Solution

$\log_2(x)+\log_3(x)+\log_4(x)=1 \quad : \quad x=4^{\frac{\log_4(3)}{3\log_4(3)+1}} \quad (\text{Decimal:} \quad x=1.38442\ldots)$

Steps

$\log_2(x)+\log_3(x)+\log_4(x)=1$

Apply log rule: $\log_a(b)=\frac{\log_c(b)}{\log_c(a)}$

$\log_2(x)=\frac{\log_3(x)}{\log_3(2)}$

$\frac{\log_3(x)}{\log_3(2)}+\log_3(x)+\log_4(x)=1$

Apply log rule: $\log_a(b)=\frac{\log_c(b)}{\log_c(a)}$

$\log_3(x)=\frac{\log_4(x)}{\log_4(3)}$

$\frac{\frac{\log_4(x)}{\log_4(3)}}{\log_3(2)}+\frac{\log_4(x)}{\log_4(3)}+\log_4(x)=1$

Show Steps

Simplify $\frac{\frac{\log_4(x)}{\log_4(3)}}{\log_3(2)}+\frac{\log_4(x)}{\log_4(3)}+\log_4(x)$: $3\log_4(x)+\frac{\log_4(x)}{\log_4(3)}$

$3\log_4(x)+\frac{\log_4(x)}{\log_4(3)}=1$

Multiply both sides by $\log_4(3)$

$3\log_4(x)\log_4(3)+\frac{\log_4(x)}{\log_4(3)}\log_4(3)=1\cdot\log_4(3)$

Simplify

$3\log_4(3)\log_4(x)+\log_4(x)=\log_4(3)$

Show Steps

Factor $3\log_4(3)\log_4(x)+\log_4(x)$: $\log_4(x)\left(3\log_4(3)+1\right)$

$\log_4(x)\left(3\log_4(3)+1\right)=\log_4(3)$

Divide both sides by $3\log_4(3)+1$

$\frac{\log_4(x)\left(3\log_4(3)+1\right)}{3\log_4(3)+1}=\frac{\log_4(3)}{3\log_4(3)+1}$

Simplify

$\log_4(x)=\frac{\log_4(3)}{3\log_4(3)+1}$

Apply log rule: $a=\log_b(b^a)$

$\frac{\log_4(3)}{3\log_4(3)+1}=\log_4\left(4^{\frac{\log_4(3)}{3\log_4(3)+1}}\right)$

$\log_4(x)=\log_4\left(4^{\frac{\log_4(3)}{3\log_4(3)+1}}\right)$

When the logs have the same base: $\log_b(f(x))=\log_b(g(x)) \quad \Rightarrow \quad f(x)=g(x)$

For $\log_4(x)=\log_4\left(4^{\frac{\log_4(3)}{3\log_4(3)+1}}\right)$, solve $x=4^{\frac{\log_4(3)}{3\log_4(3)+1}}$

$x=4^{\frac{\log_4(3)}{3\log_4(3)+1}}$

Show Steps

Verify Solutions: $x=4^{\frac{\log_4(3)}{3\log_4(3)+1}}$ True

The solution is

$x=4^{\frac{\log_4(3)}{3\log_4(3)+1}}$

Graph

Plotting: $y = \log_2(x) + \log_3(x) + \log_4(x) - 1$