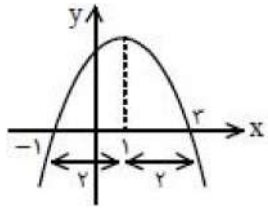


۶۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\underbrace{(x^2 + 3x)}_t - (x^2 + 3x) - 12 = 0 \Rightarrow t^2 - t - 12 = 0 \Rightarrow (t - 4)(t + 3) = 0$$

$$\begin{cases} t = 4 \Rightarrow x^2 + 3x = 4 \Rightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \Rightarrow \text{مجموع} = \frac{-b}{a} = -3 \\ t = -1 \Rightarrow x^2 + 3x = -1 \Rightarrow x^2 + 3x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta < 0 \text{ جواب ندارد} \end{cases}$$

۶۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ریشه‌های معادله درجه دوم نسبت به طول رأس آن متقارن هستند یعنی $x = -1$ هم ریشه است و باید در معادله داده شده صدق کند.



$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 \\ \xrightarrow{\text{ریشه } x = -1} & a(-1)^2 + b(-1) + c = 0 \Rightarrow a + c = b \end{aligned}$$

۶۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

بیشترین مقدار تابع $f(x) = -x^2 + \frac{v}{2}x + c$ در $x = \frac{-b}{2a} = \frac{v}{4}$ رخ می‌دهد و برابر $\frac{1}{16} = 0.0625 = f\left(\frac{v}{4}\right)$ است.

$$\begin{aligned} f(x) &= x\left(-x + \frac{v}{2}\right) + c \Rightarrow f\left(\frac{v}{4}\right) = \frac{v}{4}\left(\frac{-v}{4} + \frac{v}{2}\right) + c \\ \Rightarrow \frac{v}{4}\left(\frac{v}{4}\right) + c &= \frac{49}{16} + c = \frac{1}{16} \Rightarrow c = \frac{1 - 49}{16} = \frac{-48}{16} = -3 \end{aligned}$$

۶۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر ریشه‌های $x^2 + mx + m + 1 = 0$ را α, β در نظر بگیریم در این صورت ریشه‌های $x^2 - 6x + n = 0$ برابر α^2 و β^2 هستند.

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-m}{1}, \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{m+1}{1}, \alpha^2 + \beta^2 = \frac{-b}{a} = 6$$

$$\underbrace{(\alpha + \beta)^2}_{-m} = \underbrace{\alpha^2 + \beta^2}_6 + \underbrace{2\alpha\beta}_{m+1} \Rightarrow m^2 = 6 + 2m + 2$$

$$\Rightarrow m^2 - 2m - 8 = 0 \Rightarrow (m - 4)(m + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 4 \text{ ق ق} \\ m = -2 \text{ ق ق} \end{cases}$$

اگر $m = 4$ باشد، معادله به صورت $x^2 + 4x + 5 = 0$ می‌شود و چون $\Delta < 0$ است اصلاً ریشه‌ای ندارد. اگر $m = -2$ باشد، معادله $x^2 - 2x - 1 = 0$ است و ۲ ریشه دارد، پس فقط $m = -2$ قابل قبول است.

۶۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\frac{x^2 + 1}{x^3 - 1} = \frac{(2ax + 3)(1 - x) + a(x^2 + x + 1)}{(x^2 + x + 1)(1 - x)}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 + 1}{x^3 - 1} = \frac{2ax - 2ax^2 + 3 - 3x + ax^2 + ax + a}{1 - x^3}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 + 1}{x^3 - 1} = \frac{-ax^2 + (3a - 3)x + 3 + a}{1 - x^3} \Rightarrow \frac{x^2 + 1}{x^3 - 1} = \frac{ax^2 + (3 - 3a)x - 3 - a}{x^3 - 1}$$

$$\Rightarrow x^2 + 1 = ax^2 + (3 - 3a)x - 3 - a \Rightarrow (a - 1)x^2 + (3 - 3a)x - 4 - a = 0$$

$$\text{حاصل ضرب جوابها} = \frac{c}{a} = \frac{-4 - a}{a - 1} = 5 \Rightarrow -4 - a = 5a - 5 \Rightarrow 6a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{6}$$

