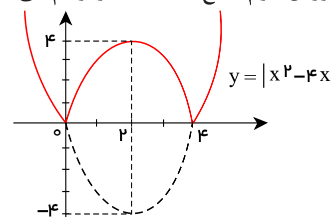
تاریخ :	وقت : دقیقه	
نام و نام خانوادگی :	تعداد سوالات: ۱۸	
موضوع ریاضی عمومی پیش دانشگاهی و پایه(× کاربرد مشتق)		دبیرستان کمال

۱.گزینه ۳ روش اول: در توابع $y=|u|$ از حل معادلات $u=0$, $u'=0$ طول نقاط بحرانی بدست می‌آید.

$$u=0 \rightarrow x^2-4x=0 \rightarrow x(x-4)=0 \rightarrow x=0\,,4$$
$$u'=0 \rightarrow 2x-4=0 \rightarrow x=2$$

پس مجموعه‌ی طول‌های نقاط بحرانی تابع عبارتند از: $\{0,2,4\}$

روش دوم: تابع داده شده را رسم می‌کنیم:



$$y=|x^2-4x| \rightarrow y=|(x-2)^2-4|$$

در $x=0$ و $x=4$ مشتق وجود ندارد (نقاط زاویه‌دار) و در $x=2$ مشتق برابر صفر است.

۲.گزینه ۲

کافی است مقادیر تابع را به ازای ابتدا و انتهای بازه و طول نقاط بحرانی بدست آورده و با هم مقایسه کنیم.

$$f(x)=\frac{2}{3}x^3-3x^2+4x \rightarrow f'(x)=2x^2-6x+4=0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} x=1 \\ x=\dfrac{c}{a}=2 \end{cases}$$

$$f(\frac{1}{2})=\frac{1}{12}-\frac{3}{4}+2=\frac{4}{3} \rightarrow \text{مطلق } Min \text{ و } f(3)=18-27+12=3 \rightarrow \text{مطلق } Max$$

$$f(1)=\frac{2}{3}-3+4=\frac{5}{3}\ ,\ f(2)=\frac{16}{3}-12+8=\frac{4}{3}$$

۳.گزینه ۱ اکسترمم‌های نسبی پیوسته و مشتق‌پذیر دارای دو خاصیت هستند: در تابع صدق می‌کنند و طولشان، مشتق را صفر می کند.

$$\left|\begin{matrix}2\\3\end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{صدق}} 3=8+4a+b \rightarrow 4a+b=-5$$

$$\left|\begin{matrix}2\\3\end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{طولش } y' \text{ را صفر می کند}} y'=3x^2+2ax \rightarrow 0=12+4a \rightarrow a=-3\ ,\ b=7$$

۴.گزینه ۱ می‌دانیم: $\boxed{y=e^u \rightarrow y'=u'e^u \quad , \quad (uv)'=u'v+v'u}$

کافی است از تابع دو بار مشتق بگیریم.

$$y=(x^2-7x+14)e^x \rightarrow y'=(2x-7)e^x+e^x(x^2-7x+14) \rightarrow y'=e^x(2x-7+x^2-7x+14)$$

$$\rightarrow y'=e^x(x^2-5x+7) \rightarrow y''=e^x(x^2-5x+7)+(2x-5)e^x$$

$$\rightarrow y''=e^x(x^2-5x+7+2x-5) \rightarrow y''=e^x(x^2-3x+2)=0 \rightarrow x^2-3x+2=0$$

$$\rightarrow (x-1)(x-2)=0 \rightarrow x=1\ ,\ 2$$

توجه کنید e^x همواره مثبت است و صفر نمی‌شود.

