

۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$x = 2 \Rightarrow f(2) = 0 \Rightarrow 16 - 20 - 2 + m = 0 \Rightarrow m = 6$$

$$\Rightarrow f(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + 6$$

$$2x^3 - 5x^2 - x + 6 \quad \Big| \quad x - 2$$

$$\underline{2x^3 - 4x^2}$$

$$-x^2 - x + 6$$

$$\underline{-x^2 + 2x}$$

$$+ \quad -$$

$$\underline{-3x + 6}$$

$$-3x + 6$$

$$\underline{+ \quad -}$$

$$0$$

$$2x^2 - x - 3 \Rightarrow f(x) = (x - 2)(2x^2 - x - 3) = 0$$

↓

$$x = 2 \text{ و } 2x^2 - x - 3 = 0$$

$$(x + 1)(2x - 3) = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ و } x = \frac{3}{2}$$

۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$2x^2 - 9x - 4 = 0 \Rightarrow \text{حاصل ضرب ریشه‌ها} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$x^2 + 2x - 7 = 0 \Rightarrow \text{مجموع ریشه‌ها} = \frac{-2}{1} = -2$$

گزینه (۱):

معادله گزینه (۱) دارای دو جواب متمایز است. مجموع ریشه‌ها در سایر گزینه‌ها به ترتیب عبارت است از:  $2$ ،  $-\frac{9}{4}$  و  $\frac{9}{4}$

۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$S = 5, P = 2, A = |x_1 \sqrt{x_2} - x_2 \sqrt{x_1}| \Rightarrow A^2 = (x_1 \sqrt{x_2} - x_2 \sqrt{x_1})^2$$

$$\Rightarrow A^2 = x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 - 2x_1 x_2 \sqrt{x_1 x_2} = x_1 x_2 (x_1 + x_2) - 2x_1 x_2 \sqrt{x_1 x_2}$$

$$\Rightarrow A^2 = p \cdot s - 2p \sqrt{p} = 2 \times 5 - 2 \times 2 \sqrt{2} = 10 - 4\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow A = \pm \sqrt{10 - 4\sqrt{2}} \xrightarrow{A > 0} A = \sqrt{10 - 4\sqrt{2}}$$

۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چون  $\alpha$  ریشه معادله است پس در معادله صدق می کند یعنی:

$$\alpha^2 + 4\alpha + 2m - 9 = 0 \Rightarrow \alpha^2 + 4\alpha = 9 - 2m$$

$$\alpha^2 + 6\alpha + 2\beta = m^2 - 2 \Rightarrow \alpha^2 + 4\alpha + 2\alpha + 2\beta = m^2 - 2$$

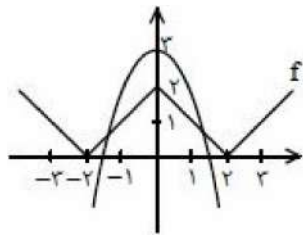
$$\Rightarrow 9 - 2m + 2(\alpha + \beta) = m^2 - 2 \Rightarrow 9 - 2m + 2(-4) = m^2 - 2$$

$$\Rightarrow 1 - 2m = m^2 - 2 \Rightarrow m^2 + 2m - 3 = 0 \Rightarrow (m - 1)(m + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -3 \end{cases}$$

$$m = 1 \Rightarrow x^2 + 4x - 7 = 0 \Rightarrow \Delta > 0 \text{ قابل قبول}$$

$$m = -3 \Rightarrow x^2 + 4x - 15 = 0 \Rightarrow \Delta > 0 \text{ قابل قبول}$$

۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با استفاده از روش هندسی حل معادله داریم:



$$||x| - 2| = 3 - x^2$$

$$f(x) = ||x| - 2|$$

$$g(x) = -x^2 + 3$$

معادله دو ریشه دارد.

۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\left( \frac{x+2}{x+1} + \frac{x+1}{x-1} = \frac{4}{x^2-1} \right) \times (x^2-1)$$

$$\Rightarrow (x+2)(x-1) + (x+1)^2 = 4 \Rightarrow x^2 + x - 2 + x^2 + 2x + 1 = 4$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 3x - 5 = 0 \Rightarrow x_1 = 1 \text{ و } x_2 = -\frac{5}{2}$$

ریشه  $x_1 = 1$  عضو دامنه تعریف نیست و بنابراین معادله فقط یک ریشه برابر  $x = -\frac{5}{2}$  دارد.

۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. فرض می کنیم قیمت جنس قبل از تخفیف  $x$  تومان بوده است، پس شخص می توانسته

تعداد  $\frac{1000}{x}$  از جنس بخرد، بنابراین از تخفیف قیمت جنس چند برابر  $x - 15$  و تعداد برابر  $\frac{990}{x - 15}$  است.

$$\frac{1000}{x} + 1 = \frac{990}{x - 15} \Rightarrow (x - 15)(x + 1000) = 990x$$

$$\Rightarrow x^2 + 985x - 15000 = 990x \Rightarrow x^2 - 5x - 15000 = 0$$

$$(x - 125)(x + 120) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -120 \text{ غ ق} \\ x = 125 \text{ ق ق} \end{cases}$$

۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$3x + 4 = \sqrt{x^2 + 5} \xrightarrow{3x + 4 \geq 0} 9x^2 + 24x + 16 = x^2 + 5$$

$$\Rightarrow 8x^2 + 24x + 10 = 0 \Rightarrow 4x^2 + 12x + 5 = 0$$

$$\Rightarrow \left. \begin{cases} x = -\frac{5}{4} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases} \right\} \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$3x + 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{4}{3}$$

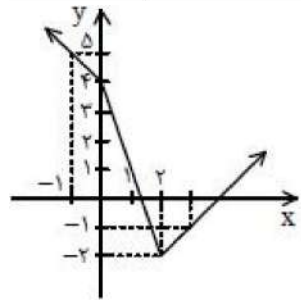
۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$y = |2x - 4| - |x|$$

$$x < 0 \Rightarrow y = -2x + 4 + x = -x + 4$$

$$0 \leq x < 2 \Rightarrow y = -2x + 4 - x = -3x + 4$$

$$x \geq 2 \Rightarrow y = 2x - 4 - x = x - 4$$



$$y = \begin{cases} -x + 4; & x < 0 \\ -3x + 4; & 0 \leq x < 2 \\ x - 4; & x \geq 2 \end{cases}$$

x	0	-1
y	4	5
x	0	2
y	4	-2
x	2	3
y	-2	-1

۱۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$|x + y| < |x| + |y| \Rightarrow (1) \text{ } x, y \text{ مختلف‌العلامت هستند.}$$

$$|x| = -x \xrightarrow{(1)} x < 0 \rightarrow y > 0$$

$$A = \sqrt{(x - y)^2 - 2|2y - x| + |y|} = \underbrace{|x - y|}_{\text{منفی}} - \underbrace{2|2y - x|}_{\text{مثبت}} + \underbrace{|y|}_{\text{مثبت}}$$

$$= -x + y - 2(2y - x) + y = -x + y - 4y + 2x + y = x - 2y$$

۱۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اگر  $a$  و  $b$  ریشه‌های معادله  $3x^2 - 7x + 3 = 0$  باشند، می‌دانیم  $S = a + b = \frac{7}{3}$  و

$$P = ab = \frac{3}{3} = 1 \text{ است، پس:}$$

$$ab = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{a}$$

عبارت داده شده  $\frac{a^2 + 1}{a} = a + \frac{1}{a}$  در واقع همان  $a + b$  است که  $\frac{7}{3}$  می‌شود.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. فرض کنیم  $(x^2 - 1)^2 = t \geq 0$  باشد، معادله را بازنویسی و حل می‌کنیم:

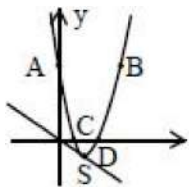
$$t^2 - 2t - 3 = 0 \Rightarrow (t+1)(t-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -1 \times \\ t = 3 \checkmark \end{cases}$$

$$t = (x^2 - 1)^2 = 3 \Rightarrow x^2 - 1 = \pm\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} \text{جواب ندارد.} \\ x^2 = 1 - \sqrt{3} \\ x^2 = 1 + \sqrt{3} \Rightarrow x = \pm\sqrt{x + \sqrt{3}} \end{cases}$$

معادله دو ریشه دارد که مجموع آنها صفر است.

راه حل دوم: اگر  $x = a$  ریشه معادله باشد،  $x = -a$  هم ریشه آن است، پس مجموع ریشه‌های معادله صفر است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. عرض نقاط  $A$  و  $B$  برابر است، پس طول رأس سهمی برابر  $\frac{x_A + x_B}{2}$  است.



$$x_S = \frac{2 + 0}{2} = 1$$

رأس سهمی روی خط  $y = -x$  قرار دارد، پس مختصات آن به صورت  $S(1, -1)$  خواهد بود، بنابراین معادله سهمی

به صورت  $y = a(x-1)^2 - 1$  است. نقطه  $(0, 3)$  روی آن است، پس در معادله آن صدق می‌کند:

$$3 = a(0-1)^2 - 1 \Rightarrow 3 = a - 1 \Rightarrow a = 4$$

حالا نقاط  $C$  و  $D$  را پیدا می‌کنیم:

$$y = 4(x-1)^2 - 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} x-1 = \frac{1}{2} \Rightarrow D = \frac{3}{2} \\ x-1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow C = \frac{1}{2} \end{cases}$$

فاصله  $C$  تا  $D$  برابر  $\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$  است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. هر نقطه روی  $y = \sqrt{2x+5}$  به صورت  $(x, \sqrt{2x+5})$  است. فاصله آن از  $A$  را

