

۵۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\frac{1}{\sqrt{5-2}} = \frac{1}{\sqrt{5-2}} \times \frac{\sqrt{5+2}}{\sqrt{5+2}} = \frac{\sqrt{5+2}}{5-4} = \sqrt{5+2}$$

$$\frac{4}{3+\sqrt{5}} = \frac{4}{3+\sqrt{5}} \times \frac{3-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} = \frac{4(3-\sqrt{5})}{9-4} = 3-\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \sqrt{4 + \frac{1}{\sqrt{5-2}} + \frac{4}{3+\sqrt{5}}} = \sqrt{4 + \sqrt{5+2} + 3-\sqrt{5}} = \sqrt{9} = 3$$

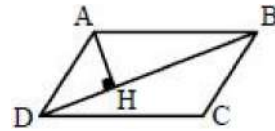
۵۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} a^3 - 3a + 2 &= a^3 - a - 2a + 2 = a(a-1)(a+1) - 2(a-1) \\ &= (a-1)(a^2 + a - 2) = (a-1)(a-1)(a+2) = (a-1)^2(a+2) \end{aligned}$$

۵۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اول معادله BD را به دست می آوریم:

$$m_{BD} = \frac{-3 - 0}{0 - 4} = \frac{3}{4} \Rightarrow y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 0 = \frac{3}{4}(x - 4) \xrightarrow{\times 4} 4y = 3x - 12 \Rightarrow 4y = 3x + 12 = 0$$



حالا فاصله A از BD را حساب می کنیم:

$$AH = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|4(1) - 3(2) + 12|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{10}{5} = 2$$

۵۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر A' قرینه A نسبت به B باشد، آن گاه داریم:

$$\frac{x_A + x_{A'}}{2} = x_B \quad 1 \Rightarrow x_{A'} = 2 - m$$

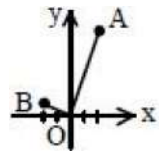
مختصات رأس سهمی $y = x^2 - 2x - 3m - 4$ را هم از رابطه $S = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{\Delta}{4a} = f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$ به دست می آید،

$$x_S = \frac{-(-2)}{2 \times 1} = 1$$

پس:

A' روی رأس سهمی واقع شده، پس $2 - m = 1$ ، در نتیجه $m = 1$ است.

۶۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نقاط را در دستگاه نشان می دهیم، ببینید. با توجه به شکل می توان حدس زد که اندازه زاویه \widehat{AOB} برابر 90° است، این موضوع را بررسی می کنیم:

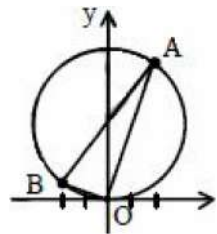


$$m_{OB} = -\frac{1}{2}, \quad m_{OA} = \frac{2}{1} = 2$$

OA و OB بر هم عمودند و AB قطر دایره است.

$$AB = \sqrt{(2 - (-2))^2 + (1 - 1)^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$$

پس اندازه شعاع دایره $\frac{5}{2}$ است و مساحت آن برابر است با:



$$S = \pi R^2 = \pi \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25\pi}{4}$$

۶۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. فاصله O' تا خط $3x - 4y - 1 = 0$ برابر نصف طول ضلع مربع است:

$$\frac{a}{2} = \frac{|3(1) - 4(4) - 1|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{14}{5} \Rightarrow a = \frac{28}{5} \Rightarrow S = \left(\frac{28}{5}\right)^2 = 313/6$$

۶۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. معادله خط BC را می نویسیم:

$$y - (-1) = \frac{2 - (-1)}{2 - 3}(x - 3) \Rightarrow y + 1 = -(x - 3) \Rightarrow BC: x + y - 2 = 0$$

AH خطی است که از A می گذرد و بر BC عمود است، پس:

$$AH: y - 5 = -\frac{1}{-1}(x - 2) \Rightarrow x - y + 3 = 0$$

محل تلاقی این دو خط پای عمود است:

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x - y + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}, y = \frac{5}{2}$$

