تاریخ :	وقت : دقیقه	
نام و نام خانوادگی :	تعداد سوالات: ۱۲۰	
موضوع ریاضی عمومی پیش دانشگاهی و پایه(× کاربرد مشتق)		دبیرستان کمال

۱.گزینه ۳ اکسترمم نسبی پیوسته و مشتق‌پذیر، در تابع صدق می‌کند و طولش، y' را صفر می‌کند.

$$\left.\begin{array}{l} y=ax^2-x^3+b \Rightarrow y(1)=a-1+b=-1 \Rightarrow a+b=0 \\ y'=2ax-3x^2 \Rightarrow y'(1)=2a-3=0 \Rightarrow a=\frac{3}{2} \rightarrow b=-\frac{3}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow a-b=3$$

۲.گزینه ۳

$$y=x^3+x \rightarrow y'=3x^2+1>0$$

بنابراین تابع صعودی اکید و در نتیجه فاقد ماکسیمم و مینیمم است.

بررسی گزینه‌ها:

گزینه‌ی ۱:

$$y=x^4-x^2 \Rightarrow y'=4x^3-2x=2x(2x^2-1)=0 \Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, 0$$

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\searrow$	Min	$\nearrow$	Max	$\searrow$	Min	$\nearrow$	

گزینه‌ی ۲:

$$y=x^3-x \Rightarrow y'=3x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\nearrow$	Max	$\searrow$	Min	$\nearrow$	

گزینه‌ی ۴:

$$y=x^3+x^2 \Rightarrow y'=3x^2+2x=x(3x+2)=0 \Rightarrow x=0,-\frac{2}{3}$$

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\nearrow$	Max	$\searrow$	Min	$\nearrow$	

۳.گزینه ۱

باید مشتق دوم، منفی باشد.

$$y=(x-1)e^x \Rightarrow y'=1e^x+(x-1)e^x=xe^x$$
$$\Rightarrow y''=1e^x+xe^x=(x+1)e^x<0 \xrightarrow{e^x>0} x+1<0 \rightarrow x<-1 \text{ یا } x\in(-\infty,-1)$$

۴.گزینه ۴

$$y'=6x^2-18x+12=0 \Rightarrow 6(x-2)(x-1)=0 \Rightarrow x=1,2 \rightarrow \begin{cases} x=1 \rightarrow y=5 \rightarrow A\Big|_{5}^{1} \\ x=2 \rightarrow y=4 \rightarrow B\Big|_{4}^{2} \end{cases}$$

برای بدست آوردن شیب خط گذرنده از دو نقطه A و B از این فرمول استفاده می‌کنیم:

$$m=\frac{yA-yB}{xA-xB}=\frac{۵-۴}{۱-۲}=-۱$$

۵.گزینه ۲ باید xهایی را بیابیم که به ازای آن‌ها $y'\geq ۰$ است:

$$y'=۲x-x^۲+۳=-(x^۲-۲x-۳)=-(x-۳)(x+۱)\geq ۰$$

با استفاده از جدول تعیین علامت داریم:

$$\begin{array}{c|ccccc} x & & -۱ & & ۳ & \\ \hline y' & - & ۰ & + & ۰ & - \end{array} \rightarrow -۱\leq x\leq ۳ \text{ یا } x\in[-۱,۳]$$

۶.گزینه ۱

اکسترمم نسبی پیوسته و مشتق‌پذیر، در تابع صدق می‌کند و طولش، y' را صفر می‌کند.

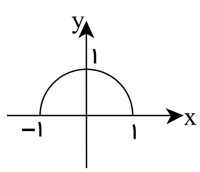
$$y=x^۳+ax^۲-b\Rightarrow y'=۳x^۲+۲ax$$
$$y(۱)=۲\rightarrow ۱+a-b=۲\Rightarrow a-b=۱$$
$$y'(۱)=۰\rightarrow ۳(۱)^۲+۲a(۱)=۰\Rightarrow a=-\frac{۳}{۲}\ ,\ b=-\frac{۵}{۲}$$

۷.گزینه ۴

راه حل اول (رسم نمودار) :

نمودار $y=\sqrt{۱-x^۲}$، نیمه‌ی بالایی دایره‌ای به مرکز مبدا و شعاع ۱ است:

با توجه به نمودار، تقعر منحنی در $(-۱,۱)$ همواره رو به پایین است.



راه حل دوم:

$$y'=\frac{-۲x}{۲\sqrt{۱-x^۲}}=\frac{-x}{\sqrt{۱-x^۲}}\rightarrow y''=\frac{-\sqrt{۱-x^۲}-\frac{۱(-۲x)}{۲\sqrt{۱-x^۲}}(-x)}{(\sqrt{۱-x^۲})^۲}$$

$$y''=\frac{-\sqrt{۱-x^۲}-\frac{x^۲}{\sqrt{۱-x^۲}}}{\left(\sqrt{۱-x^۲}\right)^۲}=\frac{\frac{-(۱-x^۲)-x^۲}{\sqrt{۱-x^۲}}}{۱-x^۲}=\frac{-۱}{(۱-x^۲)\cdot\sqrt{۱-x^۲}}=\frac{-۱}{(۱-x^۲)^{\frac{۳}{۲}}}$$

y'' همواره منفی است. پس تقعر نمودار همواره رو به پایین است. با توجه به این که دامنه‌ی تابع ، $[-۱,۱]$ است، جواب $(-۱,۱)$ می‌باشد.

۸.گزینه ۴ با توجه به این که تابع چند جمله‌ای در همه جا مشتق‌پذیر است، پس باید در نقاط $x=-۱,۲$ مشتق تابع صفر شود:

$$y'=۳x^۲+۲ax+b$$

$$\begin{cases} y'(۲)=۰\Rightarrow ۱۲+۴a+b=۰ \\ y'(-۱)=۰\Rightarrow ۳-۲a+b=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} ۴a+b=-۱۲ \\ ۲a-b=۳\end{cases}\Rightarrow ۶a=-۹\Rightarrow a=-\frac{۳}{۲}\ ,\ b=-۶$$

بنابراین $ab=۹$ می‌باشد.

۹.گزینه ۴ توجه کنید دامنه‌ی تعریف تابع داده شده $Df=\mathbb{R}-\{۰\}$ است.

ابتدا ضابطه‌ی تابع را ساده‌تر می‌کنیم و سپس از آن دو بار مشتق می‌گیریم.

$$y=\frac{x^۲-۱}{x}=x-\frac{۱}{x}\Rightarrow y'=۱+\frac{۱}{x^۲}\Rightarrow y''=-\frac{۲}{x^۳}$$

جهت تقعر در $x=۰$ عوض می‌شود، اما $x=۰$ در دامنه‌ی تعریف تابع قرار ندارد بنابراین تابع، فاقد نقطه‌ی عطف است.

۱۰.گزینه ۱

$$y=(x-۱)|x|=\begin{cases}x(x-۱) & x\geq ۰\\ -x(x-۱) & x<۰\end{cases}=\begin{cases}x^۲-x & x\geq ۰\\ x-x^۲ & x<۰\end{cases}\Rightarrow y'=\begin{cases}۲x-۱ & x>۰\\ ۱-۲x & x<۰\end{cases}$$

حال با استفاده از جدول تعیین علامت، داریم:

x	$-\infty$		۰		$\frac{۱}{۲}$		$+\infty$
y'		$+$		$-$	۰	$+$	
y		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

$\rightarrow ۰<x<\frac{۱}{۲}$ یا $x\in(۰,\frac{۱}{۲})$

دقت کنید چون $x=۰$ ریشه ساده داخل قدرمطلق می‌باشد تابع در $x=۰$ مشتق ناپذیر است.

۱۱.گزینه ۳

$$y=\sin^۲ x-\sin x\xrightarrow{\sin x=A}y=A^۲-A,A\in[-۱,۱]$$

دقت کنید وقتی $۰\leq x\leq ۲\pi$ است آنگاه $-۱\leq \sin x\leq ۱$ می‌باشد.

$y'=۲A-۱=۰\rightarrow A=\frac{۱}{۲}$: طول نقطه‌ی بحرانی

$$y(-۱)=۱+۱=۲\ ,\ y(۱)=۱-۱=۰\ ,\ y(\frac{۱}{۲})=\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۲}=-\frac{۱}{۴}$$

بنابراین بیشترین مقدار تابع برابر ۲ می‌باشد.

۱۲.گزینه ۲

$$y=x^{\frac{۴}{۳}}-۲x^{\frac{۲}{۳}}$$

$$\Rightarrow y'=\frac{۴}{۳}x^{\frac{۱}{۳}}-\frac{۴}{۳}x^{-\frac{۱}{۳}}=\frac{۴}{۳}(\sqrt[۳]{x}-\frac{۱}{\sqrt[۳]{x}})=\frac{۴}{۳}(\frac{\sqrt[۳]{x^۲}-۱}{\sqrt[۳]{x}})\rightarrow$$

x	۰^- $\nearrow$ ۰ $\searrow$ ۰^+	
y´	+ ‖	−
y	$\nearrow$ Max	$\searrow$

در خود $x=۰$ هم مشتق نداریم (مماس عمودی است)، پس گزینه‌ی ۲ پاسخ است.

۱۳.گزینه ۳ کافی است جهت تقعر و صعودی یا نزولی بودن تابع را در $x=۱$ بررسی کنیم:

$y=x^۳-۲x^۲\Rightarrow y'=۳x^۲-۴x\Rightarrow y'(۱)=۳-۴=-۱<۰\Rightarrow$ نزولی

$y''=۶x-۴\Rightarrow y''(۱)=۶-۴=۲>۰\Rightarrow$ تقعر رو به بالا

در گزینه سوم، تابع نزولی و تقعرش رو به بالاست.

۱۴.گزینه ۱

تابع از مبداء مختصات می‌گذرد پس $\left|\begin{smallmatrix}۰\\۰\end{smallmatrix}\right.$ در تابع صدق می‌کند.

$$\left|\begin{matrix}۰\\۰\end{matrix}\right.\xrightarrow{\text{صدق در تابع}}d=۰$$

در $x=۰$ مماس افقی است پس مشتق به ازای $x=۰$ برابر صفر است.

$$y'=۴x^۳+۳ax^۲+۲bx+c\xrightarrow{x=۰}۰=c$$

$x=۰$ طول نقطه عطف است پس مشتق دوم به ازای $x=۰$ برابر صفر است.

$$y''=۱۲x^۲+۶ax+۲b\xrightarrow{x=۰}۰=b$$

تابع از نقطه $\left|\begin{smallmatrix}۱\\۰\end{smallmatrix}\right.$ عبور می‌کند پس این نقطه در تابع صدق می‌کند.

$$\left|\begin{matrix}۱\\۰\end{matrix}\right.\xrightarrow{\text{صدق در تابع}}۰=۱+a+b+c+d\rightarrow a=-۱$$

بنابراین $a^۲+b+c+d=۱$ می‌باشد.

۱۵.گزینه ۳

$$y'=۴\frac{x^۳}{۴}-۴x=x^۳-۴x=x(x^۲-۴)=x(x-۲)(x+۲)$$

حال با استفاده از جدول تعیین علامت، بازه‌هایی را که تابع نزولی است $(y'<۰)$ مشخص می‌کنیم:

$$\begin{array}{c|ccccccccc} x & -\infty & & -۲ & & ۰ & & ۲ & & +\infty \\ \hline y' & & - & ۰ & + & ۰ & - & ۰ & + & \end{array} \rightarrow x \in (-\infty, -۲) \cup (۰, ۲)$$

۱۶.گزینه ۲   کافی است از تابع حد در بی‌نهایت بگیریم ($\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{ax^2+bx+c}\sim\sqrt{a}\left|x+\frac{b}{2a}\right|$)

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x+\sqrt{x^2-2x})=\lim_{x\to+\infty}(x+(x-1))\Rightarrow y=2x-1$$

بنابراین خط مجانب مایل منحنی $y=f(x)$ در $+\infty$ عبارت است از $y=2x-1$ که عرض از مبدا آن ۱- است.

۱۷.گزینه ۴

$$y=x^3+bx^2+2x+1\Rightarrow y'=3x^2+2bx+2$$

برای آن‌که تابع فاقد اکسترمم نسبی باشد مشتق، باید دارای ریشه مضاعف بوده و یا فاقد ریشه حقیقی باشد یعنی $\Delta\le 0$.

$$\Delta\le 0\Rightarrow b^2-4ac\le 0\to 4b^2-24\le 0\to b^2\le 6$$

فقط گزینه چهارم در این شرط صدق می‌کند.

۱۸.گزینه ۳ $x=2$ مجانب قائم منحنی می‌باشد بنابراین $x=2$ ریشه‌ی مخرج است پس: $2+a=0\to a=-2$

دقت کنید حد راست تابع در $x=2$ برابر $+\infty$ است بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2+b}{x-2}=+\infty\to\frac{4+b}{0^+}=+\infty\to 4+b>0\to b>-4$$

۱۹.گزینه ۱

$$f(x)=\frac{x^3+ax^2-x+1}{x^2}=x+a-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\Rightarrow\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=x+a\Rightarrow$$ معادله‌ی مجانب مایل: $y=x+a$

این خط محور xها را در نقطه‌ای با طول -1 قطع می‌کند. بنابراین:

$$\xrightarrow[y=0]{x=-1}0=-1+a\Rightarrow a=1$$

البته برای پیدا کردن مجانب مایل می‌توانستید صورت را بر مخرج تقسیم کنید.

۲۰.گزینه ۱   اکسترمم نسبی پیوسته و مشتق‌پذیر، در تابع صدق می‌کند و طولش، y' را صفر می‌کند.

$$y=x^3+ax^2+bx\to y'=3x^2+2ax+b$$

$$\begin{array}{l} y(1)=2\Rightarrow a+b+1=2\\ y'(1)=0\Rightarrow 3+2a+b=0\end{array}\Rightarrow\begin{cases}a+b=1\\ 2a+b=-3\end{cases}\to a=-4\ ,\ b=5$$

بنابراین $(a,b)=(-4,5)$ است.

