترین مقدار $b-a$ برابر یک می‌باشد.

۸.گزینه ۳ چون تابع همواره صعودی است پس باید $f'(x)\geq ۰$ باشد.

$$f'(x)=۳x^۲-۲(m+۲)x+۳\geq ۰$$

شرط آنکه یک عبارت درجه‌ی دوم بزرگ‌تر مساوی صفر باشد آن است که $a>۰$ و $\Delta\leq ۰$ باشد

$۱)\ a>۰\ \rightarrow\ ۳>۰$ برقرار است:

$$۲)\ \Delta\leq ۰ \rightarrow b^۲-۴ac\leq ۰ \rightarrow ۴(m+۲)^۲-۳۶\leq ۰ \rightarrow ۴(m+۲)^۲\leq ۳۶ \rightarrow (m+۲)^۲\leq ۹$$

$$\rightarrow -۳\leq m+۲\leq ۳ \rightarrow -۵\leq m\leq ۱$$

$$\text{طول نقطه‌ی عطف}=-\frac{b}{۳a}=\frac{m+۲}{۳} \rightarrow -۳\leq m+۲\leq ۳ \rightarrow -۱\leq \frac{m+۲}{۳}\leq ۱$$

یعنی $x_{\text{عطف}}\in[-۱,۱]$ است.

توجه کنید طول نقطه‌ی عطف در تابع درجه‌ی سوم $(y=ax^۳+bx^۲+cx+d)$ از رابطه‌ی $x=-\frac{b}{۳a}$ بدست می‌آید.

۹.گزینه ۲ ابتدا معادله‌ی مجانب افقی را بدست می‌آوریم.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^۲+bx+۸}{x^۲+۴}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^۲}{x^۲}=a \rightarrow y=a$$

مجانب افقی، منحنی را در $x=۰$ قطع کرده است پس $\left|\begin{matrix}۰\\a\end{matrix}\right.$ در تابع صدق می‌کند.

$$\left|\begin{matrix}۰\\a\end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{صدق در تابع}} \quad a=\frac{۰+۰+۸}{۰+۴} \rightarrow a=۲$$

چون منحنی بر محور طول مماس است پس معادله‌ی تلاقی منحنی با محور x $(y=۰)$ ریشه‌ی مضاعف دارد.

معادله‌ی تلاقی: $\begin{cases} y=\dfrac{۲x^۲+bx+۸}{x^۲+۴} \\ y=۰ \end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی}} \dfrac{۲x^۲+bx+۸}{x^۲+۴}=۰ \to ۲x^۲+bx+۸=۰$

شرط ریشه‌ی مضاعف: $\Delta=۰ \to b^۲-۶۴=۰$

$$\to \begin{cases} b=۸ \to ۲x^۲+۸x+۸=۰ \to x^۲+۴x+۴=۰ \to (x+۲)^۲=۰ \to x=-۲ \\ b=-۸ \to ۲x^۲-۸x+۸=۰ \to x^۲-۴x+۴=۰ \to (x-۲)^۲=۰ \to x=۲ \end{cases}$$

چون منحنی در $x>۰$ بر محور x مماس است پس فقط $b=-۸$ قابل قبول است. بنابراین $a+b=-۶$ می‌باشد.

۱۰.گزینه ۱ برای صعودی بودن باید $y'>۰$ و برای تقعر رو به پائین بودن باید $y''<۰$ باشد.

$$y'=x^۳+\frac{۳}{۲}x^۲-۶x=x(x^۲+\frac{۳}{۲}x-۶)>۰$$

ریشه‌های این معادله درجه دوم، اعشاری و کار با آن‌ها سخت است بنابراین فعلاً مقادیر آن‌ها را حساب نمی کنیم

$$y''=۳x^۲+۳x-۶<۰ \to x^۲+x-۲<۰ \to (x+۲)(x-۱)<۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -۲<x<۱$$

باتوجه به بازه $-۲<x<۱$ گزینه سوم حذف می‌شود. توجه کنید $x=-۱$ مشتق را مثبت می‌کند. و برای مثال $x=۰/۱$ آن را منفی می‌کند پس جواب باید شامل -۱ و فاقد $۰/۱$ باشد بنابراین گزینه‌ی اول صحیح است.