۵.گزینه ۳ توجه کنید دامنه تعریف تابع $x>0$ می‌باشد و چون تقعر تابع رو به پائین است مشتق دوم باید منفی باشد..

$$y=(x+2)Lnx \to y'=Lnx+\frac{1}{x}(x+2)\to y'=Lnx+\frac{x+2}{x}$$

$$\to y''=\frac{1}{x}+\frac{1(x)-1(x+2)}{x^2}\to y''=\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}=\frac{x-2}{\underbrace{x^2}_{+}}<0\to x-2<0\to x<2$$

$\xrightarrow{\text{اشتراک با دامنه}} 0<x<2$ یا $x\in(0,2)$

۶. گزینه ۲

کافی است مقادیر تابع را به ازای طول‌های منفی نقاط بحرانی بدست آورده و با هم مقایسه کنیم.

$$y=x+\frac{9}{x}\to y'=1-\frac{9}{x^2}=\frac{x^2-9}{x^2}=0$$

صورت $=0\to x^2-9=0\to \begin{cases} x=3\ (x<0) & \text{(غ ق ق)}\\ x=-3 & \text{ق ق}\end{cases}$

مخرج $=0\to x^2=0\to x=0\quad (x<0)$ **غ ق ق**

$x=-3\xrightarrow{\text{تابع}} y=-3-3\to y_{Max}=-6$

۷. گزینه ۴

جلوی لگاریتم باید مثبت باشد.

$x^2-2x>0\to x(x-2)>0\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} x<0\ ,\ x>2\quad (I)$

از طرفی می‌دانیم $y=\log_a^u\to y'=\frac{u'}{u\,Ln\,a}$ **و برای نزولی بودن باید مشتق، منفی باشد.**

نزولی $\to y'<0\to y'=\frac{2x-2}{\underbrace{(x^2-2x)}_{+}\underbrace{Ln10}_{+}}<0\to 2x-2<0\to 2x<2\to x<1\qquad (II)$

از اشتراک $I\ ,\ II$ **به جواب** $x<0$ **یا** $x\in(-\infty,0)$ **می‌رسیم.**

۸. گزینه ۳

$x=2\xrightarrow{\text{تابع}} y=3\ ,\ A(2,3)$

تابع داده شده فاقد مجانب قائم (مخرج ریشه حقیقی ندارد) و مجانب افقی است(بزرگترین توان x **صورت از بزرگترین توان** x **مخرج بیشتر است) برای پیدا کردن مجانب مایل، صورت را بر مخرج تقسیم می‌کنیم.**

$$\begin{array}{r|l} x^3+7 & x^2+1 \\ \cline{2-2} & x \\ \underline{-x^3-x} & \\ -x+7 & \end{array}\Rightarrow y=x \ \text{مجانب مایل}$$

$$y=x\to x-y=0\xrightarrow{\text{فاصله نقطه از خط}} AH=\frac{|2-3+0|}{\sqrt{1+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

واضح است $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ، $\frac{1}{2}$ **برابر** $\sqrt{2}$ **است. (فاصله نقطه** $A\left|\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\end{smallmatrix}\right.$ **از خط به معادله** $ax+by+c=0$ **از رابطه** $AH=\frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ **بدست می‌آید.)**

۹.گزینه ۴
نقاط بحرانی، نقاطی از درون دامنه‌ی تعریف هستند که در آنها مشتق برابر صفر است یا وجود ندارد.
دامنه‌ی تعریف این تابع، مجموعه اعداد حقیقی است، یعنی $Df=(-\infty+\infty)$ است.

$$y=x^{\frac{۸}{۳}}-۴x^{\frac{۲}{۳}}$$

$$y'=\frac{۸}{۳}x^{\frac{۵}{۳}}-\frac{۸}{۳}x^{-\frac{۱}{۳}}\rightarrow y'=\frac{۸}{۳}(x^{\frac{۵}{۳}}-x^{-\frac{۱}{۳}})\rightarrow y'=\frac{۸}{۳}(\sqrt[۳]{x^{۵}}-\frac{۱}{\sqrt[۳]{x}})\Rightarrow y'=\frac{۸}{۳}(\frac{x^{۲}-۱}{\sqrt[۳]{x}})$$

$$\text{صورت}=۰\rightarrow x^{۲}=۱\rightarrow x\pm۱ \quad , \quad \text{مخرج}=۰\rightarrow x=۰$$

در $x=\pm۱$ مشتق صفر است در $x=۰$ مشتق وجود ندارد پس طول‌های نقاط بحرانی تابع عبارتند از : $\{-۱,۰,۱\}$