۶۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\sqrt{3x + 1} = \sqrt{2 - x} + 1 \xrightarrow{\text{توان ۲}} 3x + 1 = 2 - x + 1 + 2\sqrt{2 - x}$$

$$\Rightarrow 4x - 2 = 2\sqrt{2 - x} \xrightarrow{\div 2} 2x - 1 = \sqrt{2 - x}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} 4x^2 - 4x + 1 = 2 - x \Rightarrow 4x^2 - 3x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 1)(4x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ ق ق} \\ x = -\frac{1}{4} \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

$x = -\frac{1}{4}$ در معادله صدق نمی کند، پس قابل قبول نیست.

$$\sqrt{3x + 1} - \sqrt{2 - x} = 1 \xrightarrow{x = -\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{1}{4}} - \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$$

پس معادله فقط یک جواب $x = 1$ را دارد.

۶۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. تابع دو ریشه منفی دارد یعنی باید شرطهای $\Delta > 0$ و $\frac{-b}{a} < 0$ و $\frac{c}{a} > 0$ برقرار باشند.

در گزینه (۲)، $\Delta < 0$ است، در گزینه (۳)، $\frac{c}{a} < 0$ است و در گزینه (۴)، $\frac{-b}{a} > 0$ ، پس جواب گزینه (۱) می شود.

۶۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. فرض کنیم علی در X ساعت و محمد در $X + 9$ ساعت این کار را انجام می‌دهند. در این صورت در ۱ ساعت علی $\frac{1}{X}$ کار و محمد $\frac{1}{X+9}$ کار را انجام می‌دهند.

$$\frac{1}{X+9} + \frac{1}{X} = \frac{1}{20} \Rightarrow \frac{X+9+X}{(X+9)X} = \frac{1}{20} \Rightarrow \frac{2X+9}{X^2+9X} = \frac{1}{20}$$

$$\Rightarrow 40X + 180 = X^2 + 9X \Rightarrow X^2 - 31X - 180 = 0 \Rightarrow (X+5)(X-36) = 0 \Rightarrow \begin{cases} X = 36 & \text{ق ق} \\ X = -5 & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

علی در ۳۶ ساعت و محمد در $36 + 9 = 45$ ساعت کتاب را تایپ می‌کنند.

۶۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\sqrt{\frac{X^2+3}{X}} + 2\sqrt{\frac{X}{X^2+3}} = 3$$

اگر فرض کنیم $\sqrt{\frac{X^2+3}{X}} = A$ است داریم:

$$A + \frac{2}{A} = 3 \Rightarrow \frac{A^2+2}{A} = 3 \Rightarrow A^2 - 3A + 2 = 0$$

$$\Rightarrow (A-2)(A-1) = 0 \Rightarrow A = 2, A = 1$$

$$\begin{cases} A = 2 \Rightarrow \sqrt{\frac{X^2+3}{X}} = 2 \Rightarrow \frac{X^2+3}{X} = 4 \Rightarrow X^2+3 = 4X \Rightarrow \begin{cases} X = 1 \\ X = 3 \end{cases} \\ A = 1 \Rightarrow \sqrt{\frac{X^2+3}{X}} = 1 \Rightarrow \frac{X^2+3}{X} = 1 \Rightarrow X^2 - X + 3 = 0 \Rightarrow \Delta < 0 \text{ جواب ندارد} \end{cases}$$

۷۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

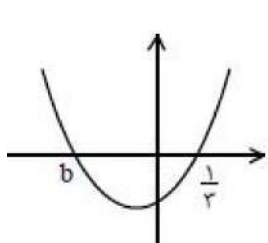
$$X^2 + X - 1 = 0 \Rightarrow S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = -1, P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = -1$$

$$d = |\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{5}}{1} \Rightarrow \alpha - \beta = \pm\sqrt{5}$$

$$\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)}{-1} = \frac{\pm\sqrt{5}(-1)}{-1} = \pm\sqrt{5}$$

فقط $-\sqrt{5}$ در گزینه‌ها است.