۲۱.گزینه ۲   ابتدا دقت کنید دامنه تابع، عبارت است از: $Df=(0,+\infty)$. حال، از تابع داده شده مشتق گرفته و کوچکتر از صفر قرار می‌دهیم.

باید بازه‌ای را به دست آوریم که در آن $y'<0$ باشد:

$$y=Lnx+\frac{1}{x}\Rightarrow y'=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{\underbrace{x^2}_{+}}<0\to x<1$$

از اشتراک دامنه $(x>0)$ و $(x<1)$ به جواب $0<x<1$ یا $x\in(0,1)$ می رسیم.

۲۲.گزینه ۴

$$y=x(\sqrt[3]{x}-1)\to y=x(x^{\frac{1}{3}}-1)=x^{\frac{4}{3}}-x\Rightarrow y'=\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}-1\Rightarrow y''=\frac{4}{9}x^{-\frac{2}{3}}\Rightarrow y''=\frac{4}{9\sqrt[3]{x^2}}$$

y'' همواره مثبت است بنابراین جهت تقعر عوض نمی‌شود و تابع نقطه‌ی عطف ندارد.

۲۳.گزینه ۳

نقاط بحرانی، نقاطی از درون دامنه‌ی تعریف هستند که در آنها مشتق برابر صفر است یا مشتق وجود ندارد.

ابتدا $fof(x)$ را تشکیل داده و سپس مشتق آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$$f(x)=x^{۲}-x \Rightarrow fof(x)=f(f(x))=(x^{۲}-x)^{۲}-(x^{۲}-x)$$

$$\Rightarrow (fof(x))'=۲(x^{۲}-x)(۲x-۱)-(۲x-۱)=\underbrace{(۲x-۱)}_{\text{فاکتور}}(۲x^{۲}-۲x-۱)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲x-۱=۰ \Rightarrow x=\frac{۱}{۲} \\ ۲x^{۲}-۲x-۱=۰ \Rightarrow x=\frac{۲\pm\sqrt{۱۲}}{۴}=\frac{۱\pm\sqrt{۳}}{۲} \end{cases}$$

بنابراین تابع ۳ نقطه‌ی بحرانی دارد.

۲۴.گزینه ۴ برای به دست آوردن ماکسیمم (مینیمم) مطلق تابع $f(x)$ در بازه‌ی $[a,b]$ ، مقدار تابع را به ازای نقاط بحرانی و نقاط ابتدا و انتهای بازه محاسبه می‌کنیم. از بین این مقادیر، بیشترین مقدار، Max مطلق و کمترین مقدار ، Min مطلق است.

$$y=\frac{۱-\sin x}{۲-\sin x}$$

$$\Rightarrow y'=\frac{-\cos x(۲-\sin x)-(-\cos x)(۱-\sin x)}{(۲-\sin x)^{۲}}=\frac{-\cos x}{(۲-\sin x)^{۲}}=۰ \xrightarrow[۰<x<۲\pi]{x=k\pi+\frac{\pi}{۲}} \begin{cases} x=\frac{\pi}{۲} \\ x=\frac{۳\pi}{۲} \end{cases}$$

$$f(۰)=\frac{۱}{۲}\ ,\ f(۲\pi)=\frac{۱}{۲}\ ,\ f(\frac{\pi}{۲})=۰\ ,\ f(\frac{۳\pi}{۲})=\frac{۲}{۳}$$

پس، بیشترین مقدار تابع برابر $\frac{۲}{۳}$ است.

۲۵.گزینه ۱

مجانب قائم: مخرج$=۰ \Rightarrow x=-۱$

$$\begin{array}{l|l} x^{۲}-۴x+۴ & x+۱ \\ \hline \underline{-x^{۲}-x} & x-۵ \\ -۵x+۴ & \\ \underline{\ ۵x+۵} & \\ \ ۹ & \end{array}$$

$\Rightarrow y=x-۵$ مجانب مایل

عرض نقطه‌ی تلاقی $x=-۱$ و $y=x-۵$ ، برابر $y=-۱-۵=-۶$ است.

۲۶.گزینه ۳

$$f(x)=۲x^{۳}-۶x^{۲}+ax+۱ \Rightarrow f'(x)=۶x^{۲}-۱۲x+a$$

باید $f'(x)$ ریشه داشته باشد، اما تغییر علامت ندهد، یعنی مشتق ریشه‌ی مضاعف داشته باشد:

$$f'(x)=۶x^{۲}-۱۲x+a \xrightarrow[\Delta=۰]{\text{ریشه‌ی مضاعف}} \Delta=(-۱۲)^{۲}-۴(۶)(a)=۱۴۴-۲۴a=۰ \Rightarrow a=۶$$

۲۷.گزینه ۱ نقاط بحرانی، نقاطی از درون دامنه‌ی تعریف هستند که در آنها مشتق برابر صفر است یا مشتق وجود ندارد.

دقت کنید دامنه‌ی تعریف تابع داده شده $Df=(-\infty,+\infty)$ است.

$$y=\sqrt[۳]{x}(x-۲) \to y'=\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^{۲}}}(x-۲)+\sqrt[۳]{x} \to y'=\frac{x-۲+۳x}{۳\sqrt[۳]{x^{۲}}}=\frac{۴x-۲}{۳\sqrt[۳]{x^{۲}}}$$

$$\text{صورت}=۰ \to ۴x-۲=۰ \to x=\frac{۱}{۲} \quad \text{و} \quad \text{مخرج}=۰ \to ۳\sqrt[۳]{x^{۲}}=۰ \to x=۰$$

شرط ریشه‌ی‌مضاعف داشتن یک معادله‌ی درجه‌ی دوم آن است که $\Delta = ۰$ و $-\frac{b}{۲a} > ۰$ (ریشه‌ی مضاعف) باشد.

$$\left.\begin{array}{l}\Delta = ۰ \to b^۲ - ۴ac = ۰ \to b^۲ - ۱۶ = ۰ \to b = ۴, b = -۴ \\ -\frac{b}{۲a} > ۰ \to -\frac{b}{۲} > ۰ \to -b > ۰ \to b < ۰\end{array}\right\} \to b = -۴$$

منحنی از مبدأ می‌گذرد، پس نقطه‌ی $\begin{vmatrix}۰\\۰\end{vmatrix}$ در تابع صدق می‌کند یعنی: $f(۰) = ۰ \to \frac{a}{۴} = ۰ \to a = ۰$

بنابراین $a - b = ۴$ می‌باشد.

۲۹.گزینه ۳ برای تعیین اکسترمم‌های تابع f باید تابع f' را تعیین علامت کنیم. (توجه کنید که عبارت e^x همواره مثبت است، پس در تعیین علامت مشتق اثری ندارد.)

$$f'(x) = ۰ \Rightarrow (x-۱)(x-۲)(x-۱)(x-۳) = (x-۱)^۲(x-۲)(x-۳) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ x = ۲ \\ x = ۳ \end{cases}$$

x		۱		۲		۳	
f'	+	۰	+	۰	−	۰	+
f	↗		↗	Max	↘	Min	↗

پس تابع داری یک ماکسیمم و یک مینیمم است.

۳۰.گزینه ۱ می دانیم: $\boxed{y = e^u \to y' = u' \cdot e^u \quad , \quad (uv)' = u'v + v'u}$

از تابع دو بار مشتق می گیریم.

$$f'(x) = (۲x-۱)e^{۲x} + (۲x^۲ - ۲x)e^{۲x} = e^{۲x}(۲x^۲ - ۱)$$

$$f''(x) = ۲e^{۲x}(۲x^۲-۱) + ۴xe^{۲x} \to f''(x) = ۴x^۲e^{۲x} - ۲e^{۲x} + ۴xe^{۲x}$$
$$= (۴x^۲ + ۴x - ۲)e^{۲x} = ۰ \Rightarrow ۴x^۲ + ۴x - ۲ = ۰$$
$$\Rightarrow \text{مجموع طول‌های نقاط عطف} = -\frac{b}{a} = -۱$$

(توجه کنید عبارت $e^{۲x}$ همواره مثبت است و هرگز صفر نمی‌شود)

۳۱.گزینه ۴ کافی است از تابع، حد در بی‌نهایت بگیریم ($\lim_{x\to\pm\infty} \sqrt{ax^۲+bx+c} \sim \sqrt{a}|x + \frac{b}{۲a}|$)

بنابراین معادله‌ی مجانب‌های این منحنی $y = ۲x - ۱ + \sqrt{a}|x + \frac{۱۲}{۲a}|$ است.

حالا برای ایجاد مجانب افقی (عدد $= y$) باید x از بین برود یعنی $۲x$ با $\sqrt{a}|x|$ ساده شود. این اتفاق زمانی می‌افتد که x به $-\infty$ میل کند و a برابر ۴ باشد. بنابراین:

$$y = ۲x - ۱ + ۲|x + \frac{۳}{۲}|$$

$$\left.\begin{array}{l} x \to +\infty : y = ۲x - ۱ + ۲x + ۳ \Rightarrow y = ۴x + ۲ \\ x \to -\infty : y = ۲x - ۱ - ۲x - ۳ \Rightarrow y = -۴ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{دستگاه}} A(-\frac{۳}{۲}, -۴)$$

۳۲.گزینه ۲

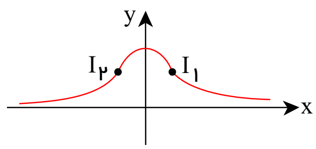
$$y = \frac{۴x}{x^۲+۱} \Rightarrow y' = \frac{۴(x^۲+۱) - ۲x(۴x)}{(x^۲+۱)^۲} = \frac{۴x^۲ + ۴ - ۸x^۲}{(x^۲+۱)^۲} = \frac{۴(۱-x^۲)}{(x^۲+۱)^۲} = ۰ \to x = \pm ۱ \quad \text{ریشه‌های ساده}$$

$$x = ۱ \Rightarrow y = \frac{۴(۱)}{۱^۲+۱} = ۲ \Rightarrow A\begin{vmatrix}۱\\۲\end{vmatrix} \quad , \quad x = -۱ \Rightarrow y = -۲ \Rightarrow B\begin{vmatrix}-۱\\-۲\end{vmatrix}$$

$$AB = \sqrt{(۱-(-۱))^۲ + (۲-(-۲))^۲} = \sqrt{۲^۲ + ۴^۲} = \sqrt{۲۰} = ۲\sqrt{۵}$$

۳۳.گزینه ۴

این منحنی به شکل روبه‌رو بوده و یک اکسترمم و دو عطف دارد:



اکنون به حل تشریحی سوال می‌پردازیم.

$$y' = \frac{-۲x}{(x^۲+۱)^۲} = ۰ \rightarrow x = ۰$$ **یک ریشه‌ی ساده (طول اکسترمم)**

$$y'' = \frac{-۲(x^۲+۱)^۲ - ۲(۲x)(x^۲+۱)(-۲x)}{(x^۲+۱)^۴} = \frac{-۲(x^۲+۱)^۲ + ۸x^۲(x^۲+۱)}{(x^۲+۱)^۴}$$

$$= \frac{\overbrace{-۲(x^۲+۱)}^{\text{فاکتور}}(x^۲+۱-۴x^۲)}{(x^۲+۱)^۴}$$

$$= \frac{-۲(۱-۳x^۲)}{(x^۲+۱)^۳} = ۰ \rightarrow x = \pm\frac{۱}{\sqrt{۳}}$$ **دو ریشه‌ی ساده (طول نقاط عطف)**

۳۴.گزینه ۲ **در دو حالت امکان دارد که تابع داده شده دارای یک مجانب قائم باشد:**

حالت اول: مخرج$\Delta = ۰ \Rightarrow ۱ - ۴(m-۱) = ۰ \Rightarrow m-۱ = \frac{۱}{۴} \Rightarrow m = \frac{۵}{۴}$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{۱}{\frac{۱}{۴}x^۲+x+۱} = \frac{۱}{(\frac{۱}{۲}x+۱)^۲} \xrightarrow{\text{مجانب قائم}} x = -۲$$

حالت دوم: مخرج $x^۲$ **ضریب** $= ۰ \Rightarrow m = ۱ \Rightarrow f(x) = \frac{۱}{x+۱} \xrightarrow{\text{مجانب قائم}} x = -۱$

۳۵.گزینه ۲ **تابع دارای مجانب قائم** $x = ۰$ **است. حال شکل تابع را در اطراف مجانب قائم تابع به دست می آوریم.**

$$\lim_{x\to ۰^+}(x+\frac{۱}{x}) = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to ۰^-}(x+\frac{۱}{x}) = -\infty$$

که یکی از گزینه‌های ۲ یا ۴ می‌توانند درست باشند و چون تابع دارای مجانب مایل است حتماً گزینه‌ی ۲ صحیح است.

$$\lim_{x\to \pm\infty}(x+\frac{۱}{x}) = x \rightarrow y = x$$ **معادله‌ی مجانب مایل:**

۳۶.گزینه ۲ **مجانب قائم منحنی** $x = -۱$ **است، پس** $x = -۱$ **ریشه‌ی مخرج بوده و داریم:** $b = ۱$

با قراردادن $b = ۱$**، تابع به صورت** $y = \frac{x^۲-a}{x+۱}$ **در می آید و حال با تقسیم صورت بر مخرج، معادله‌ی مجانب مایل تابع را به دست می آوریم.**

$$\begin{array}{l|l} x^۲-a & x+۱ \\ \cline{2-2} \underline{-x^۲-x} & x-۱ \\ -x-a & \\ \underline{\ \ x+۱} & \\ ۱-a & \end{array}$$

$\Rightarrow y = x-۱$ **مجانب مایل:**

محل برخورد مجانب مایل با محور x**ها،** $x = ۱$ **است** $(y = x-۱ \xrightarrow{y=۰} x = ۱)$ **منحنی هم محور** x**ها را قطع کرده، و ریشه‌ی صورت بیشتر از ۱ است (طول نقطه تلاقی منحنی با محور** x **، بیشتر از طول نقطه ی تلاقی مجانب مایل با محور** x **است) با این شرایط** $a > ۱$ **و** $b = ۱$ **مناسب است.**

۳۷.گزینه ۲ خط به معادله‌ی $y=1$ مجانب افقی تابع می‌باشد بنابراین: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{ax^2}{x^2}=a=1$. درضمن نقطه‌ی $\Big|^{2}_{0}$ در تابع صدق می‌کند یعنی: $\frac{4+2b}{4+1}=0 \to b=-2$

بنابراین $a+b=1-2=-1$ است.