۱۰.گزینه ۱ چون مخرج ریشه ندارد ($\Delta<۰$ است) پس نمودار تابع مجانب قائم ندارد، معادله مجانب افقی منحنی خط $y=\frac{۱}{۲}$ است (زیرا $\lim\limits_{x\rightarrow\pm\infty}\frac{x^{۲}}{۲x}=\frac{۱}{۲}$) و باید آن را با معادله منحنی قطع بدهیم.

$$\frac{x^{۲}-۱}{۲x^{۲}+x+۱}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow ۲x^{۲}+x+۱=۲x^{۲}-۲\Rightarrow x=-۳$$

۱۱.گزینه ۱

$$f(x)=\sqrt[۳]{x^{۳}+۶x^{۲}}\xrightarrow{\text{هم‌ارزی واندروالسی}}y=\sqrt[۳]{۱}\,(x+\frac{۶}{۳\times۱})\Rightarrow \quad y=x+۲ \ \text{خط مجانب مایل}$$

$$\sqrt{x^{۳}+۶x^{۲}}=x+۲\Rightarrow x^{۳}+۶x^{۲}=(x+۲)^{۳}\Rightarrow x^{۳}+۶x^{۲}=x^{۳}+۶x^{۲}+۱۲x+۸\Rightarrow ۱۲x+۸=۰\Rightarrow x=-\frac{۲}{۳}$$

۱۲.گزینه ۳ برای پیدا کردن مجانب مایل باید حد در بی‌نهایت بگیریم و برای این کار از هم ارزی واندروالسی استفاده می‌کنیم.

$$y=x-\sqrt{x^{۲}+۳x}\rightarrow y=x-\sqrt{۱}\,|x+\frac{۳}{۱\times۲}|\rightarrow y=x-|x+\frac{۳}{۲}|$$

$$x\rightarrow+\infty \ : \ y=x-(x+\frac{۳}{۲})\rightarrow y=-\frac{۳}{۲} \quad \text{مجانب افقی}$$

$$x\rightarrow-\infty \ : \ y=x-(-x-\frac{۳}{۲})\rightarrow y=۲x+\frac{۳}{۲} \quad \text{مجانب مایل}$$

حال، باید مجانب مایل را با نیمساز ناحیه دوم (خط $y=-x$) تلاقی دهیم $\begin{cases}y=۲x+\frac{۳}{۲}\\ y=-x\end{cases}\rightarrow x=-\frac{۱}{۲}\ ,\ y=\frac{۱}{۲}$

۱۳.گزینه ۳ برای پیدا کردن مجانب‌های افقی یا مایل از تابع، حد در بی‌نهایت می گیریم و برای این کار از هم‌ارزی واندروالسی استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x\rightarrow\pm\infty}\sqrt{x^{۲}+۴x}=\lim_{x\rightarrow\pm\infty}\sqrt{۱}\,|x+\frac{۴}{۱\times۲}|=\lim_{x\rightarrow\pm\infty}|x+۲|$$

$x\rightarrow+\infty \ : \ y=x+۲$ مجانب مایل و $x\rightarrow-\infty \ : \ y=-x-۲$ مجانب مایل

$$\begin{cases}y=x+۲\\ y=۲x+۱\end{cases}\xrightarrow{\text{تلاقی}}x=۱,y=۳\rightarrow A\Big|{}^{۱}_{۳} \quad , \quad \begin{cases}y=-x-۲\\ y=۲x+۱\end{cases}\xrightarrow{\text{تلاقی}}x=-۱,y=-۱\rightarrow B\Big|{}^{-۱}_{-۱}$$

$$AB=\sqrt{(۱+۱)^{۲}+(۳+۱)^{۲}}=\sqrt{۴+۱۶}=\sqrt{۲۰}=۲\sqrt{۵}$$

۱۴.گزینه ۴ معادله‌ی خط مجانب افقی تابع $y=a=۲$ است. ($\lim\limits_{x\rightarrow\pm\infty}\frac{ax^{۲}}{x^{۲}}=a$) نمودار تابع $f(x)=\frac{۲x^{۲}+bx+c}{x^{۲}+x-۶}$ فقط دارای یک خط مجانب قائم است با در نظر گرفتن $x^{۲}+x-۶=(x+۳)(x-۲)$ چون $x=-۳$ مجانب قائم در قسمت منفی است و منحنی فقط یک مجانب قائم در قسمت منفی دارد پس $x=۲$ هم ریشه‌ی مخرج و هم ریشه‌ی صورت است و چون تابع محور xها را در نقطه‌ای به طول $\frac{۱}{۲}$ قطع کرده است پس $x=\frac{۱}{۲}$ هم ریشه‌ی صورت است. با این توضیحات، صورت کسر به صورت $(۲x-۱)(x-۲)$ است.