پیدا می‌کنیم:

$$d = \sqrt{(x-3)^2 + (\sqrt{2x+5} - 0)^2} = \sqrt{x^2 - 6x + 9 + 2x + 5} = \sqrt{x^2 - 4x + 14}$$

وقتی  $d$  کم‌ترین مقدار می‌شود که  $x^2 - 4x + 14$  کم‌ترین مقدار خود را داشته باشد. کم‌ترین مقدار آن هم برابر

$$f\left(\frac{-b}{2a}\right) = f(2) \text{ است}$$

$$d_{\min} = \sqrt{2^2 - 4(2) + 14} = \sqrt{10}$$

۱۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.  $x = 2$  باید در معادله صدق کند:

$$\frac{a}{3} = \frac{-3}{9} + \frac{3-a}{3} \Rightarrow \frac{a}{3} = \frac{-1}{3} + \frac{3-a}{3} \xrightarrow{\times 3} a = 2 - a \Rightarrow a = 1$$

حالا  $a$  را برابر ۱ قرار می‌دهیم و معادله را حل می‌کنیم:

$$\frac{1}{x+1} = \frac{1-2x}{1+x^2} + \frac{2}{x^2-x+1}$$

طرفین را در  $(x+1)(x^2-x+1) = x^3+1$  ضرب می‌کنیم:

$$x^2-x+1 = 1-2x+2(x+1) \Rightarrow x^2-x+1 = 3 \Rightarrow x^2-x-2 = 0$$

$$\Rightarrow (x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

توجه کنید که ریشه دیگر معادله -۱ نیست چون مخرج را صفر می‌کند، پس معادله فقط یک ریشه  $x = 2$  را دارد.

۱۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. فرض کنید دستگاه دوم در  $x$  ساعت آزمون را تصحیح کند، در این صورت در یک ساعت

$\frac{1}{x}$  کار را انجام می‌دهد. دستگاه اول هم در این مدت  $\frac{1}{5}$  کار را انجام می‌دهد، پس:

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{x} = \frac{1}{3} \xrightarrow{\times 15x} 3x + 15 = 5x \Rightarrow 2x = 15 \Rightarrow x = 7.5$$

۱۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\sqrt{3-x} + \sqrt{2x+3} = 3 \xrightarrow{\text{توان } 2} 3-x+2x+3+2\sqrt{(3-x)(2x+3)} = 9$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{(3-x)(2x+3)} = 3-x \xrightarrow{\text{توان } 2} 4(-2x^2+3x+9) = 9-6x+x^2$$

$$\Rightarrow 9x^2 - 18x - 27 = 0 \xrightarrow{\div 9} x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

هر دو ریشه در معادله اولیه صدق می‌کنند و قابل قبول هستند، پس مجموع آنها برابر است با:  $3 + (-1) = 2$ .

۱۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$p = 2x^2 - 3x - 5 \Rightarrow p = 0 \Rightarrow 2x^2 - 3x - 5 = 0 \Rightarrow \Delta = 9 + 40 = 49$$

$$x = \frac{3 \pm 7}{4} = -1, \frac{5}{2} \Rightarrow \begin{array}{c|c} x & \\ \hline p & + \quad - \quad - \quad + \end{array}$$

عبار  $p$  به ازای اعداد بین -۱ تا  $\frac{5}{2}$  منفی است و فقط  $-1 + \sqrt{7}$  بین -۱ تا  $\frac{5}{2}$  است.

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} = 1/4 + 1/7 = 3/1 > \frac{5}{2}, -1 - \sqrt{2} < -1, \frac{13}{5} = 2/6 > \frac{5}{2}$$

$$-1 < -1 + \sqrt{7} < \frac{5}{2}$$

۱۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ریشه‌های عبارت  $2x + ax + b$  همان ریشه‌های عبارت  $x^2 - x - 6$  هستند چون در غیر این صورت عبارت در ریشه‌های عبارت اول، تغییر علامت می‌دهد.

$$x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3, -2$$

$$\begin{cases} x = 3 \Rightarrow -2 \times 3^2 + 3a + b = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3a + b = 18 \\ -2a + b = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 12 \end{cases} \\ x = -2 \Rightarrow -2(-2)^2 - 2a + b = 0 \Rightarrow \end{cases}$$

$$b - a = 12 - 2 = 10$$

۲۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\frac{2x}{x+1} - \frac{3x+1}{x+3} \geq 0 \Rightarrow \frac{2x(x+3) - (x+1)(3x+1)}{(x+1)(x+3)} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{-x^2 + 2x - 1}{(x+1)(x+3)} \geq 0 \Rightarrow \frac{-(x-1)^2}{(x+1)(x+3)} \geq 0$$

	-3	-1	1	
$-(x-1)^2$	-	-	-	-
$x+1$	-	+	+	+
$x+3$	-	-	+	+
سمت چپ نامعادله	-	+	-	-
	جواب		جواب	

$$x \in (-3, -1) \cup \{1\}$$

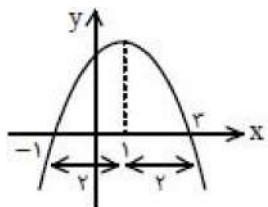
یعنی اعداد صحیح ۲- و ۱ در نامعادله صدق می‌کنند.