۱۱.گزینه ۴ باتوجه به شکل داده شده محور yها $(x=۰)$ مجانب قائم تابع است پس در مخرج تابع صدق می‌کند.

$$x=۰ \xrightarrow{\text{صدق در مخرج}} ۰+b=۰ \to b=۰ \to y=\frac{x^۲+ax-۲}{x}$$

از روی شکل واضح است که این تابع دارای مجانب مایل است پس برای بدست آوردن معادله‌ی آن ، صورت را بر مخرج تقسیم می کنیم.

$$\begin{array}{l|l} x^۲+ax-۲ & x \\ \cline{2-2} -x^۲ & x+a \\ \hline ax-۲ & \\ -ax & \\ \hline -۲ & \end{array} \qquad \to \quad y=x+a \ \text{مجانب مایل}$$

مجانب مایل ، محور عرض را در نقطه‌ای با عرض منفی قطع می‌کند یعنی اگر به x صفر دهیم حاصل باید منفی شود.

$$x=۰ \xrightarrow{\text{مجانب مایل}} ۰+a<۰ \to a<۰$$

۱۲.گزینه ۳ طول نقاط اکسترمم، ریشه‌های ساده‌ی مشتق هستند.

$$y'=۲x^۲-۲(m-۱)x+۸$$

شرط آنکه یک معادله‌ی درجه‌ی دوم دارای ۲ ریشه‌ی منفی باشد آن است که $\Delta>۰$ و $\frac{c}{a}>۰$ و $-\frac{b}{a}<۰$ باشد.

$$۱)\Delta>۰ \to b^۲-۴ac>۰ \to ۴(m-۱)^۲-۶۴>۰ \to (m-۱)^۲>۱۶ \to \begin{cases} m-۱>۴ \to m>۵ \\ m-۱<-۴ \to m<-۳ \end{cases} \quad (I)$$

$۲)\dfrac{c}{a}>۰ \to \dfrac{۸}{۲}>۰$ برقرار است

$$۳)-\frac{b}{a}<۰ \to \frac{۲(m-۱)}{۲}<۰ \to m-۱<۰ \to m<۱ \quad (II)$$

از اشتراک I , II به جواب $m<-۳$ می‌رسیم.

$$\text{طول نقطه‌ی عطف}=-\frac{b}{۳a}=\frac{m-۱}{۳(\frac{۲}{۳})}=\frac{m-۱}{۲}$$

$$m<-۳ \to m-۱<-۴ \xrightarrow{\text{تقسیم بر ۲}} \frac{m-۱}{۲}<-۲$$

یعنی طول نقاط عطف در فاصله‌ی $(-\infty,-۲)$ می‌باشند.

توجه کنید طول نقطه‌ی عطف در تابع درجه‌ی سوم $y=ax^۳+bx^۲+cx+d$ از رابطه‌ی $x_{\text{عطف}}=\frac{-b}{۳a}$ بدست می‌آید.

۱۳.گزینه ۱ تابع دارای ۲ مجانب قائم است یعنی مخرج دو ریشه دارد که یکی مثبت است و دیگری منفی است و دقیقاً قرینه‌ی هم هستند.

$$\text{ضرب ۲ ریشه} < ۰ \to \frac{c}{a} < ۰ \to \frac{۱}{a} < ۰ \to a < ۰ \quad \text{و} \quad \text{جمع ۲ ریشه} = ۰ \to \frac{-b}{a} = ۰ \to -\frac{b}{a} = ۰ \to b = ۰$$

۱۴.گزینه ۱ تابع f مجانب قائم ندارد بنابراین مجانب‌های افقی و مایل را در صورت وجود به دست می‌آوریم و برای این کار حد تابع را وقتی $x\to\infty$ محاسبه می‌کنیم. برای این منظور از هم‌ارزی واندروالسی کمک می‌گیریم.

$$\lim_{x\to\pm\infty}(x+\sqrt[۳]{-x^۳+x^۲}) = \lim_{x\to\pm\infty}(x+\sqrt[۳]{-۱}(x+\frac{۱}{-۱\times ۳})) = \lim_{x\to\pm\infty}(x-(x-\frac{۱}{۳})) = \frac{۱}{۳}$$

بنابراین تابع مجانب افقی $y=\frac{۱}{۳}$ دارد و مجانب مایل ندارد و برای محاسبه محل برخورد منحنی و خط $y=\frac{۱}{۳}$ باید گزینه‌ها را در معادله $x+\sqrt[۳]{x^۲-x^۳}=\frac{۱}{۳}$ امتحان کنیم آنگاه $x=\frac{۱}{۹}$ بدست می‌آید.