۷۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. یک تابع درجه ۲ وقتی فقط در فاصله $(b, \frac{1}{3})$ کم‌تر از صفر است یعنی $\frac{1}{3}$ و b ریشه‌های آن می‌باشند، پس $x = \frac{1}{3}$ ریشه $f(x) = ax^2 + bx - a$ است.



$$f(x) = ax^2 + bx - a$$

$$x = \frac{1}{3} \rightarrow f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9}a + \frac{b}{3} - a = 0 \Rightarrow \frac{b}{3} = \frac{8}{9}a \Rightarrow a = \frac{3}{8}b$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{3}{8}bx^2 + bx - \frac{3}{8}b = \left(\frac{3}{8}bx - \frac{3}{8}b\right)(x + \frac{4}{3})$$

بنابراین ریشه‌های $f(x)$ برابر $x_1 = \frac{1}{3}$ و $x_2 = -\frac{4}{3}$ هستند و این تابع در فاصله $(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3})$ منفی است، پس $b = -\frac{4}{3}$ می‌شود.

۷۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. جدول مربوط به یک عبارت درجه ۱ است، پس $a = -3$ می‌باشد.

$$f(x) = (a + 3)x^2 + ax + b \xrightarrow{a = -3} f(x) = -3x + b$$

از طرفی با توجه به جدول $f(b + 1) = 0$ است.

$$-3(b + 1) + b = -2b - 3 = 0 \Rightarrow b = -\frac{3}{2}$$

بنابراین $f(x) = -3x - \frac{3}{2}$ ، حالا $f(b) = f\left(-\frac{3}{2}\right)$ را پیدا می‌کنیم:

$$f(b) = f\left(-\frac{3}{2}\right) = -3\left(-\frac{3}{2}\right) - \frac{3}{2} = \frac{9}{2} - \frac{3}{2} = 3$$

۷۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. عبارت $(-x^2 + ax + b)(x + 1)$ ریشه ۱- دارد. از طرفی چون در فاصله $(-\infty, 1]$ بزرگ‌تر مساوی صفر است، $x = 1$ هم باید ریشه آن باشد، پس جدول تعیین علامت باید این شکلی باشد:

x	-1	1
f(x)	+ ○ +	○ -

یعنی در $x = -1$ باید ریشه مضاعف داشته باشد. پس عبارت $-x^2 + ax + b$ دارای ۲ ریشه است که یکی از آن‌ها $x = 1$ و دیگری $x = -1$ است:

$$\begin{cases} x = 1 \Rightarrow -1 + a + b = 0 \\ x = -1 \Rightarrow -1 - a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow b = 1, a = 0$$

$$a - b = 0 - 1 = -1$$

۷۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به نمودار تابع $y = f(x)$ می‌توانیم آن را تعیین علامت کنیم:

	-۲	۰	۱	۲
$x+۲$	-	+	+	+
$f(x)$	+	+	-	+
$\frac{x+۲}{f(x)}$	-	+	-	+

○ تن تن تن

در فاصله $[-۲, ۰) \cup (۳, +\infty)$ که $\frac{x+۲}{f(x)}$ نامنفی است که شامل بی‌شمار عدد صحیح است.

۷۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در عبارت $-x^2 + x - ۱$ ، $\Delta < ۰$ ، $a < ۰$ است، پس این عبارت همواره منفی است،

بنابراین باید عبارت $\frac{۵-x^2}{|x-۲|} \geq ۰$ باشد. از طرفی مخرج با شرط $x \neq ۲$ همواره مثبت است، پس باید $۵-x^2 \geq ۰$ باشد:

$$۵-x^2 \geq ۰ \Rightarrow x^2 \leq ۵ \Rightarrow -\sqrt{۵} \leq x \leq \sqrt{۵}$$

در نامعادله بالا اعداد صحیح ۲، ۱، ۰، -۱، -۲ صدق می‌کنند که $x = ۲$ را کنار می‌گذاریم، چون مخرج را صفر می‌کند، پس ۴ عدد صحیح در نامعادله صدق می‌کنند.

۷۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$y = (۲x + a)^2 - ۲x = ۴x^2 + ۴ax + a^2 - ۲x = ۴x^2 + (۴a - ۲)x + a^2$$

می‌دانیم محور تقارن $y = ax^2 + bx + c$ برابر $x = \frac{-b}{2a}$ می‌باشد.