۶۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. O وسط A و B است، پس:

$$\begin{cases} 1 = \frac{a + (-2)}{2} \Rightarrow a = 4 \\ c = \frac{3 + b}{2} \Rightarrow b = 2c - 3 \quad (I) \end{cases}$$

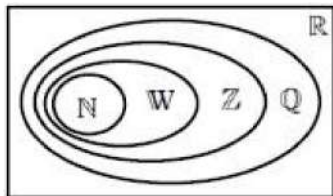
و OA و OB چون شعاع دایره هستند، مقدارشان ۵ است.

$$OA = 5 \Rightarrow \sqrt{(4 - 1)^2 + (c - 3)^2} = 5 \Rightarrow (c - 3)^2 = 16$$

$$c - 3 = \pm 4 \Rightarrow \begin{cases} c = -1 \xrightarrow{(I)} b = -5 \\ c = 7 \end{cases} \text{ در ربع چهارم نیست.}$$

$$\Rightarrow ac - b = 4(-1) - (-5) = 1$$

۶۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. مطابق شکل داریم:



$$N \subseteq W \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R$$

۶۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. می دانیم $6^3 = 216$ و $7^3 = 343$ هستند، پس:

$$6 < \sqrt[3]{250} < 7 \Rightarrow A + B = 6 + 7 = 13$$

۶۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اگر M نقطه‌ای وسط BC باشد داریم:

$$M = \frac{B + C}{2} = \left(\frac{-3 + 0}{2}, \frac{7 + 1}{2} \right) = \left(-\frac{3}{2}, 4 \right)$$

معادله خطی را می خواهیم که از نقاط $A(2, 4)$ و $M\left(-\frac{3}{2}, 4\right)$ می گذرد، چون عرض این خطها یکسان است پس

معادله خط $y = 4$ می شود.

۶۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. از شکل به جدول زیر می‌رسیم:

	شکل ۱	شکل ۲	شکل ۳
تعداد پاره‌خطها	۴	۱۰	۱۶

$\xrightarrow{+6}$ $\xrightarrow{+6}$

همان‌طور که می‌بینید شکل‌ها از یک الگوی خطی پیروی می‌کنند. جمله عمومی آن $a_n = 6n - 2$ است. تعداد جملات دنباله یازدهم برابر است با:

$$a_{11} = 6(11) - 2 = 66 - 2 = 64$$

۶۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. تعداد جملات تا انتهای دسته چهاردهم برابر است با:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 14 = \frac{14 \times 15}{2} = 7(15) = 105$$

بنابراین جمله اول دسته پانزدهم برابر ۱۰۶ امین جمله دنباله است. جمله عمومی این دنباله را می‌توانیم به صورت $a_n = 2n$ فرض کنیم، پس داریم:

$$a_{106} = 2(106) = 212$$

۶۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$n = 1 \Rightarrow a_2 = 2a_1 + k = 2 + k$$

$$n = 2 \Rightarrow a_3 = 2a_2 + k = 2(2 + k) + k = 4 + 3k$$

$$n = 3 \Rightarrow a_4 = 2a_3 + k = 2(4 + 3k) + k = 8 + 7k$$

سؤال گفته $a_4 = 22$ است:

$$a_4 = 8 + 7k = 22 \Rightarrow 7k = 22 - 8 = 14 \Rightarrow k = 2$$

حالا a_5 را پیدا می‌کنیم:

$$n = 4 \Rightarrow a_5 = 2a_4 + k = 2(22) + 2 = 44 + 2 = 46$$

۷۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$65 + 2d = 59 \Rightarrow 2d = -6 \Rightarrow d = -3$$

جمله اول دنباله $a = 65$ و قدرنسبت $d = -3$ است. جمله عمومی دنباله را می‌نویسیم:

$$a_n = 65 + (n - 1)(-3) = 65 - 3n + 3 = 68 - 3n$$

برای پیدا کردن تعداد جملات مثبت قرار می‌دهیم $a_n > 0$ ، داریم:

$$68 - 3n > 0 \Rightarrow 68 > 3n \Rightarrow n < \frac{68}{3} \cong 22.7 \Rightarrow n = 1, 2, \dots, 22$$

جملات اول تا بیست و دوم مثبت هستند.