۱۵.گزینه ۲ دامنه تعریف تابع $R-\{۰\}$ است. برای نزولی بودن، باید $y'<۰$ باشد و برای تقعر رو به پایین بودن باید $y''<۰$ باشد.

$$\begin{cases} x>۰ \to y=xLnx \to y'=Lnx+۱=۰ \\ \to Lnx=-۱ \to x=\frac{۱}{e} \to \begin{array}{c|ccccc} & ۰ & & \frac{۱}{e} & \overset{\text{عدد کمکی}}{۱} & +\infty \\ \hline y' & & - & ۰ & + & \\ & & \text{نزولی} & & & \end{array} \\ x<۰ \to y=xLn(-x) \to y'=Ln)(-x)+۱=۰ \\ \to Ln(-x)=-۱ \to x=-\frac{۱}{e} \to \begin{array}{cccccc|} & -\infty & \overset{\text{عدد کمکی}}{-۱} & & -\frac{۱}{e} & & ۰ \\ \hline y' & & & + & ۰ & - & \\ & & & & & \text{نزولی} & \end{array} \end{cases}$$

$\Longrightarrow (I)$ تابع در بازه‌ی $(-\frac{۱}{e},\frac{۱}{e})$ نزولی است

$$\begin{cases} x>۰ \to y''=\frac{۱}{x}<۰ \to x<۰ \quad \text{غ ق ق} \\ x<۰ \to y''=\frac{۱}{x}<۰ \to x<۰ \quad \text{ق ق} \quad (II) \end{cases}$$

از اشتراک I و II به جواب $(-\frac{۱}{e},۰)$ می‌رسیم.

۱۶.گزینه ۲

$$f(x)=\frac{۱}{۳}x^۳-x^۲-۱۵x \to f'(x)=x^۲-۲x-۱۵=(x-۵)(x+۳)=۰$$

$$\to \begin{cases} x=۵ \to \text{غ ق ق (در بازه قرار ندارد)} \\ x=-۳ \end{cases}$$

اکنون باید مقدار تابع را به ازای طول نقطه‌ی بحرانی و ابتدا و انتهای بازه، بدست آوریم.

$$f(-۴)=-\frac{۶۴}{۳}-۱۶+۶۰=\frac{۶۸}{۳}\sim ۲۲/۶$$

$$f(۳)=۹-۹-۴۵=-۴۵ \to \text{مطلق } Min$$

$$f(-۳)=-۹-۹+۴۵=۲۷ \to \text{مطلق } Max$$

۱۷.گزینه ۳

در $x=0$، مماس افقی است پس $f'(0)=0$ است.

$$f'(x)=4x^3+3ax^2+b \xrightarrow{f'(0)=0} 0=0+0+b \to b=0$$

بنابراین، تابع به صورت $f(x)=x^4+ax^3$ در می‌آید.

$$\left| \begin{matrix} -4 \\ 0 \end{matrix} \right. \xrightarrow{\text{صدق در تابع}} 0=256-64a \to 64a=256 \to a=4$$

$$f(x)=x^4+4x^3 \to f'(x)=4x^3+12x^2=4x^2(x+3)=0$$

$$\to \begin{cases} x=0 : \text{ریشه‌ی مضاعف است و طول اکسترمم نسبی نمی‌باشد} \\ x=-3 \xrightarrow{\text{تابع}} y=81-108=-27 \end{cases}$$

۱۸.گزینه ۱ $x=0$ مجانب قائم تابع است پس در مخرج صدق می‌کند.

$$x=0 \xrightarrow{\text{صدق در مخرج}} 0+b=0 \to b=0$$

چون تابع از نقطه‌ی $\left| \begin{matrix} 2 \\ 0 \end{matrix} \right.$ می‌گذرد پس مختصات این نقطه در تابع صدق می‌کند.

$$\left| \begin{matrix} 2 \\ 0 \end{matrix} \right. \xrightarrow{\text{صدق}} 0=\frac{2a+2}{4+b} \to 2a+2=0 \to a=-1$$

بنابراین ضابطه‌ی تابع به صورت $f(x)=\dfrac{-x+2}{x^2}$ است.

$$f'_{(x)}=\frac{-1(x^2)-2x(-x+2)}{x^4}=\frac{-x^2+2x^2-4x}{x^4}=\frac{x^2-4x}{x^4}=\frac{x(x-4)}{x^4}=\frac{x-4}{x^3}=0$$

$$\to x=4 \xrightarrow{\text{تابع}} y=\frac{-4+2}{16}=-\frac{1}{8}$$

توجه کنید که در $x=0$، مشتق وجود ندارد ولی چون در دامنه‌ی تعریف تابع قرار ندارد نمی‌تواند طول اکسترمم نسبی تابع باشد.

