تاریخ :	وقت : دقیقه

نام و نام خانوادگی :	تعداد سوالات: ۸۹

موضوع ریاضی عمومی پیش دانشگاهی و پایه(× کاربرد مشتق)

دبیرستان کمال

۱.گزینه ۱ دامنه‌ی تعریف تابع $Df=(-\infty,+\infty)$ است. (Δ مخرج منفی است پس ریشه‌ی حقیقی ندارد)

$$f'(x)=\frac{-۲(۲x-۲)}{(x^۲-۲x+۵)^۲}\xrightarrow{f'(x)=۰}۲x-۲=۰\rightarrow x=۱$$

حال مقادیر تابع را به ازای نقطه‌ی بحرانی و دو سر بازه به دست می‌آوریم:

$$f(۱)=\frac{۱}{۲},\ f(-۱)=\frac{۱}{۴}\ ,\ f(۲)=\frac{۲}{۵}\Rightarrow Max f(x)=\frac{۱}{۲}\ ,\ Min f(x)=\frac{۱}{۴}$$

پس جواب $\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۲}$ می‌شود.

۲.گزینه ۱

می‌دانیم: $\boxed{y=e^u\rightarrow y'=u'e^u\quad,\quad (uv)'=u'v+v'u}$

دامنه‌ی تعریف تابع داده شده، $Df=(-\infty,+\infty)$ است، برای پیدا کردن طول نقطه‌ی عطف، از تابع دو بار مشتق می گیریم.

$$f(x)=\frac{x}{e^x}=xe^{-x}\Rightarrow f'(x)=۱\times e^{-x}+(-e^{-x})x=e^{-x}(۱-x)$$
$$\Rightarrow f''(x)=-e^{-x}(۱-x)+(-۱)e^{-x}\Rightarrow f''(x)=e^{-x}(x-۲)=۰\Rightarrow x=۲$$

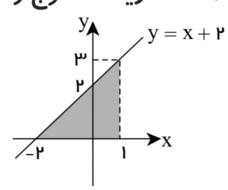
در $x=۲$ جهت تقعر تابع تغییر می‌کند. همچنین در این نقطه، تابع مشتق‌پذیر است، بنابراین $x=۲$ طول نقطه‌ی عطف تابع است.

۳.گزینه ۳

$$y=(g-f)(x)=۲x+۳-\frac{x^۲}{x-۱}=\frac{۲x^۲-۲x+۳x-۳-x^۲}{x-۱}=\frac{x^۲+x-۳}{x-۱}$$

$x=۱$ ریشه مخرج و مجانب قائم است و $y=x+۲$ مجانب مایل تابع است زیرا:

$$\begin{array}{l|l} x^۲+x-۳ & x-۱ \\ \cline{2-2} & x+۲ \\ \underline{-x^۲+x} & \\ ۲x-۳ & \\ \underline{-۲x+۲} & \\ -۱ & \end{array}\qquad\Rightarrow y=x+۲$$



بنابراین مساحت خواسته شده در صورت سوال برابر است با: $S=\frac{۳\times ۳}{۲}=۴/۵$

۴.گزینه ۳ کافی است مقادیر تابع را به ازای ابتدا و انتهای بازه و طول نقاط بحرانی بدست آورده و با هم مقایسه کنیم.

ابتدا طول نقاط بحرانی را می‌یابیم:

$$f(x)=x^۴-۶x^۲+۱\Rightarrow f'(x)=۴x^۳-۱۲x=۴x(x^۲-۳)\xrightarrow{x\in[-۱,۲]}x=۰\ ,\ x=\sqrt{۳}$$

طول نقاط بحرانی

$$\begin{cases} x=۰:f(۰)=۱\\ x=\sqrt{۳}:f(\sqrt{۳})=-۸\end{cases}\qquad \begin{cases}\text{ابتدای بازه } (x=-۱):f(-۱)=-۴\\ \text{انتهای بازه } (x=۲):f(۲)=-۷\end{cases}$$

بنابراین کمترین مقدار تابع برابر ۸− است.

۵.گزینه ۴ ابتدا نقاط ماکسیمم و مینیمم نسبی را به دست می‌آوریم و سپس شیب خط گذرنده از دو نقطه، را بدست می‌آوریم که نشان‌دهنده‌ی تانژانت زاویه‌ای است که خط، با جهت مثبت محور xها می‌سازد.

$$f'(x)=۶x^۲-۱۸x+۱۲=۰\Rightarrow x^۲-۳x+۲=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۱\xrightarrow{\text{تابع}}A(۱,۶):\ \text{نسبی } Max\\ x=۲\xrightarrow{\text{تابع}}B(۲,۵):\ \text{نسبی } Min\end{cases}$$

$$mAB=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{۶-۵}{۱-۲}=\tan\alpha=-۱\Rightarrow\alpha=۱۳۵^\circ$$

۶.گزینه ۱ ابتدا f' را تجزیه و سپس آن را تعیین علامت می‌کنیم:

$$f'(x)=(۱-x)(۱+x)(x)(x+۱)\Rightarrow f'(x)=(x+۱)^۲(۱-x)x=۰\Rightarrow x=-۱\ ,\ ۰\ ,\ ۱$$

x	$-\infty$		-۱		۰		۱		$+\infty$
f'		$-$	۰	$-$	۰	$+$	۰	$-$	
f		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	
					Min		Max		

۷.گزینه ۴

$$y=\frac{x}{x^۲+۱}\Rightarrow y'=\frac{x^۲+۱-۲x^۲}{(x^۲+۱)^۲}=۰\Rightarrow x=\pm۱\Rightarrow\begin{cases}x=۱\xrightarrow{\text{تابع}}y=\frac{۱}{۲} & A\left|\begin{matrix}۱\\ \frac{۱}{۲}\end{matrix}\right.\\ x=-۱\xrightarrow{\text{تابع}}y=-\frac{۱}{۲} & A'\left|\begin{matrix}-۱\\ -\frac{۱}{۲}\end{matrix}\right.\end{cases}$$

$$AA'=\sqrt{(۱+۱)^۲+(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲})^۲}=\sqrt{۴+۱}=\sqrt{۵}$$

۸.گزینه ۳ دامنه تعریف تابع، $x>۰$ می‌باشد.

$$y'=۲x-\frac{۲}{x}=\frac{۲x^۲-۲}{x}=۰\rightarrow x=\pm۱$$

به ازای $x=۰$ ($۰=$مخرج) مشتق وجود ندارد. حال به ازای $x>۰$ مشتق را تعیین علامت می‌کنیم.

x	$-\infty$	۰		۱		$+\infty$
y'			$-$	۰	$+$	
y			$\searrow$	۱	$\nearrow$	
				Min		

۹.گزینه ۳ برای نزولی بودن یک تابع مشتق‌پذیر می‌بایست $y'<۰$ و برای تقعر رو به بالا بودن باید $y''>۰$ باشد.

$y'=۳x^۲-۶x=۳x(x-۲)$

x	$-\infty$		۰		۲		$+\infty$
y'		$+$	۰	$-$	۰	$+$	

$\Rightarrow ۰<x<۲$

$y''=۶x-۶=۶(x-۱)$

x	$-\infty$		۱		$+\infty$
y''		$-$	۰	$+$	

$\Rightarrow x>۱$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک}}x\in(۱,۲)$$

۱۰.گزینه ۴

$$f(x)=\frac{۳-x^۲}{x^۳}=\frac{۳}{x^۳}-\frac{۱}{x}\Rightarrow f'(x)=\frac{-۹x^۲}{x^۶}-\frac{-۱}{x^۲}\Rightarrow f'(x)=-\frac{۹}{x^۴}+\frac{۱}{x^۲}$$

$$\Rightarrow f''(x)=\frac{۳۶x^۳}{x^۸}+\frac{-۲x}{x^۴}\Rightarrow f''(x)=\frac{۳۶}{x^۵}-\frac{۲}{x^۳}=\frac{۳۶-۲x^۲}{x^۵}$$

$$۳۶-۲x^۲=۰\Rightarrow x^۲=۱۸\Rightarrow x=\pm۳\sqrt{۲}$$

$x^۵=۰\Rightarrow x=۰\Rightarrow$ مشتق دوم وجود ندارد

x	$-\infty$		$-۳\sqrt{۲}$		۰		$۳\sqrt{۲}$		$+\infty$
f''		$+$	۰	$-$	$\Vert$	$+$	۰	$-$	
f		$\cup$		$\cap$	تعریف نشده	$\cup$		$\cap$	

پس در بازه‌ی $(۲,۴)$ تقعر تابع رو به بالا است، دقت کنید که $۴ < ۲\sqrt{۲}$ ۳ است.

۱۱.گزینه ۴

$$\left.\begin{array}{l} x_{\text{عطف}} = \dfrac{-b}{۳a} \rightarrow ۱ = \dfrac{-b}{۳a} \rightarrow ۳a = -b \\ A\Big|_{۳}^{۱} \xrightarrow{\text{صدق در تابع}} ۳ = a + b \end{array}\right\} \rightarrow a = -\dfrac{۳}{۲}, b = \dfrac{۹}{۲}$$

۱۲.گزینه ۲

می‌دانیم: $\boxed{y = e^{u} \rightarrow y' = u'e^{u}}$

کافی است که از تابع داده شده دو بار مشتق بگیریم و توجه کنید که دامنه‌ی تعریف تابع $Df = \mathbb{R} - \{۰\}$ است.

$$f(x) = e^{\frac{۱}{x}}$$

$$\rightarrow f'(x) = \frac{-۱}{x^{۲}} e^{\frac{۱}{x}} \Rightarrow f''(x) = \frac{۲}{x^{۳}} e^{\frac{۱}{x}} + (\frac{-۱}{x^{۲}} e^{\frac{۱}{x}})(\frac{-۱}{x^{۲}}) = e^{\frac{۱}{x}}(\frac{۲}{x^{۳}} + \frac{۱}{x^{۴}}) = e^{\frac{۱}{x}}(\frac{۲x+۱}{x^{۴}}) = ۰$$

$$\rightarrow x = -\frac{۱}{۲}$$

به ازای $x = ۰$، مشتق دوم وجود ندارد و چون در دامنه‌ی تعریف تابع قرار ندارد طول عطف نمی‌باشد.

جهت تقعر تابع در $x = -\frac{۱}{۲}$ تغییر می‌کند وتابع در این نقطه، پیوسته است و خط مماس واحد دارد، پس $x = -\frac{۱}{۲}$، طول تنها نقطه‌ی عطف تابع است.

x	$-\infty$		$-\frac{۱}{۲}$		۰		$+\infty$
f''		−	۰	+	‖	+	
f		$\cap$		$\cup$	‖ تعریف نشده	$\cup$	

۱۳.گزینه ۱ نقاط بحرانی، نقاطی از درون دامنه‌ی تعریف هستند که در آنها مشتق برابر صفر است یا مشتق وجود ندارد.

دامنه‌ی تعریف تابع $Df = (-\infty\,,\,\infty)$ است.

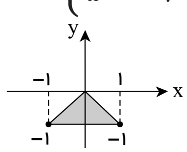
$$f(x) = x^{\frac{۸}{۳}} - ۲x^{\frac{۴}{۳}} \Rightarrow f'(x) = \frac{۸}{۳}x^{\frac{۵}{۳}} - \frac{۸}{۳}x^{\frac{۱}{۳}} = \frac{۸}{۳}(\sqrt[۳]{x^{۵}} - \sqrt[۳]{x}) = \frac{۸}{۳}(x\sqrt[۳]{x^{۲}} - \sqrt[۳]{x}) = ۰$$

$$\rightarrow x\sqrt[۳]{x^{۲}} - \sqrt[۳]{x} = ۰ \rightarrow \sqrt[۳]{x}(x\sqrt[۳]{x} - ۱) = ۰ \rightarrow x = ۰ \;,\; x = \pm ۱$$

$$(x\sqrt[۳]{x} - ۱ = ۰ \rightarrow x\sqrt[۳]{x} = ۱ \xrightarrow{\text{توان ۳}} x^{۴} = ۱ \rightarrow x = \pm ۱ \;\; \text{دقت کنید})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \xrightarrow{\text{تابع}} f(۰) = ۰ \rightarrow \Big|_{۰}^{۰} \\ x = ۱ \xrightarrow{\text{تابع}} f(۱) = -۱ \rightarrow \Big|_{-۱}^{۱} \\ x = -۱ \xrightarrow{\text{تابع}} f(-۱) = -۱ \rightarrow \Big|_{-۱}^{-۱} \end{cases}$$

بنابراین از به هم وصل کردن نقاط بحرانی، یک مثلث همانند شکل مقابل ایجاد می‌شود. که مساحت آن برابر با $S = \frac{۲ \times ۱}{۲} = ۱$ است.