۳۸.گزینه ۲

برای نزولی بودن باید $y'<0$ و برای تقعر رو به بالا بودن باید $y''>0$ باشد.

$$y'=4x^3-12x^2=\underbrace{4x^2}_{+}(x-3)\xrightarrow{\text{نزولی}}y'<0\Rightarrow x<3$$

$$y''=12x^2-24x=12x(x-2)\xrightarrow{\text{تقعر رو به بالا}}y''>0\xrightarrow{\text{تعیین علامت}}x<0 \text{ یا } x>2$$

از اشتراک دو شرط و باتوجه به فرض $x>0$ بازه‌ی $(2,3)$ به‌دست می‌آید که حداکثر مقدار $b-a$ برابر $3-2=1$ است.

۳۹.گزینه ۳ طول نقطه‌ی عطف برابر یک می‌باشد.

$$x_{\text{عطف}}=\frac{-b}{3a}=\frac{-a}{3(-1)}=1\Rightarrow a=3$$

با توجه به شکل، مماس در نقطه‌ی عطف افقی است یعنی مشتق در $x=1$ برابر صفر است.

$$y'=-3x^2+2ax+b\xrightarrow{a=3}y'=-3x^2+6x+b\xrightarrow{y'(1)=0}-3(1)^2+6(1)+b=0\Rightarrow b=-3$$

۴۰.گزینه ۳

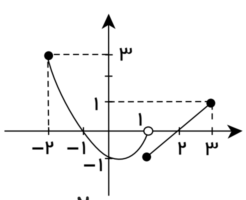
روش اول: طول‌های نقاط اکسترمم نسبی، ریشه‌های ساده مشتق هستند.

$$f'(x)=x^2+2(m-1)x-3=0\Rightarrow x_{Max}+x_{Min}=\frac{-b}{a}=9\Rightarrow -2(m-1)=9\Rightarrow m=-\frac{7}{2}$$

روش دوم: می‌دانیم در تابع درجه‌ی سوم نقطه‌ی عطف، مرکز تقارن تابع بوده و طول آن برابر میانگین طول دو اکسترمم نسبی (در صورت وجود) است، بنابراین داریم:

$$\text{طول نقطه‌ی عطف}=\frac{-b}{3a}=\frac{-(m-1)}{3\times\frac{1}{3}}=1-m\Rightarrow 1-m=\frac{9}{2}\Rightarrow m=-\frac{7}{2}$$

۴۱.گزینه ۲ نمودار تابع را رسم می‌کنیم.



$y=x^2-1\to$ نمودار تابع $y=x^2$ را یک واحد به پائین منتقل می‌کنیم

$y=x-2\to$ نمودار تابع $y=x$ (نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم) را دو واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم $\Big\}\to$

با توجه به نمودار تابع واضح است که این تابع دو Min نسبی در نقاطی به طول‌های صفر و یک دارد.

۴۲.گزینه ۴ اکسترمم نسبی پیوسته و مشتق‌پذیر، در تابع صدق می‌کند و طولش، y' را صفر می‌کند.

$$f(1)=2\to 1+a+b=2\Rightarrow a+b=1$$

$$f'(x)=3x^2+2ax\to f'(1)=0\to 3(1)^2+2a(1)=0\Rightarrow 3+2a=0\Rightarrow a=-\frac{3}{2}\ ,\ b=\frac{5}{2}$$

برای تشخیص نوع اکسترمم، از آزمون مشتق اول استفاده می‌کنیم.

$y=x^۳+ax^۲+b \to y'=۳x^۲+۲ax=۳x^۲-۳x=۳x(x-۱)=۰ \to x=۰\ ,\ x=۱$

x	$-\infty$		۰		۱		$+\infty$
y'		$+$	۰	$-$	۰	$+$	
y		$\nearrow$	$\frac{۵}{۲}$	$\searrow$	۲	$\nearrow$	
					Min		

۴۳. گزینه ۴

$$y=x^{۳}-x^{۲}-x \Rightarrow y'=۳x^{۲}-۲x-۱=۰ \xrightarrow{a+b+c=۰} x=۱ \quad , \quad x=\frac{c}{a}=-\frac{۱}{۳}$$

حال، مقدار تابع را به ازای ابتدا و انتهای بازه و طول نقاط بحرانی حساب می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} y(۱)=۱-۱-۱=-۱ \\ y(-\frac{۱}{۳})=-\frac{۱}{۲۷}-\frac{۱}{۹}-(-\frac{۱}{۳})=\frac{-۱-۳+۹}{۲۷}=\frac{۵}{۲۷} \\ y(-۲)=-۸-۴-(-۲)=-۱۰ \\ y(۲)=۸-۴-۲=۲ \end{array}\right\} \rightarrow y_{Max}=۲$$

۴۴. گزینه ۲

کافی است مقادیر تابع را به ازای ابتدا و انتهای بازه و طول نقاط بحرانی بدست آورده و با هم مقایسه کنیم.

$$f(x)=\sqrt[۳]{x^{۲}+۴x+۳} \rightarrow f'(x)=\frac{۲x+۴}{۳\sqrt[۳]{(x^{۲}+۴x+۳)^{۲}}}=۰ \Rightarrow x=-۲$$

در $x=-۱$ و $x=-۳$ مشتق وجود ندارد.(مخرج مشتق را مساوی صفر قرار دادیم)

$$f(-۲)=(۴-۸+۳)^{\frac{۱}{۳}}=-۱ \;,\; f(-۳)=(۹-۱۲+۳)^{\frac{۱}{۳}}=۰$$

$$f(-۴)=(۱۶-۱۶+۳)^{\frac{۱}{۳}}=\sqrt[۳]{۳} \;,\; f(-۱)=(۱-۴+۳)^{\frac{۱}{۳}}=۰$$

بنابراین بیشترین مقدار تابع، $\sqrt[۳]{۳}$ می‌باشد.

۴۵. گزینه ۳ نقاط بحرانی، نقاطی از درون دامنه‌ی تعریف هستند که در آنها مشتق برابر صفر است یا مشتق وجود ندارد.

دامنه‌ی تعریف تابع مجموعه‌ی اعداد حقیقی است $(Df:(-\infty,+\infty))$.

$$y=x\sqrt[۳]{x}-۲\sqrt[۳]{x}=x\cdot x^{\frac{۱}{۳}}-۲x^{\frac{۱}{۳}}$$

$$\rightarrow y=x^{\frac{۴}{۳}}-۲x^{\frac{۱}{۳}} \rightarrow y'=\frac{۴}{۳}x^{\frac{۱}{۳}}-\frac{۲}{۳}x^{\frac{-۲}{۳}} \rightarrow y'=\frac{۲}{۳}(۲\sqrt[۳]{x}-\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^{۲}}})=\frac{۲}{۳}(\frac{۲x-۱}{\sqrt[۳]{x^{۲}}})$$

صورت $=۰ \rightarrow ۲x-۱=۰ \rightarrow x=\frac{۱}{۲}$ و مخرج $=۰ \rightarrow x=۰$

پس تابع دو نقطه‌ی بحرانی دارد.

۴۶. گزینه ۱ می‌دانیم: $\boxed{(Ln\,u)'=\frac{u'}{u}}$

نقاط بحرانی، نقاطی از درون دامنه‌ی تعریف هستند که در آنها مشتق برابر صفر است یا مشتق وجود ندارد.

دامنه‌ی تعریف این تابع $(x^{۲}-۴>۰)$ به صورت $Df:(۲\;,\;+\infty)\cup(-\infty\;,\;-۲)$ است.

مشتق این تابع $y'=\frac{۲x}{x^{۲}-۴}$ است که در $x=۰$ صفر شده و در $x=\pm۲$ وجود ندارد. اما هیچ‌یک از این نقاط در دامنه‌ی تابع نیستند، پس تابع نقطه‌ی بحرانی ندارد.

۴۷. گزینه ۲

باید مشتق دوم، منفی باشد.

$$y'=\frac{۵}{۳}x^{\frac{۲}{۳}}-۵(\frac{۲}{۳})x^{-\frac{۱}{۳}} \rightarrow y''=\frac{۱۰}{۹}x^{\frac{-۱}{۳}}+\frac{۱۰}{۹}x^{-\frac{۴}{۳}}=\frac{۱۰}{۹}(\frac{۱}{\sqrt[۳]{x}}+\frac{۱}{x\sqrt[۳]{x}})$$

$$=\frac{۱۰}{۹}\underbrace{(\frac{x+۱}{x\sqrt[۳]{x}})}_{+}<۰ \Rightarrow x+۱<۰ \Rightarrow x<-۱ \text{ یا } x\in(-\infty,-۱)$$

۴۸.گزینه ۱

از تابع دو بار مشتق گرفته و مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$$f'(x)=x^{۲}+۲x \Rightarrow f''(x)=۲x+۲=۰ \Rightarrow x=-۱ \xrightarrow{\text{تابع}} y=-\frac{۱}{۳}+۱+a=\frac{۲}{۳}+a$$

چون نقطه‌ی $(-۱,\frac{۲}{۳}+a)$ روی خط $۳y+۴x=۱$ قرار دارد پس مختصاتش در معادله‌ی این خط، صدق می‌کند.

$$\xrightarrow{\text{صدق}} ۳(\frac{۲}{۳}+a)-۴=۱ \Rightarrow ۲+۳a-۴=۱ \Rightarrow ۳a=۳ \Rightarrow a=۱$$

۴۹.گزینه ۴

$$f'(x)=\frac{(x^{۲}+۱)-۲x^{۲}}{(۱+x^{۲})^{۲}}=\frac{۱-x^{۲}}{(۱+x^{۲})^{۲}}$$

$$f''(x)=\frac{-۲x(۱+x^{۲})^{۲}-۲(۱+x^{۲})۲x(۱-x^{۲})}{(۱+x^{۲})^{۴}}=\frac{\overbrace{-۲x(۱+x^{۲})}^{\text{فاکتور}}(۱+x^{۲}+۲(۱-x^{۲}))}{(۱+x^{۲})^{۴}}$$

$$=\frac{-۲x(۳-x^{۲})}{(۱+x^{۲})^{۳}}=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x=\sqrt{۳} \\ x=-\sqrt{۳} \end{cases}$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{۳}$		۰		$\sqrt{۳}$		$+\infty$
f''		$-$	۰	$+$	۰	$-$	۰	$+$	
f		$\cap$		$\cup$		$\cap$		$\cup$	

بنابراین تابع سه نقطه‌ی عطف دارد.

۵۰.گزینه ۲ چون $x>۳$ است $x-۳>۰$ می‌باشد و می‌دانیم : $a\geq ۰ \ , \ b\geq ۰ \ \rightarrow \ a+b\geq ۲\sqrt{ab}$

پس: $x-۳+\frac{۱}{x-۳}\geq ۲\sqrt{(x-۳)(\frac{۱}{x-۳})} \ \rightarrow \ x-۳+\frac{۱}{x-۳}\geq ۲$

بنابراین کمترین مقدار تابع برابر ۲ می‌باشد.

۵۱.گزینه ۱

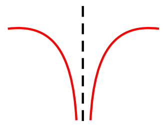
$$fog(x)=f(g(x))=\frac{۲(\frac{x^{۲}+۳}{x^{۲}-۱})}{\frac{x^{۲}+۳}{x^{۲}-۱}+۲}=\frac{۲(x^{۲}+۳)}{(x^{۲}+۳)+۲(x^{۲}-۱)}=\frac{۲x^{۲}+۶}{۳x^{۲}+۱}$$

تابع $fog(x)$ فقط دارای یک مجانب افقی است، و چون مخرج فاقد ریشه حقیقی است تابع مجانب قائم ندارد .

$$\lim_{x\to\infty}\frac{۲x^{۲}+۶}{۳x^{۲}+۱}=\frac{۲}{۳}\rightarrow y=\frac{۲}{۳} \ \text{مجانب افقی}$$

۵۲.گزینه ۱

x = ۲



اولاً $x=۲$ مجانب قائم تابع است. ثانیاً $x=۲$ ریشه مضاعف مخرج است. زیرا حد چپ و راست تابع در $x=۲$ با هم برابر هستند. ($\lim_{x\to ۲^{+}}f(x)=\lim_{x\to ۲^{-}}f(x)=-\infty$) پس:

$$۲x^{۲}+ax+b=۲(x-۲)^{۲}=۲(x^{۲}-۴x+۴)=۲x^{۲}-۸x+۸ \Rightarrow \begin{cases} a=-۸ \\ b=۸ \end{cases} \Rightarrow a-b=-۱۶$$

۵۳.گزینه ۲

$$y=\frac{۱}{x^{۲}-x}+\frac{x^{۲}+۱}{x^{۲}+x}=\frac{۱}{x(x-۱)}+\frac{x^{۲}+۱}{x(x+۱)}=\frac{x+۱+(x^{۲}+۱)(x-۱)}{x(x+۱)(x-۱)}$$

$$=\frac{x^{۳}-x^{۲}+۲x}{x(x+۱)(x-۱)}=\frac{x(x^{۲}-x+۲)}{x(x+۱)(x-۱)}=\frac{x^{۲}-x+۲}{(x+۱)(x-۱)}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^{۲}-x+۲}{(x+۱)(x-۱)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^{۲}}{(x)(x)}=۱\to y=۱$$ مجانب افقی

$$\text{مخرج}=۰\to(x+۱)(x-۱)=۰\to x=-۱\ ,\ x=۱$$ مجانب‌های قائم

محل تلاقی مجانب‌ها : $A\Big|_{۱}^{۱}\ ,\ B\Big|_{۱}^{-۱}\to AB=\sqrt{(۱+۱)^{۲}+(۱-۱)^{۲}}=\sqrt{۴+۰}=۲$