۱۹.گزینه ۳ نقطه‌ی عطف در تابع صدق می‌کند و طولش، مشتق دوم را صفر می‌کند.

$$\left| \begin{matrix} 1 \\ -3 \end{matrix} \right. \xrightarrow{\text{صدق}} -3=a-1-3+b \to a+b=1$$

$$\left| \begin{matrix} 1 \\ -3 \end{matrix} \right. \xrightarrow{\text{طولش، مشتق دوم را صفر می‌کند}} y'=3ax^2-2x-3 \to y''=6ax-2 \to 0=6a-2 \to a=\frac{1}{3} \ , \ b=\frac{2}{3}$$

پس : $y=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+\frac{2}{3} \to y'=x^2-2x-3=(x-3)(x+1)=0 \to x=3\,,\ x=-1$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y''		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\nearrow$	Max	$\searrow$	Min	$\nearrow$	

$$\to f(-1)=-\frac{1}{3}-1+3+\frac{2}{3}=\frac{7}{3}$$

البته طول نقطه‌ی عطف در تابع درجه‌ی سوم $(y=ax^3+bx^2+cx+d)$ را می‌توان از رابطه‌ی $x=\dfrac{-b}{3a}$ نیز محاسبه کرد.

۲۰.گزینه ۴ مختصات نقطه‌ی عطف در تابع صدق می‌کند و طولش، y'' را صفر می‌کند.

$$A\left|\begin{matrix}1\\-2\end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{صدق}} -2 = a+b-3-1 \to a+b=2$$

$$A\left|\begin{matrix}1\\-2\end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{طولش، } y'' \text{ را صفر می‌کند.}} y' = 3ax^2+2bx-3 \to y'' = 6ax+2b \to 6a+2b=0$$

$$-2\begin{cases} a+b=2 \\ 6a+2b=0 \end{cases} \to 4a=-4 \to a=-1\ ,\ b=3$$

بنابراین ضابطه‌ی تابع به‌صورت $y=-x^3+3x^2-3x-1$ است.

$y' = -3x^2+6x-3 = -3(x^2-2x+1) = -3(x-1)^2 \leq 0 \to$ تابع فاقد اکسترمم است.

۲۱.گزینه ۲ مجانب مایل توابع به فرم $y = mx\cdot\sqrt{\dfrac{x+a}{x+b}}$ به صورت $y = mx+\dfrac{a-b}{2}m$ است.

$$y = x\sqrt{\frac{4x-3}{x-1}} = x\sqrt{\frac{4(x-\frac{3}{4})}{x-1}} \to y = 2x\cdot\sqrt{\frac{x-\frac{3}{4}}{x-1}}$$

معادله‌ی مجانب مایل : $y = 2x+\dfrac{-\frac{3}{4}-(-1)}{2}(2) \to y = 2x+\dfrac{1}{4} \xrightarrow{x=0} y=\dfrac{1}{4}$

۲۲.گزینه ۲ باید فواصلی را بیابیم که در آن فواصل $y'<0$ و $y''<0$ است.

$$y = \cos^2 x - 2\cos x \to y' = -2\sin x\cos x + 2\sin x = 2\sin x(-\cos x+1) = 0$$

$$\to\begin{cases} 2\sin x = 0 \to \sin x = 0 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = k\pi \to x = 0,\pi,2\pi \\ -\cos x+1=0 \to \cos x = 1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = 2k\pi \to x = 0,2\pi \end{cases}$$

$\to$

x	0		π		2π
y'	0	$+$	0	$-$	0
y		$\nearrow$		$\searrow$	

$\to$ تابع در بازه‌ی $(\pi\ ,\ 2\pi)$ نزولی است

$$y' = 2\sin x(-\cos x+1) \to y'' = 2\cos x(-\cos x+1)+\sin x(2\sin x)$$

$$\to y'' = -2\cos^2 x+2\cos x+2\sin^2 x = -2\cos^2 x+2\cos x+2(1-\cos^2 x)$$

$$\to y'' = -4\cos^2 x+2\cos x+2 = 0 \xrightarrow{\cos x = A} -4A^2+2A+2=0$$

$$\xrightarrow{a+b+c=0}\begin{cases} A=1 \to \cos x = 1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = 2k\pi \to x = 0,2\pi \\ A = \dfrac{c}{a} = -\dfrac{1}{2} \to \cos x = -\dfrac{1}{2} = \cos\dfrac{2\pi}{3} \xrightarrow{x=2k\pi\pm\alpha} x = 2k\pi\pm\dfrac{2\pi}{3} \to x = \dfrac{2\pi}{3},\dfrac{4\pi}{3} \end{cases}$$