۱۴.گزینه ۳ اگر برای f در بازه‌ی $(a\,,\,b)$ داشته باشیم: $\begin{cases} f'(x) < ۰ \\ f''(x) > ۰ \end{cases}$ آنگاه f در این بازه نزولی است و تقعر رو به بالا دارد.

$$f'(x) = \frac{۲x}{\underbrace{x^{۲}+۹}_{+}} < ۰ \Rightarrow ۲x < ۰ \Rightarrow x < ۰$$

$$f''(x) = \frac{۲(x^{۲}+۹) - ۲x(۲x)}{(x^{۲}+۹)^{۲}} = \frac{-۲x^{۲}+۱۸}{(x^{۲}+۹)^{۲}} = \frac{۲(۹-x^{۲})}{\underbrace{(x^{۲}+۹)^{۲}}_{+}} > ۰ \Rightarrow ۹ - x^{۲} > ۰ \Rightarrow -۳ < x < ۳$$

از اشتراک این دو جواب به پاسخ $-۳ < x < ۰$ می رسیم. (دقت کنید دامنه تعریف تابع، مجموعه اعداد حقیقی است)

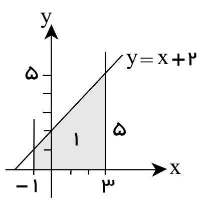
۱۵.گزینه ۱ ابتدا با تقسیم، مجانب مایل تابع را می‌یابیم:

$$\begin{array}{l|l} x^{۳} & x^{۲}-۲x-۳ \\ \cline{2-2} \underline{-x^{۳}+۲x^{۲}+۳x} & x+۲ \\ ۲x^{۲}+۳x & \\ \underline{-۲x^{۲}+۴x+۶} & \\ ۷x+۶ & \end{array}$$

$\Rightarrow\ y=x+۲$ مجانب مایل

مخرج $=۰ \to x^{۲}-۲x-۳=۰ \Rightarrow x=-۱\ ,\ x=۳$ مجانب‌های قائم تابع

با توجه به شکل مقابل کافی است، مساحت ذوزنقه را بیابیم:



$$S=\frac{(۱+۵)(۴)}{۲}=۱۲$$

۱۶.گزینه ۴ می‌دانیم: $\boxed{y=Ln\,u \to y'=\frac{u'}{u}\quad,\quad (uv)'=u'v+v'u}$

دامنه‌ی تعریف تابع $x>۰$ است. حال از تابع دو بار مشتق می‌گیریم:

$$f'(x)=(۱)Lnx+x(\frac{۱}{x})=Lnx+۱ \Rightarrow f''(x)=\frac{۱}{x}$$

چون $x>۰$ است مشتق دوم همواره مثبت است در نتیجه تابع نقطه‌ی عطف ندارد (چون در هیچ نقطه‌ای جهت تقعر تابع عوض نمی‌شود.)

۱۷.گزینه ۴ تابع مجانب افقی $y=۰$ دارد. بنابراین:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=۰ \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^{۲}+bx+۳}{x^{۲}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^{۲}}{x^{۲}}=a=۰ \Rightarrow f(x)=\frac{bx+۳}{x^{۲}}$$

$x=۱$ طول نقطه‌ی Min است پس مشتق تابع به ازای $x=۱$ برابر صفر است یعنی $f'(۱)=۰$ پس:

$$f'(x)=\frac{b(x^{۲})-(۲x)(bx+۳)}{x^{۴}} \Rightarrow f'(۱)=\frac{b-۲(b+۳)}{۱}=۰ \Rightarrow -b-۶=۰ \Rightarrow b=-۶$$

۱۸.گزینه ۳ مشتق دوم باید منفی باشد.

$$y=e^{-x^{۲}} \Rightarrow y'=(-۲x)e^{-x^{۲}} \Rightarrow y''=-۲e^{-x^{۲}}+(-۲x)(-۲xe^{-x^{۲}})$$

$$\Rightarrow y''=-۲e^{-x^{۲}}+۴x^{۲}e^{-x^{۲}}=e^{-x^{۲}}(۴x^{۲}-۲)<۰ \xrightarrow{e^{-x^{۲}}>۰} ۴x^{۲}-۲<۰ \Rightarrow x^{۲}<\frac{۱}{۲} \Rightarrow -\frac{\sqrt{۲}}{۲}<x<\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

گزینه سوم زیر مجموعه‌ای از جواب بدست آمده است.

۱۹.گزینه ۳

$$y'=\frac{۲x(۱-x^{۲})-(-۲x)(x^{۲}+۱)}{(۱-x^{۲})^{۲}} \Rightarrow y'=\frac{۲x-۲x^{۳}+۲x^{۳}+۲x}{(۱-x)^{۲}} \Rightarrow y'=\frac{۴x}{(۱-x^{۲})^{۲}}=۰ \to x=۰$$

باتوجه به جدول تعیین علامت مشتق، نقطه‌ی $x=۰$ طول مینیمم نسبی تابع است.

x	$-\infty$	-۱		۰		۱	$+\infty$
y′	$-$	‖	$-$	۰	$+$	‖	$+$
y		‖	$\searrow$	min	$\nearrow$	‖	

۲۰.گزینه ۳ حد راست و چپ تابع را در اطراف $x=۳$ یعنی مجانب قائم تابع حساب می‌کنیم و جواب هر دو حد طبق شکل باید $+\infty$ شود.

$$\lim_{x\to ۳^+}\frac{k[x]-۳}{x-۳}=\lim_{x\to ۳^+}\frac{۳k-۳}{x-۳}=\frac{۳k-۳}{۰^+}=+\infty \Rightarrow ۳k-۳>۰\Rightarrow k>۱$$
$$\lim_{x\to ۳^-}\frac{k[x]-۳}{x-۳}=\lim_{x\to ۳^-}\frac{۲k-۳}{x-۳}=\frac{۲k-۳}{۰^-}=+\infty \Rightarrow ۲k-۳<۰\Rightarrow k<\frac{۳}{۲}$$

بنابراین باید داشته باشیم : $۱<k<\frac{۳}{۲}$

۲۱.گزینه ۱

ضابطه‌ی $f\times g$ را می‌نویسیم:

$$(f\times g)(x)=f(x)g(x)=\frac{x^۳+x^۲+x+۱}{x^۲+۴x+۴}$$

با تقسیم صورت بر مخرج، مجانب مایل تابع را به دست می آوریم:

مجانب مایل

$$\begin{array}{l|l} x^۳+x^۲+x+۱ & x^۲+۴x+۴ \\ \cline{2-2} \underline{-x^۳-۴x^۲-۴x} & x-۳ \\ -۳x^۲-۳x+۱ & \\ \underline{۳x^۲+۱۲x+۱۲} & \\ ۹x+۱۳ & \end{array} \qquad \Rightarrow y=x-۳$$

۲۲.گزینه ۳ برای پیدا کردن مجانب افقی از تابع، حد در بی‌نهایت می گیریم برای این منظور، عبارت را در مزدوجش ضرب و تقسیم می کنیم.

$$\lim_{x\to\pm\infty}x(\sqrt{x^۲+۴x+۱}-\sqrt{x^۲+۴x-۲})\times\frac{\sqrt{x^۲+۴x+۱}+\sqrt{x^۲+۴x-۲}}{\sqrt{x^۲+۴x+۱}+\sqrt{x^۲+۴x-۲}}$$
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x(x^۲+۴x+۱-x^۲-۴x+۲)}{\sqrt{x^۲+۴x+۱}+\sqrt{x^۲+۴x-۲}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۳x}{\sqrt{x^۲}+\sqrt{x^۲}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۳x}{|x|+|x|}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۳x}{۲|x|}$$

$$\lim_{x\to-\infty}y=\lim_{x\to-\infty}\frac{۳x}{-۲x}=-\frac{۳}{۲}\Rightarrow y=-\frac{۳}{۲}$$ **مجانب افقی**

$$\lim_{x\to+\infty}y=\lim_{x\to+\infty}\frac{۳x}{۲x}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow y=\frac{۳}{۲}$$ **مجانب افقی**

فاصله دو مجانب افقی $=\left|\frac{۳}{۲}-(-\frac{۳}{۲})\right|=۳$

۲۳.گزینه ۱ منظور از بیشترین شدت نزول، کمترین مقدار مشتق تابع است.

$$f'(x)=x^۲-۳x+۲$$

مشتق تابع، درجه‌ی دوم است و کمترین مقدار تابع درجه‌ی دوم، عرض رأس سهمی است.

$$y_s=\frac{۴ac-b^۲}{۴a}=\frac{۴(۱)(۲)-۹}{۴(۱)}=\frac{-۱}{۴}$$

۲۴.گزینه ۴ برای آنکه تابع صعودی باشد و تقعر آن روبه پائین باشد باید $f'\rangle ۰$ و $f''\langle ۰$ باشد.

$$f'>۰\to ۶x^۲-۱۸x+۱۲>۰\to x^۲-۳x+۲>۰\to(x-۱)(x-۲)>۰\xrightarrow{\text{تعیین علامت}}x<۱ \text{ یا } x>۲(I)$$
$$f''<۰\to ۱۲x-۱۸<۰\to ۱۲x<۱۸\to x<\frac{۳}{۲}(II)$$

از اشتراک I و II به جواب $x<۱$ می‌رسیم.

۲۵.گزینه ۲ برای راحتی در مشتق گرفتن، ابتدا تابع را تفکیک می کنیم.

$$f(x)=\frac{x^{۳}}{x^{۳}}-\frac{x^{۲}}{x^{۳}}+\frac{۱}{x^{۳}}\to f(x)=۱-\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x^{۳}}\to f'(x)=\frac{۱}{x^{۲}}-\frac{۳x^{۲}}{x^{۶}}$$

$=\frac{۱}{x^{۲}}-\frac{۳}{x^{۴}}=\frac{x^{۲}-۳}{x^{۴}}=۰\to x=\pm\sqrt{۳}$ و در $x=۰$، مشتق وجود ندارد

x	$-\infty$		$-\sqrt{۳}$		۰		$\sqrt{۳}$		$+\infty$
y′		+	۰	−	‖	−	۰	+	
y		↗	Max	↘	‖	↘	Min	↗	

$\Rightarrow$ واضح است در $(-۱,۲)$ یک Min نسبی وجود دارد.

۲۶.گزینه ۴ نقاط اکسترمم نسبی پیوسته و مشتق‌پذیر دارای ۲ خاصیت هستند:

۱) در تابع صدق می‌کنند و ۲) طولشان، مشتق را صفر می‌کند.

$$\left.\begin{array}{l}\begin{matrix}۱\\۲\end{matrix}\xrightarrow{\text{صدق در تابع}}۲=\frac{a+b}{۱}\to a+b=۲\\ f(x)=ax+\frac{b}{x}\to f'(x)=a-\frac{b}{x^{۲}}\xrightarrow{f'(۱)=۰}a-b=۰\end{array}\right\}\to a=۱,b=۱$$

$f(x)=x+\frac{۱}{x}\to f'(x)=۱-\frac{۱}{x^{۲}}\to f''(x)=\frac{۲}{x^{۳}}\to$ در اطراف $x=۰$ جهت تقعر عوض می‌شود ولی چون در دامنه‌ی تعریف تابع قرار ندارد نقطه‌ی عطف نمی‌باشد.