۵۴.گزینه ۴

برای پیدا کردن مجانب‌ها حد در بی‌نهایت می‌گیریم و برای این کار از هم‌ارزی واندروالسی استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}ax-۱-۳|x-\frac{۴}{۱\times۲}|=\lim_{x\to\pm\infty}ax-۱-۳|x-۲|=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x\to+\infty:y_{۱}=(a-۳)x+۵\to m=a-۳\\ x\to-\infty:y_{۲}=(a+۳)x-۷\to m=a+۳\end{cases}$$

برای این‌که زاویه‌ی بین $y_{۱}$ و $y_{۲}$ برابر ۹۰° باشد، باید حاصل‌ضرب شیب آن‌ها برابر -۱ شود:

$$(a-۳)(a+۳)=-۱\Rightarrow a^{۲}-۹=-۱\Rightarrow a^{۲}=۸\Rightarrow a=\pm۲\sqrt{۲}$$

۵۵.گزینه ۳

ابتدا توان ها را یکسان می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{e^{x}+\frac{۴}{e^{x}}}{e^{x}-\frac{۲}{e^{x}}}=\frac{e^{۲x}+۴}{e^{۲x}-۲}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{۲x}+۴}{e^{۲x}-۲}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{۲x}}{e^{۲x}}=۱\Rightarrow y=۱$$ مجانب افقی

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{۲x}+۴}{e^{۲x}-۲}=\frac{e^{-\infty}+۴}{e^{-\infty}-۲}=\frac{۰+۴}{۰-۲}=-۲\to y=-۲$$ مجانب افقی $\left((\text{عدد بزرگتر از یک})^{-\infty}=۰\right)$

$$\text{مخرج}=۰\to e^{۲x}-۲=۰\Rightarrow e^{۲x}=۲\to Lne^{۲x}=Ln۲\Rightarrow ۲x=Ln۲\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}Ln۲$$ مجانب قائم

۵۶.گزینه ۳ **برای پیدا کردن مجانب افقی باید حد تابع را در بی‌نهایت حساب کنیم.**

$$\lim_{x\to\pm\infty}x\cos\frac{\pi x}{۲x+۱}=۰_{\text{حدی}}\times\infty$$ مبهم

برای رفع ابهام از رابطه $\cos\theta=\sin(\frac{\pi}{۲}-\theta)$ استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x\to\pm\infty}x\sin(\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi x}{۲x+۱})=\lim_{x\to\pm\infty}x\sin(\frac{۲\pi x+\pi-۲\pi x}{۲(۲x+۱)})=\lim_{x\to\pm\infty}x\sin(\frac{\pi}{۴x+۲})$$

$$\xlongequal{\lim_{u\to۰}\sin u\sim u}\lim_{x\to\pm\infty}x(\frac{\pi}{۴x+۲})=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\pi x}{۴x}=\frac{\pi}{۴}\to y=\frac{\pi}{۴}$$

۵۷.گزینه ۴ **در نقطه‌ی $x=a$، حد تابع $f(x)$ برابر صفر است و چون $a<۰$، پس:**

$$\lim_{x\to a^{+}}\frac{x}{f(x)}=\frac{a}{۰^{+}}=-\infty$$ و $$\lim_{x\to a^{-}}\frac{x}{f(x)}=\frac{a}{۰^{-}}=+\infty$$

۵۸.گزینه ۳

$$y=\log(1-\frac{1}{x^2})=\log(\frac{x^2-1}{x^2})$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\log(\frac{x^2-1}{x^2})=\lim_{x\to\pm\infty}\log(\frac{x^2}{x^2})=1\to y=1$$ **مجانب افقی**

در توابع به فرم $y=\log_{d}^{\frac{u}{V}}$ ریشه‌های صورت و مخرج می‌توانند مجانب قائم باشند به شرط آنکه حداقل از یک طرف در دامنه تعریف تابع قرار داشته باشند.

$$x^2-1=0\to x=\pm 1\ \ ,\ \ x^2=0\to x=0$$

	-1		0		1	
$+$		$-$		$-$		$+$

$x=1$ مجانب قائم راست و $x=-1$ مجانب قائم چپ است و $x=0$ مجانب قائم نمی‌باشد (چون همسایگی راست و همسایگی چپ آن در دامنه قرار ندارند).

$$\lim_{x\to 1^+}\log\frac{x^2-1}{x^2}=\log 0^+=-\infty\quad ,\quad \lim_{x\to(-1)^-}\log\frac{x^2-1}{x^2}=\log 0^+=-\infty$$

۵۹.گزینه ۴ **مجانب مایل توابع به شکل $y=ax\sqrt[n]{\frac{x+b}{x+d}}$ به صورت $y=ax+\frac{b-d}{n}a$ می‌باشد.**

$$f(x)=2x\cdot\sqrt{\frac{x-3}{x+1}}\xrightarrow{\text{مجانب مایل}}y=2x+\frac{-3-1}{2}(2)\Rightarrow y=2x-4\xrightarrow{x=0}y=-4$$

۶۰.گزینه ۲ **ابتدا مشتق دوم تابع را به‌دست می‌آوریم:**

$$f(x)=(x^2+2x+b)e^{-x}\quad\Rightarrow\quad f'(x)=(2x+2)e^{-x}-(x^2+2x+b)e^{-x}=(-x^2+2-b)e^{-x}$$
$$\Rightarrow\quad f''(x)=-2xe^{-x}-(-x^2+2-b)e^{-x}=(x^2-2x-2+b)e^{-x}$$

برای تقعر رو به پایین باید $f''<0$ باشد و چون $(0,2)$ بزرگ‌ترین بازه‌ای است که تقعر تابع f در آن رو به پایین است. بنابراین $x=0\ ,\ x=2$ ریشه‌های داخل پرانتز می‌باشند $(e^{-x}\neq 0)$ پس داریم:

$$x=0\quad\Rightarrow\quad(0)^2-2(0)-2+b=0\quad\Rightarrow\quad b=2$$
$$x=2\Rightarrow(2)^2-2(2)-2+b=0\Rightarrow b=2$$

۶۱.گزینه ۱ **ابتدا مختصات نقطه‌ی عطف تابع را بدست می آوریم.**

$$y'=3x^2-6x+a\Rightarrow y''=6x-6=0\Rightarrow x=1\xrightarrow{\text{تابع}}y=-2+a+b\to A\Big|^{1}_{-2+a+b}$$
$$y'=3x^2-6x+a\to y'(1)=m_{\text{مماس}}=-3+a$$

معادله‌ی خط مماس : $y-(-2+a+b)=(-3+a)(x-1)\xrightarrow{\text{صدق}\ \big|^{0}_{0}}0+2-a-b=3-a\Rightarrow b=-1$

۶۲.گزینه ۱ **در توابع مشتق‌پذیر اگر $y=k$ عرض اکسترمم نسبی تابع باشد آنگاه خط افقی $y=k$ بر منحنی مماس بوده و معادله تلاقی آنها ریشه‌ی مضاعف دارد.**

چون عرض نقطه‌ی مینیمم تابع برابر ۶ است یعنی خط $y=6$ بر تابع مماس است. پس معادله تلاقی این دو باید ریشه‌ی مضاعف داشته باشد.

معادله تلاقی:

$$\begin{cases}y=2x+\frac{a}{x+1}\\ y=6\end{cases}\xrightarrow{\text{تلاقی}}2x+\frac{a}{x+1}=6\xrightarrow{\times(x+1)}2x^2+2x+a=6x+6\Rightarrow 2x^2-4x+a-6=0$$

شرط ریشه مضاعف: $\Delta=0\Rightarrow 16-4(2)(a-6)=0\Rightarrow 16-8a+48=0\Rightarrow a=8$

طول اکسترمم نسبی: $a=8\xrightarrow{\text{معادله تلاقی}}2x^2-4x+2=0\to x^2-2x+1=0\to(x-1)^2=0\to x=1$

۶۳.گزینه ۴ **تابع f با دامنه‌ی $\mathbb{R}$ بوده و در تمام نقاط، مشتق‌پذیر است کافی است بیشترین مقدار تابع را در بازه‌ی $[0\ ,\ 2\pi]$ بدست آوریم.**

$$f'(x)=\frac{\cos x(۲+\cos x)-(-\sin x)\sin x}{(۲+\cos x)^۲}=\frac{۲\cos x+\overbrace{\cos^۲ x+\sin^۲ x}^{۱}}{(۲+\cos x)^۲}=\frac{۱+۲\cos x}{(۲+\cos x)^۲}=۰\rightarrow ۱+۲\cos x=۰$$

$$\Rightarrow \cos x=-\frac{۱}{۲}=\cos(\pi-\frac{\pi}{۳})=\cos\frac{۲\pi}{۳}\Rightarrow\begin{cases} x=۲k\pi+\alpha\rightarrow x=۲k\pi+\frac{۲\pi}{۳}\rightarrow x=\frac{۲\pi}{۳}\\ x=۲k\pi-\alpha\rightarrow x=۲k\pi-\frac{۲\pi}{۳}\rightarrow x=\frac{۴\pi}{۳}\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(۰)=۰\\ f(\frac{۲\pi}{۳})=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۲-\frac{۱}{۲}}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}\\ f(\frac{۴\pi}{۳})=\frac{\frac{-\sqrt{۳}}{۲}}{۲+\frac{۱}{۲}}=-\frac{\sqrt{۳}}{۳}\end{array}\right\}\Rightarrow \text{بیشترین مقدار تابع}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

دقت کنید:

$$\cos\frac{۲\pi}{۳}=\cos(\pi-\frac{\pi}{۳})=-\cos\frac{\pi}{۳}=-\frac{۱}{۲}\quad,\quad \sin\frac{۲\pi}{۳}=\sin(\pi-\frac{\pi}{۳})=\sin\frac{\pi}{۳}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\cos\frac{۴\pi}{۳}=\cos(\pi+\frac{\pi}{۳})=-\cos\frac{\pi}{۳}=-\frac{۱}{۲}\quad,\quad \sin\frac{۴\pi}{۳}=\sin(\pi+\frac{\pi}{۳})=-\sin\frac{\pi}{۳}=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۶۴.گزینه ۴ نمودار تابع محور x ها را قطع نمی‌کند، پس معادله‌ی $y=۰$ ریشه ندارد بنابراین $a=۰$ است (وگرنه $x=\frac{۱}{a}$ ریشه است.). حال چون عرض اکسترمم برابر ۱ است، پس باید معادله‌ی تلاقی آن منحنی، ریشه‌ی مضاعف داشته باشد.

$$\begin{cases} y=\frac{-۱}{x^۲+bx}\\ y=۱\end{cases}\xrightarrow{\text{تلاقی}}\frac{-۱}{x^۲+bx}=۱\Rightarrow x^۲+bx+۱=۰\xrightarrow{\text{شرط ریشه‌ی مضاعف}}\Delta=۰\Rightarrow b^۲=۴\Rightarrow b=\pm۲\Rightarrow b$$
$=-۲$ غ ق ق

$b=-۲$ به این دلیل مورد قبول نیست که در این صورت طول نقطه‌ی تماس $(-\frac{b}{۲a})$ مثبت می‌شود که با توجه به شکل، قابل قبول نمی‌باشد.

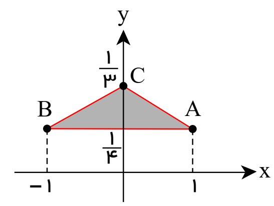
$$\begin{cases} b=۲\\ a=۰\end{cases}\Rightarrow a+b=۲\Rightarrow f(۲)=\frac{-۱}{۴+۴}=-\frac{۱}{۸}$$

۶۵.گزینه ۱

$$f'(x)=\frac{-۲x}{(x^۲+۳)^۲}=۰\Rightarrow x=۰\xrightarrow{\text{تابع}}y=\frac{۱}{۳}\Rightarrow C\left|\begin{array}{l}۰\\ \frac{۱}{۳}\end{array}\right.\quad \text{اکسترمم نسبی}$$

$$f''(x)=\frac{-۲(x^۲+۳)^۲-۲(x^۲+۳)(۲x)(-۲x)}{(x^۲+۳)^۴}$$
$$=\frac{-۲(x^۲+۳)^۲+۸x^۲(x^۲+۳)}{(x^۲+۳)^۴}$$
$$=\frac{(x^۲+۳)(-۲(x^۲+۳)+۸x^۲)}{(x^۲+۳)^۴}=\frac{۶x^۲-۶}{(x^۲+۳)^۳}=۰$$
$\rightarrow x=۱\ ,\ x=-۱$ نقاط عطف $\Rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} x=۱\rightarrow y=\frac{۱}{۴} \rightarrow B\left|\begin{matrix}۱\\ \frac{۱}{۴}\end{matrix}\right. \\ x=-۱\rightarrow y=\frac{۱}{۴}\rightarrow C\left|\begin{matrix}-۱\\ \frac{۱}{۴}\end{matrix}\right. \end{cases}$$



$$S=\frac{\frac{۱}{۱۲}\times ۲}{۲}=\frac{۱}{۱۲}$$

۶۶.گزینه ۴ می‌دانیم اگر تابعی دارای مجانب قائم باشد غیر یکنوا محسوب می‌شود. تابع $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ با شرط $ad-bc>۰$ در هر شاخه صعودی اکید است:

$$ad-bc=۲(-a-۲)-(۱-a)>۰\Rightarrow -۲a-۴-۱+a>۰\Rightarrow a<-۵\quad (I)$$

چون تابع هموگرافیک روی هر شاخه صعودی است و نه روی کل دامنه. اگر بخواهد برای $x<-۶$ صعودی اکید باشد، باید مجانب قائم بعد از $x=-۶$ قرار گیرد.

$$\text{مخرج}=۰\rightarrow x=a+۲\Rightarrow a+۲>-۶\Rightarrow a>-۸\quad (II)$$

از اشتراک I و II به جواب $-۸<a<-۵$ می‌رسیم.