۷۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$a = aq + aq^2 = \frac{3}{4}$$

$$aq^3 + aq^4 + aq^5 = -6 \Rightarrow q^3(a + aq + aq^2) = -6$$

دو عبارت را بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{a + aq + aq^2}{q^3(a + aq + aq^2)} = \frac{1}{q^3} = \frac{\frac{3}{4}}{-6} = \frac{-1}{8} \Rightarrow q = -2$$

با جایگذاری q در رابطه اول، a را هم پیدا می‌کنیم:

$$a - 2a + 4a = \frac{3}{4} \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

۷۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. قدرنسبت دنباله هندسی برابر است با:

$$q = \frac{11 - 9}{9 - 6} = \frac{2}{3}$$

پس جملات به ترتیب برابر $\frac{4}{9}a$ و $\frac{2}{3}a$ و a هستند که نسبت بزرگ‌ترین به کوچک‌ترین آن‌ها برابر است با:

$$\frac{a}{\frac{4}{9}a} = \frac{9}{4} = 2/25$$

۷۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. برای گزینه‌های ۱، ۲ و ۳، مثال نقض ارائه می‌کنیم:

(۱) اگر $A = W$ و $B = N$ باشد در این صورت:

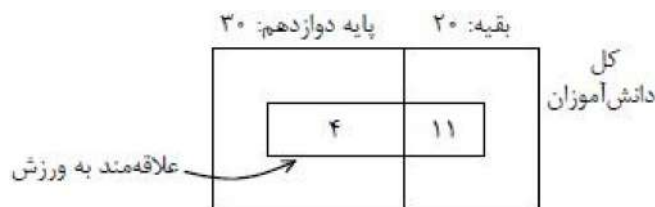
$$A - B = \{0\}$$

(۲) اگر A مجموعه اعداد فرد و B مجموعه اعداد زوج باشد در این صورت $A \cap B = \emptyset$ است.

(۳) اگر $A = B = R$ باشد در این صورت: $A' \cap B' = \emptyset \cap \emptyset = \emptyset$ می‌شود.

(۴) توجه کنید که $(B - A)' = (B \cap A)' = B' \cup A$ است و چون A نامتناهی است، پس $B' \cup A$ هم حتماً نامتناهی می‌شود.

۷۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به نمودار، $20 - 11 = 19$ دانش‌آموز داریم که پایه دوازدهم نیستند و به ورزش علاقه ندارند.



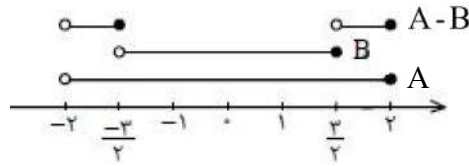
۷۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$A = \{2x | x \in (-1, 2]\} = \{2x | -1 < x \leq 2\} = (-2, 4]$$

$$B = \{x | 2x + 1 \in A\} = \{x | -2 < 2x + 1 \leq 4\} = \{x | -3 < 2x \leq 3\} = \left\{x \mid -\frac{3}{2} < x \leq \frac{3}{2}\right\} = \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$$

حالا $A - B$ را حساب می‌کنیم:

$$A - B = \left(-2, -\frac{3}{2}\right] \cup \left(\frac{3}{2}, 4\right]$$



۷۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$x + \frac{2}{x} = 5 \xrightarrow{\text{توان } 2} x^2 + \frac{4}{x} + 4 = 25 \Rightarrow x^2 + \frac{4}{x} = 21$$

$$A = x - \frac{2}{x} \xrightarrow{\text{توان } 2} A^2 = x^2 + \frac{4}{x^2} - 4 = 17 \Rightarrow A = \pm\sqrt{17}$$

