

۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. می توان متوازی الاضلاعی رسم کرد که لوزی نباشد.

۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر زوایای دو مثلث با هم برابر باشد، دو مثلث متشابه هستند و همنهشت نمی باشد.

۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. عکس گزینه ۳ این گونه است: «هر دو زاویه مکمل، 90° می باشند» که این نادرست است. مانند دو زاویه 60° و 120° که مکمل هستند ولی 90° نمی باشند.

۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

بررسی گزینه ها:

گزینه ۱: عدد $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{18}}$ عددی گویا است، زیرا:

$$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{18}} = \sqrt{\frac{8}{18}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$$

گزینه ۲: توجه کنید که عدد اعشاری $3/14$ عددی گویا است، در حالی که π یک عدد گنگ است. پس عدد $\frac{\pi}{3/14}$

عدد گنگ می باشد، از طرفی $R - Q' = Q$ پس: $\frac{\pi}{3/14} \notin (R - Q')$ یا $\frac{\pi}{3/14} \in Q'$ بنابراین $\frac{\pi}{3/14} \in (R - Q')$

نادرست است.

$$W - N = \{0\} \Rightarrow 0 \in (W - N)$$

گزینه ۳: درست است.

گزینه ۴: مجموعه اعداد گویا زیرمجموعه اعداد صحیح نیست، زیرا به عنوان مثال: $\frac{3}{2} \in \mathbb{Q}$ ولی $\frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$ پس $\mathbb{Q} \not\subset \mathbb{Z}$

صحیح است.

۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

الف) متناهی است. ب) متناهی است. پ) متناهی است.

ت) نامتناهی است، زیرا: $\{10, 20, 30, \dots\}$

ث) نامتناهی است، در بازه $(1, 2)$ بی نهایت عدد گنگ وجود دارد، زیرا این هر دو عدد حقیقی، بی شمار عدد گویا و بی شمار عدد گنگ وجود دارد.

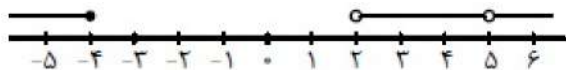
ج) متناهی است: مقسوم علیه های صحیح ۱۲ عبارتند از:

$$\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$$

بنابراین دو تا از مجموعه های فوق نامتناهی هستند.

۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا A' را یافته و روی محور نشان می دهیم:

$$A' = R - A \Rightarrow A' = (-\infty, 4] \cup (2, 5) \cup (5, +\infty)$$



بررسی گزینه‌ها:

$$[-4, 2) \Rightarrow \text{اشتراک با } A' = \{-4\}$$

گزینه ۱:

$$(-4, 3) \cup \{5\} \Rightarrow \text{اشتراک با } A' = (2, 3)$$

گزینه ۲:

$$(-3, 1] \cup \{5\} \Rightarrow \text{اشتراک با } A' = \emptyset$$

گزینه ۳:

$$[5, +\infty) \Rightarrow \text{اشتراک با } A' = (5, +\infty)$$

گزینه ۴:

۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مجموعه موردنظر همان مجموعه اعداد گویا است.

$$A = N, B = W, C = Z, D = Q, E = R$$

۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر تعداد مربع‌های رنگی کوچک در مرحله n ام را با t_n نشان دهیم، داریم:

$$t_n = (n+1)^2 - (n-1)^2 + 4 = n^2 + 2n + 1 - (n^2 - 2n + 1) + 4$$

$$t_n = n^2 + 2n + 1 - n^2 + 2n - 1 + 4 = 4n + 4$$

$$t_n = 204 \Rightarrow 4n + 4 = 204 \Rightarrow 4n = 200 \Rightarrow n = 50$$

۱۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$a_n = 3a_{n-1} - 2, a_1 = 2$$

$$a_2 = 3a_1 - 2 = 3 \times 2 - 2 = 4$$

$$a_3 = 3a_2 - 2 = 3 \times 4 - 2 = 10$$

$$a_4 = 3a_3 - 2 = 3 \times 10 - 2 = 28$$

$$a_5 = 3a_4 - 2 = 3 \times 28 - 2 = 84 - 2 = 82$$

$$a_6 = 3a_5 - 2 = 3 \times 82 - 2 = 246 - 2 = 244$$

$$a_7 = 3a_6 - 2 = 3 \times 244 - 2 = 732 - 2 = 730$$

۱۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$a_3 = \frac{5}{4}, a_5 = \frac{5}{16} \Rightarrow \frac{a_5}{a_3} = q^2 = \frac{\frac{5}{16}}{\frac{5}{4}} = q^2 \Rightarrow q^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow q = \pm \frac{1}{2}$$

چون جملات مثبت هستند، $q = \frac{1}{2}$ قابل قبول است.

$$a_3 = a_1 q^2 = \frac{5}{4} \Rightarrow a_1 \times \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \Rightarrow a_1 = 5$$

$$\begin{aligned} \text{حاصل ضرب بیست جمله اول} &= a_1 a_2 \dots a_{20} = a_1 \times a_1 q \times a_1 q^2 \times \dots \times a_1 q^{19} \\ &= \underbrace{(a_1 \times a_1 \times \dots \times a_1)}_{\text{تا } 20} \times (q \times q^2 \times \dots \times q^{19}) = a_1^{20} \times q^{1+2+\dots+19} \end{aligned}$$