۲۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\underbrace{(x^2 + 3x)}_t - (x^2 + 3x) - 12 = 0 \Rightarrow t^2 - t - 12 = 0 \Rightarrow (t-4)(t+3) = 0$$

$$\begin{cases} t = 4 \Rightarrow x^2 + 3x = 4 \Rightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \Rightarrow \text{مجموع} = \frac{-b}{a} = -3 \\ t = -1 \Rightarrow x^2 + 3x = -1 \Rightarrow x^2 + 3x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta < 0 \text{ جواب ندارد} \end{cases}$$

۲۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ریشه‌های معادله درجه دوم نسبت به طول رأس آن متقارن هستند یعنی  $x = -1$  هم ریشه است و باید در معادله داده شده صدق کند.



$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\xrightarrow{\text{ریشه } x = -1} a(-1)^2 + b(-1) + c = 0 \Rightarrow a + c = b$$

۲۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

بیشترین مقدار تابع  $f(x) = -x^2 + \frac{v}{4}x + c$  در  $x = \frac{-b}{2a} = \frac{v}{4}$  رخ می‌دهد و برابر  $\frac{1}{16} = 0.0625 = f\left(\frac{v}{4}\right)$  است.

$$f(x) = x\left(-x + \frac{v}{4}\right) + c \Rightarrow f\left(\frac{v}{4}\right) = \frac{v}{4}\left(\frac{-v}{4} + \frac{v}{4}\right) + c$$

$$\Rightarrow \frac{v}{4}\left(\frac{v}{4}\right) + c = \frac{49}{16} + c = \frac{1}{16} \Rightarrow c = \frac{1 - 49}{16} = \frac{-48}{16} = -3$$

۲۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر ریشه‌های  $x^2 + mx + m + 1 = 0$  را  $\alpha, \beta$  در نظر بگیریم در این صورت ریشه‌های  $x^2 - 6x + n = 0$  برابر  $\alpha^2$  و  $\beta^2$  هستند.

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-m}{1}, \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{m+1}{1}, \alpha^2 + \beta^2 = \frac{-b}{a} = 6$$

$$\underbrace{(\alpha + \beta)^2}_{-m} = \underbrace{\alpha^2 + \beta^2}_6 + \underbrace{2\alpha\beta}_{m+1} \Rightarrow m^2 = 6 + 2m + 1$$

$$\Rightarrow m^2 - 2m - 8 = 0 \Rightarrow (m - 4)(m + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 4 & \text{ق ق} \\ m = -2 & \text{ق ق} \end{cases}$$

اگر  $m = 4$  باشد، معادله به صورت  $x^2 + 4x + 5 = 0$  می‌شود و چون  $\Delta < 0$  است اصلاً ریشه‌ای ندارد. اگر  $m = -2$  باشد، معادله  $x^2 - 2x - 1 = 0$  است و ۲ ریشه دارد، پس فقط  $m = -2$  قابل قبول است.

۲۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\frac{x^2 + 1}{x^3 - 1} = \frac{(2ax + 3)(1 - x) + a(x^2 + x + 1)}{(x^2 + x + 1)(1 - x)}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 + 1}{x^3 - 1} = \frac{2ax - 2ax^2 + 3 - 3x + ax^2 + ax + a}{1 - x^3}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 + 1}{x^3 - 1} = \frac{-ax^2 + (3a - 3)x + 3 + a}{1 - x^3} \Rightarrow \frac{x^2 + 1}{x^3 - 1} = \frac{ax^2 + (3 - 3a)x - 3 - a}{x^3 - 1}$$

$$\Rightarrow x^2 + 1 = ax^2 + (3 - 3a)x - 3 - a \Rightarrow (a - 1)x^2 + (3 - 3a)x - 4 - a = 0$$

$$\text{حاصل ضرب جواب‌ها} = \frac{c}{a} = \frac{-4 - a}{a - 1} = 5 \Rightarrow -4 - a = 5a - 5 \Rightarrow 6a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{6}$$

۲۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\sqrt{3x+1} = \sqrt{2-x} + 1 \xrightarrow{\text{توان } 2} 3x+1 = 2-x+1+2\sqrt{2-x}$$

$$\Rightarrow 4x-2 = 2\sqrt{2-x} \xrightarrow{\div 2} 2x-1 = \sqrt{2-x}$$

$$\xrightarrow{\text{توان } 2} 4x^2 - 4x + 1 = 2 - x \Rightarrow 4x^2 - 3x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(4x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{ق ق } x=1 \\ \text{غ ق ق } x=-\frac{1}{4} \end{cases}$$

$x = -\frac{1}{4}$  در معادله صدق نمی کند، پس قابل قبول نیست.

$$\sqrt{3x+1} - \sqrt{2-x} = 1 \xrightarrow{x = -\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{1}{4}} - \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$$

پس معادله فقط یک جواب  $x=1$  را دارد.