۷۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{3}16 - \sqrt{2}24} &= \frac{2}{2\sqrt{3}2 - 2\sqrt{2}3} = \frac{2}{2(\sqrt{3}2 - \sqrt{2}3)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}2 - \sqrt{2}3} \times \frac{\sqrt{3}4 + \sqrt{2}6 + \sqrt{9}}{\sqrt{3}4 + \sqrt{2}6 + \sqrt{9}} = \frac{\sqrt{3}4 + \sqrt{2}6 + \sqrt{9}}{2 - 3} = -\sqrt{3}4 - \sqrt{2}6 - \sqrt{9} \end{aligned}$$

۷۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$x^4 + 3x^2 + 4 = (x^4 + 2x^2 + 4) - x^2 = (x^2 + 2)^2 - x^2 = (x^2 + 2 - x)(x^2 + x + 2)$$

پس عامل‌های $x^4 + 3x^2 + 4$ عبارت‌های $x^2 - x + 2$ و $x^2 + x + 2$ هستند.

۷۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$$

$$2^3 = 4 + 3ab(2) \Rightarrow 8 - 4 = 6ab \Rightarrow ab = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

برای پیدا کردن $a^2 + b^2$ ، $a + b$ را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \Rightarrow 2^2 = a^2 + b^2 + 2\left(\frac{2}{3}\right) \Rightarrow a^2 + b^2 = 4 - \frac{4}{3} = \frac{12 - 4}{3} = \frac{8}{3}$$

۸۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$x = \frac{a}{\sqrt{-a}} = \frac{-\sqrt{-a} \times \sqrt{-a}}{\sqrt{-a}} = -\sqrt{-a}$$

چون $0 < a < -1$ است، پس:

$$-a < \sqrt{-a} \Rightarrow a > -\sqrt{-a} \Rightarrow a > x$$

گزینه‌های ۱ و ۳ حذف می‌شوند، به‌علاوه چون $y = \sqrt{a^2} > 0$ است، از a و x بزرگ‌تر خواهد بود، پس:

$$y > a > x$$

۸۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$A = 7 + 4\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^2 \Rightarrow \sqrt{A} = 2 + \sqrt{3}$$

$$B = 7 - 4\sqrt{3} = (2 - \sqrt{3})^2 \Rightarrow \sqrt{B} = 2 - \sqrt{3}$$

$$\sqrt{\sqrt{A} - \sqrt{B}} = \sqrt{2 + \sqrt{3} - (2 - \sqrt{3})} = \sqrt{2\sqrt{3}} = \sqrt{\sqrt{12}} = \sqrt[4]{12}$$

۸۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\frac{(-2x)^3 (\Delta x)^2}{1 \cdot \sqrt{x}} = \frac{-8x^3 \times 2\Delta x^2}{1 \cdot \sqrt{x}} = \frac{-20x^5}{x^{\frac{1}{2}}} = -20x^{5-\frac{1}{2}} = -20x^{\frac{9}{2}}$$

اگر $x = \sqrt[3]{4}$ باشد، داریم:

$$-20x^{\frac{9}{2}} = -20 \cdot (\sqrt[3]{4})^{\frac{9}{2}} = -20 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{9}{2}} = -20 \times 2^{\frac{2}{3} \times \frac{9}{2}} = -20 \times 2^3 = -20 \times 8 = -160$$

۸۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\left(\frac{2\sqrt{18}}{4\sqrt{50}}\right)^2 = \left(\frac{2^3\sqrt{2}}{4^5\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{2^3\sqrt{2}}{2^{10}\sqrt{2}}\right)^2 = (2^{-7}\sqrt{2})^2 = 2^{-14}\sqrt{2}$$

حاصل عبارت بالا برابر $\sqrt[2]{x} = 2^{\frac{x}{2}}$ است، پس:

$$\frac{x}{2} = -14\sqrt{2} \Rightarrow x = -28\sqrt{2}$$

۸۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

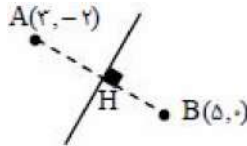
$$\begin{cases} 5x - 12y + 8 = 0 \\ -10x + 24y + 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x - 12y + 8 = 0 \\ 5x - 12y - 5 = 0 \end{cases}$$