۲۷.گزینه ۳

کافی است مقادیر تابع را به ازای ابتدا و انتهای بازه و طول نقاط بحرانی بدست آورده و با هم مقایسه کنیم.

$$f'(x)=\frac{(۲x-۳)(x^{۲}+۳)-۲x(x^{۲}-۳x)}{(x^{۲}+۳)^{۲}}=۰\to ۲x^{۳}+۶x-۳x^{۲}-۹-۲x^{۳}+۶x^{۲}=۰$$

$$\to ۳x^{۲}+۶x-۹=۰\xrightarrow{a+b+c=۰}\begin{cases}x=۱\\ x=\frac{c}{a}=-۳\end{cases}$$ (در بازه قرار ندارد) غ ق ق

$$f(-۱)=۱,\ f(۱)=-\frac{۱}{۲},\ f(۲)=-\frac{۲}{۷}$$

کمترین مقدار تابع برابر $-\frac{۱}{۲}$ می‌باشد.

۲۸.گزینه ۲

$$y=xe^{-x}\to y'=e^{-x}-xe^{-x}=(۱-x)e^{-x}=۰\to x=۱$$

حال به کمک آزمون مشتق اول، Max یا Min بودن آن را تعیین می‌کنیم.

x	$-\infty$		۱		$+\infty$
y'		$+$	۰	$-$	
y		↗	$\frac{۱}{e}$ Max	↘	

۲۹.گزینه ۱

$$f(x)=۲x+x^{\frac{۱}{۳}}\to f'(x)=۲+\frac{۱}{۳}x^{-\frac{۲}{۳}}\to f''(x)=-\frac{۲}{۹}x^{-\frac{۵}{۳}}=\frac{-۲}{۹\sqrt[۳]{x^{۵}}}$$

y'' صفر نمی‌شود و به ازای $x=۰$, y'' وجود ندارد.

x	$-\infty$		۰		$+\infty$
y″		+	‖	−	
y		$\cup$	‖	$\cap$	

$\Rightarrow$ با توجه به جدول در بازه‌ی $(-۳,۳)$ ، ابتدا تقعر رو به بالا و سپس تقعر رو به پایین است.

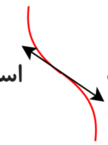
۳۰.گزینه ۲

طول نقطه‌ی عطف: $f(x)=-x^3-x+1 \to f'(x)=-3x^2-1 \to f''(x)=-6x=0 \to x=0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y''		$+$	0	$-$	
y		$\cup$		$\cap$	

$\Longrightarrow$ قبل از نقطه‌ی عطف تقعر رو به بالا و بعد از آن تقعر رو به پایین است.

و در ضمن $f'(0)=-1$ می‌باشد یعنی شیب خط مماس در نقطه‌ی عطف، منفی است پس نمودار تابع در اطراف نقطه‌ی عطف به

صورت  است.

۳۱.گزینه ۲

$$y=Ln(2+\cos x) \to y'=\frac{-\sin x}{2+\cos x} \to y''=\frac{-\cos x(2+\cos x)-(-\sin x)(-\sin x)}{(2+\cos x)^2}$$

$$=\frac{-2\cos x-\cos^2 x-\sin^2 x}{(2+\cos x)^2}=\frac{-2\cos x-(\cos^2 x+\sin^2 x)}{(2+\cos x)^2}=\frac{-2\cos x-1}{(2+\cos x)^2}=0$$

$$\to \cos x=-\frac{1}{2}=\cos(\pi-\frac{\pi}{3})=\cos\frac{2\pi}{3} \to \begin{cases} x=2k\pi+\alpha=2k\pi+\frac{2\pi}{3} \xrightarrow{k=0} x=\frac{2\pi}{3} \\ x=2k\pi-\alpha=2k\pi-\frac{2\pi}{3} \xrightarrow{k=1} x=\frac{4\pi}{3} \end{cases}$$

در $x=\frac{2\pi}{3}$ و $x=\frac{4\pi}{3}$ مشتق دوم تغییر علامت می‌دهد (هر دو x بدست آمده ریشه‌ی ساده y'' می‌باشند) و در نتیجه تقعر تابع تغییر می‌کند.

۳۲.گزینه ۴

کافی است مقادیر تابع را به ازای ابتدا و انتهای بازه و طول نقاط بحرانی بدست آورده و با هم مقایسه کنیم.

$$y=x+\frac{4}{x+1} \to y'=1-\frac{4}{(x+1)^2}=0 \to 1=\frac{4}{(x+1)^2} \to (x+1)^2=4$$

$$\to \begin{cases} x+1=2 \to x=1 \\ x+1=-2 \to x=-3 \end{cases}$$ غ ق ق(در بازه قرار ندارد)

$f(0)=4\ ,\ f(1)=3\ ,\ f(2)=\frac{10}{3} \to$ مطلق $Max=4$

۳۳.گزینه ۴

$$f(x)=x^4+x^3-3ax^2+5 \to f'(x)=4x^3+3x^2-6ax$$
$$\to f''(x)=12x^2+6x-6a=0 \to 2x^2+x-a=0$$

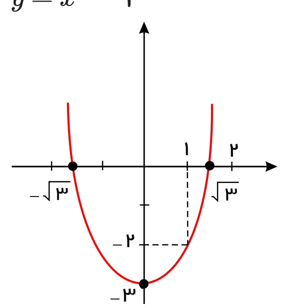
برای این که تابع f دارای دو نقطه‌ی عطف متمایز باشد معادله‌ی $f''(x)=0$ باید دارای دو ریشه‌ی متمایز باشد یعنی $\Delta>0$ باشد.

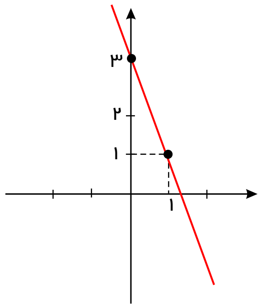
$$\Delta>0 \to b^2-4ac>0 \to 1+8a>0 \to 8a>-1 \to a>-\frac{1}{8}$$

۳۴.گزینه ۲ برای حل این تست از رسم شکل کمک می‌گیریم.

$y=3-2x \to A\begin{vmatrix}1\\1\end{vmatrix}\ ,\ B\begin{vmatrix}0\\3\end{vmatrix}$

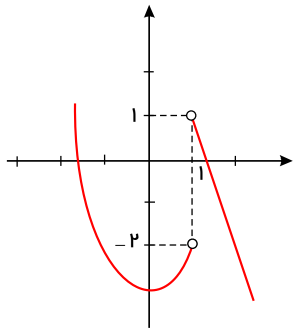
$y=x^2-3$





۳
۲
۱
۱

از ترکیب این دو شکل، شکل زیر حاصل می گردد.



دقت کنید اگر $a \geq ۱$ باشد در این صورت $x=۱$ طول Max نسبی است و اگر $a<-۲$ باشد در این صورت $x=۱$ طول Min نسبی است بنابراین a نمی‌تواند سه مقدار صحیح -۲ و -۱ و ۰ را قبول کند.

۳۵.گزینه ۳ باتوجه به صورت سوال، $x=۴$ طول نقطه‌ی عطف تابع است.

$$x_{\text{عطف}} = \frac{-b}{۳a} \to ۴ = \frac{-(a^۲+۳)}{۳(\frac{-۱}{۳}a)} \to ۴ = \frac{a^۲+۳}{a} \to a^۲-۴a+۳=۰ \xrightarrow{\text{جمع ضرایب}=۰} \begin{cases} a=۱ \\ a=\frac{c}{a}=۳ \end{cases}$$

چون در صورت سوال گفته شده است اول تقعر رو به بالا و سپس رو به پائین است باتوجه به شکل‌های تابع درجه‌ی سوم باید ضریب $x^۳$ ، منفی باشد بنابراین هر دو جواب قابل قبول هستند.

۳۶.گزینه ۲

می‌دانیم: $\boxed{y=e^u \to y'=u'e^u}$

کافی است از تابع داده شده دو بار مشتق بگیریم.

$$y=e^{۳x-x^۲} \to y'=(۳-۲x)\cdot e^{۳x-x^۲} \to y''=-۲e^{۳x-x^۲}+(۳-۲x)e^{۳x-x^۲}\cdot(۳-۲x)$$
$$=\underbrace{e^{۳x-x^۲}}_{+}(-۲+(۳-۲x)^۲)=۰ \to (۳-۲x)^۲=۲$$

$$\to \begin{cases} ۳-۲x=\sqrt{۲} \to x_۱=\frac{۳-\sqrt{۲}}{۲} \\ ۳-۲x=-\sqrt{۲} \to x_۲=\frac{۳+\sqrt{۲}}{۲} \end{cases} \to x_۱+x_۲=\frac{۳-\sqrt{۲}}{۲}+\frac{۳+\sqrt{۲}}{۲}=\frac{۶}{۲}=۳$$

۳۷.گزینه ۳

$$f(x)=\frac{x^۳+x^۲}{x^۲+۱-۲x+۱}=\frac{x^۳+x^۲}{x^۲-۲x+۲}$$

برای پیدا کردن مجانب مایل، کافی است صورت را بر مخرج تقسیم کنیم.

$$\begin{array}{l|l} x^۳+x^۲ & x^۲-۲x+۲ \\ \cline{2-2} & x+۳ \\ \underline{-x^۳+۲x^۲-۲x} & \\ ۳x^۲-۲x & \\ \underline{-۳x^۲+۶x-۶} & \\ ۴x-۶ & \end{array}$$

مجانب مایل : $\to y=x+۳$

دقت کنید ریشه‌ی باقی‌مانده، طول نقطه‌ی برخورد مجانب مایل با تابع است.

$$۴x-۶=۰ \to x=\frac{۶}{۴}=۱/۵$$

۳۸.گزینه ۲ ابتدا باید با دو بار مشتق گیری، طول نقطه‌ی عطف تابع را بدست آوریم.

$$y' = \frac{۵}{۳}x^{\frac{۲}{۳}} - \frac{۱۰}{۳}x^{-\frac{۱}{۳}} \to y'' = \frac{۱۰}{۹}x^{-\frac{۱}{۳}} + \frac{۱۰}{۹}x^{-\frac{۴}{۳}} = \frac{۱۰}{۹}(x^{-\frac{۱}{۳}} + x^{-\frac{۴}{۳}})$$
$$= \frac{۱۰}{۹}(\frac{۱}{\sqrt[۳]{x}} + \frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۴}}) = \frac{۱۰}{۹}(\frac{۱}{\sqrt[۳]{x}} + \frac{۱}{x\sqrt[۳]{x}}) = \frac{۱۰}{۹}(\frac{x+۱}{x\sqrt[۳]{x}})$$

به ازای $x = -۱$ ، y'' برابر صفر است و به ازای $x = ۰$ ، y'' وجود ندارد.

x	$-\infty$	-۱		۰		$+\infty$
y''	$-$		$+$	$\|\|$	$+$	
y	$\cap$		$\cup$		$\cup$	

از روی جدول، واضح است $x = -۱$ طول نقطه‌ی عطف تابع است حال، کافی است مقدار مشتق را به ازای $x = -۱$ حساب کنیم.

$$y' = \frac{۵}{۳}\sqrt[۳]{x^۲} - \frac{۱۰}{۳\sqrt[۳]{x}} \to y'(-۱) = \frac{۵}{۳} + \frac{۱۰}{۳} = \frac{۱۵}{۳} = ۵$$

۳۹.گزینه ۱

$$f'(x) = ۱ + \cos x \to f'(\pi) = ۱ - ۱ = ۰ \to \text{مماس افقی}$$
$$f''(x) = -\sin x \to f''(\pi) = ۰$$

در اطراف $x = \pi$، مشتق دوم را تعیین علامت می‌کنیم.

x	ناحیه ی دوم $(\sin x > ۰)$	π	ناحیه ی سوم $(\sin x < ۰)$
f''	$-$	۰	$+$

بنابراین در $x = \pi$ ، ابتدا تقعر رو به پائین و سپس تقعر رو به بالا می‌باشد.