۶۷.گزینه ۳

از تابع داده شده دو بار مشتق می‌گیریم.

$$f(x)=x^{\frac{۴}{۳}}-۲x^{\frac{۱}{۳}}\Rightarrow f'(x)=\frac{۴}{۳}x^{\frac{۱}{۳}}-\frac{۲}{۳}x^{-\frac{۲}{۳}}\Rightarrow f''(x)=\frac{۴}{۹}x^{-\frac{۲}{۳}}+\frac{۴}{۹}x^{-\frac{۵}{۳}}$$

$$=\frac{۴}{۹}(x^{-\frac{۲}{۳}}+x^{-\frac{۵}{۳}})=\frac{۴}{۹}\left(\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲}}+\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۵}}\right)=\frac{۴}{۹}\left(\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲}}+\frac{۱}{x\sqrt[۳]{x^۲}}\right)=\frac{۴}{۹}\left(\frac{x+۱}{\underbrace{x\sqrt[۳]{x^۲}}}\right)=۰\rightarrow x=-۱$$

در $x=۰$ ، y'' وجود ندارد

x	$-\infty$	-۱	۰	$+\infty$
y''	$+$	۰ $-$	$\Vert$	$+$
y	$\cup$	$\cap$		$\cup$

$\rightarrow x=۰\ ,\ x=-۱$ طول نقاط عطف

۶۸.گزینه ۳ چون خط مماس بر منحنی در $x=-۱$ واقع بر منحنی از منحنی عبور کرده است پس $x=-۱$ طول نقطه‌ی عطف منحنی می‌باشد یعنی $f''(-۱)=۰$ است.

$$f'(x)=۳x^۲-۲ax\rightarrow f''(x)=۶x-۲a\rightarrow -۶-۲a=۰\Rightarrow a=-۳\Rightarrow y=x^۳+۳x^۲+b$$

$۱)\ x=-۱\xrightarrow{\text{تابع}}y=۲+b\rightarrow A\left|\begin{matrix}-۱\\ ۲+b\end{matrix}\right.$

$۲)\ y'=۳x^۲+۶x\rightarrow m_{\text{مماس}}=۳(-۱)^۲+۶(-۱)=-۳$

$۳)\ y-(۲+b)=-۳(x+۱)\xrightarrow{\text{صدق}\ \left|\begin{matrix}۰\\ ۲\end{matrix}\right.}۲-۲-b=-۳\rightarrow b=۳$

۶۹.گزینه ۳ تابع درجه‌ی سوم وقتی دارای اکسترمم نسبی است که مشتق آن دارای ۲ ریشه‌ی حقیقی متمایز باشد ($\Delta_{\text{مشتق}}>۰$)

$$y'=x^۲-mx+۴\xrightarrow{\Delta>۰}b^۲-۴ac>۰\rightarrow m^۲-۱۶>۰\rightarrow m>۴ \text{ یا } m<-۴$$

$$x_{\text{عطف}} = \frac{-b}{۳a} = \frac{\frac{m}{۲}}{۳(\frac{۱}{۳})} = \frac{m}{۲}$$

$$m > ۴ \rightarrow \frac{m}{۲} > ۲ \quad \text{یا} \quad m < -۴ \rightarrow \frac{m}{۲} < -۲$$

بنابراین طول نقاط عطف در محدوده‌ی $R - [-۲, ۲]$ قرار خواهد داشت.

۷۰.گزینه ۲ از روی شکل می‌توان متوجه شد که تابع، وقتی $x \to +\infty$ دارای مجانب افقی است.

$$\text{هم‌ارزی واندروالسی} : f(x) = -۲bx + \sqrt{۱}\left|x - \frac{a}{۱ \times ۲}\right| \xrightarrow{x \to +\infty} y = -۲bx + x - \frac{a}{۲}$$

$$\rightarrow y = (-۲b + ۱)x - \frac{a}{۲} \xrightarrow[\text{است } y=k]{\text{مجانب افقی به صورت}} -۲b + ۱ = ۰ \rightarrow b = \frac{۱}{۲}$$

$$f(x) = -x + \sqrt{x^۲ - ax + ۱} \xrightarrow[f(۳)=۰]{\text{از روی شکل}} ۰ = -۳ + \sqrt{۹ - ۳a + ۱} \rightarrow ۳ = \sqrt{۱۰ - ۳a}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} ۹ = ۱۰ - ۳a \rightarrow ۳a = ۱ \rightarrow a = \frac{۱}{۳} \rightarrow ab = \frac{۱}{۶}$$

۷۱.گزینه ۳ در تابع درجه‌ی سوم، نقطه‌ی عطف وسط پاره‌خطی است که نقاط Max و Min را به هم وصل می‌کند. بنابراین کافی است فاصله بین نقاط Max و Min را حساب کرده و حاصل را تقسیم بر ۲ کنیم تا فاصله‌ی نقطه‌ی عطف از Max یا Min بدست آید.

$$AB = \sqrt{(۱+۲)^۲ + (۴-۷)^۲} = \sqrt{۹+۹} = \sqrt{۱۸} = ۳\sqrt{۲}$$

$$Max \text{ فاصله‌ی نقطه‌ی عطف تا نقطه‌ی } = \frac{AB}{۲} = \frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$$

۷۲.گزینه ۲ اگر خط به معادله‌ی $y = ax + b$، مجانب مایل تابع $y = f(x)$ باشد داریم:

$$a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - ax)$$

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^۴ + ۴}}{x^۲ + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^۴}}{x^۲} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^۲}{x^۲} = ۱$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\sqrt{x^۴ + ۴}}{x + ۱} - x\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\sqrt{x^۴ + ۴} - (x^۲ + x)}{x + ۱}\right)$$

$$\overset{\text{پرتوان}}{=\!=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^۴} - x^۲ - x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^۲ - x^۲ - x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{x} = -۱$$

بنابراین مجانب مایل این تابع، خط $y = x - ۱$ است.

۷۳.گزینه ۳ تابع داده شده دارای یک مجانب قائم است بنابراین گزینه‌های ۱ و ۴ حذف می‌شوند زیرا دو مجانب قائم دارند ($x = \pm ۱$). دقت کنید مجانب قائم تابع در سمت چپ محل برخورد نمودار با محور x قرار دارد بنابراین گزینه‌ی ۲ نیز حذف می‌شود زیرا در گزینه‌ی ۲، تابع محور xها را در $x = ۱$ قطع می‌کند و معادله‌ی مجانب قائم آن خط $x = ۳$ است.

۷۴.گزینه ۲ منظور سوال این است که در کدام بازه، تقعر تابع رو به بالا می‌باشد یعنی $f''(x) > ۰$ است.

$$f'(x) = ۲x - \frac{۱}{۲}x^۲ - \frac{۱}{۳}x^۳ \rightarrow f''(x) = ۲ - x - x^۲ = -(x^۲ + x - ۲)$$

$$= -(x+۲)(x-۱) > ۰ \rightarrow \quad \rightarrow x \in (-۲, ۱)$$

x	$-\infty$		-۲		۱		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	۰	$+$	۰	$-$	
$f(x)$		$\cap$		$\cup$		$\cap$	

۷۵.گزینه ۲ می‌دانیم: $\boxed{(e^u)' = u' \cdot e^u \quad , \quad (uv)' = u'v + v'u}$

برای پیدا کردن نقاط بحرانی f' باید ریشه‌های معادله‌ی $f'' = ۰$ را بدست آوریم.

$$f'(x)=(2x-7)e^x+e^x(x^2-7x+14)=e^x(2x-7+x^2-7x+14)=e^x(x^2-5x+7)$$

$$f''(x)=e^x(x^2-5x+7)+(2x-5)e^x=e^x(x^2-5x+7+2x-5)=e^x(x^2-3x+2)=0$$

$$\to x^2-3x+2=0\to(x-1)(x-2)=0\to x_1=1, x_2=2$$

مجموع مربعات ریشه‌ها $=1+4=5$

۷۶.گزینه ۱ **مرکز تقارن تابع هموگرافیک $(y=\dfrac{ax+b}{cx+d})$ محل برخورد مجانب‌های آن یعنی نقطه‌ی $I\left|\begin{matrix}-\frac{d}{c}\\ \frac{a}{c}\end{matrix}\right.$ است.**

مرکز تقارن تابع درجه‌ی سوم $(y=ax^3+bx^2+cx+d)$ همان نقطه‌ی عطف تابع است که طولش از رابطه‌ی $x_{\text{عطف}}=-\dfrac{b}{3a}$ و عرضش از قراردادن طول نقطه در تابع بدست می‌آید.

$$f(x)=\frac{x-3}{x-1}\to \text{مرکز تقارن}: A\left|\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right.$$

$$g(x)=x^3-3x^2+7m\to x_{\text{عطف}}=\frac{3}{3}=1\xrightarrow{\text{تابع}}y_{\text{عطف}}=-2+7m\to \text{مرکز تقارن}:\ B\left|\begin{matrix}1\\-2+7m\end{matrix}\right.$$

چون دو نقطه‌ی A و B بر هم منطبق هستند داریم:

$$-2+7m=1\to m=\frac{3}{7}$$

$$h(x)=x^2-4mx+m\to \text{معادله محور تقارن}: x=-\frac{b}{2a}=\frac{4m}{2}=2m=\frac{6}{7}$$

۷۷.گزینه ۳

مرکز تقارن تابع هموگرافیک $(y=\dfrac{ax+b}{cx+d})$ نقطه‌ی $\left|\begin{matrix}-\frac{d}{c}\\ \frac{a}{c}\end{matrix}\right.$ می‌باشد.

$$-3=-\frac{d}{c}\to -3=\frac{-b}{3}\to b=9 \quad \text{و} \quad 4=\frac{a}{c}\to 4=\frac{a}{3}\to a=12$$

$$\text{پس}: f(x)=\frac{2x}{x^2-108}\to\begin{cases}\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2}{x}=0\to y=0 & \text{مجانب افقی}\\ \text{مخرج}=0\to x^2=108\to x=\pm\sqrt{108} & \text{مجانب‌های قائم}\end{cases}$$

بنابراین، این تابع دارای ۳ مجانب است.

۷۸.گزینه ۴

ریشه‌ی ساده یا مکرر مرتبه‌ی فرد y'' طول نقطه‌ی عطف است.

$$f'(x)=64x^3+96x^2+48x-191\to f''(x)=192x^2+192x+48$$
$$=48(4x^2+4x+1)=48(2x+1)^2=0\to x=-\frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\cup$		$\cup$

$\to$ **تقعر تابع همواره رو به بالا است بنابراین تابع فاقد نقطه‌ی عطف است.**

۷۹.گزینه ۳ **کافی است از تابع، مشتق گرفته و آن را تعیین علامت کنیم.**

$$f(x)=x^{\frac{6}{5}}-12x^{\frac{7}{5}}\to f'(x)=\frac{6}{5}x^{\frac{1}{5}}-\frac{84}{5}x^{\frac{2}{5}}=\frac{6}{5}(x^{\frac{1}{5}}-14x^{\frac{2}{5}})=\frac{6}{5}(\sqrt[5]{x}-14\sqrt[5]{x^2})$$

$$=0\to\sqrt[5]{x}=14\sqrt[5]{x^2}\xrightarrow{\text{توان ۵}}x=14^5x^2\to x(14^5x-1)=0\to x=0, x=(\frac{1}{14})^5$$

x	$-\infty$		۰		$\left(\frac{۱}{۱۴}\right)^{۵}$		$+\infty$
y'		$-$	۰	$+$	۰	$-$	
y		$\searrow$	Min	$\nearrow$	Max	$\searrow$	

تابع، ۲ اکسترمم نسبی دارد. $\rightarrow$

۸۰.گزینه ۳ کافی است از تابع، دوبار مشتق گرفته و کوچک‌تر از صفر قرار دهیم و توجه کنید دامنه‌ی تعریف تابع داده شده $Df=R-\{۰\}$ است.

$$f(x)=x\cdot Lnx^{۲}\to f'(x)=Lnx^{۲}+\frac{۲x}{x^{۲}}\cdot x=Lnx^{۲}+۲$$

$$\to f''(x)=\frac{۲x}{x^{۲}}=\frac{۲}{x}\to$$

x	-∞	۰	+∞
f''(x)	−	‖	+
f(x)	$\frown$	‖	$\smile$

با توجه به جدول، در بازه‌ی $(-\infty,۰)$ تقعر تابع روبه پائین است.

۸۱.گزینه ۳ نمودار تابع از مبدأ مختصات می‌گذرد پس مختصات آن در تابع صدق می‌کند.

$$\Big|\begin{matrix}۰\\۰\end{matrix}\xrightarrow{\text{صدق}}۰=۰+۰+b\to b=۰$$

در $x=۳$، مماس افقی است بنابراین مشتق در $x=۳$ برابر صفر است.

$$f'(x)=-۳x^{۲}+۲ax\xrightarrow{f'(۳)=۰}-۲۷+۶a=۰\to a=\frac{۲۷}{۶}=\frac{۹}{۲}$$

پس: $f(x)=-x^{۳}+\frac{۹}{۲}x^{۲}\to f(۴)=-۶۴+۷۲=۸$

۸۲.گزینه ۱

مجانب قائم : $y\to\infty:\frac{x}{x-۱}+\frac{۲y}{y}=۴\to\frac{x}{x-۱}=۲\to ۲x-۲=x\to x=۲$

مجانب افقی : $x\to\infty:\frac{x}{x}+\frac{۲y}{y+۱}=۴\to\frac{۲y}{y+۱}=۳\to ۳y+۳=۲y\to y=-۳$

بنابراین محل تقاطع این دو مجانب، نقطه‌ی $\Big|\begin{matrix}۲\\-۳\end{matrix}$ می‌باشد.

