

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در دنباله هندسی می‌دانیم:  $\frac{a_n}{a_m} = q^{n-m}$  بنابراین داریم:

$$\frac{a_9}{a_5} = q^4, \frac{a_{13}}{a_9} = q^4 \Rightarrow \frac{a_9}{a_5} = \frac{a_{13}}{a_9} \Rightarrow a_9^2 = a_5 \times a_{13}$$

$$\Rightarrow x^2 = (x-2)(x+4) \Rightarrow x^2 = x^2 + 2x - 8 \Rightarrow x = 4$$

$$a_5 = 2, a_9 = 4 \Rightarrow \frac{a_9}{a_5} = q^4 \Rightarrow q^4 = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow q^2 = \sqrt{2}$$

$$\frac{a_{20}}{a_{18}} = q^2 = \sqrt{2}$$

۳۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\frac{1}{b-a} + \frac{1}{b-c} = 2 \times \frac{1}{2b} \Rightarrow \frac{b-c+b-a}{(b-a)(b-c)} = \frac{1}{b} \Rightarrow$$

$$b(2b-c-a) = (b-a)(b-c) \Rightarrow 2b^2 - bc - ab = b^2 - ab - bc + ac$$

$$\Rightarrow b^2 = ac \Rightarrow b \text{ واسطه هندسی بین } a \text{ و } c \text{ است.}$$

۳۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. پول شخصی در بانک یک دنباله هندسی با قدر نسبت  $1/2$  است.

$$t_n = \alpha \times 1/2^n = \frac{t_1}{t_7} = \frac{\alpha \times 1/2^1}{\alpha \times 1/2^7} = 1/2^3 = 1/2^8$$

۳۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\frac{AC}{2} = \cot 30^\circ \Rightarrow \frac{AC}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow AC = 2\sqrt{3}$$

$$\frac{AB}{2\sqrt{3}} = \cos 30^\circ \Rightarrow \frac{AB}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AB = 3$$

۳۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با فرض  $p = (x, y)$  داریم:

$$\tan \alpha = \frac{y}{x} = -\frac{2}{3} \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x$$

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow x^2 + \frac{4}{9}x^2 = 1 \Rightarrow \frac{13}{9}x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{9}{13} \Rightarrow x = \pm \frac{3}{\sqrt{13}}$$

در ناحیه دوم X منفی است، پس داریم:

$$x = -\frac{3}{\sqrt{13}} \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x = -\frac{2}{3} \times \left(-\frac{3}{\sqrt{13}}\right) = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

$$\sin \alpha = y = \frac{2}{\sqrt{13}}, \cos \alpha = x = -\frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$\Rightarrow \cos \alpha - \sin \alpha = -\frac{3}{\sqrt{13}} - \frac{2}{\sqrt{13}} = -\frac{5\sqrt{13}}{13}$$

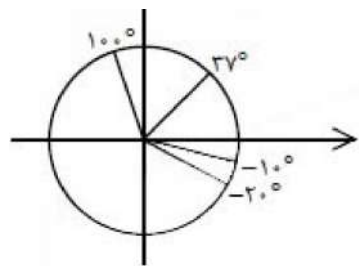
۳۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. خط  $ax + by + 2 = 0$  از نقطه  $(0, -2)$  می‌گذرد، پس داریم:

$$ax + by + 2 = 0 \xrightarrow{(0, -2)} 0 - 2b + 2 = 0 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow ax + y + 2 = 0$$

$$y = -ax - 2 \Rightarrow \text{شیب خط} = a \Rightarrow -a = \tan 60^\circ \Rightarrow -a = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow a = -\sqrt{3} \Rightarrow a\sqrt{3} - b = -\sqrt{3} \times \sqrt{3} - 1 = -3 - 1 = -4$$

۳۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. بزرگ‌ترین کسینوس مربوط به زاویه‌ای است که نقطه متناظرش در دایره مثلثاتی در سمت راست بقیه دیده می‌شود.