معادله دوم را تقسیم بر ۲- کردیم، فاصله دو خط برابر است با:

$$\frac{|8 - (-5)|}{\sqrt{5^2 + (-12)^2}} = \frac{13}{\sqrt{169}} = \frac{13}{13} = 1$$

۸۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نقطه وسط نقاط A و B باید روی خط $y = ax + b$ باشد، به علاوه شیب AB و شیب این خط قرینه معکوس هم هستند.

$$H = \frac{A + B}{2} = \left(\frac{5 + 3}{2}, \frac{0 - 2}{2} \right) = (4, -1)$$



شیب پاره خط AB برابر است با:

$$m_{AB} = \frac{0 - (-2)}{5 - 3} = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow \text{شیب خط} = -1$$

خط از نقطه $(4, -1)$ با شیب -۱ می‌گذرد.

$$y - (-1) = -1(x - 4) \Rightarrow y + 1 = -x + 4 \Rightarrow y = -x + 3$$

عرض از مبدأ خط برابر ۳ است. در واقع این خط عمود منصف پاره خط AB است.

۸۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. محل برخورد قطرهای دایره برابر مرکز دایره است:

$$\begin{cases} x - 2y = 2 \\ 3y - x = -1 \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع}} y = 1, x = 4 \Rightarrow \text{مرکز دایره } (4, 1)$$

فاصله مرکز دایره از مبدأ مختصات برابر شعاع دایره است:

$$r = \sqrt{(4 - 0)^2 + (1 - 0)^2} = \sqrt{17}$$

۸۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مطابق شکل، معادله یکی از قطرهای این مربع را رسم کرده‌ایم. شیب آن قطعاً -۱ یا ۱۱ است چون اضلاع مربع موازی محورهای مختصات هستند. حالا ما قطری از مربع را در نظر می‌گیریم که از نقطه

$\left(\frac{-3}{2}, \frac{5}{3} \right)$ با شیب -۱ می‌گذرد:

$$y - \frac{5}{3} = -1 \left(x + \frac{3}{2} \right) \xrightarrow{y=0} \frac{-5}{3} = -1 \left(x + \frac{3}{2} \right)$$

$$x + \frac{3}{2} = \frac{5}{3} \Rightarrow x = \frac{5}{3} - \frac{3}{2} = \frac{10 - 9}{6} = \frac{1}{6}$$

۸۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. هر نقطه روی محور عرضها به صورت $A(0, y)$ است. فاصله آن از خط $y - 2x - 3 = 0$ را برابر $\sqrt{5}$ قرار می‌دهیم:

$$AH = \frac{|y - 2(0) - 3|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{|y - 3|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow |y - 3| = 5 \Rightarrow \begin{cases} y - 3 = 5 \Rightarrow y = 8 \Rightarrow A_1(0, 8) \\ y - 3 = -5 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow A_2(0, -2) \end{cases}$$

فاصله این دو نقطه از هم برابر $8 - (-2) = 10$ است.

۸۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

شماره شکل	۱	۲	۳	n
تعداد رأس	۳	۵	۷	$2n+1$
تعداد ضلع	۳	۷	۱۱	$4n-1$

کافی است در عبارت $4n - 1$ به جای n عدد ۲۶ قرار دهیم آن‌گاه:

$$\text{تعداد ضلع} = 4 \times 26 - 1 = 104 - 1 = 103$$

۹۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. دنباله b_n باید خطی و یا همان دنباله حسابی باشد، تنها گزینه (۲) چنین است.