۸۳.گزینه ۳ با توجه به نمودارهای تابع درجه‌ی سوم، ضریب $x^{۳}$ باید مثبت باشد.

$$۳-۲a>۰\to ۲a<۳\to a<\frac{۳}{۲}\xrightarrow{a\text{ عددی طبیعی است}}a=۱$$

بنابراین تابع به صورت $f(x)=x^{۳}+bx^{۲}$ است از طرفی $x=۳$ طول نقطه‌ی Min تابع است پس $f'(۳)=۰$ است.

$$f'(x)=۳x^{۲}+۲bx\xrightarrow{f'(۳)=۰}۲۷+۶b=۰\to b=-\frac{۹}{۲}$$

بنابراین $b-a=-\frac{۹}{۲}-۱=-\frac{۱۱}{۲}$ است.

۸۴.گزینه ۱

$$\Big|\begin{matrix}۰\\۰\end{matrix}\xrightarrow{\text{صدق در تابع}}۰=\frac{۰+۰+b}{۰-۱}\to b=۰$$

تابع در $x=۱$ دارای حد است.

$$x=۱\xrightarrow{\text{عدد گذاری}}\frac{۱+a+b}{۰}=\frac{۱+a}{۰}\xrightarrow{\text{این کسر به صورت }\frac{۰}{۰}\text{ است که پس از رفع ابهام، جوابش عدد می‌شود}}۱+a=۰$$

$$\to a=-۱$$

پس : $f(x)=\frac{x^{۳}-x}{x-۱}=\frac{x(x^{۲}-۱)}{x-۱}=\frac{x(x+۱)(x-۱)}{(x-۱)}f(x)=x(x+۱)\to f(۲)=۶$

۸۵.گزینه ۲ مجانب قائم و مجانب مایل یکدیگر را روی محور xها قطع کرده‌اند و مجانب قائم تابع خط $x=۲$ می‌باشد. مجانب مایل از دو نقطه‌ی $A\Big|\begin{matrix}۲\\۰\end{matrix}$ و $B\Big|\begin{matrix}۰\\۲\end{matrix}$ عبور می‌کند بنابراین معادله‌ی آن $x+y=۲$ یا $y=-x+۲$ است. برای پیدا کردن مجانب مایل، کافی است صورت را بر مخرج تقسیم کنید.

$$\begin{array}{l|l} ax^{۲}+bx+c & -x+۲ \\ \cline{2-2} -ax^{۲}+۲ax & -ax-(۲a+b) \\ \hline (۲a+b)x+c & \\ (۲a+b)x+۲(۲a+b) & \\ \hline ۴a+۲b+c & \end{array}$$

مجانب مایل: $\rightarrow y=-ax-(۲a+b)$

اگر مجانب مایل بدست آمده را با $y=-x+۲$ مقایسه کنیم داریم: $b=-۴$ و $a=۱$ و تابع به صورت $y=\dfrac{x^{۲}-۴x+c}{۲-x}$ در می‌آید.

با توجه به شکل منحنی در $x=۰$ مینیمم دارد پس $y'(۰)=۰$ است پس:

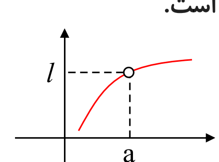
$$\Rightarrow y'=\frac{(۲x-۴)(۲-x)+x^{۲}-۴x+c}{(۲-x)^{۲}}\Bigg|_{x=۰}=۰\Rightarrow -۸+c=۰\Rightarrow c=۸\Rightarrow b-c=-۱۲$$

۸۶.گزینه ۳ اولاً $a<۰$ است، زیرا $f(x)\leq ۰$ ($x^{۲}$ و e^{bx} مثبت هستند) ثانیاً $f'(\frac{۱}{۲})=۰$ است.

$$f(x)=a\frac{x^{۲}}{e^{bx}}\Rightarrow f'(x)=a\frac{۲x(e^{bx})-be^{bx}x^{۲}}{e^{۲bx}}=a\cdot\frac{x\cdot e^{bx}\cdot(۲-bx)}{e^{۲bx}}$$

$$=f'(x)=a\frac{x(۲-bx)}{e^{bx}}\xrightarrow{f'(\frac{۱}{۲})=۰}۲-\frac{b}{۲}=۰\Rightarrow b=۴$$

۸۷.گزینه ۲ نقاط توخالی روی نمودارها معمولاً در توابع کسری می‌باشند و صورت و مخرج کسر به ازای x آن نقطه‌ی توخالی، صفر است.



$$\lim_{x\to a}f(x)=l \quad \text{و} \quad g(a)=h(a)=۰ \quad \text{و} \quad f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$$

با توجه به این توضیحات، $x=۰$ هم صورت و هم مخرج را صفر می‌گویند.

$$x=۰\xrightarrow{\text{صدق در صورت}}۰-۰-c=۰\rightarrow c=۰$$

$$x=۰\xrightarrow{\text{صدق در مخرج}}۰+۰+d=۰\rightarrow d=۰$$

پس : $y=\dfrac{ax^{۲}-ax}{x^{۲}+bx}=\dfrac{x(ax-a)}{x(x+b)}=\dfrac{ax-a}{x+b}$

مجانب قائم : $x=۲\xrightarrow{\text{صدق در مخرج}}۲+b=۰\rightarrow b=-۲$

مجانب افقی : $y=۱\xrightarrow{\text{حد در بی‌نهایت}}\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{ax}{x}=a=۱\rightarrow a=۱$

بنابراین تابع $g(x)$ به صورت $g(x)=x^{۳}-۲x^{۲}+x$ در می‌آید و می‌دانیم مرکز تقارن تابع درجه‌ی سوم همان نقطه‌ی عطف تابع است و طول نقطه‌ی عطف در تابع درجه‌ی سوم از رابطه‌ی $x_{\text{عطف}}=\dfrac{-b}{۳a}$ به دست می‌آید.

$$x_{\text{عطف}}=\frac{-b}{۳a}\rightarrow x_{\text{عطف}}=\frac{۲}{۳}$$

۸۸.گزینه ۳ طول نقاط بحرانی، ریشه‌های مشتق هستند.

$$f(x)=x^{۳}+ax^{۲}+bx \Rightarrow f'(x)=۳x^{۲}+۲ax+b$$

$$\begin{cases} x=-۱ \xrightarrow{\text{صدق}} ۰=۳-۲a+b \to ۲a-b=۳ \\ x=-۳ \xrightarrow{\text{صدق}} ۰=۲۷+۶a+b \to ۶a+b=-۲۷ \end{cases} \to a=-۳\ ,\ b=-۹$$

$$f'(x)=۳x^{۲}-۶x-۹ \to f''(x)=۶x-۶=۰ \to x=۱ \xrightarrow{\text{تابع}} y_{\text{عطف}}=۱+\overbrace{a+b}^{-۱۲}=-۱۱$$

۸۹.گزینه ۲

$$f(x)=\sqrt[۳]{x}\,(x+۲) \to f(x)=x^{\frac{۱}{۳}}(x+۲)=x^{\frac{۴}{۳}}+۲x^{\frac{۱}{۳}} \to f'(x)=\frac{۴}{۳}x^{\frac{۱}{۳}}+\frac{۲}{۳}x^{-\frac{۲}{۳}}$$

$$\to f''(x)=\frac{۴}{۹}x^{-\frac{۲}{۳}}-\frac{۴}{۹}x^{-\frac{۵}{۳}}=\frac{۴}{۹}\left(\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^{۲}}}-\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^{۵}}}\right)=\frac{۴}{۹}\left(\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^{۲}}}-\frac{۱}{x\sqrt[۳]{x^{۲}}}\right)=\frac{۴}{۹}\left(\frac{x-۱}{x\sqrt[۳]{x^{۲}}}\right)$$

$x=۱$ ریشه‌ی ساده‌ی $f''=۰$ می‌باشد، پس طول نقطه‌ی عطف تابع است.

در $x=۰$ تابع f'' تغییر علامت دارد و f دارای خط مماس قائم است، پس $x=۰$ هم عطف تابع است.

x	$-\infty$		۰		۱		$+\infty$
y″		+	‖	−	۰	+	

بنابراین نقاط عطف، نقاط $A\begin{vmatrix}۰\\۰\end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix}۱\\۳\end{vmatrix}$ هستند که فاصله‌ی آن‌ها برابر است با: $AB=\sqrt{۹+۱}=\sqrt{۱۰}$

۹۰.گزینه ۳

تابع داده شده به صورت $y=x^{۳}+۳x^{۲}+x$ است.

$$۱)\ x_{\text{عطف}}=-\frac{b}{۳a}=-\frac{۳}{۳}=-۱ \xrightarrow{\text{تابع}} y=-۱+۳-۱=۱ \to A\begin{vmatrix}-۱\\۱\end{vmatrix}$$

$$۲)\ y=x^{۳}+۳x^{۲}+x \to y'=۳x^{۲}+۶x+۱ \xrightarrow{x=-۱} m_{\text{مماس}}=۳-۶+۱=-۲$$

$$۳)\ y-۱=-۲(x+۱) \to y=-۲x-۱$$

گزینه‌ی اول در معادله‌ی این خط، صدق می‌کند.

۹۱.گزینه ۱ کافی است که ریشه‌های مشتق را پیدا کرده و مشتق را تعیین علامت کنیم.

$$f'(x)=(x^{۲}-۳x+۲)(x^{۲}-۱۰x+۹)=(x-۱)(x-۲)(x-۱)(x-۹)=(x-۱)^{۲}(x-۲)(x-۹)=۰$$

$$\to x=۱\ ,\ x=۲\ ,\ x=۹ \to$$

x	$-\infty$		۱		۲		۹		$+\infty$
y'		+	۰	+	۰	−	۰	+	
y		↗		↗	Max	↘	Min	↗	

بنابراین تابع f دارای یک Max است.

۹۲.گزینه ۲ چون بازه‌ای داده نشده است دامنه‌ی تعریف تابع را به عنوان بازه در نظر می‌گیریم.

$$\begin{matrix} x-۲\geq ۰ \to x\geq ۲ \\ ۱۲-۲x\geq ۰ \to x\leq ۶ \end{matrix} \quad \to \quad Df=[۲,۶]$$

کافی است مقدار تابع را به ازای ابتدا و انتهای بازه و طول نقطه‌ی بحرانی (در صورت وجود) بدست آوریم.

$$f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x-۲}}-\frac{۱(-۲)}{۲\sqrt{۱۲-x}}=\frac{۱}{۲\sqrt{x-۲}}+\frac{۱}{\sqrt{۱۲-x}}$$

مشتق صفر نمی‌شود به ازای $x=۲$ و $x=۱۲$ مشتق وجود ندارد که هیچ کدام بحرانی نمی‌باشند زیرا یکی ابتدای بازه است و دیگری در بازه قرار ندارد.

$$f(۲) = ۰ - \sqrt{۸} = -۲\sqrt{۲}\ ,\ f(۶) = \sqrt{۴} - ۰ = ۲$$

پس Max مطلق تابع برابر ۲ است.

۹۳.گزینه ۱

علامت مشتق اول و دوم را در اطراف $x=\frac{\pi}{4}$ مشخص می‌کنیم.

$$f'(x)=2\cos 2x+2\sin 2x \to f'(\frac{\pi}{4})=2(0)+2(1)=2>0 \to \quad \text{صعودی}$$

$$f''(x)=-4\sin 2x+4\cos 2x \to f''(\frac{\pi}{4})=-4(1)+0=-4<0 \to \quad \text{تقعر رو به پایین}$$

بنابراین گزینه‌ی اول صحیح است.

۹۴.گزینه ۱ چون مجانب افقی، جواب حد تابع در بی نهایت است و این تابع دارای مجانب افقی است باید بزرگ‌ترین توان x صورت با بزرگ‌ترین توان x مخرج با هم برابر باشند بنابراین x^3 باید از صورت حذف شود.

$$a-1=0 \to a=1 \to g(x)=\frac{2x+5}{x-4}$$

$g(x)$ یک تابع هموگرافیک است $(y=\frac{ax+b}{cx+d})$ که مرکز تقارن آن $W\left|\begin{matrix}-\frac{d}{c}\\ \frac{a}{c}\end{matrix}\right.$ است.

$$W\left|\begin{matrix}-\frac{d}{c}\\ \frac{a}{c}\end{matrix}\right. \to W\left|\begin{matrix}4\\ 2\end{matrix}\right. \to WO=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

۹۵.گزینه ۲ چون توان صورت از مخرج بیشتر است بنابراین تابع فاقد مجانب افقی است و چون بزرگ‌ترین توان x صورت از بزرگترین توان x مخرج، یک واحد بیش‌تر است، صورت را بر مخرج تقسیم می‌کنیم تا در صورت امکان مجانب مایل تابع را بدست آوریم.

$$\begin{array}{r|l} x^3 & x^2-6x+9 \\ \cline{2-2} -x^3+6x^2-9x & x+6 \\ \cline{1-1} 6x^2-9x & \\ -6x^2+36x-54 & \\ \cline{1-1} 27x-54 & \end{array} \qquad \Rightarrow y=x+6 \quad \text{:مجانب مایل}$$

$$\text{مخرج}=0 \to x^2-6x+9=0 \to (x-3)^2=0 \to x=3 \quad \text{:مجانب قائم}$$

واضح است که محل تلاقی این دو مجانب، نقطه‌ی $\left|\begin{matrix}3\\ 9\end{matrix}\right.$ است.