۳۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$A = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{1 + \sin^2 x}{\cos^2 x}} + \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1 + \cos^2 x}{\sin^2 x}} = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} =$$

$$\frac{\cos^2 x \sin x}{\cos x} + \frac{\sin^2 x \cos x}{\sin x} = \cos x \sin x + \sin x \cos x = 2 \sin x \cos x$$

۳۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\tan x + \cot x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x \sin x} = \frac{1}{\cos x \sin x}$$

۴۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. طرفین را بر  $\cos^2 x$  تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{3 \sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{4 \sin x \cos x}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = 0$$

$$\Rightarrow 3 \tan^2 x - 4 \tan x + 1 = 0 \Rightarrow 3 \tan^2 x - 4 \tan x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (3 \tan x - 1)^2 = 0 \Rightarrow \tan x = \frac{1}{3}$$

۴۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$1 < \sqrt{2/1} < 2$$

$$1 < \sqrt{2/2} < 2$$

$$1 < \sqrt{2/9} < 2$$

$$9 < \underbrace{\sqrt{2/1} + \sqrt{2/2} + \dots + \sqrt{2/9}}_A < 18 \Rightarrow 8 < A < 27 \Rightarrow 2 < \sqrt[3]{A} < 3$$

۴۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\alpha = \sqrt[5]{-1024} = -\sqrt[5]{2^{10}} = -\sqrt[5]{(2^2)^5} = -\sqrt[5]{4^5} = -4 \Rightarrow \alpha = -4$$

$$\beta = \sqrt[4]{625} = \sqrt[4]{5^4} = 5 \Rightarrow \beta = 5 \Rightarrow \alpha - \beta = -4 - 5 = -9$$

۹- ریشه دوم منفی عدد ۸۱ است، یعنی  $-\sqrt{81} = -9$

۴۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به  $\sqrt{-x}$  داریم:

$$-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0$$

$$\sqrt{-x} \times |x| \times \sqrt[3]{x} = \sqrt{-x} \times (-x) \times \sqrt[3]{x} = -x \sqrt{-x} \times \sqrt[3]{x} = -25$$

$$x \sqrt{-x} \times \sqrt[3]{x} = 5^2 \xrightarrow{\text{توان } 6} x^6 (-x)^3 x^2 = 5^{12}$$

$$-x^{11} = 5^{12} \Rightarrow x^{11} = -5^{12} \Rightarrow x = \sqrt[11]{-5^{12}} = -\sqrt[11]{5^{12}} = -\sqrt[11]{5^{11} \times 5} = -5 \sqrt[11]{5}$$

۴۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$x = 2 \Rightarrow f(2) = 0 \Rightarrow 16 - 20 - 2 + m = 0 \Rightarrow m = 6$$

$$\Rightarrow f(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + 6$$

$$2x^3 - 5x^2 - x + 6 \quad \Big| \quad x - 2$$

$$\begin{array}{r} 2x^3 - 4x^2 \\ \hline -x^2 - x + 6 \end{array} \Rightarrow f(x) = (x - 2)(2x^2 - x - 3) = 0$$

$$-x^2 - x + 6$$

$$-x^2 + 2x$$

$$+ \quad -$$

$$-3x + 6$$

$$-3x + 6$$

$$+ \quad -$$

$$\downarrow$$

$$x = 2 \text{ و } 2x^2 - x - 3 = 0$$

$$(x + 1)(2x - 3) = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ و } x = \frac{3}{2}$$

۴۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$2x^2 - 9x - 4 = 0 \Rightarrow \text{حاصل ضرب ریشه‌ها} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$x^2 + 2x - 7 = 0 \Rightarrow \text{مجموع ریشه‌ها} = \frac{-2}{1} = -2$$

گزینه (۱):

معادله گزینه (۱) دارای دو جواب متمایز است. مجموع ریشه‌ها در سایر گزینه‌ها به ترتیب عبارت است از:  $2$ ،  $-\frac{9}{2}$  و  $\frac{9}{2}$