۲۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. تابع دو ریشه منفی دارد یعنی باید شرطهای  $\Delta > 0$  و  $\frac{-b}{a} < 0$  و  $\frac{c}{a} > 0$  برقرار باشند.

در گزینه (۲)،  $\Delta < 0$  است، در گزینه (۳)،  $\frac{c}{a} < 0$  است و در گزینه (۴)،  $\frac{-b}{a} > 0$ ، پس جواب گزینه (۱) می شود.

۲۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. فرض کنیم علی در  $x$  ساعت و محمد در  $x+9$  ساعت این کار را انجام می دهند.

این صورت در ۱ ساعت علی  $\frac{1}{x}$  کار و محمد  $\frac{1}{x+9}$  کار را انجام می دهند.

$$\frac{1}{x+9} + \frac{1}{x} = \frac{1}{20} \Rightarrow \frac{x+9+x}{(x+9)x} = \frac{1}{20} \Rightarrow \frac{2x+9}{x^2+9x} = \frac{1}{20}$$

$$\Rightarrow 40x + 180 = x^2 + 9x \Rightarrow x^2 - 31x - 180 = 0 \Rightarrow (x+5)(x-36) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{ق ق } x=36 \\ \text{غ ق ق } x=-5 \end{cases}$$

علی در ۳۶ ساعت و محمد در  $36+9=45$  ساعت کتاب را تایپ می کنند.



۲۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\sqrt{\frac{x^2 + 3}{x}} + 2\sqrt{\frac{x}{x^2 + 3}} = 3$$

اگر فرض کنیم  $\sqrt{\frac{x^2 + 3}{x}} = A$  است داریم:

$$A + \frac{2}{A} = 3 \Rightarrow \frac{A^2 + 2}{A} = 3 \Rightarrow A^2 - 3A + 2 = 0$$

$$\Rightarrow (A - 2)(A - 1) = 0 \Rightarrow A = 2, A = 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A = 2 \Rightarrow \sqrt{\frac{x^2 + 3}{x}} = 2 \Rightarrow \frac{x^2 + 3}{x} = 4 \Rightarrow x^2 + 3 = 4x \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A = 1 \Rightarrow \sqrt{\frac{x^2 + 3}{x}} = 1 \Rightarrow \frac{x^2 + 3}{x} = 1 \Rightarrow x^2 - x + 3 = 0 \Rightarrow \Delta < 0 \text{ جواب ندارد} \end{array} \right.$$

۳۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

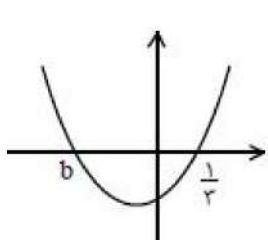
$$x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = -1, P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = -1$$

$$d = |\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{5}}{1} \Rightarrow \alpha - \beta = \pm\sqrt{5}$$

$$\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)}{-1} = \frac{\pm\sqrt{5}(-1)}{-1} = \pm\sqrt{5}$$

فقط  $-\sqrt{5}$  در گزینه‌ها است.

۳۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. یک تابع درجه ۲ وقتی فقط در فاصله  $(b, \frac{1}{3})$  کم تر از صفر است یعنی  $\frac{1}{3}$  و  $b$  ریشه های آن می باشند، پس  $x = \frac{1}{3}$  ریشه  $f(x) = ax^2 + bx - a$  است.



$$f(x) = ax^2 + bx - a$$

$$x = \frac{1}{3} \rightarrow f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9}a + \frac{1}{3}b - a = 0 \Rightarrow \frac{1}{3}b = \frac{8}{9}a \Rightarrow a = \frac{3}{8}b$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{3}{8}bx^2 + bx - \frac{3}{8}b = \left(\frac{3}{8}bx - \frac{3}{8}b\right)(x + \frac{8}{3})$$

بنابراین ریشه های  $f(x)$  برابر  $x_1 = \frac{1}{3}$  و  $x_2 = -\frac{8}{3}$  هستند و این تابع در فاصله  $(-\frac{8}{3}, \frac{1}{3})$  منفی است، پس  $b = -\frac{8}{3}$  می شود.