$\to$

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{4\pi}{3}$		2π
y''	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0
y		$\cap$		$\cup$		$\cap$	

$\to$ در بازه‌ی $(\frac{2\pi}{3}\ ,\ \frac{4\pi}{3})$ تقعر تابع رو به پایین است

از اشتراک دو جواب بدست آمده به جواب $x\in(\pi,\dfrac{4\pi}{3})$ می‌رسیم.

۲۳.گزینه ۱ طبق هم‌ارزی واندروالسی، $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[3]{ax^3+bx^2+cx+d}\sim\sqrt[3]{a}(x+\frac{b}{3a})$ است.

مجانب مایل : $\displaystyle\lim\sqrt[3]{x^3-x^2}\sim\lim\sqrt[3]{1}(x-\frac{1}{\ldots})\to y = x-\frac{1}{\ldots}$

اکنون مجانب مایل را با منحنی تلاقی می‌دهیم.

$$\sqrt[3]{x^3-x^2}=x-\frac{1}{3}\xrightarrow{\text{توان ۳}}x^3-x^2=x^3-x^2+\frac{1}{3}x-\frac{1}{27}$$

$$\rightarrow\frac{1}{3}x=\frac{1}{27}\rightarrow x=\frac{1}{9}$$

توجه کنید که $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ است.

۲۴.گزینه ۱ باید فواصلی را بیابیم که در آن فواصل $y'>0$ و $y''<0$ است.

$$y=\sin^2 x-2\sin x\rightarrow y'=2\sin x\ \cos x-2\cos x=2\cos x(\sin x-1)=0$$

$$\rightarrow\begin{cases}\cos x=0\xrightarrow{\text{حالت خاص}}x=k\pi+\frac{\pi}{2}\rightarrow x=\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{3\pi}{2}\\ \sin x=1\xrightarrow{\text{حالت خاص}}x=2k\pi+\frac{\pi}{2}\rightarrow x=\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

$$\rightarrow\begin{array}{c|ccccccc} x & 0 & & \frac{\pi}{2} & & \frac{3\pi}{2} & & 2\pi\\ \hline y' & & - & 0 & + & 0 & - & \\ \hline y & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & \end{array}$$

$\rightarrow$ تابع در بازه‌ی $(\frac{3\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{2})$ صعودی است

$$y'=2\cos x(\sin x-1)\rightarrow y''=-2\sin x(\sin x-1)+\cos x(2\cos x)$$

$$\rightarrow y''=-2\sin^2 x+2\sin x+2\cos^2 x=-2\sin^2 x+2\sin x+2(1-\sin^2 x)$$

$$\rightarrow y''=-4\sin^2 x+2\sin x+2\xrightarrow{\sin x=A}=-4A^2+2A+2=0$$

$$\xrightarrow{a+b+c=0}\begin{cases}A=1\rightarrow\sin x=1\xrightarrow{\text{حالت خاص}}x=2k\pi+\frac{\pi}{2}\rightarrow x=\frac{\pi}{2}\\ A=\frac{c}{a}=-\frac{1}{2}\rightarrow\sin x=-\frac{1}{2}=\sin(-\frac{\pi}{6})\rightarrow\begin{cases}\xrightarrow{x=2k\pi+\alpha}x=2k\pi-\frac{\pi}{6}\rightarrow x=\frac{11\pi}{6}\\ \xrightarrow{x=2k\pi+\pi-\alpha}x=2k\pi+\frac{7\pi}{6}\rightarrow x=\frac{7\pi}{6}\end{cases}\end{cases}$$

$$\rightarrow\begin{array}{c|ccccccccc} x & 0 & & \frac{\pi}{2} & & \frac{7\pi}{6} & & \frac{11\pi}{6} & & 2\pi\\ \hline y'' & & + & 0 & + & 0 & - & 0 & + & \\ \hline y & & \cup & & \cup & & \cap & & \cup & \end{array}$$

$\rightarrow$ در بازه‌ی $(\frac{11\pi}{6}\ ,\ \frac{7\pi}{6})$ تقعر تابع رو به پایین است

از اشتراک دو جواب بدست آمده به جواب $x\in(\frac{3\pi}{2}\ ,\ \frac{7\pi}{6})$ می‌رسیم.