۹۶.گزینه ۱ نقطه‌ی $\left|\begin{matrix}2\\ 0\end{matrix}\right.$ ، Max نسبی تابع است بنابراین در تابع صدق می‌کند و طولش، مشتق را صفر می‌کند.

$$\left|\begin{matrix}2\\ 0\end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{صدق}} 0=8m-4n-8 \to 8m-4n=8 \to 2m-n=2$$

$$\left|\begin{matrix}2\\ 0\end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{طولش، مشتق را صفر می‌کند}} y'=3mx^2-2nx \to 0=12m-4n \to 3m-n=0$$

$$\begin{cases}2m-n=2\\ 3m-n=0\end{cases} \to m=-2 \;,\; n=-6$$

۹۷.گزینه ۲ کافی است از تابع مشتق گرفته و مساوی صفر قرار داده و مختصات اکسترمم‌های تابع را بدست آوریم.

$$y=(x-۱)^۲(x-۲)\rightarrow y'=۲(x-۱)(x-۲)+(x-۱)^۲=\underbrace{(x-۱)}_{\text{فاکتور}}(۲x-۴+x-۱)$$

$$=(x-۱)(۳x-۵)=۰\rightarrow x=۱\ ,\ x=\frac{۵}{۳}$$

$\rightarrow$

x	$-\infty$		۱		$\frac{۵}{۳}$		$+\infty$
y'		$+$	۰	$-$	۰	$+$	
y		$\nearrow$	۰	$\searrow$	$\frac{-۴}{۲۷}$	$\nearrow$	
			Max		Min		

$$A\left|\begin{matrix}۱\\۰\end{matrix}\right.\ ,\ B\left|\begin{matrix}\frac{۵}{۳}\\-\frac{۴}{۲۷}\end{matrix}\right.\ \rightarrow\ AB=\sqrt{(۱-\frac{۵}{۳})^۲+(۰+\frac{۴}{۲۷})^۲}=\sqrt{\frac{۴}{۹}+\frac{۱۶}{۲۷\times۲۷}}$$

$$=\sqrt{\frac{۴}{۹}(۱+\frac{۴}{۳\times۲۷})}=\frac{۲}{۳}\sqrt{۱+\frac{۴}{۸۱}}=\frac{۲}{۳}\sqrt{\frac{۸۵}{۸۱}}=\frac{۲}{۲۷}\sqrt{۸۵}$$

۹۸.گزینه ۱

$$f(x)=x(۱-x^۲)^{\frac{۱}{۲}}=x\sqrt{۱-x^۲}$$

چون بازه‌ای داده نشده است دامنه‌ی تعریف را به عنوان بازه در نظر می‌گیریم.

$$Df:۱-x^۲\geq۰\ \rightarrow\ x^۲\leq۱\ \rightarrow\ -۱\leq x\leq۱\ \rightarrow x\in[-۱,۱]$$

کافی است مقدار تابع را به ازای ابتدا و انتهای بازه و طول نقاط بحرانی (در صورت وجود) بدست آوریم.

$$f'(x)=\sqrt{۱-x^۲}+\frac{۱(-۲x)}{۲\sqrt{۱-x^۲}}x=\sqrt{۱-x^۲}-\frac{x^۲}{\sqrt{۱-x^۲}}=\frac{۱-x^۲-x^۲}{\sqrt{۱-x^۲}}=\frac{۱-۲x^۲}{\sqrt{۱-x^۲}}$$

$$\rightarrow\begin{cases}\text{صورت}\ =۰\rightarrow۱-۲x^۲=۰\rightarrow x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\ ,\ x=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\\[2ex]\text{مخرج}=۰\rightarrow۱-x^۲=۰\rightarrow x=\pm۱\ :\ \text{بحرانی نیستند زیرا ابتدا و انتهای بازه هستند}\end{cases}$$

$$f(-۱)=۰\ ,\ f(۱)=۰\ ,\ f(\frac{\sqrt{۲}}{۲})=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{۱}{۲}\ ,\ f(-\frac{\sqrt{۲}}{۲})=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}=-\frac{۱}{۲}$$

بنابراین ماکسیمم مطلق تابع در بازه‌ی داده شده برابر $\frac{۱}{۲}$ است.

۹۹.گزینه ۱ **باید بازه‌ای را بیابیم که در آن مشتق دوم، منفی است. توجه کنید دامنه‌ی تعریف تابع** $Df:x-۳\geq۰\ \rightarrow[۳,+\infty)$ **است.**

$$f(x)=x\sqrt{x-3}\rightarrow f'(x)=\sqrt{x-3}+\frac{x}{2\sqrt{x-3}}=\frac{2(x-3)+x}{2\sqrt{x-3}}=\frac{3x-6}{2\sqrt{x-3}}$$

$$\rightarrow f''(x)=\frac{3(2\sqrt{x-3})-2(\frac{1}{2\sqrt{x-3}})(3x-6)}{(2\sqrt{x-3})^2}=\frac{6\sqrt{x-3}-\frac{3x-6}{\sqrt{x-3}}}{4(x-3)}$$

$$=\frac{\frac{6(x-3)-(3x-6)}{\sqrt{x-3}}}{4(x-3)}=\frac{3x-12}{4\sqrt{x-3}(x-3)}=0\rightarrow 3x=12\rightarrow x=4$$

و به ازای $x=3$ ، مشتق دوم وجود ندارد.

$\longrightarrow$

x	۳		۴	$+\infty$
y″		$-$	۰	$+$
y	۰	$\frown$	۴	$\frown$

تقعر تابع در بازه‌ی $(3,4)$ رو به پایین است پس بیشترین مقدار $b-a$ برابر یک است.

۱۰۰.گزینه ۳ ابتدا معادله‌ی مجانب افقی تابع را بدست می‌آوریم.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)\overset{\text{پر توان}}{=\!=\!=}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^2}{3x^2}=\frac{a}{3}\rightarrow y=\frac{a}{3}$$

باتوجه به نمودار داده شده مشخص است که نقطه‌ی $\left|\begin{matrix}0\\ \frac{a}{3}\end{matrix}\right.$ روی نمودار قرار دارد.

$$\left|\begin{matrix}0\\ \frac{a}{3}\end{matrix}\right.\xrightarrow{\text{صدق}}\frac{a}{3}=\frac{0-0+12}{0+6}\rightarrow a=6$$

تابع بر محور x ها در نقطه‌ای به طول منفی مماس است بنابراین معادله‌ی $f(x)=0$ دارای ریشه‌ی مضاعف با طول منفی است.

$$\begin{cases}y=\dfrac{6x^2-bx+12}{3x^2+6}\\ y=0\end{cases}\xrightarrow{\text{تلاقی}}6x^2-bx+12=0\quad\text{:معادله‌ی تلاقی}$$

شرط ریشه‌ی مضاعف : $\Delta=0\rightarrow b^2-4ac=0\rightarrow b^2-288=0\rightarrow b=\pm 12\sqrt{2}$

ریشه‌ی مضاعف $(\frac{-b}{2a})$ یعنی $\frac{b}{12}$ باید منفی باشد پس $b=-12\sqrt{2}$ قابل قبول است بنابراین $a+b=6-12\sqrt{2}$ است.

۱۰۱.گزینه ۱ چون توابع به صورت $g(x)$ همواره نزولی هستند بنابراین باید $g'(x)\leq 0$ باشد.

$$g'(x)=-x^2+(m+1)x-1\leq 0$$

و می‌دانیم شرط آن‌که یک عبارت درجه‌ی دوم، کوچکتر مساوی صفر باشد آن است که $a<0$ و $\Delta\leq 0$ باشند.

$$\begin{cases}a<0\rightarrow -1<0\ :\text{برقرار است}\\ \Delta\leq 0\rightarrow b^2-4ac\leq 0\rightarrow (m+1)^2-4\leq 0\rightarrow (m+1)^2\leq 4\rightarrow -2\leq m+1\leq 2\quad (*)\end{cases}$$

$$x_{\text{عطف}}=\frac{-b}{3a}=\frac{-(\frac{m+1}{2})}{3(\frac{-1}{3})}=\frac{m+1}{2}$$

$$*:\ -2\leq m+1\leq 2\ \rightarrow -1\leq\frac{m+1}{2}\leq 1$$

پس مجموعه‌ی طول نقاط عطف این توابع در بازه‌ی $[-1,1]$ است.

توجه کنید طول نقطه‌ی عطف در تابع درجه‌ی سوم $(y=ax^3+bx^2+cx+d)$ از رابطه‌ی $x_{\text{عطف}}=\frac{-b}{3a}$ بدست می آید.

۱۰۲. گزینه ۱ در تابع درجه‌ی سوم $y=ax^3+bx^2+cx+d$ طول نقطه‌ی عطف از رابطه‌ی $x_{\text{عطف}}=\frac{-b}{3a}$ بدست می‌آید.

$$1)\ x_{\text{عطف}}=\frac{-b}{3a}=\frac{6}{6}=1\xrightarrow{\text{تابع}}y=-5\to A\left|\begin{matrix}1\\-5\end{matrix}\right.$$

$$2)\ y'=6x^2-12x\to m_{\text{مماس}}=6(1)-12(1)=-6$$

$$3)\ y+5=-6(x-1)\xrightarrow{x=0}y+5=6\to y=1$$

۱۰۳. گزینه ۳ می‌دانیم: $\boxed{Lna^n=nLna\ ,\quad y=Lnu\to y'=\frac{u'}{u}\ ,\quad (uv)'=u'v+v'u}$

دامنه‌ی تعریف تابع $Df: x>0$ است. کافی است از تابع دو بار مشتق گرفته و کوچکتر از صفر قرار دهیم.

$$f(x)=\frac{x-2}{3}Lnx^3\to f(x)=(x-2)Lnx\to f'(x)=Lnx+\frac{1}{x}(x-2)=Lnx+\frac{x-2}{x}$$

$$\to f''(x)=\frac{1}{x}+\frac{1(x)-1(x-2)}{x^2}\to f''(x)=\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}=\underbrace{\frac{x+2}{x^2}}_{+}$$

چون $x>0$ است پس $x+2>0$ می‌باشد، بنابراین $f''(x)>0$ و تقعر منحنی همواره رو به بالا است.

۱۰۴. گزینه ۲ مرکز تقارن تابع هموگرافیک $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ نقطه‌ی $W\left|\begin{matrix}-\frac{d}{c}\\ \frac{a}{c}\end{matrix}\right.$ است و مرکز تقارن تابع درجه‌ی سوم همان نقطه‌ی عطف تابع است که طولش از رابطه‌ی $x_{\text{عطف}}=\frac{-b}{3a}$ بدست می‌آید و آن را در تابع قرار داده و عرض نقطه‌ی عطف بدست می‌آید.

$$f(x)=\frac{3x+5}{x-3}\to A\left|\begin{matrix}-\frac{d}{c}=3\\ \frac{a}{c}=3\end{matrix}\right.\quad\to A\left|\begin{matrix}3\\3\end{matrix}\right.$$

$$g(x)=x^3-29x+1\to x_{\text{عطف}}=\frac{-b}{3a}=\frac{0}{3}=0\xrightarrow{\text{تابع}}y_{\text{عطف}}=1\to B\left|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right.$$

$$AB=\sqrt{(3-0)^2+(3-1)^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$$

۱۰۵. گزینه ۴ تابع داده شده به صورت $f(x)=\frac{a}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3-\frac{b}{2}x^2$ است. $x=2$ طول Maxنسبی است پس $f'(2)=0$ است.

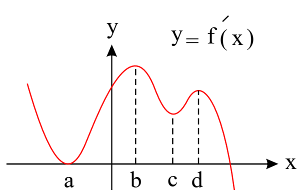
$$f'(x)=ax^3+2x^2-bx\xrightarrow{f'(2)=0}8a+8-2b=0$$

از طرفی تابع در $x=0$ دارای عطف افقی است پس $f''(0)=0$ است.

$$f''(x)=3ax^2+4x-b\xrightarrow{f''(0)=0}0+0-b=0\to b=0\ ,\ a=-1$$

پس $2a-b=-2$ است.

۱۰۶. گزینه ۴ برای تعیین نقاط عطف تابع f باید تابع $y=f''(x)$ و یا به عبارت دیگر $y=(f'(x))'$ را تعیین علامت کنیم
بنابراین در نمودار روبرو باید مشتق تابع (شیب نمودار) را تعیین علامت کنیم.



$\to$

x		a		b		c		d	
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\cap$		$\cup$		$\cap$		$\cup$		$\cap$

بنابراین تابع $y=f(x)$ در a و b و c و d دارای عطف است.

۱۰۷.گزینه ۴

$$g(x)=\frac{x}{\sqrt{x-1}}\rightarrow \text{مخرج}=0\rightarrow x=1:\ \text{مجانب قائم}$$

تابع $g(x)$ مجانب دیگری ندارد.

$$f(x)=\log\frac{x}{x-1}\rightarrow\begin{cases} x=0:\ \text{مجانب قائم}\xleftarrow{\text{علت}}\lim\limits_{x\to 0^-}\log\frac{x}{x-1}=\log 0^+=-\infty \\ x=1:\ \text{مجانب قائم}\xleftarrow{\text{علت}}\lim\limits_{x\to 1^+}\log\frac{x}{x-1}=\log(+\infty)=+\infty \end{cases}$$

از طرفی $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\log\frac{x}{x}=\log 1=0\rightarrow y=0:$ مجانب افقی

بنابراین تابع $g(x)$ دارای یک مجانب $(a=1)$ و تابع $f(x)$ دارای سه مجانب است $(b=3)$ پس $a+b=4$ است.

توجه کنید توابع به فرم $y=\log_a\frac{u}{v}$ به ازای $u=0$ و $v=0$ دارای مجانب قائم هستند به شرط آنکه حداقل یک طرفشان در دامنه‌ی تعریف باشد (حداقل یک طرفشان مثبت باشد).

۱۰۸.گزینه ۳ باید فواصلی را بیابیم که در آن فواصل $y'<0$ و $y''>0$ است.

$$y=7-x^4+4x^2\rightarrow y'=-4x^3+8x=-4x(x^2-2)=0\rightarrow x=0\ ,\ x=\sqrt{2}\ ,\ x=-\sqrt{2}$$

$$\rightarrow\begin{array}{c|ccccccccc} x & -\infty & & -\sqrt{2} & & 0 & & \sqrt{2} & & +\infty \\ \hline y' & & + & 0 & - & 0 & + & 0 & - & \\ \hline y & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & \end{array}\rightarrow x\in(-\sqrt{2},0)\cup(\sqrt{2},+\infty)$$

$$y''=-12x^2+8>0\rightarrow 12x^2<8\rightarrow x^2<\frac{8}{12}\rightarrow x^2<\frac{2}{3}\rightarrow -\sqrt{\frac{2}{3}}<x<\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\rightarrow\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}<x<\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\rightarrow\frac{-\sqrt{6}}{3}<x<\frac{\sqrt{6}}{3}\rightarrow x\in(\frac{-\sqrt{6}}{3},\frac{\sqrt{6}}{3})$$

از اشتراک دو جواب بدست آمده به جواب $x\in(\frac{-\sqrt{6}}{3},0)$ می‌رسیم.