البته توجه کنید چون مشتق تابع یعنی $(۱ + \cos x)$ همواره بزرگتر مساوی صفر است بنابراین تابع صعودی است و گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

۴۰.گزینه ۴ باتوجه به شکل، مشخص است که طول نقطه‌ی عطف این تابع، منفی است.

$$x_{\text{عطف}} = \frac{-b}{۳a} < ۰ \to \frac{-b}{-۶} < ۰ \to \frac{b}{۶} < ۰ \to b < ۰ \to \text{گزینه‌ی ۳ یا ۴ صحیح است}$$

این شکل تابع درجه سوم، حالتی است که مشتق تابع ریشه‌ی حقیقی ندارد.

$$y' = -۶x^۲ + ۲bx + c \xrightarrow{\Delta < ۰} b^۲ - ۴ac < ۰ \to \underbrace{۴b^۲}_{+} + ۲۴c < ۰$$

واضح است که c باید منفی باشد.

۴۱.گزینه ۲ نقطه‌ی $A\left|\begin{matrix}۱\\۱\end{matrix}\right.$ محل برخورد دو مجانب افقی و قائم تابع است بنابراین $x = ۱$ مجانب قائم و $y = ۱$ مجانب افقی تابع می‌باشند.

$$\text{مجانب قائم}: x = ۱ \xrightarrow{\text{ریشه‌ی مخرج است}} ۱ + c - ۳ = ۰ \to c = ۲$$
$$\text{مجانب افقی}: y = ۱ \to \lim_{x\to\pm\infty} \frac{ax^۲}{x^۲} = a = ۱ \to a = ۱$$

هم چنین مشتق تابع در $x = -۱$ برابر صفر است.

$$f(x) = \frac{x^۲ + bx}{x^۲ + ۲x - ۳} \to f'(x) = \frac{(۲x + b)(x^۲ + ۲x - ۳) - (۲x + ۲)(x^۲ + bx)}{(x^۲ + ۲x - ۳)^۲}$$
$$\xrightarrow{f'(-۱) = ۰} (-۲ + b)(-۴) - ۰ = ۰ \to ۸ - ۴b = ۰ \to b = ۲$$

بنابراین تابع به صورت $f(x) = \dfrac{x^۲ + ۲x}{x^۲ + ۲x - ۳}$ در می‌آید بنابراین داریم:

$$f(-۴) = \frac{۱۶ - ۸}{۱۶ - ۸ - ۳} = \frac{۸}{۵}$$

۴۲.گزینه ۲ کافی‌است از تابع، مشتق گرفته و بزرگتر از صفر قرار دهیم.

$$y = x\cdot e^{x-x^2} \to y' = e^{x-x^2} + (1-2x)(x)e^{x-x^2} = \underbrace{e^{x-x^2}}_{+}(1+x-2x^2) > 0 \to -2x^2+x+1>0$$

$$\to \begin{array}{c|ccccccc} x & -\infty & & -\frac{1}{2} & & 1 & & +\infty \\ \hline y' & & - & 0 & + & 0 & - & \end{array} \to x\in\left(-\frac{1}{2},1\right)$$

۴۳.گزینه ۲ در ابتدا، ریشه‌های مشتق را بدست می‌آوریم.

$$f(x) = x^5 - \frac{20}{3}x^3 + a \to f'(x) = 5x^4 - 20x^2 = 5x^2(x^2-4) = 0 \to x=0, x=2, x=-2$$

$$\to \begin{array}{c|ccccccccc} x & -\infty & & -2 & & 0 & & 2 & & +\infty \\ \hline y' & & + & 0 & - & 0 & - & 0 & + & \\ \hline y & & \nearrow & Max & \searrow & & \searrow & Min & \nearrow & \end{array}$$

از روی جدول، مشخص می‌شود که طول نقطه‌ی Min تابع برابر ۲ می‌باشد.

$$Min \to |^{2}_{21} \xrightarrow{\text{صدق در تابع}} 21 = 32 - \frac{160}{3} + a \to a = \frac{1}{3}$$

از طرفی طول نقطه‌ی Max تابع برابر -۲ می‌باشد. این طول را در تابع قرار داده تا عرض Max بدست آید.

$$y_{Max} = (-2)^5 - \frac{20}{3}(-2)^3 + \frac{1}{3} = -32 + \frac{160}{3} + \frac{1}{3} = \frac{65}{3} \to Max\Big|^{-2}_{\frac{65}{3}}$$

واضح است که نقطه‌ی Max در ناحیه‌ی دوم قرار دارد.

۴۴.گزینه ۲ مجانب قائم در ابتدای بازه است یعنی $x=-1$ مجانب قائم تابع است.

$$\text{مجانب قائم}: x=-1 \xrightarrow{\text{صدق در خرج}} -1+b=0 \to b=1$$

منحنی در سمت راست محور xها مماس شده است پس معادله‌ی تلاقی منحنی با خط $y=0$ باید دارای ریشه‌ی مضاعف مثبت باشد.

$$\begin{cases} y = \frac{x^2+ax+4}{x+1} \\ y=0 \end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی}} x^2+ax+4=0 \ :\text{معادله‌ی تلاقی} \xrightarrow{\text{شرط ریشه‌ی مضاعف}} \Delta = 0 \to b^2-4ac=0$$

$$\to a^2-16=0 \to \begin{cases} a=4 \xrightarrow{\text{معادله‌ی تلاقی}} x^2+4x+4=0 \to (x+2)^2=0 \to x=-2 \ \text{غ ق ق} \\ a=-4 \xrightarrow{\text{معادله‌ی تلاقی}} x^2-4x+4=0 \to (x-2)^2=0 \to x=2 \ \text{ق ق} \end{cases}$$

پس تابع به صورت $y=\dfrac{x^2-4x+4}{x+1}$ در می‌آید که برای پیدا کردن معادله‌ی مجانب مایل آن، کافی است صورت را بر مخرج تقسیم کنیم.

$$\begin{array}{r|l} x^2-4x+4 & x+1 \\ \cline{2-2} \underline{-x^2-x} & x-5 \\ -5x+4 & \\ \underline{5x+5} & \\ 9 & \end{array} \quad \to x = x-5 : \text{مجانب مایل}$$

$$\begin{cases} y=x-5 \\ x=-1 \end{cases} \xrightarrow{\text{دستگاه}} y=-6 \ \text{عرض نقطه‌ی برخورد دو مجانب}$$

۴۵.گزینه ۴

ابتدا قدر مطلق را با تعیین علامت، حذف می‌کنیم.

$$f(x)=\begin{cases}x^2+x & x\ge 0\\ -x^2-x & x<0\end{cases}\to f'(x)=\begin{cases}2x+1 & x>0\\ \text{موجود نیست} & x=0\ (\text{ریشه‌ی ساده‌ی داخل قدر مطلق})\\ -2x-1 & x<0\end{cases}$$

$$f'(x)=0\to\begin{cases}2x+1=0\to x=-\frac{1}{2}\ \text{باتوجه به آنکه } x>0 \text{ است غیر قابل قبول است}\\ -2x-1=0\to x=-\frac{1}{2}\ \text{باتوجه به آنکه } x<0 \text{ است قابل قبول است}\end{cases}$$

$$f(0)=0\ ,\ f(-\frac{1}{2})=\frac{1}{4}\ ,\ f(-2)=2\ ,\ \ f(1)=2\ \to -2+2=0$$

Min مطلق Max مطلق

۴۶.گزینه ۱ کافی است از تابع، حد در بی‌نهایت بگیریم و برای این منظور از هم ارزی و اندروالسی استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x\to\pm\infty}y=\lim_{x\to\pm\infty}(x+\sqrt{ax^2-4x})=\lim_{x\to\pm\infty}(x+\sqrt{a}|x-\frac{4}{2a}|)$$

$$x\to+\infty: y=x+\sqrt{a}x-\frac{4\sqrt{a}}{2a}\to y=(1+\sqrt{a})x-\frac{2\sqrt{a}}{a}(I)$$

$$x\to-\infty: y=x-\sqrt{a}x+\frac{4\sqrt{a}}{2a}\to y=(1-\sqrt{a})x+\frac{2\sqrt{a}}{a}(II)$$

معادله‌ی (I) نمی‌تواند نشان‌دهنده‌ی مجانب افقی باشد زیرا معادله‌ی مجانب افقی به صورت عدد $y=$ است و ضریب x، یعنی $1+\sqrt{a}$ هرگز نمی‌تواند صفر شود ولی معادله‌ی (II) اگر ضریب x صفر باشد می‌تواند مجانب افقی باشد.

$$1-\sqrt{a}=0\to a=1$$

$$a=1\xrightarrow{I}y=2x-\frac{2\sqrt{1}}{1}\to y=2x-2\ \ \text{:مجانب مایل}$$

۴۷.گزینه ۲ دامنه‌ی تعریف تابع داده شده، R می‌باشد و برای آنکه تقعر منحنی روبه‌بالا باشد کافی است از تابع، دوبار مشتق گرفته و بزرگتر از صفر قرار دهیم.

$$y=Ln(x^2+1)\to y'=\frac{2x}{x^2+1}\to y''=\frac{2(x^2+1)-2x(2x)}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{2x^2+2-4x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{-2x^2+2}{\underbrace{(x^2+1)^2}_{+}}>0\to-2x^2+2>0\to-2x^2>-2\to x^2<1$$

$$\to-1<x<1\ \text{یا}\ x\in(-1,1)\to Max(b-a)=1-(-1)=2$$

۴۸.گزینه ۴ نقطه‌ی عطف در تابع، صدق می‌کند و طولش، مشتق دوم را صفر می‌کند

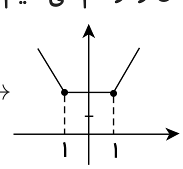
$$\left|\begin{matrix}\frac{\pi}{6}\\ 2\end{matrix}\right.\xrightarrow{\text{صدق}}2=a(\frac{1}{2})+\sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{2})+b\to 2=\frac{a}{2}+\frac{3}{2}+b\to\frac{a}{2}+b=\frac{1}{2}$$

$$\left|\begin{matrix}\frac{\pi}{6}\\ 2\end{matrix}\right.\xrightarrow{\text{طولش } y'' \text{ را صفر می‌کند}}y'=a\cos x-\sqrt{3}\sin x\to y''=-a\sin\ x-\sqrt{3}\cos x$$

$$\to 0=-a(\frac{1}{2})-\sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{2})\to\frac{a}{2}=-\frac{3}{2}\to a=-3\ ,\ -\frac{3}{2}+b=\frac{1}{2}\to b=2$$

۴۹.گزینه ۲ تابع داده شده، یک تابع گلدانی است آن را رسم می‌کنیم.

$$\begin{aligned}x<-1:&\quad y=-x-1-x+1\to y=-2x\\ -1\le x\le 1:&\quad y=x+1-x+1\to y=2\\ x>1:&\quad y=x+1+x-1\to y=2x\end{aligned}\quad\to$$



بازه‌ی $[-1, +\infty)$ بزرگ‌ترین بازه‌ای است که تابع داده شده روی آن صعودی است.

۵۰.گزینه ۱ $x=۲$، طول نقطه‌ی عطف است و در ضمن در $x=۲$ مماس افقی است یعنی شیب خط مماس در $x=۲$ صفر است یعنی $y'(۲)=۰$ است.

$$x_{\text{عطف}}=\frac{-b}{۳a}\to ۲=\frac{-a}{۳(\frac{-۱}{۳})}\to a=۲$$

$$y'=-x^۲+۲ax+b\xrightarrow{y'(۲)=۰}۰=-۴+۲(۲)(۲)+b\to b=-۴$$

بنابراین $a-b=۲-(-۴)=۶$ می‌باشد.