$$y=\frac{(2x-1)(x-2)}{x^2+x-6}=\frac{2x^2-5x+2}{x^2+x-6}\to b=-5$$

۱۵.گزینه ۲

در تابع $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ اگر $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ باشد دراین صورت تابع هموگرافیک تبدیل به یک خط افقی می شود.

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}\to\frac{2a}{1}=\frac{1}{a}\to 2a^2\to a_2=\frac{1}{2}\to a=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{cases} a=\frac{\sqrt{2}}{2}\to y=\frac{\sqrt{2}x+1}{x+\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2}(x+\frac{\sqrt{2}}{2})}{x+\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{2}\to y=\sqrt{2} \\ a=\frac{-\sqrt{2}}{2}\to y=\frac{-\sqrt{2}x+1}{x-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{-\sqrt{2}(x-\frac{\sqrt{2}}{2})}{x-\frac{\sqrt{2}}{2}}=-\sqrt{2}\to y=-\sqrt{2} \end{cases}$$

واضح است فاصله‌ی هر کدام از این خطوط افقی از مبداء مختصات برابر $\sqrt{2}$ است.

۱۶.گزینه ۲ باید $f'(x)<0$ و $f''(x)>0$ باشند. در ضمن برای راحتی در مشتق گیری، تابع را ساده می کنیم.

$$y=\frac{(x-2)^2+4}{x-2}=x-2+\frac{4}{x-2}\Rightarrow y'=1-\frac{4}{(x-2)^2}<0$$

$$\to\frac{4}{(x-2)^2}>1\to(x-2)^2<4\to-2<x-2<2\to 0<x<4$$

$$y''=\frac{8}{(x-2)^3}>0\Rightarrow(x-2)^3>0\Rightarrow x>2$$

جواب مشترک $x>2$, $0<x<4$ به صورت بازه $(2,4)$ است.

۱۷.گزینه ۴

$Df:x^2-4\geq 0\to Df:x\geq 2$ یا $x\leq -2$ یا $x\in[2,+\infty)\cup(-\infty,-2]$

نقاط بحرانی، نقاطی از درون دامنه‌ی تعریف هستند که در آنها مشتق برابر صفر است یا مشتق وجود ندارد.

$$y'=\sqrt{x^2-4}+\frac{2x}{2\sqrt{x^2-4}}(x)=\frac{x^2-4+x^2}{\sqrt{x^2-4}}=\frac{2x^2-4}{\sqrt{x^2-4}}=0\Rightarrow x=\sqrt{2}\ ,\ x=-\sqrt{2}$$ بحرانی

و در $x=2$ و $x=-2$ مشتق وجود ندارد ولی چون درون دامنه‌ی تعریف نمی‌باشند بحرانی محسوب نمی‌شوند.

۱۸.گزینه ۲ ابتدا تابع را به صورت $y=\frac{(a-1)x+a-1}{(4-a)x-2(4-a)}$ مرتب می‌کنیم و می‌دانیم در منحنی هموگرافیک $y=\frac{ax+b}{cx+d}$

محل برخورد مجانب‌ها مرکز تقارن است یعنی نقطه‌ی $W\left|\begin{matrix}-\frac{d}{c}\\ \frac{a}{c}\end{matrix}\right.$ و مرکز تقارن منحنی‌هموگرافیک محل تلاقی مجانب های آن‌است

پس مرکز تقارن منحنی مفروض $(2,\frac{a-1}{4-a})$ است که بر روی منحنی $y=\frac{1}{x}$ یا $xy=1$ واقع است.

$$\frac{2a-2}{4-a}=1\Rightarrow 2a-2=4-a\Rightarrow a=2$$