پس محور تقارن $y = ۴x^2 + (۴a - ۲)x + a^2$ برابر است با:

$$\frac{-(۴a - ۲)}{۲(۴)} = ۱ \Rightarrow -۴a + ۲ = ۸ \Rightarrow -۴a = ۶ \Rightarrow a = \frac{-۳}{۲}$$

۷۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. باید عبارت $|a+۱| - ۱$ منفی باشد.

$$۱ - |a+۱| < ۰ \Rightarrow |a+۱| > ۱ \Rightarrow \begin{cases} a+۱ > ۱ \Rightarrow a > ۰ \\ a+۱ < -۱ \Rightarrow a < -۲ \end{cases}$$

بنابراین $a \in (-\infty, -۲) \cup (۰, ۲) = \mathbb{R} - [-۲, ۰]$ است.

۷۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\frac{x-1}{2} < 3x+1 < \frac{3-x}{3}$$

$$۱) \frac{x-1}{2} < 3x+1 \Rightarrow x-1 < 6x+2 \Rightarrow 5x > -3 \Rightarrow x > \frac{-3}{5}$$

$$۲) 3x+1 < \frac{3-x}{3} \Rightarrow 9x+3 < 3-x \Rightarrow 10x < 0 \Rightarrow x < 0$$

از اشتراک بازه‌های بالا به $\left(\frac{-3}{5}, 0\right)$ می‌رسیم.

۷۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. فاصله دو عدد فرد متوالی ۲ واحد است، پس اگر عدد اول x باشد، عدد دوم $x+2$ می‌شود:

$$x^2 + (x+2)^2 = 290 \Rightarrow x^2 + x^2 + 4x + 4 = 290$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 4x - 286 = 0 \xrightarrow{\div 2} x^2 + 2x - 143 = 0$$

$$\Rightarrow (x+13)(x-11) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -13 & \text{غ ق ق} \\ x_2 = 11 & \text{ق ق} \end{cases}$$

چون اعداد باید طبیعی باشند، پس $x = 11$ قابل قبول است، بنابراین این دو عدد ۱۳ و ۱۱ هستند که حاصل ضرب آنها هم $11 \times 13 = 143$ می‌شود.

۸۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. باید $f(x) > g(x)$ باشد یعنی $ax - 3 > -x + b$ است.

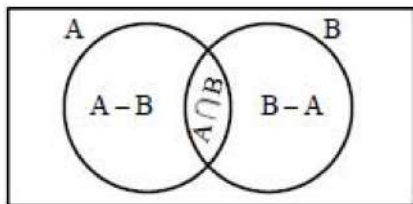
$$ax + x - 3 - b > 0 \Rightarrow (a+1)x - 3 - b > 0$$

شرط آن که عبارت بالا همواره مثبت باشد این است که $a+1 = 0$ باشد، به علاوه $-3 - b > 0$ یعنی $b < -3$ است.

$$a+1=0 \Rightarrow a=-1, b < -3$$

بنابراین $a+b < -4$ است و فقط گزینه (۴) می‌تواند صحیح باشد.

۸۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به نمودار ون زیر واضح است که:



$$n(A-B) + n(B-A) = n(A \cup B) - n(A \cap B) = 15 - 4 = 11$$

۸۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. تنها در صورتی اشتراک این دو بازه متناهی می‌باشد که:

$$\frac{m+1}{2} \leq \frac{2m+4}{5} \Rightarrow 5m+5 \leq 4m+8 \Rightarrow m \leq 3$$

پس به ازای ۳ مقدار طبیعی ۱، ۲ و ۳ برای m ، اشتراک دو بازه متناهی است.

۸۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به قسمت رنگی که قسمت اشتراک B و C می باشد به جز قسمتی که در A است، قسمت رنگ شده را می توان نوشت:

$$(B \cap C) - A = (B \cap C) \cap A' = (B \cap A') \cap C = (B - A) \cap C$$

۸۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مجموعه مرجع نامتناهی است، پس چون A متناهی است، A' نامتناهی است، ولی در مورد B' نمی توان چیزی گفت یعنی اگر B نامتناهی باشد، B' ممکن است متناهی یا نامتناهی باشد، بنابراین:

$$A - B' = A \cap B \Rightarrow$$

$$A' \cap B' \Rightarrow$$

$$A' \cup B \Rightarrow$$

اشتراک مجموعه متناهی A با هر مجموعه ای، متناهی است.
A' نامتناهی است و چون B' نامشخص است، پس نمی توان اظهار نظر کرد.
A' نامتناهی است و اجتماع آن با هر مجموعه ای، نامتناهی است.
پس فقط یک مجموعه از سه مجموعه لزوماً متناهی است.