۵۱.گزینه ۱

$$f(x)=x^۴-۸x^۲\to f'(x)=۴x^۳-۱۶x=۴x(x^۲-۴)=۰\to\begin{cases}x=۰\\x=۲\\x=-۲\ \text{غ ق ق(در بازه قرار ندارد)}\end{cases}$$

حال باید مقادیر تابع را به ازای ابتدا و انتهای بازه و طول‌های نقاط بحرانی بدست آورید.

$$\begin{cases}f(۰)=۰\\f(۲)=-۱۶\to \text{مطلق}Min\\f(-۱)=-۷\\f(۳)=۹\to \text{مطلق}Max\end{cases}\to ۹-(-۱۶)=۲۵$$

۵۲.گزینه ۱ این تابع دارای دو مجانب قائم با طول مثبت است بنابراین مخرج باید دارای ۲ ریشه‌ی متمایز مثبت باشد.

$\Delta>۰\to b^۲-۴ac>۰\to b^۲-۴c>۰\to b^۲>۴c\to$ گزینه‌ی ۳ حذف می‌شود.

ضرب دو ریشه $>۰\to\frac{c}{a}>۰\to c>۰\to$ گزینه‌ی ۲ حذف می‌شود.

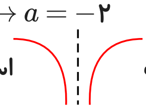
جمع دو ریشه $>۰\to-\frac{b}{a}>۰\to-b>۰\to b<۰\to$ گزینه‌ی ۴ حذف می‌شود.

۵۳.گزینه ۱ مرکز تقارن تابع درجه‌ی سوم همان نقطه‌ی عطف تابع است.

$$x_{\text{عطف}}=\frac{-b}{۳a}\to x_{\text{عطف}}=\frac{۳a}{۳}=a\xrightarrow{\text{تابع}}y_{\text{عطف}}=a^۳-۳a^۳-۱۶=-۲a^۳-۱۶$$

چون نقطه‌ی عطف روی محور طول قرار دارد پس عرض آن صفر است.

$$-۲a^۳-۱۶=۰\to ۲a^۳=-۱۶\to a^۳=-۸\to a=-۲$$

۵۴.گزینه ۴ چون شکل تابع در اطراف مجانب قائم به صورت  است بنابراین $x=۳$ ریشه‌ی مضاعف مخرج است پس داریم:

$$۲x^۲+bx+۱۸=۲(x-۳)^۲=۲x^۲-۱۲x+۱۸\to b=-۱۲$$

$x=۵$ طول نقطه‌ی Max تابع است بنابراین $f'(۵)=۰$ است.

$$f(x)=\frac{ax-۵}{۲(x-۳)^۲}\to f'(x)=\frac{۲a(x-۳)^۲-۴(x-۳)(ax-۵)}{۴(x-۳)^۴}$$

$$\xrightarrow{f'(۵)=۰}۸a-۸(۵a-۵)=۰\to ۸a-۴۰a+۴۰=۰\to-۳۲a=-۴۰\to a=\frac{۴۰}{۳۲}=\frac{۵}{۴}$$

۵۵.گزینه ۴

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(a+۳)x^۳+۴x^۲+۳}{bx^۲-۱}=۴$$

چون حاصل حد، عددی غیر صفر است، پس باید درجه‌ی صورت و مخرج برابر باشد. پس:

$$a+۳=۰\Rightarrow a=-۳$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۴x^۲+۳}{bx^۲-۱}=۴\Rightarrow\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۴x^۲}{bx^۲}=\frac{۴}{b}=۴\Rightarrow b=۱$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{۴x^۲+۳}{x^۲-۱}$$

مجانب‌های قائم: $\text{مخرج} = ۰ \Rightarrow x^۲ - ۱ = ۰ \Rightarrow x = \pm ۱$

محل برخورد مجانب‌ها، دو نقطه‌ی $A(۱,۴)$ و $B(-۱,۴)$ است. پس:

$$AB = \sqrt{(۱-(-۱))^۲ + (۴-۴)^۲} = ۲$$

۵۶.گزینه ۳ نقطه‌ی $\left| \begin{matrix} ۱ \\ \frac{۱}{e^۲} \end{matrix} \right.$ نقطه‌ی Max تابع است، پس در تابع صدق می‌کند و طولش، y' را صفر می‌کند.

$$\left| \begin{matrix} ۱ \\ \frac{۱}{e^۲} \end{matrix} \right. \xrightarrow{\text{صدق}} \frac{۱}{e^۲} = e^{a+b-۲} \to e^{-۲} = e^{a+b-۲} \to a+b-۲ = -۲ \to a+b = ۰$$

$$y = x \cdot e^{ax^۲+bx-۲} \to y' = e^{ax^۲+bx-۲} + (۲ax+b)e^{ax^۲+bx-۲} \cdot x$$

$$\to y' = e^{ax^۲+bx-۲}(۱+(۲ax+b)x) \xrightarrow{y'(۱)=۰} \underbrace{e^{a+b-۲}}_{+}(۱+۲a+b) = ۰$$

$$\to ۲a+b+۱ = ۰ \to ۲a+b = -۱$$

$$\begin{cases} a+b = ۰ \\ ۲a+b = -۱ \end{cases} \to a = -۱ \ , \ b = ۱ \to \frac{b}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

۵۷.گزینه ۳ باتوجه به شکل $\left| \begin{matrix} -\frac{۱}{۳} \\ -۲ \end{matrix} \right. A$ نقطه‌ی عطف است چون خط مماس بر منحنی در این نقطه از منحنی عبور می‌کند.

$$x_{\text{عطف}} = \frac{-b}{۳a} \to -\frac{۱}{۳} = \frac{-b}{۳a} \to a = b$$

$$\left| \begin{matrix} -\frac{۱}{۳} \\ -۲ \end{matrix} \right. \xrightarrow{\text{صدق در تابع}} -۲ = -\frac{۱}{۲۷}a + \frac{۱}{۹}b - ۴$$

$$\to ۲ = -\frac{۱}{۲۷}a + \frac{۱}{۹}b \xrightarrow{\times ۲۷} ۵۴ = -a + ۳b$$

$$\begin{cases} a = b \\ ۵۴ = -a + ۳b \end{cases} \to a = b = ۲۷ \to a+b = ۵۴$$

۵۸.گزینه ۴ برای تعین نقطه‌ی اکسترمم نسبی، ریشه یا ریشه‌های ساده‌ی مشتق را می‌یابیم.

$$f(x) = \frac{x^۲+kx+۴}{x^۲+۲x+۶} \to f'(x) = \frac{(۲x+k)(x^۲+۲x+۶) - (۲x+۲)(x^۲+kx+۴)}{(x^۲+۲x+۶)^۲}$$

$$= \frac{۲x^۳+۴x^۲+۱۲x+kx^۲+۲kx+۶k-۲x^۳-۲kx^۲-۸x-۲x^۲-۲kx-۸}{(x^۲+۲x+۶)^۲}$$

$$= \frac{۲x^۲-kx^۲+۴x+۶k+۸}{(x^۲+۲x+۶)^۲} = \frac{(۲-k)x^۲+۴x+(۶k-۸)}{(x^۲+۲x+۶)^۲}$$

چون در صورت سوال قید شده تابع فقط دارای یک اکسترمم نسبی است پس باید صورت کسر مشتق، فقط یک ریشه‌ی ساده داشته باشد یعنی صورت از درجه اول است پس $۲-k = ۰ \to k = ۲$

$$f'(x) = \frac{۴x+۴}{(x^۲+۲x+۶)^۲} = ۰ \to x = -۱ \to f(-۱) = \frac{۱-۲+۴}{۱-۲+۶} = \frac{۳}{۵} \quad \text{عرض اکسترمم}$$

۵۹.گزینه ۴ کافی است از تابع، مشتق گرفته و سپس آن را تعیین علامت کنیم.

$$y=\frac{x^{۲}-۱}{x^{۳}}\rightarrow y'=\frac{۲x(x^{۳})-۳x^{۲}(x^{۲}-۱)}{x^{۶}}=\frac{۲x^{۴}-۳x^{۴}+۳x^{۲}}{x^{۶}}=\frac{-x^{۴}+۳x^{۲}}{x^{۶}}$$

$$=\frac{x^{۲}(-x^{۲}+۳)}{x^{۶}}=\frac{۳-x^{۲}}{x^{۴}}=۰\rightarrow ۳-x^{۲}=۰\rightarrow x=\pm\sqrt{۳}$$

و به ازای $x=۰$, y' وجود ندارد.

x	$-\infty$	$-\sqrt{۳}$		۰		$\sqrt{۳}$	$+\infty$
y'	$-$	۰	$+$	‖	$+$	۰	$-$
y	↘	Min	↗	‖	↗		↘

برای پیدا کردن عرض Min کافی است که $x=-\sqrt{۳}$ را در تابع قرار دهیم.

$$x=-\sqrt{۳}\xrightarrow{\text{تابع}}y_{Min}=\frac{(-\sqrt{۳})^{۲}-۱}{(-\sqrt{۳})^{۳}}=\frac{۳-۱}{-۳\sqrt{۳}}=\frac{۲}{-۳\sqrt{۳}}\times\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}}=\frac{-۲\sqrt{۳}}{۹}$$

.۶۰ گزینه ۲ به نقاطی از درون دامنه‌ی تعریف که در آن نقاط مشتق برابر صفر است یا مشتق وجود ندارد بحرانی گویند. در ابتدا دامنه‌ی تعریف تابع داده شده را بدست می‌آوریم.

$$Df: x^{۲}+x>۰\rightarrow x(x+۱)>۰\xrightarrow{\text{تعیین علامت}}x<-۱\ \text{یا}\ x>۰\rightarrow x\in(-\infty,-۱)\cup(۰,+\infty)$$

$$f(x)=۲x-Ln(x^{۲}+x)\xrightarrow{y=Lnu\rightarrow y'=\frac{u'}{u}}f'(x)=۲-\frac{۲x+۱}{x^{۲}+x}=\frac{۲x^{۲}+۲x-۲x-۱}{x^{۲}+x}=\frac{۲x^{۲}-۱}{x^{۲}+x}$$

$$\text{صورت}=۰\rightarrow ۲x^{۲}-۱=۰\rightarrow x^{۲}=\frac{۱}{۲}\rightarrow\begin{cases}x=\frac{\sqrt{۲}}{۲} & \text{ق ق}\\ x=-\frac{\sqrt{۲}}{۲} & \text{غ ق ق (در دامنه قرار ندارد)}\end{cases}$$

$$\text{مخرج}=۰\rightarrow x^{۲}+x=۰\rightarrow x(x+۱)=۰\rightarrow\begin{cases}x=۰ & \text{غ ق ق (در دامنه قرار ندارد)}\\ x=-۱ & \text{غ ق ق (در دامنه قرار ندارد)}\end{cases}$$

بنابراین تابع داده شده یک نقطه‌ی بحرانی دارد.