۴۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$S = 5, P = 2, A = |x_1 \sqrt{x_2} - x_2 \sqrt{x_1}| \Rightarrow A^2 = (x_1 \sqrt{x_2} - x_2 \sqrt{x_1})^2$$

$$\Rightarrow A^2 = x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 - 2x_1 x_2 \sqrt{x_1 x_2} = x_1 x_2 (x_1 + x_2) - 2x_1 x_2 \sqrt{x_1 x_2}$$

$$\Rightarrow A^2 = p \cdot s - 2p \sqrt{p} = 2 \times 5 - 2 \times 2 \sqrt{2} = 10 - 4\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow A = \pm \sqrt{10 - 4\sqrt{2}} \xrightarrow{A > 0} A = \sqrt{10 - 4\sqrt{2}}$$

۴۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چون  $\alpha$  ریشه معادله است پس در معادله صدق می کند یعنی:

$$\alpha^2 + 4\alpha + 2m - 9 = 0 \Rightarrow \alpha^2 + 4\alpha = 9 - 2m$$

$$\alpha^2 + 6\alpha + 2\beta = m^2 - 2 \Rightarrow \alpha^2 + 4\alpha + 2\alpha + 2\beta = m^2 - 2$$

$$\Rightarrow 9 - 2m + 2(\alpha + \beta) = m^2 - 2 \Rightarrow 9 - 2m + 2(-4) = m^2 - 2$$

$$\Rightarrow 1 - 2m = m^2 - 2 \Rightarrow m^2 + 2m - 3 = 0 \Rightarrow (m - 1)(m + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -3 \end{cases}$$

$$m = 1 \Rightarrow x^2 + 4x - 7 = 0 \Rightarrow \Delta > 0 \text{ قابل قبول}$$

$$m = -3 \Rightarrow x^2 + 4x - 15 = 0 \Rightarrow \Delta > 0 \text{ قابل قبول}$$

۴۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\left( \frac{x+2}{x+1} + \frac{x+1}{x-1} = \frac{4}{x^2-1} \right) \times (x^2-1)$$

$$\Rightarrow (x+2)(x-1) + (x+1)^2 = 4 \Rightarrow x^2 + x - 2 + x^2 + 2x + 1 = 4$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 3x - 5 = 0 \Rightarrow x_1 = 1 \text{ و } x_2 = -\frac{5}{2}$$

ریشه  $x_1 = 1$  عضو دامنه تعریف نیست و بنابراین معادله فقط یک ریشه برابر  $x = -\frac{5}{2}$  دارد.

۴۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. فرض می کنیم قیمت جنس قبل از تخفیف  $x$  تومان بوده است، پس شخص می توانسته تعداد  $\frac{1000}{x}$  از جنس بخرد، بنابراین از تخفیف قیمت جنس چند برابر  $x - 15$  و تعداد برابر  $\frac{990}{x-15}$  است.

$$\frac{1000}{x} + 1 = \frac{990}{x-15} \Rightarrow (x-15)(x+1000) = 990x$$

$$\Rightarrow x^2 + 985x - 15000 = 990x \Rightarrow x^2 - 5x - 15000 = 0$$

$$(x-125)(x+120) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -120 \text{ ق ق} \\ x = 125 \text{ ق ق} \end{cases}$$

۵۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$3x + 4 = \sqrt{x^2 + 5} \xrightarrow{3x+4 \geq 0} 9x^2 + 24x + 16 = x^2 + 6$$

$$\Rightarrow 8x^2 + 24x + 10 = 0 \Rightarrow 4x^2 + 12x + 5 = 0$$

$$\Rightarrow \left. \begin{cases} x = -\frac{5}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases} \right\} \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$3x + 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{4}{3}$$

۵۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اگر  $a$  و  $b$  ریشه‌های معادله  $۳x^2 - ۷x + ۳ = ۰$  باشند، می‌دانیم

$$P = ab = \frac{۳}{۳} = ۱ \text{ است، پس:}$$

$$ab = ۱ \Rightarrow b = \frac{۱}{a}$$

عبارت داده شده  $\frac{a^2 + ۱}{a} = a + \frac{۱}{a}$  در واقع همان  $a + b$  است که  $\frac{۷}{۳}$  می‌شود.