۸۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. طبق الگویی که مشاهده می شود n ام یک مربع است که هر ضلع آن $n + 2$ واحد است و در هر شکل یک ردیف به علاوه دو مربع از ردیف بالایی آن رنگ نشده است، پس تعداد مربع های رنگ شده در شکل n ام برابر است با:

$$a_n = (n + 2)^2 - (n + 2 + 2) = n^2 + 4n + 4 - n - 4 = n^2 + 3n$$

$$\Rightarrow a_{21} - a_{20} = 21^2 + 3 \times 21 - 20^2 - 3 \times 20$$

$$= \underbrace{21^2 - 20^2}_{(21-20)(21+20)} + 3(21 - 20) = 41 + 3 = 44$$

$$(21-20)(21+20)$$

۸۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$A = \{2^{3x} | x \in \mathbb{N}, x \leq 20\} = \{2^3, 2^6, 2^9, \dots, 2^{60}\}$$

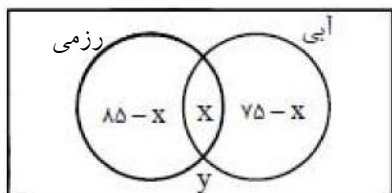
$$B = \{2^{5x} | x \in \mathbb{N}, x \leq 10\} = \{2^5, 2^{10}, 2^{15}, \dots, 2^{50}\}$$

پس $A \cap B$ مجموعه اعدادی که ۲ به توان مضارب ۱۵ رسیده است یعنی:

$$A \cap B = \{2^{15}, 2^{30}, 2^{45}\}$$

$$\Rightarrow n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 20 + 10 - 3 = 27$$

۸۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نمودار ون زیر را در نظر بگیرید:



$$85 - x + x + 75 - x + y = 100$$

$$\Rightarrow 160 - x + y = 100 \Rightarrow x = y + 60$$

پس چون حداقل y صفر است، پس حداقل x برابر ۶۰ است و چون $x - 75$ نمی تواند منفی شود، پس حداکثر x برابر ۷۵ است، بنابراین:

$$\begin{cases} a = 60 \\ b = 75 \end{cases} \Rightarrow b - a = 75 - 60 = 15$$

$$\begin{cases} t_5 - t_3 = 6 \Rightarrow t_1 q^4 - t_1 q^2 = 6 \\ t_6 - t_4 = 3 \Rightarrow t_1 q^5 - t_1 q^3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 q^2 (q^2 - 1) = 6 \\ t_1 q^3 (q^2 - 1) = 3 \end{cases}$$

تقسیم

$$\rightarrow q = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow t_1 = -32$$

$$\begin{aligned} t_1 t_2 \dots t_{19} &= t_1 \cdot t_1 q \cdot t_1 q^2 \dots t_1 q^{18} = t_1^{20} q^{1+2+\dots+18} \\ &= t_1^{20} q^{\frac{19 \times 20}{2}} = t_1^{20} q^{190} = (t_1^2 q^{19})^{10} = (2^{10} \times 2^{-19})^{10} \\ &= (2^{-9})^{10} = 2^{-90} = 2^K \Rightarrow K = -90 \end{aligned}$$

۸۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. فرض می‌کنیم مجموع جملات دوم و n برابر صفر است، پس:

$$a_7 + a_n = 0 \Rightarrow a_1 + d + a_1 + (n-1)d = 0$$

$$\Rightarrow 2a_1 + d + nd - d = 0 \Rightarrow nd = -2a_1 \xrightarrow{a_1 = -12} nd = 24$$

چون n و d طبیعی هستند، پس n فقط می‌تواند مقسوم‌علیه‌های ۲۴ باشد یعنی: $n \in \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$ ، اما $n \neq 2$ می‌باشد، پس مسأله ۷ جواب دارد.

۹۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$V = \frac{1}{4} \Rightarrow \text{ضلع مکعب} = a = \sqrt[3]{\frac{1}{4}} \Rightarrow \text{مساحت کل} = 6a^2 = 6\sqrt{\frac{1}{4}} = \sqrt[3]{\frac{6^3}{4}} = \sqrt[3]{54}$$

$$27 < 54 < 64 \Rightarrow 3 < \sqrt[3]{54} < 4$$