.۶۱ گزینه ۲ در ابتدا دامنه‌ی تعریف تابع داده شده را بدست می‌آوریم و سپس مشتق دوم را تعیین علامت می‌کنیم.

$$y=(x^{۲}+\frac{۵}{۳})x^{\frac{۱}{۴}}=(x^{۲}+\frac{۵}{۳})\sqrt[۴]{x}\to Df=[۰,+\infty)$$

$$y=(x^{۲}+\frac{۵}{۳})x^{\frac{۱}{۴}}=x^{\frac{۹}{۴}}+\frac{۵}{۳}x^{\frac{۱}{۴}}$$

$$\to y'=\frac{۹}{۴}x^{\frac{۵}{۴}}+\frac{۵}{۱۲}x^{-\frac{۳}{۴}}\to y''=\frac{۴۵}{۱۶}x^{\frac{۱}{۴}}-\frac{۱۵}{۴۸}x^{-\frac{۷}{۴}}=\frac{۴۵}{۱۶}x^{\frac{۱}{۴}}-\frac{۵}{۱۶}x^{-\frac{۷}{۴}}$$

$$\to y''=\frac{۵}{۱۶}(۹x^{\frac{۱}{۴}}-x^{-\frac{۷}{۴}})=\frac{۵}{۱۶}(۹\sqrt[۴]{x}-\frac{۱}{\underbrace{\sqrt[۴]{x^{۷}}}_{x^{۴}\cdot x^{۳}}})=\frac{۵}{۱۶}(۹\sqrt[۴]{x}-\frac{۱}{x\sqrt[۴]{x^{۳}}})$$

$$y''=\frac{۵}{۱۶}(\frac{۹x^{۲}-۱}{x\sqrt[۴]{x^{۳}}})\to\begin{cases}\text{صورت}=۰\to\begin{cases}x=\frac{۱}{۳}\\ x=-\frac{۱}{۳} & \text{غ ق ق (در دامنه قرار ندارد)}\end{cases}\\ \text{مخرج}=۰\to x=۰\end{cases}$$

$\to$

x		۰		$\frac{۱}{۳}$		$+\infty$
y''		‖	$-$	۰	$+$	
y			$\cap$		$\cup$	

$\longrightarrow$ جهت تقعر تابع در یک نقطه تغییر می کند

۶۲.گزینه ۳ می‌دانیم: $\boxed{y=e^{u}\to y'=u'\cdot e^{u},(uv)'=u'v+v'u}$

باید فواصلی را پیدا کنیم که $y''>۰,y'>۰$ است.

$$y'=۲xe^{۱-x}+(-۱)e^{۱-x}x^{۲}=\underbrace{e^{۱-x}}_{+}(۲x-x^{۲})>۰\to x(۲-x)>۰\xrightarrow{\text{تعیین علامت}}۰<x<۲:I$$

$$y''=-e^{۱-x}(۲x-x^{۲})+(۲-۲x)e^{۱-x}=e^{۱-x}(-۲x+x^{۲}+۲-۲x)=\underbrace{e^{۱-x}}_{+}(x^{۲}-۴x+۲)=۰$$

$$\to\Delta=b^{۲}-۴ac=۱۶-۸=۸\to\begin{cases}x=\frac{۴+۲\sqrt{۲}}{۲}=۲+\sqrt{۲}\\ x=\frac{۴-۲\sqrt{۲}}{۲}=۲-\sqrt{۲}\end{cases}$$

$\to$

x	$-\infty$		$۲-\sqrt{۲}$		$۲+\sqrt{۲}$		$+\infty$
y''		$+$	۰	$-$	۰	$+$	
y		$\cup$		$\cap$		$\cup$	

$\to x<۲-\sqrt{۲}\ \cup\ x>۲+\sqrt{۲}:II$

$$I\cap II:x\in(۰,۲-\sqrt{۲})\to Max(b-a)=۲-\sqrt{۲}$$

۶۳.گزینه ۱ از تابع داده شده دو مشتق گرفته و مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$$y=\frac{a}{x^2+1}\to y'=\frac{-2ax}{(x^2+1)^2}\quad\to y''=\frac{-2a(x^2+1)^2-2(x^2+1)(2x)(-2ax)}{(x^2+1)^4}$$

$$\to y''=\frac{-2a(x^2+1)^2+8ax^2(x^2+1)}{(x^2+1)^4}=\frac{\overbrace{-2a(x^2+1)}^{\text{فاکتور}}(x^2+1-4x^2)}{(x^2+1)^4}$$

$$\to y''=\frac{-2a(1-3x^2)}{(x^2+1)^3}=0\to 1-3x^2=0\to x^2=\frac{1}{3}$$

کافی است در تابع داده شده به جای x^2 مقدار $\frac{1}{3}$ وبه جای y عدد $\frac{3}{2}$ را جایگزین کنیم.

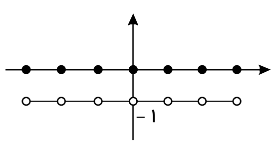
$$\frac{3}{2}=\frac{a}{\frac{1}{3}+1}\to\frac{3}{2}=\frac{3a}{4}\to 6a=12\to a=2$$

۶۴.گزینه ۲

$$f(x)=[x]\to y=f(x+f(-x))=f(x+[-x])=[x+\underbrace{[-x]}_{\text{صحیح}}]$$

$$=[x]+[-x]\to\begin{cases}x\in\mathbb{Z}\to[x]+[-x]=0\\ x\notin\mathbb{Z}\to[x]+[-x]=-1\end{cases}$$

حال، نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



باتوجه به شکل، نقاط صحیح، نقاط بحرانی از نوع مشتق ناپذیر هستند و در سایر نقاط (خط افقی) مشتق برابر صفر است پس این تابع بی‌شمار نقطه‌ی بحرانی دارد.

۶۵.گزینه ۴ از تابع دوبار مشتق گرفته و مساوی صفر قرار می‌دهیم تا طول نقاط عطف بدست آید و سپس این طول یا طول‌ها را در مشتق تابع قرار می‌دهیم تا شیب خط مماس بدست آید.

$$y=\sin x+\cos x\to y'=\cos x-\sin x=0\to y''=-\sin x-\cos x=0$$

$$\to\sin x=-\cos x\xrightarrow{\div\cos x}\tan x=-1=\tan(-\frac{\pi}{4})\xrightarrow{x=k\pi+\alpha}x=k\pi-\frac{\pi}{4}$$

$$\xrightarrow{k=1,2}x=\frac{3\pi}{4}\ ,\ \frac{7\pi}{4}\to\begin{cases}y'=\cos x-\sin x\xrightarrow{x=\frac{3\pi}{4}}y'=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}\\ y'=\cos x-\sin x\xrightarrow{x=\frac{7\pi}{4}}y'=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}\end{cases}$$

توجه کنید:

$$\cos\frac{3\pi}{4}=\cos(\pi-\frac{\pi}{4})=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ \sin\frac{3\pi}{4}=\sin(\pi-\frac{\pi}{4})=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\frac{7\pi}{4}=\cos(2\pi-\frac{\pi}{4})=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ \sin\frac{7\pi}{4}=\sin(2\pi-\frac{\pi}{4})=-\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۶۶.گزینه ۴

$$y=\cos x\to y'=-\sin x$$

حال، باید نقاطی را بیابیم که در آن نقاط مقدار y'، منفی‌ترین است برای این منظور کافی است $\sin x$ بیشترین مقدار خود یعنی یک باشد.

$$\sin x = 1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

۶۷.گزینه ۴ نقاط بحرانی نقاطی از درون دامنه‌ی تعریف هستند که در آن نقاط، مشتق برابر صفر است یا مشتق وجود ندارد. دامنه‌ی تعریف تابع داده شده برابر $Df = (-\infty, +\infty)$ است.

$$f(x) = \sqrt[5]{x^5 - 5x^4} = f'(x) = \frac{1(5x^4 - 20x^3)}{5\sqrt[5]{(x^5 - 5x^4)^4}} = \frac{5x^3(x-4)}{5\sqrt[5]{(x^4(x-5))^4}}$$

$$= \frac{x^3(x-4)}{\sqrt[5]{\underbrace{x^{16}}_{x^{15}\cdot x}(x-5)^4}} = \frac{x^3(x-4)}{x^3\sqrt[5]{x(x-5)^4}} = \frac{x-4}{\sqrt[5]{x(x-5)^4}}$$

$$\to \begin{cases} \text{صورت} = 0 \to x - 4 = 0 \to x = 4 \\ \text{مخرج} = 0 \to x(x-5)^4 = 0 \to x = 0 \ , \ x = 5 \end{cases}$$

به ازای $x = 4$ مشتق برابر صفر است و به ازای $x = 0$ و $x = 5$ مشتق وجود ندارد.

۶۸.گزینه ۲ می‌دانیم: $\boxed{y = e^u \to y' = u' \cdot e^u \ , \ (uv)' = u'v + v'u}$

$$y = e^x \cdot \sqrt[3]{x} \to y' = e^x \cdot \sqrt[3]{x} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} e^x = \frac{3x\, e^x + e^x}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$= \frac{e^x(3x+1)}{3\sqrt[3]{x^2}} = \underbrace{\frac{e^x}{3\sqrt[3]{x^2}}}_{\text{همواره مثبت}}(3x+1)$$

علامت مشتق به علامت عبارت $3x+1$ بستگی دارد به ازای $x < -\frac{1}{3}$ تابع نزولی و به ازای $x > -\frac{1}{3}$ صعودی است پس کمترین مقدار آن روی بازه‌ی $[-1, 2]$ به ازای $x = -\frac{1}{3}$ بدست می‌آید.

۶۹.گزینه ۱ می‌دانیم: $\boxed{y = Lnu \to y' = \frac{u'}{u} \ , \ (uv)' = u'v + v'u \ , \ Lna = b \to a = e^b}$

از تابع داده شده مشتق گرفته و مساوی صفر قرار می‌دهیم و آن را تعیین علامت می‌کنیم و توجه کنید که دامنه‌ی تعریف تابع داده شده $Df = (0, +\infty)$ است.

$$f(x) = xLn2x \to f'(x) = Ln2x + \frac{2}{2x}x = 1 + Ln2x = 0 \to Ln2x = -1$$

$$\xrightarrow{\text{تعریف}} 2x = e^{-1} \to 2x = \frac{1}{e} \to x = \frac{1}{2e} \to$$

x	0		$\frac{1}{2e}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y		$\searrow$	Min	$\nearrow$	

البته از آزمون مشتق دوم نیز می‌توانید استفاده کنید بدین صورت که ریشه‌ی مشتق را در y'' قرار دهید اگر جواب مثبت شد طول نقطه‌ی Min و اگر جواب منفی شد طول نقطه‌ی Max است و اگر جواب صفر شد آزمون مشتق اول بی نتیجه است.

$$y' = 1 + Ln2x \to y'' = \frac{2}{2x} \xrightarrow{x=\frac{1}{2e}} y'' = \frac{2}{\frac{2}{2e}} = 2e > 0 \to$$ $x = \frac{1}{2e}$ طول نقطه‌ی Min است.

۷۰.گزینه ۲ کافی است فواصلی را بیابیم که در آن $y'' > 0$ است.

$$y = 2x^2(12 - x^2) = 24x^2 - 2x^4 \to y' = 48x - 8x^3 \to y'' = 48 - 24x^2 > 0$$

$$\to 24x^2 < 48 \to x^2 < 2 \to -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \to x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

پس بیشترین مقدار $b - a$ برابر $\sqrt{2} - (-\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$ است.

۷۱.گزینه ۳ از تابع داده شده دو بار مشتق می‌گیریم.

$f(x)=\sin ۲x+۴\cos x \to f'(x)=۲\cos ۲x-۴\sin x \to f''(x)=-۴\sin ۲x-۴\cos x$

$\to f''(x)=-۴(۲\sin x\cos x)-۴\cos x=-۸\sin x\cos x-۴\cos x$

$\to f''(x)=-۴\cos x(۲\sin x+۱)=۰$

$$\to \begin{cases} \cos x=۰ \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x=k\pi+\dfrac{\pi}{۲} \\ ۲\sin x+۱=۰ \to \sin x=\dfrac{-۱}{۲}=\sin(\dfrac{-\pi}{۶}) \to \begin{cases} x=۲k\pi+\alpha \to x=۲k\pi-\dfrac{\pi}{۶} \\ x=۲k\pi+\pi-\alpha \to x=۲k\pi+\dfrac{۷\pi}{۶} \end{cases} \end{cases}$$

اگر در $x=k\pi+\dfrac{\pi}{۲}$ به جای k عدد صفر قرار دهیم $x=\dfrac{\pi}{۲}$ بدست می‌آید.

البته توجه کنید که پس از بدست آوردن $f''(x)$ و مشاهده‌ی گزینه‌ها واضح است که $x=\dfrac{\pi}{۲}$ طول نقطه‌ی عطف است.

۷۲.گزینه ۱ طول نقطه‌ی مورد نظر را a در نظر بگیرید در سمت چپ این نقطه، تقعر رو به بالا و در سمت راست آن تقعر رو به پایین است بنابراین کافی است از تابع داده شده دو بار مشتق بگیرید و آن را تعیین علامت کنید.