۳۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. جدول مربوط به یک عبارت درجه ۱ است، پس  $a = -3$  می باشد.

$$f(x) = (a + 3)x^2 + ax + b \xrightarrow{a = -3} f(x) = -3x + b$$

از طرفی با توجه به جدول  $f(b + 1) = 0$  است.

$$-3(b + 1) + b = -2b - 3 = 0 \Rightarrow b = -\frac{3}{2}$$

بنابراین  $f(x) = -3x - \frac{3}{2}$ ، حالا  $f(b) = f\left(-\frac{3}{2}\right)$  را پیدا می کنیم:

$$f(b) = f\left(-\frac{3}{2}\right) = -3\left(-\frac{3}{2}\right) - \frac{3}{2} = \frac{9}{2} - \frac{3}{2} = 3$$

۳۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. عبارت  $(-x^2 + ax + b)(x + 1)$  ریشه ۱- دارد. از طرفی چون در فاصله  $(-\infty, 1]$  بزرگ تر مساوی صفر است،  $x = 1$  هم باید ریشه آن باشد، پس جدول تعیین علامت باید این شکلی باشد:

x	-1	1	
f(x)	+	+	-

یعنی در  $x = -1$  باید ریشه مضاعف داشته باشد. پس عبارت  $-x^2 + ax + b$  دارای ۲ ریشه است که یکی از آنها  $x = 1$  و دیگری  $x = -1$  است:

$$\begin{cases} x = 1 \Rightarrow -1 + a + b = 0 \\ x = -1 \Rightarrow -1 - a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow b = 1, a = 0$$

$$a - b = 0 - 1 = -1$$

۳۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به نمودار تابع  $y = f(x)$  می‌توانیم آن را تعیین علامت کنیم:

	-۲	۰	۱	۲
$x+۲$	-	+	+	+
$f(x)$	+	+	-	+
$\frac{x+۲}{f(x)}$	-	+	-	+

○ تن تن تن

در فاصله  $[-۲, ۰) \cup (۳, +\infty)$  که  $\frac{x+۲}{f(x)}$  نامنفی است که شامل بی‌شمار عدد صحیح است.

۳۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در عبارت  $-x^2 + x - ۱$ ،  $\Delta < ۰$ ،  $a < ۰$  است، پس این عبارت همواره منفی است،

بنابراین باید عبارت  $\frac{۵-x^2}{|x-۲|} \geq ۰$  باشد. از طرفی مخرج با شرط  $x \neq ۲$  همواره مثبت است، پس باید  $۵-x^2 \geq ۰$  باشد:

$$۵-x^2 \geq ۰ \Rightarrow x^2 \leq ۵ \Rightarrow -\sqrt{۵} \leq x \leq \sqrt{۵}$$

در نامعادله بالا اعداد صحیح ۲، ۱، ۰، -۱، -۲ صدق می‌کنند که  $x = ۲$  را کنار می‌گذاریم، چون مخرج را صفر می‌کند، پس ۴ عدد صحیح در نامعادله صدق می‌کنند.

۳۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$y = (۲x + a)^2 - ۲x = ۴x^2 + ۴ax + a^2 - ۲x = ۴x^2 + (۴a - ۲)x + a^2$$

می‌دانیم محور تقارن  $y = ax^2 + bx + c$  برابر  $x = \frac{-b}{2a}$  می‌باشد.

پس محور تقارن  $y = ۴x^2 + (۴a - ۲)x + a^2$  برابر است با:

$$\frac{-(۴a - ۲)}{۲(۴)} = ۱ \Rightarrow -۴a + ۲ = ۸ \Rightarrow -۴a = ۶ \Rightarrow a = \frac{-۳}{۲}$$

۳۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. باید عبارت  $۱ - |a + ۱|$  منفی باشد.

$$۱ - |a + ۱| < ۰ \Rightarrow |a + ۱| > ۱ \Rightarrow \begin{cases} a + ۱ > ۱ \Rightarrow a > ۰ \\ a + ۱ < -۱ \Rightarrow a < -۲ \end{cases}$$

بنابراین  $a \in (-\infty, -۲) \cup (۰, ۲) = \mathbb{R} - [-۲, ۰]$  است.

۳۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\frac{x-1}{2} < 3x+1 < \frac{3-x}{3}$$

$$۱) \frac{x-1}{2} < 3x+1 \Rightarrow x-1 < 6x+2 \Rightarrow 5x > -3 \Rightarrow x > \frac{-3}{5}$$

$$۲) 3x+1 < \frac{3-x}{3} \Rightarrow 9x+3 < 3-x \Rightarrow 10x < 0 \Rightarrow x < 0$$

از اشتراک بازه‌های بالا به  $\left(\frac{-3}{5}, 0\right)$  می‌رسیم.