نکته: می دانیم $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ پس داریم:

$$1 + 2 + \dots + 19 = \frac{19 \times 20}{2} = 190$$

$$\text{حاصل ضرب بیست جمله اول} = a_1^{20} \times q^{190} = 5^{20} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{190} = \frac{5^{20}}{2^{190}} = \left(\frac{5^2}{2^{19}}\right)^{10} = \left(\frac{25}{2^{19}}\right)^{10}$$

۱۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. می توان جمله عمومی را به صورت $a_n = an^2 + bn + c$ نوشت:

$$\begin{cases} t_1 = -1 \Rightarrow a + b + c = -1 \rightarrow c = -a - b - 1 \text{ (I)} \\ t_2 = 4 \Rightarrow 4a + 2b + c = 4 \rightarrow 4a + 2b - a - 1 = 4 \\ t_3 = 13 \Rightarrow 9a + 3b + c = 13 \rightarrow 9a + 3b - a - b - 1 = 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a + b = 5 \\ 8a + 2b = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \text{ (I)} \\ b = -1 \end{cases} \rightarrow c = -2 \Rightarrow t_n = 2n^2 - n - 2$$

$$\text{جمله چهارم} = t_4 = 2 \times 16 - 4 - 2 = 26$$

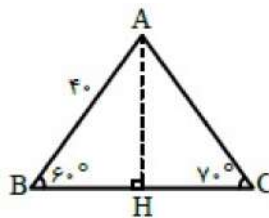
۱۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. قدر نسبت n واسطه حسابی بین a و b برابر است با:

$$\frac{b-a}{n+1} = \frac{1}{2} \times \frac{b-a}{n+1} \Rightarrow k+1 = 2n+2 \Rightarrow k = 2n+1$$

بنابراین:

۱۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با رسم شکلی از مسئله داریم:

$$\begin{aligned} \sin 60^\circ &= \frac{AH}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AH}{40} \Rightarrow AH = 20\sqrt{3} \\ \sin 70^\circ &= \frac{AH}{AC} \Rightarrow \frac{20\sqrt{3}}{94} = \frac{20\sqrt{3}}{AC} \Rightarrow AC = \frac{20\sqrt{3}}{.94} \\ AC &= \frac{20 \times 100\sqrt{3}}{94} = \frac{1000\sqrt{3}}{47} \end{aligned}$$



۱۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} - \sqrt{1 + \cot^2 \alpha} &= \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} \times \frac{1 - \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} - \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \alpha}} \\ &= \sqrt{\frac{(1 - \cos \alpha)^2}{1 - \cos^2 \alpha}} - \frac{1}{|\sin \alpha|} = \frac{|1 - \cos \alpha|}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}} - \frac{1}{|\sin \alpha|} \\ &= \frac{|1 - \cos \alpha|}{|\sin \alpha|} - \frac{1}{|\sin \alpha|} = \frac{|1 - \cos \alpha| - 1}{|\sin \alpha|} = \frac{1 - \cos \alpha - 1}{-\sin \alpha} = \frac{-\cos \alpha}{-\sin \alpha} = \cot \alpha \end{aligned}$$

۱۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} \frac{\sin^4 \alpha}{\sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} - 1 &= \frac{\sin^4 \alpha}{\sin^2 \alpha (1 - \cos^2 \alpha)} - 1 \\ &= \frac{\sin^4 \alpha \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha (1 - \cos^2 \alpha)} - 1 = \frac{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha \sin^2 \alpha} - 1 = \cos^2 \alpha - 1 \\ &= 1 - \sin^2 \alpha - 1 = -\sin^2 \alpha \end{aligned}$$

۱۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با استفاده از اتحاد $1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$ داریم:

$$\left(\frac{1}{\sin^2 x}\right)^2 + m\left(\frac{1}{\sin^2 x}\right) = \cot^4 x - 1 \Rightarrow$$

$$(1 + \cot^2 x)^2 + m(1 + \cot^2 x) = \cot^4 x - 1 \Rightarrow$$

$$(1 + \cot^2 x)(1 + \cot^2 x + m) = (\cot^2 x + 1)(\cot^2 x - 1)$$

با تقسیم طرفین تساوی بر $1 + \cot^2 x$ داریم:

$$1 + \cot^2 x + m = \cot^2 x - 1 \Rightarrow 1 + m = -1 \Rightarrow m = -2$$

۱۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\sqrt{50} + \sqrt{-3} \times \sqrt{9} \times \sqrt{(-2)^4} + \sqrt{(1 - \sqrt{2})^2} =$$

$$5\sqrt{2} + \sqrt{-27} \times |-2| + |1 - \sqrt{2}| = 5\sqrt{2} + (-3) \times 2 - (1 - \sqrt{2}) =$$

$$5\sqrt{2} - 6 - 1 + \sqrt{2} = 6\sqrt{2} - 7$$

۱۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\text{شیب} = \frac{a}{2} = \tan 60^\circ \Rightarrow a = 2\sqrt{3}$$

$$2y = 2\sqrt{3}x + 4\sqrt{3} - 1$$

در محل برخورد با محور X ها $y = 0$ است.