۵۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. فرض کنیم  $(x^2 - ۱)^2 = t \geq ۰$  باشد، معادله را بازنویسی و حل می‌کنیم:

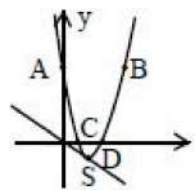
$$t^2 - ۲t - ۳ = ۰ \Rightarrow (t + ۱)(t - ۳) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t = -۱ \times \\ t = ۳ \checkmark \end{cases}$$

$$t = (x^2 - ۱)^2 = ۳ \Rightarrow x^2 - ۱ = \pm\sqrt{۳} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = ۱ - \sqrt{۳} \Rightarrow \text{جواب ندارد.} \\ x^2 = ۱ + \sqrt{۳} \Rightarrow x = \pm\sqrt{x + \sqrt{۳}} \end{cases}$$

معادله دو ریشه دارد که مجموع آن‌ها صفر است.

راه حل دوم: اگر  $x = a$  ریشه معادله باشد،  $x = -a$  هم ریشه آن است، پس مجموع ریشه‌های معادله صفر است.

۵۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. عرض نقاط  $A$  و  $B$  برابر است، پس طول رأس سهمی برابر  $\frac{x_A + x_B}{۲}$  است.



$$x_S = \frac{۲ + ۰}{۲} = ۱$$

رأس سهمی روی خط  $y = -x$  قرار دارد، پس مختصات آن به صورت  $S(۱, -۱)$  خواهد بود، بنابراین معادله سهمی

به صورت  $y = a(x - ۱)^2 - ۱$  است. نقطه  $(۰, ۳)$  روی آن است، پس در معادله آن صدق می‌کند:

$$۳ = a(۰ - ۱)^2 - ۱ \Rightarrow ۳ = a - ۱ \Rightarrow a = ۴$$

حالا نقاط  $C$  و  $D$  را پیدا می‌کنیم:

$$y = ۴(x - ۱)^2 - ۱ = ۰ \Rightarrow (x - ۱)^2 = \frac{۱}{۴} \Rightarrow \begin{cases} x - ۱ = \frac{۱}{۲} \Rightarrow D = \frac{۳}{۲} \\ x - ۱ = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow C = \frac{۱}{۲} \end{cases}$$

فاصله  $C$  تا  $D$  برابر  $\frac{۳}{۲} - \frac{۱}{۲} = ۱$  است.

۵۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. هر نقطه روی  $y = \sqrt{2x+5}$  به صورت  $(x, \sqrt{2x+5})$  است. فاصله آن از A را پیدا می‌کنیم:

$$d = \sqrt{(x-3)^2 + (\sqrt{2x+5} - 0)^2} = \sqrt{x^2 - 6x + 9 + 2x + 5} = \sqrt{x^2 - 4x + 14}$$

وقتی d کم‌ترین مقدار می‌شود که  $x^2 - 4x + 14$  کم‌ترین مقدار خود را داشته باشد. کم‌ترین مقدار آن هم برابر  $f\left(\frac{-b}{2a}\right) = f(2)$  است:

$$d_{\min} = \sqrt{2^2 - 4(2) + 14} = \sqrt{10}$$

۵۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.  $x = 2$  باید در معادله صدق کند:

$$\frac{a}{3} = \frac{-3}{9} + \frac{3-a}{3} \Rightarrow \frac{a}{3} = \frac{-1}{3} + \frac{3-a}{3} \xrightarrow{\times 3} a = 2 - a \Rightarrow a = 1$$

حالا a را برابر ۱ قرار می‌دهیم و معادله را حل می‌کنیم:

$$\frac{1}{x+1} = \frac{1-2x}{1+x^2} + \frac{2}{x^2-x+1}$$

طرفین را در  $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$  ضرب می‌کنیم:

$$x^2 - x + 1 = 1 - 2x + 2(x+1) \Rightarrow x^2 - x + 1 = 3 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

توجه کنید که ریشه دیگر معادله ۱- نیست چون مخرج را صفر می‌کند، پس معادله فقط یک ریشه  $x = 2$  را دارد.