$y=۳x^۵-۱۰x^۳+۳ \to y'=۱۵x^۴-۳۰x^۲ \to y''=۶۰x^۳-۶۰x=۶۰x(x^۲-۱)=۰$

$\to x=۰\ ,\ x=۱\ ,\ x=-۱ \to$

x	$-\infty$		-۱		۰		۱		$+\infty$
y''		$-$	۰	$+$	۰	$-$	۰	$+$	
y		$\cap$		$\cup$		$\cap$		$\cup$	

بنابراین طول نقطه‌ی مورد نظر $x=۰$ است.

۷۳.گزینه ۳ ابتدا صورت را بر مخرج تقسیم می‌کنیم و سپس از هم‌ارزی واندروالسی استفاده می‌کنیم.

$$\begin{array}{r|l} x^۳+۴x^۲ & x+۲ \\ \underline{-x^۳-۲x^۲} & \overline{x^۲+۲x-۴} \\ ۲x^۲ & \\ \underline{-۲x^۲-۴x} & \\ -۴x & \\ \underline{۴x+۸} & \\ ۸ & \end{array} \qquad \Rightarrow \quad y=\sqrt{x^۲+۲x-۴+\frac{۸}{x+۲}}$$

واضح است که $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{۸}{x+۲}=۰$ است حال بر طبق هم‌ارزی واندروالسی داریم:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{x^۲+۲x-۴}=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{۱}\,|x+\frac{۲}{۱\times ۲}|=\lim_{x\to\pm\infty}|x+۱|$$

$$\begin{cases} x=+\infty : y=x+۱ \\ x=-\infty : y=-x-۱ \quad \xrightarrow{y=-x+۲m} ۲m=-۱ \to m=\dfrac{-۱}{۲} \end{cases}$$

به هم‌ارزی واندروالسی با شرط $a>۰$ توجه کنید:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{ax^۲+bx+c}\sim\sqrt{a}\left|x+\frac{b}{۲a}\right|$$

۷۴.گزینه ۴

$$y = ax + ۲ + \frac{bx^۲}{x - ۱} \to y = \frac{(ax + ۲)(x - ۱) + bx^۲}{x - ۱}$$

$$\rightarrow y=\frac{ax^{۲}-ax+۲x-۲+bx^{۲}}{x-۱}\rightarrow y=\frac{(a+b)x^{۲}+(۲-a)x-۲}{x-۱}$$

تابع هموگرافیک به صورت $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq ۰ \cdot \frac{a}{c}\neq\frac{b}{d})$ است بنابراین ضریب $x^{۲}$ در صورت باید صفر باشد یعنی $a+b=۰$ است و تابع به صورت $y=\frac{(۲-a)x-۲}{x-۱}$ در می‌آید. محل برخورد مجانب‌ها در تابع هموگرافیک $W\left|\begin{matrix}-\frac{d}{c}\\ \frac{a}{c}\end{matrix}\right.$ است.

$$W\left|\begin{matrix}-\frac{d}{c}\\ \frac{a}{c}\end{matrix}\right.\rightarrow W\left|\begin{matrix}۱\\ ۲-a\end{matrix}\right.\xrightarrow[\text{نیمساز ناحیه‌ی چهارم}]{y=-x\ \text{صدق در}}۲-a=-۱\rightarrow a=۳\xrightarrow{a+b=۰}b=-۳$$

۷۵.گزینه ۱ $x=۱$ مجانب قائم تابع است بنابراین مخرج کسر به ازای $x=۱$ صفر می‌شود.

$$x=۱\xrightarrow{\text{صدق در مخرج}}۲(۱)+c=۰\rightarrow c=-۲$$

تابع از نقطه‌ی $\left|\begin{matrix}۰\\ ۴\end{matrix}\right.$ می‌گذرد بنابراین این نقطه در تابع صدق می‌کند.

$$\left|\begin{matrix}۰\\ ۴\end{matrix}\right.\xrightarrow{\text{صدق}}۴=\frac{۰+b}{۰-۲}\rightarrow b=-۸$$

از طرفی نقطه‌ی $\left|\begin{matrix}۱\\ ۴\end{matrix}\right.$ روی مجانب مایل تابع است پس کافی است صورت را بر مخرج تقسیم کرده و معادله‌ی مجانب مایل را بدست آورده و سپس نقطه‌ی $\left|\begin{matrix}۱\\ ۴\end{matrix}\right.$ را در معادله‌ی مجانب مایل صدق دهیم.

$$\begin{array}{l|l} ax^{۲}+b & ۲x-۲\\ \underline{-ax^{۲}+ax} & \frac{a}{۲}x+\frac{a}{۲}\\ ax+b & \\ \underline{-ax+a} & \\ a+b & \end{array}\Rightarrow\ y=\frac{a}{۲}x+\frac{a}{۲}\xrightarrow{\left|\begin{smallmatrix}۱\\ ۴\end{smallmatrix}\right.}۴=\frac{a}{۲}(۱)+\frac{a}{۲}\rightarrow a=۴$$

بنابراین تابع داده شده به صورت $f(x)=\frac{۴x^{۲}-۸}{۲x-۲}$ است.

$$f(x)=۰\rightarrow\frac{۴x^{۲}-۸}{۲x-۲}=۰\rightarrow ۴x^{۲}=۸\rightarrow x^{۲}=۲\rightarrow x=\pm\sqrt{۲}$$

۷۶.گزینه ۳ از روی شکل، واضح است که $x=۰$ مجانب قائم تابع است پس $x=۰$ در مخرج تابع صدق می‌کند، بنابراین $b=۰$ است. از تابع، حد در بی‌نهایت می‌گیریم تا معادله‌ی مجانب افقی تابع بدست آید.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^{۳}+x^{۲}+ax+۱}{-x^{۳}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^{۳}}{-x^{۳}}=-۱\rightarrow y=-۱$$

بنابراین عرض Min تابع برابر $y=-۱$ است پس کافی است که آن را با معادله‌ی منحنی تلاقی دهیم و معادله‌ی تلاقی ریشه‌ی مضاعف منفی دارد.

$$\begin{cases}y=\frac{x^{۳}+x^{۲}+ax+۱}{-x^{۳}}\\ y=-۱\end{cases}\xrightarrow{\text{تلاقی}}\frac{x^{۳}+x^{۲}+ax+۱}{-x^{۳}}=-۱\rightarrow x^{۳}+x^{۲}+ax+۱=x^{۳}$$

$\rightarrow x^{۲}+ax+۱=۰$: معادله‌ی تلاقی

شرط ریشه‌ی مضاعف : $\Delta=۰\rightarrow b^{۲}-۴ac=۰\rightarrow a^{۲}-۴=۰\rightarrow a^{۲}=۴\rightarrow a=۲\ ,\ a=-۲$

$$\rightarrow\begin{cases}a=۲\xrightarrow{\text{معادله‌ی تلاقی}}x^{۲}+۲x+۱=۰\rightarrow(x+۱)^{۲}=۰\rightarrow x=-۱\end{cases}$$

معادله‌ی تلاقی

پس $a+b=2$ است.

۷۷.گزینه ۲

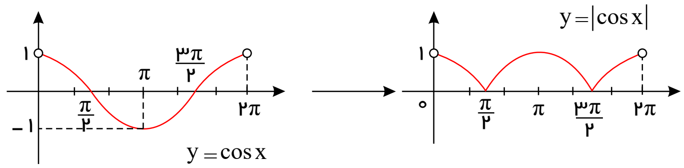
$$y=\frac{x^{۲}+x+۱}{x}=x+۱+\frac{۱}{x}\rightarrow y'=۱-\frac{۱}{x^{۲}}=\frac{x^{۲}-۱}{x^{۲}}=۰\rightarrow x=۱\ ,\ \ x=-۱$$

به ازای $x=۰$، مشتق وجود ندارد.

x	$-\infty$	-۱		۰		۱	$+\infty$
y'	+	۰	−	‖	−	۰	+
y	↗	-۱ Max	↘	‖	↘	۳	↗

بنابراین تابع در $x<۰$، ماکسیمی برابر -۱ دارد.

۷۸.گزینه ۲ به نقاطی از درون دامنه‌ی تعریف که به ازای آنها مشتق برابر صفر است و یا مشتق وجود ندارد نقاط بحرانی گویند. این سؤال را به کمک رسم شکل حل می‌کنیم.



تابع در $x=\frac{\pi}{۲}$ و $x=\frac{۳\pi}{۲}$ مشتق‌ناپذیر است (نقاط زاویه‌دار) و در $x=\pi$ مشتق برابر صفر است. بنابراین تابع دارای سه نقطه‌ی بحرانی است.

۷۹.گزینه ۳ می‌دانیم: $\boxed{y=Lnu\rightarrow y'=\frac{u'}{u}\ \ ,\ \ (uv)'=u'v+v'u}$

باید بازه‌ای را پیدا کنیم که در آن بازه، مشتق دوم منفی است.

$$f(x)=(۲x+k)Ln(x-۱)\rightarrow f'(x)=۲Ln(x-۱)+\frac{۱}{x-۱}(۲x+k)=۲Ln(x-۱)+\frac{۲x+k}{x-۱}$$

$$\rightarrow f''(x)=\frac{۲}{x-۱}+\frac{۲(x-۱)-۱(۲x+k)}{(x-۱)^{۲}}=\frac{۲}{x-۱}+\frac{-۲-k}{(x-۱)^{۲}}=\frac{۲(x-۱)-۲-k}{(x-۱)^{۲}}$$

$$=\frac{۲x-۴-k}{\underbrace{(x-۱)^{۲}}_{+}}<۰\rightarrow ۲x-۴-k<۰\rightarrow ۲x<k+۴\rightarrow x<\frac{k+۴}{۲}$$

از طرفی عبارت جلوی Ln باید مثبت باشد یعنی: $x-۱>۰\ \rightarrow x>۱$. از اشتراک دو جواب به دست آمده به $۱<x<\frac{k+۴}{۲}$

یا $x\in(۱,\frac{k+۴}{۲})$ می‌رسیم.

$$\text{طول بازه}=۶\rightarrow\frac{k+۴}{۲}-۱=۶\rightarrow\frac{k+۴}{۲}=۷\rightarrow k+۴=۱۴\rightarrow k=۱۰$$

۸۰.گزینه ۱ تابع داده شده دارای دو مجانب افقی است و تابع، آن مجانب افقی را که $x\rightarrow-\infty$ روی محور عرض قطع می‌کند.

مجانب افقی: $\lim\limits_{x\rightarrow-\infty}\frac{ax-۲}{\sqrt{x^{۲}+b}}\overset{\text{پر توان}}{=\!=}\lim\limits_{x\rightarrow-\infty}\frac{ax}{\sqrt{x^{۲}}}=\lim\limits_{x\rightarrow-\infty}\frac{ax}{|x|}=\lim\limits_{x\rightarrow-\infty}\frac{ax}{-x}=-a\rightarrow y=-a$

$\left|\begin{array}{l}۰\\-a\end{array}\right.\xrightarrow{\text{صدق در تابع}}-a=\frac{-۲}{\sqrt{b}}\rightarrow a=\frac{۲}{\sqrt{b}}\rightarrow$ a باید مثبت باشند بنابراین گزینه‌های دوم و چهارم حذف می‌شوند.