۳۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. فاصله دو عدد فرد متوالی ۲ واحد است، پس اگر عدد اول  $x$  باشد، عدد دوم  $x+2$  می‌شود:

$$x^2 + (x+2)^2 = 290 \Rightarrow x^2 + x^2 + 4x + 4 = 290$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 4x - 286 = 0 \xrightarrow{\div 2} x^2 + 2x - 143 = 0$$

$$\Rightarrow (x+13)(x-11) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -13 & \text{غ ق ق} \\ x_2 = 11 & \text{ق ق} \end{cases}$$

چون اعداد باید طبیعی باشند، پس  $x = 11$  قابل قبول است، بنابراین این دو عدد ۱۳ و ۱۱ هستند که حاصل ضرب آنها هم  $11 \times 13 = 143$  می‌شود.

۴۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. باید  $f(x) > g(x)$  باشد یعنی  $ax - 3 > -x + b$  است.

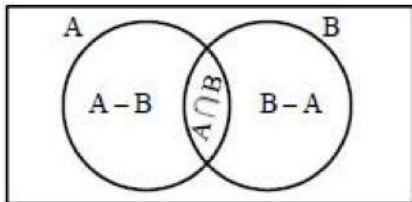
$$ax + x - 3 - b > 0 \Rightarrow (a+1)x - 3 - b > 0$$

شرط آن که عبارت بالا همواره مثبت باشد این است که  $a+1 = 0$  باشد، به علاوه  $-3 - b > 0$  یعنی  $b < -3$  است.

$$a+1 = 0 \Rightarrow a = -1, b < -3$$

بنابراین  $a+b < -4$  است و فقط گزینه (۴) می‌تواند صحیح باشد.

۴۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به نمودار ون زیر واضح است که:



$$n(A-B) + n(B-A) = n(A \cup B) - n(A \cap B) = 15 - 4 = 11$$

۴۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. تنها در صورتی اشتراک این دو بازه متناهی می‌باشد که:

$$\frac{m+1}{2} \leq \frac{2m+4}{5} \Rightarrow 5m+5 \leq 4m+8 \Rightarrow m \leq 3$$

پس به ازای ۳ مقدار طبیعی ۱، ۲ و ۳ برای  $m$ ، اشتراک دو بازه متناهی است.

۴۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به قسمت رنگی که قسمت اشتراک B و C می باشد به جز قسمتی که در A است، قسمت رنگ شده را می توان نوشت:

$$(B \cap C) - A = (B \cap C) \cap A' = (B \cap A') \cap C = (B - A) \cap C$$

۴۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مجموعه مرجع نامتناهی است، پس چون A متناهی است، A' نامتناهی است، ولی در مورد B' نمی توان چیزی گفت یعنی اگر B نامتناهی باشد، B' ممکن است متناهی یا نامتناهی باشد، بنابراین:

$$A - B' = A \cap B \Rightarrow$$

$$A' \cap B' \Rightarrow$$

$$A' \cup B \Rightarrow$$

اشتراک مجموعه متناهی A با هر مجموعه ای، متناهی است.  
A' نامتناهی است و چون B' نامشخص است، پس نمی توان اظهار نظر کرد.  
A' نامتناهی است و اجتماع آن با هر مجموعه ای، نامتناهی است.  
پس فقط یک مجموعه از سه مجموعه لزوماً متناهی است.

۴۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. طبق الگویی که مشاهده می شود  $n$ ام یک مربع است که هر ضلع آن  $n + 2$  واحد است و در هر شکل یک ردیف به علاوه دو مربع از ردیف بالایی آن رنگ نشده است، پس تعداد مربع های رنگ شده در شکل  $n$ ام برابر است با:

$$a_n = (n + 2)^2 - (n + 2 + 2) = n^2 + 4n + 4 - n - 4 = n^2 + 3n$$

$$\Rightarrow a_{21} - a_{20} = 21^2 + 3 \times 21 - 20^2 - 3 \times 20$$

$$= \underbrace{21^2 - 20^2}_{(21-20)(21+20)} + 3(21 - 20) = 41 + 3 = 44$$

$$(21-20)(21+20)$$

۴۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$A = \{2^{3x} | x \in \mathbb{N}, x \leq 20\} = \{2^3, 2^6, 2^9, \dots, 2^{60}\}$$

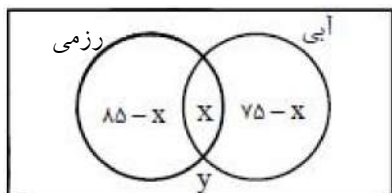
$$B = \{2^{5x} | x \in \mathbb{N}, x \leq 10\} = \{2^5, 2^{10}, 2^{15}, \dots, 2^{50}\}$$

پس  $A \cap B$  مجموعه اعدادی که ۲ به توان مضارب ۱۵ رسیده است یعنی:

$$A \cap B = \{2^{15}, 2^{30}, 2^{45}\}$$

$$\Rightarrow n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 20 + 10 - 3 = 27$$