۵۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. فرض کنید دستگاه دوم در X ساعت آزمون را تصحیح کند، در این صورت در یک ساعت

$\frac{1}{X}$  کار را انجام می‌دهد. دستگاه اول هم در این مدت  $\frac{1}{5}$  کار را انجام می‌دهد، پس:

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{X} = \frac{1}{3} \xrightarrow{\times 15X} 3X + 15 = 5X \Rightarrow 2X = 15 \Rightarrow X = 7.5$$

۵۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\sqrt{3-x} + \sqrt{2x+3} = 3 \xrightarrow{\text{توان } 2} 3-x + 2x+3 + 2\sqrt{(3-x)(2x+3)} = 9$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{(3-x)(2x+3)} = 3-x \xrightarrow{\text{توان } 2} 4(-2x^2 + 3x + 9) = 9 - 6x + x^2$$

$$\Rightarrow 9x^2 - 18x - 27 = 0 \xrightarrow{\div 9} x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

هر دو ریشه در معادله اولیه صدق می‌کنند و قابل قبول هستند، پس مجموع آنها برابر است با:  $3 + (-1) = 2$ .

۵۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$p = 2x^2 - 3x - 5 \Rightarrow p = 0 \Rightarrow 2x^2 - 3x - 5 = 0 \Rightarrow \Delta = 9 + 40 = 49$$

$$x = \frac{3 \pm 7}{4} = -1, \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{x}{p} \left| \begin{array}{ccc} -1 & \frac{5}{2} \\ + & - \\ - & + \end{array} \right.$$

عبار  $p$  به ازای اعداد بین  $-1$  تا  $\frac{5}{2}$  منفی است و فقط  $-1 + \sqrt{7}$  بین  $-1$  تا  $\frac{5}{2}$  است.

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} = 1/4 + 1/7 = 3/1 > \frac{5}{2}, -1 - \sqrt{2} < -1, \frac{13}{5} = 2/6 > \frac{5}{2}$$

$$-1 < -1 + \sqrt{7} < \frac{5}{2}$$

۵۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ریشه‌های عبارت  $-2x + ax + b$  همان ریشه‌های عبارت  $x^2 - x - 6$  هستند چون در غیر این صورت عبارت در ریشه‌های عبارت اول، تغییر علامت می‌دهد.

$$x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3, -2$$

$$\begin{cases} x = 3 \Rightarrow -2 \times 3^2 + 3a + b = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3a + b = 18 \\ -2a + b = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 12 \end{cases} \\ x = -2 \Rightarrow -2(-2)^2 - 2a + b = 0 \Rightarrow \end{cases}$$

$$b - a = 12 - 2 = 10$$

۶۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\frac{2x}{x+1} - \frac{3x+1}{x+3} \geq 0 \Rightarrow \frac{2x(x+3) - (x+1)(3x+1)}{(x+1)(x+3)} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{-x^2 + 2x - 1}{(x+1)(x+3)} \geq 0 \Rightarrow \frac{-(x-1)^2}{(x+1)(x+3)} \geq 0$$

	-3	-1	1	
$-(x-1)^2$	-	-	-	-
$x+1$	-	+	+	+
$x+3$	-	-	+	+
سمت چپ نامعادله	-	+	-	-
	جواب		جواب	

$$x \in (-3, -1) \cup \{1\}$$

یعنی اعداد صحیح  $-2$  و  $1$  در نامعادله صدق می‌کنند.