$x=-۲$ طول اکسترمم نسبی تابع است بنابراین مشتق تابع به ازای $x=-۲$ برابر صفر است.

$$f'(x)=\frac{a\sqrt{x^{۲}+b}-\dfrac{۲x}{۲\sqrt{x^{۲}+b}}(ax-۲)}{x^{۲}+b}=\frac{\dfrac{a(x^{۲}+b)-x(ax-۲)}{\sqrt{x^{۲}+b}}}{x^{۲}+b}=\frac{ax^{۲}+ab-ax^{۲}+۲x}{(x^{۲}+b)\sqrt{x^{۲}+b}}$$

$$\xrightarrow{f'(-۲)=۰} ab-۴=۰\rightarrow ab=۴\ \xrightarrow[\text{مشاهده‌ی گزینه‌ها}]{a=\frac{۲}{\sqrt{b}}} a=۱\ ,\ b=۴$$

۸۱.گزینه ۲

$$y=\frac{x^{۳}}{۶}-mx^{۲}+x\rightarrow y'=\frac{۱}{۲}x^{۲}-۲mx+۱$$

اگر مشتق دارای ریشه‌ی مضاعف باشد $(\Delta=۰)$ و یا مشتق دارای ریشه‌ی حقیقی نباشد $(\Delta<۰)$ در این صورت تابع فاقد اکسترمم است.

$$\Delta\leq ۰\rightarrow b^{۲}-۴ac\leq ۰\rightarrow ۴m^{۲}-۲\leq ۰\rightarrow ۴m^{۲}\leq ۲\rightarrow m^{۲}\leq\frac{۱}{۲}\rightarrow -\frac{\sqrt{۲}}{۲}\leq m\leq\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

طول نقطه‌ی عطف در تابع درجه‌ی سوم $(y=ax^{۳}+bx^{۲}+cx+d)$ از رابطه‌ی $x_{\text{عطف}}=\frac{-b}{۳a}$ بدست می‌آید.

$$x_{\text{عطف}}=\frac{-b}{۳a}=\frac{m}{۳(\frac{۱}{۶})}=۲m\xrightarrow{-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\leq m\leq\frac{\sqrt{۲}}{۲}}-\sqrt{۲}\leq ۲m\leq\sqrt{۲}$$

بنابراین حداقل طول نقطه‌ی عطف برابر $-\sqrt{۲}$ است.

۸۲.گزینه ۱ می‌دانیم: $\boxed{(Lnu)'=\frac{u'}{u}\ ,\ (uv)'=u'v+v'u\ ,\ Lna=b\rightarrow a=e^{b}\ ,\ Lna^{n}=nLna}$

نقطه‌ی $\left|\begin{matrix}۰/۵\\ ۰\end{matrix}\right.$ روی تابع قرار دارد پس در تابع صدق می‌کند.

$$\left|\begin{matrix}۰/۵\\ ۰\end{matrix}\right.\xrightarrow{\text{صدق}}۰=\frac{\frac{۱}{۲}Ln(\frac{۱}{۲}a)}{b}\rightarrow\frac{۱}{۲}Ln(\frac{۱}{۲}a)=۰\rightarrow Ln(\frac{۱}{۲}a)=۰\xrightarrow{Ln۱=۰}\frac{۱}{۲}a=۱\rightarrow a=۲$$

اکنون از تابع، مشتق می‌گیریم تا طول نقطه‌ی Min را بدست آوریم.

$$f(x)=\frac{xLn۲x}{b}=\frac{۱}{b}(xLn۲x)\rightarrow f'(x)=\frac{۱}{b}(Ln۲x+\frac{۲}{۲x}x)=۰$$

$$\rightarrow Ln۲x+۱=۰\rightarrow Ln۲x=-۱\xrightarrow{\text{تعریف}}۲x=e^{-۱}\rightarrow ۲x=\frac{۱}{e}\rightarrow x=\frac{۱}{۲e}$$

بنابراین مختصات نقطه‌ی Min تابع به صورت $\left|\begin{matrix}\frac{۱}{۲e}\\ -\frac{۱}{۲}\end{matrix}\right.$ است که در تابع صدق می‌کند.

$$f(x)=\frac{۱}{b}(xLn۲x)\xrightarrow{\text{صدق}\left|\begin{matrix}\frac{۱}{۲e}\\ -\frac{۱}{۲}\end{matrix}\right.}-\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{b}(\frac{۱}{۲e}Ln\frac{۱}{e})\rightarrow -\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{b}(\frac{۱}{۲e}Lne^{-۱})$$

$$\rightarrow -\frac{۱}{۲}=\frac{-۱}{۲be}\rightarrow ۲be=۲\rightarrow b=\frac{۱}{e}$$

۸۳.گزینه ۲ با توجه به شکل داده شده نقطه‌ی $A\left|\begin{matrix}-۲\\-۱۶\end{matrix}\right.$ نقطه‌ی عطف تابع می‌باشد که در تابع صدق می‌کند و طولش، مشتق دوم را صفر می‌کند.

$$A\left|\begin{matrix}-۲\\-۱۶\end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{صدق}} -۱۶ = ۱۶a - ۸b \to ۲a - b = -۲$$

$$A\left|\begin{matrix}-۲\\-۱۶\end{matrix}\right. \xrightarrow{f''(-۲)=۰} f'(x) = ۴ax^۳ + ۳bx^۲ \to f''(x) = ۱۲ax^۲ + ۶bx \to ۴۸a - ۱۲b = ۰$$

$$\to ۴a - b = ۰$$

$$\begin{cases} ۲a - b = -۲ \\ ۴a - b = ۰ \end{cases} \to a = ۱\ ,\ b = ۴ \to a \times b = ۴$$

۸۴.گزینه ۱ نقاط بحرانی نقاطی از درون دامنه‌ی تعریف هستند که به ازای آن‌ها مشتق برابر صفر است یا مشتق وجود ندارد. توجه کنید دامنه‌ی تعریف تابع داده شده $Df = R - \{۰\}$ است.

$$f(x) = \frac{۱}{x} + \frac{۱}{۲}x^۲ \to f'(x) = \frac{-۱}{x^۲} + x = \frac{-۱ + x^۳}{x^۲} = \frac{x^۳ - ۱}{x^۲}$$

$$\to \begin{cases} \text{صورت} = ۰ \to x = ۱ : \text{بحرانی} \\ \text{مخرج} = ۰ \to x^۲ = ۰ \to x = ۰ \to \text{بحرانی نمی‌باشد زیرا در دامنه‌ی تعریف تابع قرار ندارد} \end{cases}$$

→

x	$-\infty$		۰		۱		$+\infty$
y'		$-$	ن	$-$	۰	$+$	
y		$\searrow$		$\searrow$	Min	$\nearrow$	

بنابراین $x = ۱$ طول نقطه‌ی Min نسبی تابع است.

۸۵.گزینه ۲ برای پیدا کردن نقطه‌ی ماکسیمم تابع، یک بار مشتق می‌گیریم

$$y = \frac{۳}{x^۲ + ۳} \to y' = \frac{-۶x}{(x^۲ + ۳)^۲} = ۰ \to x = ۰ \xrightarrow{\text{تابع}} y = ۱ \to A\left|\begin{matrix}۰\\۱\end{matrix}\right.$$

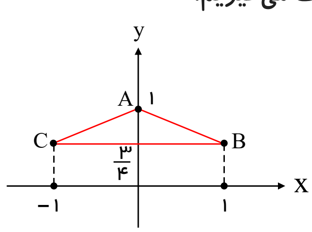
برای پیدا کردن نقاط عطف تابع، دو بار مشتق می‌گیریم.

$$y'' = \frac{-۶(x^۲ + ۳)^۲ - ۲(x^۲ + ۳)(۲x)(-۶x)}{(x^۲ + ۳)^۴} = \frac{-۶(x^۲ + ۳)^۲ + ۲۴x^۲(x^۲ + ۳)}{(x^۲ + ۳)^۴}$$

$$= \frac{(x^۲ + ۳)(-۶(x^۲ + ۳) + ۲۴x^۲)}{(x^۲ + ۳)^۴} = \frac{-۶x^۲ - ۱۸ + ۲۴x^۲}{(x^۲ + ۳)^۳} = \frac{۱۸x^۲ - ۱۸}{(x^۲ + ۳)^۳} = ۰ \to x^۲ = ۱$$

$$\to \begin{cases} x = ۱ \xrightarrow{\text{تابع}} y = \frac{۳}{۴} \to B\left|\begin{matrix}۱\\ \frac{۳}{۴}\end{matrix}\right. \\ x = -۱ \xrightarrow{\text{تابع}} y = \frac{۳}{۴} \to C\left|\begin{matrix}-۱\\ \frac{۳}{۴}\end{matrix}\right. \end{cases}$$

چون دو رأس مثلث داری عرض‌های یکسان هستند برای پیدا کردن مساحت مثلث از رسم شکل کمک می‌گیریم.



$$\to S = \frac{۲ \times \frac{۱}{۴}}{۲} = \frac{۱}{۴}$$

۸۶.گزینه ۲ خط $x = ۰$ مجانب قائم تابع است پس $x = ۰$ ریشه‌ی مخرج است.

$$x=0 \xrightarrow{\text{صدق در مخرج}} 0+b=0 \to b=0 \to y=\frac{2x^2+a}{x}$$

عرض Max تابع برابر ۲ است بنابراین معادله‌ی تلاقی تابع با خط $y=2$ ریشه‌ی مضاعف دارد.

$$\begin{cases} y=\dfrac{2x^2+a}{x} \\ y=2 \end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی}} \dfrac{2x^2+a}{x}=2 \to 2x^2-2x+a=0 \quad \text{معادله‌ی تلاقی:}$$

$$\text{شرط ریشه‌ی مضاعف}\ \Delta=0 \to b^2-4ac=0 \to 4-8a=0 \to 8a=4 \to a=\frac{1}{2}$$

پس $2a+b=1+0=1$ است.

۸۷.گزینه ۴ چون تابع پیوسته و نزولی اکید و $f(0)=0$ است پس حتما به ازای $x>1$، $f(x)<0$ است و به ازای $x<1$، $f(x)>0$ است. برای پیدا کردن دامنه‌ی تعریف تابع $\sqrt{xf(x)}$ کافی است زیرا رادیکال را بزرگ‌تر مساوی صفر قرار دهیم.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$+$		$+$	0	$-$	
$xf(x)\geq 0$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$\to x\in[0,1]$

۸۸.گزینه ۱

$$f(x)=1+2\sin(\frac{3\pi}{2}-x)=1-2\cos x$$

$$\to \begin{cases} f(-\frac{\pi}{3})=1-2\cos(-\frac{\pi}{3})=1-2\cos\frac{\pi}{3}=1-2(\frac{1}{2})=0 \\ f(\frac{2\pi}{3})=1-2\cos\frac{2\pi}{3}=1-2\cos(\pi-\frac{\pi}{3})=1+2\cos\frac{\pi}{3}=1+2(\frac{1}{2})=2 \end{cases}$$

پس $f(\frac{-\pi}{3})+f(\frac{2\pi}{3})=2$ است.

از طرفی: $-1\leq\cos x\leq 1 \to \quad -2\leq -2\cos x\leq 2 \to -1\leq 1-2\cos x\leq 3 \to -1\leq f(x)\leq 3$

بنابراین Max تابع برابر ۳ است. پس مورد خواسته شده‌ی سوال برابر $\frac{2}{3}$ است.

۸۹.گزینه ۴ ابتدا طول نقاط بحرانی تابع را در بازه‌ی داده شده بدست می‌آوریم و سپس مقدار تابع را به‌ازای ابتدا و انتهای بازه و نقاط بحرانی به‌دست می‌آوریم.

$$f(x)=2\cos(\frac{\pi}{2}+3x)=-2\sin 3x \to f'(x)=-6\cos 3x=0 \to \cos 3x=0$$

$$\xrightarrow[x=k\pi+\frac{\pi}{2}]{\text{حالت خاص}} 3x=k\pi+\frac{\pi}{2} \to x=\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{6} \to \quad \text{جوابی در بازه‌ی داده شده وجود ندارد}$$

$$f(x)=-2\sin 3x \to \begin{cases} f(\frac{\pi}{4})=-2\sin\frac{3\pi}{4}=-2(\frac{\sqrt{2}}{2})=-\sqrt{2} \to \text{مطلق}\ Min \\ f(\frac{\pi}{2})=-2\sin\frac{3\pi}{2}=-2(-1)=2 \to \text{مطلق}\ Max \end{cases}$$