۴۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نمودار ون زیر را در نظر بگیرید:



$$۸۵ - x + x + ۷۵ - x + y = ۱۰۰$$

$$\Rightarrow ۱۶۰ - x + y = ۱۰۰ \Rightarrow x = y + ۶۰$$

پس چون حداقل y صفر است، پس حداقل x برابر ۶۰ است و چون  $۷۵ - x$  نمی تواند منفی شود، پس حداکثر x برابر ۷۵ است، بنابراین:

$$\begin{cases} a = ۶۰ \\ b = ۷۵ \end{cases} \Rightarrow b - a = ۷۵ - ۶۰ = ۱۵$$

۴۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} t_5 - t_3 = 6 \Rightarrow t_1 q^4 - t_1 q^2 = 6 \\ t_6 - t_4 = 3 \Rightarrow t_1 q^5 - t_1 q^3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 q^2 (q^2 - 1) = 6 \\ t_1 q^3 (q^2 - 1) = 3 \end{cases}$$

تقسیم  
 $\rightarrow q = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow t_1 = -32$

$$\begin{aligned} t_1 t_2 \dots t_{20} &= t_1 \cdot t_1 q \cdot t_1 q^2 \dots t_1 q^{19} = t_1^{20} q^{1+2+\dots+19} \\ &= t_1^{20} q^{\frac{19 \times 20}{2}} = t_1^{20} q^{190} = (t_1^2 q^{19})^{10} = (2^{10} \times 2^{-19})^{10} \\ &= (2^{-9})^{10} = 2^{-90} = 2^K \Rightarrow K = -90. \end{aligned}$$

۴۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. فرض می‌کنیم مجموع جملات دوم و  $n$ ام برابر صفر است، پس:

$$a_7 + a_n = 0 \Rightarrow a_1 + d + a_1 + (n-1)d = 0$$

$$\Rightarrow 2a_1 + d + nd - d = 0 \Rightarrow nd = -2a_1 \xrightarrow{a_1 = -12} nd = 24$$

چون  $n$  و  $d$  طبیعی هستند، پس  $n$  فقط می‌تواند مقسوم‌علیه‌های ۲۴ باشد یعنی:  $n \in \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$ ، اما  $n \neq 2$  می‌باشد، پس مسأله ۷ جواب دارد.

۵۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$V = \frac{1}{4} \Rightarrow \text{ضلع مکعب} = a = \sqrt[3]{\frac{1}{4}} \Rightarrow \text{مساحت کل} = 6a^2 = 6\sqrt[3]{\frac{1}{4}} = \sqrt[3]{\frac{6^3}{4}} = \sqrt[3]{54}$$

$$27 < 54 < 64 \Rightarrow 3 < \sqrt[3]{54} < 4$$

۵۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\sqrt[3]{x} \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = \sqrt[3]{\sqrt{x} x^3} \cdot \sqrt{x} = \sqrt[6]{x^3} \cdot \sqrt{x} = \sqrt{x} \sqrt{x} = x = 6$$

۵۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. برای آن که دو عبارت رادیکالی را بتوان بر هم تقسیم کرد باید هم‌فرجه شوند. می‌دانیم:

$$\begin{cases} \sqrt{x} = \sqrt[6]{x^3} \\ \sqrt[3]{x} = \sqrt[6]{x^2} & x \geq 0 \\ \sqrt[3]{x} = -\sqrt[6]{x^2} & x < 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{\sqrt{2-a}}{\sqrt[3]{a-2}} = \frac{\sqrt{2-a}}{-\sqrt[3]{2-a}} = \frac{\sqrt[6]{(2-a)^3}}{-\sqrt[6]{(2-a)^2}} = -\sqrt{2-a}$$

۵۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 6x + 5} = \frac{(x-3)^2 - 1}{(x-3)^2 - 4} = \frac{(-\sqrt{19})^2 - 1}{(-\sqrt{19})^2 - 4} = \frac{18}{15} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$$

۵۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} a^4 + a^2 + 1 &= (a^2 + 1)^2 - a^2 = (a^2 + 1 + a)(a^2 + 1 - a) \\ \Rightarrow \sqrt{\frac{a^4 + a^2 + 1}{a^2 + a + 1}} + 3a &= \sqrt{\frac{(a^2 + 1 + a)(a^2 + 1 - a)}{a^2 + a + 1}} + 3a \\ &= \sqrt{a^2 + 1 - a + 3a} = \sqrt{a^2 + 2a + 1} = \sqrt{(a+1)^2} = |a+1| \xrightarrow{a > 100} = a+1 \end{aligned}$$

۵۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} x^2 + 4 = 3x &\Rightarrow x^2 - 3x = -4 \\ A = (x-1)(x+1)(x-2)(x-4) &= (x^2 - 3x + 2)(x^2 - 3x - 4) \\ &= (-4 + 2)(-4 - 4) = -2 \times -8 = 16 \end{aligned}$$