۱۰۹.گزینه ۲ برای محاسبه‌ی اکسترمم‌های مطلق یک تابع در بازه‌ی $[a,b]$ کافی است که مقدار تابع را به ازای طول یا طول‌های نقاط بحرانی به‌دست آوریم سپس مقدار تابع را به ازای ابتدا و انتهای بازه به‌دست آوریم. در بین اعداد بزرگ‌ترین آن‌ها Max مطلق و کوچک‌ترین آن‌ها Min مطلق است. اگر بازه داده نشد دامنه‌ی تعریف تابع را به‌عنوان بازه در نظر می‌گیریم. دقت کنید دامنه‌ی تعریف این تابع
$Df=(-\infty,+\infty)$ است.

$$f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{5}{3}x^3-3x^2+1\rightarrow f'(x)=x^3-5x^2-6x=x(x^2-5x-6)$$

$$=x(x-6)(x+1)=0\rightarrow\begin{cases}x=0\\x=6\\x=-1\end{cases}$$

$$f(\pm\infty)=\frac{1}{4}(\pm\infty)^4=+\infty\quad,\quad f(0)=1\quad,\quad f(-1)=\frac{1}{4}+\frac{5}{3}-3+1=\frac{-1}{12}$$

$$f(6)=324-360-108+1=-143$$

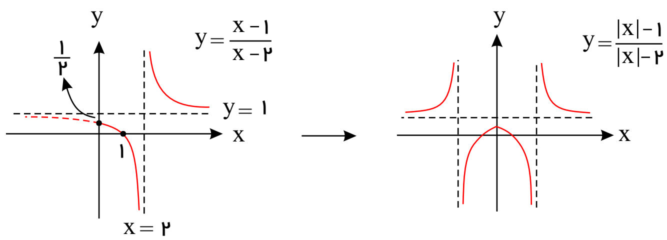
این تابع Max مطلق ندارد و Min مطلق آن -143 است.

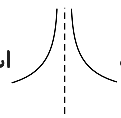
۱۱۰. گزینه ۳   برای رسم نمودار $y=f(|x|)$ کافی است ابتدا نمودار $y=f(x)$ را رسم کنیم سپس قسمت‌هایی از شکل را که سمت چپ محور x قرار دارد را حذف کرده و قرینه‌ی قسمت سمت راست را نسبت به محور yها رسم کنیم.

تابع $y=\dfrac{x-۱}{x-۲}$ یک تابع هموگرافیک است.

مجانب افقی : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x}{x}=۱\to y=۱$ ، مجانب قائم : $x=۲\to ۰=$ مخرج

$y=۰\to x=۱$ ، $x=۰\to y=\dfrac{۱}{۲}$ ، منحنی در ربع اول و سوم مجانب‌هایش قرار دارد $y'=\dfrac{-۱}{(x-۱)^۲}<۰\to$



۱۱۱.گزینه ۲ چون شکل تابع در اطراف مجانب قائم به‌صورت  است بنابراین $x=-۲$ ریشه‌ی مضاعف مخرج است

بنابراین مخرج باید به‌صورت $(x+۲)^۲$ باشد.

$$(x+۲)^۲=x^۲+۴x+۴\xrightarrow{\text{مقایسه با } x^۲-bx+c} b=-۴\ ,\ c=۴$$

بنابراین تابع به‌صورت $f(x)=\dfrac{x^۲-a}{(x+۲)^۲}$ است. چون در $x=۳$ مماس افقی است پس $f'(۳)=۰$ است.

$$f'(x)=\frac{۲x(x+۲)^۲-۲(x+۲)(x^۲-a)}{(x+۲)^۴}\xrightarrow{f'(۳)=۰}۶(۲۵)-۲(۵)(۹-a)=۰$$

$$\xrightarrow{\div ۵}۶(۵)-۲(۹-a)=۰\to ۳۰-۱۸+۲a=۰\to ۲a=-۱۲\to a=-۶$$

پس $a+b+c=-۶$ است.

۱۱۲.گزینه ۱

$$f(x)=\frac{۲}{۳}x^۳-(\frac{m-۲}{۲})x^۲+۸x+۳\to f'(x)=۲x^۲-(m-۲)x+۸$$

باید معادله‌ی $f'(x)=۰$ دارای دو ریشه‌ی متمایز مثبت باشد و می‌دانیم شرط آن‌که یک معادله‌ی درجه‌ی دوم دارای دو ریشه‌ی متمایز مثبت باشد آن است که $\Delta>۰$ و $\dfrac{c}{a}>۰$ (ضرب دو ریشه) و $\dfrac{-b}{a}>۰$ (جمع دو ریشه) باشد.

$$\Delta>۰\to b^۲-۴ac>۰\to(m-۲)^۲-۶۴>۰\to(m-۲)^۲>۶۴\to\begin{cases}m-۲>۸\to m>۱۰\\ \text{یا}\\ m-۲<-۸\to m<-۶\end{cases}$$

$$\frac{-b}{a}>۰\to\frac{m-۲}{۲}>۰\to m-۲>۰\to m>۲$$

$$\frac{c}{a}>۰\to\frac{۸}{۲}>۰\to \text{برقرار است}$$

از اشتراک جواب‌های به‌دست آمده به جواب $m>۱۰$ می‌رسیم.

۱۱۳.گزینه ۳ از روی شکل مشخص است که محور عرض یعنی $(x=۰)$ مجانب قائم است بنابراین در مخرج صدق می‌کند:

$$x=۰\xrightarrow{\text{صدق در مخرج}}۰+۳b=۰\to b=۰$$

بنابراین تابع به‌صورت $f(x)=\dfrac{x^۲-۲ax+۳}{-x}=-x+۲a-\dfrac{۳}{x}$ درمی‌آید. شکل دارای مجانب مایل است بنابراین باید حد تابع

مجانب مایل: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(-x+۲a-\overbrace{\frac{۳}{x}}^{۰}) \to y=-x+۲a$

طبق شکل، عرض از مبدأ مجانب مایل منفی است یعنی اگر به‌جای x عدد صفر قرار دهیم y باید منفی شود.

$x=0 \to 0+2a<0 \to a<0$

۱۱۴.گزینه ۲

$$f(x)=-x^4-8x^3-2ax^2-b \to f'(x)=-4x^3-24x^2-4ax$$

$$\to f'(x)=-4x(x^2+6x+a)=0 \to \begin{cases} -4x=0 \to x=0 \\ x^2+6x+a=0 \end{cases}$$

باتوجه به نمودار، مشتق تابع تنها در دو نقطه برابر صفر است پس معادله‌ی $x^2+6x+a=0$ باید دارای ریشه‌ی مضاعف باشد.

$\Delta=0 \to b^2-4ac=0 \to 36-4a=0 \to a=9$

۱۱۵.گزینه ۲ می‌دانیم: $\boxed{y=e^u \to y'=u'\cdot e^u \ , \ (uv)'=u'v+v'u}$

کافی است از این تابع دو بار مشتق بگیریم و ریشه‌های ساده‌ی y'' نشان‌دهنده‌ی طول نقاط عطف هستند.

$$f(x)=(x^2-5x+8)e^{x+1} \to f'(x)=(2x-5)e^{x+1}+e^{x+1}(x^2-5x+8)$$

$$\to f'(x)=e^{x+1}(2x-5+x^2-5x+8) \to f'(x)=e^{x+1}(x^2-3x+3)$$

$$\to f''(x)=e^{x+1}(x^2-3x+3)+(2x-3)e^{x+1}=e^{x+1}(x^2-3x+3+2x-3)$$

$$\to f''(x)=\underbrace{e^{x+1}}_{+}(x^2-x)=0 \to x(x-1)=0 \to x=0 \ , \ x=1$$

ریشه‌های بدست آمده ریشه‌های ساده هستند بنابراین تابع دارای دو نقطه‌ی عطف است.

۱۱۶.گزینه ۲

$$f(x)=2x^3-6x+m-1 \to f'(x)=6x^2-6=0 \to x^2=1$$

$\to x=1 \ , \ x=-1 \to$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\nearrow$	Max	$\searrow$	Min	$\nearrow$	

باتوجه به جدول $x=1$ طول نقطه‌ی Min نسبی تابع است پس $\begin{vmatrix}1\\29\end{vmatrix}$ نقطه‌ی Min نسبی تابع است و در تابع صدق می‌کند.

$$\begin{vmatrix}1\\29\end{vmatrix} \xrightarrow{\text{صدق}} 29=2-6+5m-1 \to 5m=34 \to m=\frac{34}{5}$$

۱۱۷.گزینه ۱ خط به معادله‌ی $x=-6$ مجانب قائم تابع است پس در مخرج تابع صدق می‌کند.

$$x=-6 \xrightarrow{\text{صدق در تابع}} -6+3c=0 \to 3c=6 \to c=2$$

برای بدست آوردن مجانب مایل تابع، کافی است صورت را بر مخرج تقسیم کنید.

$$\begin{array}{l|l} x^2-ax-b & x+6 \\ \cline{2-2} -x^2-6x & x-(a+6) \\ \hline -(a+6)x-b & \\ \quad (a+6)x+6(a+6) & \\ \hline 6(a+6)-b & \end{array}$$

$\to \quad y=x-(a+6)$: مجانب مایل

مجانب مایل تابع از نقطه‌ی $\begin{vmatrix}8\\0\end{vmatrix}$ عبور می‌کند پس در معادله‌ی مجانب مایل صدق می‌کند بنابراین داریم:

$0=8-(a+6) \to a=8-6 \to a=2$

باتوجه به نمودار، تابع داده شده در یک نقطه بر محور xها مماس شده است بنابراین معادله‌ی تلاقی تابع با محور طول‌ها $(y=0)$ باید ریشه‌ی مضاعف داشته باشد.

معادله‌ی تلاقی : $\begin{cases} y = \dfrac{x^۲ - ۲x - b}{x + ۶} \\ y = ۰ \end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی}} \dfrac{x^۲ - ۲x - b}{x + ۶} = ۰ \rightarrow x^۲ - ۲x - b = ۰$

شرط ریشه‌ی مضاعف : $\Delta = 0 \to b^2 - 4ac = 0 \to 4 + 4b = 0 \to b = -1$

پس $b + c = -1 + 2 = 1$ است.

۱۱۸.گزینه ۴ باتوجه به نمودار تابع داده شده $f(-2) = 0$ است.

$$f(-2) = 0 \to -16 - 8m - 4n = 0 \to 8m + 4n = -16 \to 2m + n = -4$$

در مبدأ مختصات، مشتق برابر صفر است.

$$f'(x) = -4x^3 + 3mx^2 + 2n \xrightarrow{f'(0)=0} 2n = 0 \to n = 0\ ,\ \ m = -2 \to m^2 + n^3 = 4 + 0 = 4$$

۱۱۹.گزینه ۲ زاویه‌ای که مجانب مایع تابع با محور xها می‌سازد 45° است پس شیب مجانب مایل برابر $m = \tan 45^\circ = 1$ است.

$$y = f(x) \text{ شیب مجانب مایل تابع} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{ax^3 + bx^2 + x - 1}{x^3 - x^2} \overset{\text{پرتوان}}{=\!=} \lim_{x \to \pm\infty} \frac{ax^3}{x^3} = a$$
$$= 1$$

ریشه‌های مخرج $x = 0$ و $x = 1$ هستند ولی از روی شکل فقط خط $x = 0$ مجانب قائم تابع است بنابراین $x = 1$ صورت را نیز صفر می‌کند ($x = 1$ ریشه‌ی مشترک صورت و مخرج است.)

$$x = 1 \xrightarrow{\text{صدق در صورت}} a + b + 1 - 1 = 0 \to a + b = 0 \xrightarrow{a=1} b = -1$$

$$\text{پس: } f(x) = \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 - x} = \frac{x^2(x-1) + x - 1}{x(x-1)} = \frac{(x-1)(x^2+1)}{x(x-1)} = \frac{x^2+1}{x}$$

$$af(b) = f(-1) = \frac{1+1}{-1} = -2$$

۱۲۰.گزینه ۴ نمودار تابع از مبدأ مختصات می‌گذرد بنابراین نقطه‌ی $\left|\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right.$ در تابع صدق می‌کند.

$$\left|\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{صدق}} 0 = \frac{0 + 0 + d}{0 + 1} \to d = 0$$

مجانب افقی تابع خط $y = 0$ است پس کافی است حد تابع را در بی‌نهایت حساب کرده و مساوی صفر قرار دهیم.

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{bx^2 + cx + d}{x^2 + 1} \overset{\text{پرتوان}}{=\!=} \lim_{x \to \pm\infty} \frac{bx^2}{x^2} = b \to b = 0$$

باتوجه به نمودار، خط $y = 2$ بر تابع $f(x)$ مماس است بنابراین معادله‌ی تلاقی آنها ریشه‌ی مضاعف دارد.

$$\begin{cases} y = \dfrac{cx}{x^2+1} \\ y = 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی}} \frac{cx}{x^2+1} = 2 \to 2x^2 - cx + 2 = 0 \ \ : \text{معادله‌ی تلاقی}$$

$$\text{شرط ریشه‌ی مضاعف : } \Delta = 0 \to b^2 - 4ac = 0 \to c^2 - 16 = 0 \to \begin{cases} c = 4 & \text{ق ق} \\ c = -4 & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

توجه کنید اگر $c = -4$ باشد تابع به صورت $f(x) = \dfrac{-4x}{x^2+1}$ در می‌آید که به ازای x های مثبت، y منفی است و این با نمودار همخوانی ندارد بنابراین قابل قبول نیست پس $b + c + d = 4$ است.