$$\Rightarrow -2\sqrt{3}x = 4\sqrt{3} - 1 \Rightarrow x = \frac{4\sqrt{3} - 1}{-2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{12 - \sqrt{3}}{-6} = \frac{\sqrt{3} - 12}{6}$$

۲۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{25}{16} \Rightarrow \tan^2 \alpha = \frac{9}{16} \xrightarrow{\text{ناحیه سوم}} \tan \alpha = \frac{3}{4}$$

۲۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Rightarrow \frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{4}{5}$$

ناحیه ۴ $\rightarrow \sin \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$

۲۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\sqrt{1/21} = \sqrt{\frac{121}{100}} = \frac{11}{10} = 1/1$$

۲۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

عبارت:
$$\left(\frac{\sqrt{11}(\sqrt{11}-1) + \sqrt{7}(\sqrt{11}-1)}{\sqrt{7}(\sqrt{7} + \sqrt{11})} \right)^2 = \left(\frac{(\sqrt{11}-1)(\sqrt{11} + \sqrt{7})}{\sqrt{7}(\sqrt{7} + \sqrt{11})} \right)^2$$

$$= \frac{(\sqrt{11}-1)^2}{7} = \frac{11+1-2\sqrt{11}}{7} = \frac{12-2\sqrt{11}}{7}$$

۲۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. $Z - N'$ یعنی مجموعه اعداد صحیح که در متمم N عضو نیستند که برابر است با $Z - N' = Z \cap N = N$ مجموعه اعداد صحیح که عضو N هستند، یعنی:

$A = (-\infty, 3)$ و $B = [-6, 7)$



$\Rightarrow A \cap B = [-6, 3)$

۲۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

اعداد صحیح موجود در $A \cap B$ عبارتند از:

$-6, -5, -4, \dots, 0, 1, 2 \Rightarrow$ تعداد = ۹

۲۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر مجموعه افرادی که عضو گروه سرود هستند را با A و مجموعه افرادی که عضو گروه تئاتر هستند را با B نشان دهیم، داریم:

$$n(U) = 30, n(A) = 18, n(B) = 22$$

افرادی که عضو هیچ کدام از دو گروه نیستند، یعنی $A' \cap B'$:

$$n(A' \cap B') = 4$$

$$n(A \cup B)' = 4 \Rightarrow n(U) - n(A \cup B) = 4 \Rightarrow 30 - n(A \cup B) = 4 \Rightarrow n(A \cup B) = 26$$

$A \cap B$ = افرادی که عضو هر دو گروه هستند

$$\Rightarrow n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow 26 = 18 + 22 - n(A \cap B)$$

$$\Rightarrow n(A \cap B) = 40 - 26 = 14$$

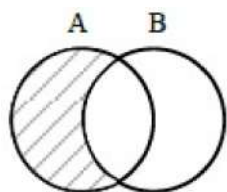
$\Rightarrow n(A - B) + n(B - A) =$ افرادی که فقط عضو یکی از دو گروه هستند

$$n(A) - n(A \cap B) + n(B) - n(A \cap B) = 18 - 14 + 22 - 14 = 4 + 8 = 12$$

$$\Rightarrow \frac{n(A - B) + n(B - A)}{n(A \cap B)} = \frac{12}{14} = \frac{6}{7}$$

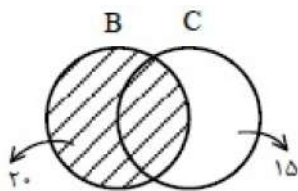
۲۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مجموعه «ج» و «د» متناهی هستند.

۲۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



$$n(A \cup B) - n(A - B) = n(B) \Rightarrow n(B) = 15$$

تعداد اعضای $B \cap C$ از تعداد اعضای C، ۲۰ تا کم تر است، یعنی:



$$n(C - B) = 20$$

$$n(B \cup C) = n(B) + n(C) - n(B \cap C) =$$

$$n(B) + n(C - B) = 15 + 20 = 35$$

۲۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\text{جمله عمومی } a_n = 1 + 2 + \dots + (n + 1) = \frac{(n + 1)(n + 2)}{2} \Rightarrow a_n = \frac{16 \times 17}{2} = 136$$

۳۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$d = 2 + a_1, a_3 + a_7 = a_1 + 2d + a_1 + 6d = 46 \Rightarrow 2a_1 + 8d = 46$$

$$\Rightarrow a_1 + 4d = 23 \Rightarrow a_1 + 4(2 + a_1) = 23 \Rightarrow a_1 + 8 + 4a_1 = 23$$

$$\Rightarrow 5a_1 = 15 \Rightarrow a_1 = 3 \Rightarrow d = 5 \Rightarrow a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$\Rightarrow a_n = 3 + (n - 1) \times 5 = 5n - 2 \Rightarrow a_n = 48 \Rightarrow 5n - 2 = 48$$

$$\Rightarrow 5n = 50 \Rightarrow n = 10$$