۹۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$a_1 = 4, a_3 = 1 \Rightarrow q^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow q = \frac{+1}{2}$$

$$S_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} \Rightarrow 4 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} = \frac{21}{8}$$

$$\Rightarrow 8 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = \frac{63}{8} \Rightarrow 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{63}{64} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{64} \Rightarrow n = 6$$

۹۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = 160 \quad 5a_5 = 160 \Rightarrow a_5 = 32$$

$$a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} = 170 \quad 5a_6 = 170 \Rightarrow a_6 = 34$$

$$a_6 - a_5 = d \Rightarrow d = 2$$

$$a_1 + 4d = 32 \Rightarrow a_1 + 8 = 32 \Rightarrow a_1 = 24$$

$$\frac{a_1}{d} = \frac{24}{2} = 12$$

۹۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به این که $|a| < |A|$, $|a| > |B|$, $|a| < |C|$ پس گزینه (۳) صحیح است.
دقت کنید B منفی است.

۹۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} x^3 = 9 - 3x^2y \\ y^3 = 18 - 3xy^2 \end{cases} \Rightarrow x^3 + y^3 = 27 - 3x^2y - 3xy^2 \Rightarrow (x+y)^3 = 27 \Rightarrow x+y = 3$$

۹۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} f(2) - f(-2) &= \sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}} \\ &= \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} - \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} = \sqrt{2}+1 - (\sqrt{2}-1) = 2 \end{aligned}$$

۹۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} x^2 - 2x = t &\Rightarrow t^2 - t - 2 = 0 \\ \begin{cases} t = -1 \Rightarrow x^2 - 2x = -1 \Rightarrow x = 1 \\ t = 2 \Rightarrow x^2 - 2x = 2 \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{3} \end{cases} \end{aligned}$$

۹۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. $x = 2$ طول رأس سهمی است، پس $y = 4$ عرض آن است که همان ماکزیمم تابع است.

۹۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} x = \sqrt{3} + 2\sqrt{2} &\Rightarrow x^2 = 3 + 8 + 4\sqrt{6} \Rightarrow x^2 - 11 = 4\sqrt{6} \\ x^4 + 121 - 22x^2 = 96 &\Rightarrow x^4 - 22x^2 + 25 = 0 \\ b - a = 25 + 22 = 47 \end{aligned}$$

۹۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$(a-1)x = \sqrt{3x-4}$$

به ازای $a = 1$ ، فقط یک جواب دارد. حال به توان ۲ می‌رسانیم، باید $a > 1$ باشد.

$$\begin{aligned} (a-1)^2 x^2 = 3x - 4 &\Rightarrow (a-1)^2 x^2 - 3x + 4 = 0 \\ \Delta = 0 &\Rightarrow 9 - 16(a-1)^2 = 0 \Rightarrow a = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

۱۰۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. دقت کنید $\alpha\beta = 1$ پس:

$$\alpha\sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha^2 \times \beta} = \sqrt{\alpha \times \alpha \times \beta} = \sqrt{\alpha \times 1} = \sqrt{\alpha}$$

$$S = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} \Rightarrow S^2 = \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta} = 3 + 2 = 5$$

$$\Rightarrow S = \sqrt{5} \Rightarrow m = -\sqrt{5}$$

۱۰۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = a(x+1)(x-3)$$

$$f(0) = 3 \Rightarrow 3 = -3a \Rightarrow a = -1$$

$$f(x) = -(x+1)(x-3) \Rightarrow f(2) = 3$$

۱۰۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

x	-3	$-\frac{1}{3}$	3
p	=	+	=

جواب نامعادله به صورت $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \cup (3, +\infty)$ است، پس حداقل a برابر -3 است.

۱۰۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$x = -\frac{2}{a} \quad a < 0 \quad \begin{cases} -\frac{2}{a} = 2 \Rightarrow a = -1 \\ -\frac{b}{3} = -1 \Rightarrow b = 3 \end{cases}$$

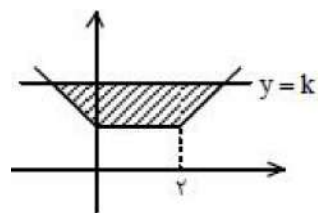
پس $a - b = -4$ است.

۱۰۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. X منفی باشد حتماً جواب است. حال فرض کنید $x \geq 0$ داریم:

$$x(2x+1) < x+2 \Rightarrow 2x^2 < 2 \Rightarrow 0 \leq x < 1$$

پس کل مجموعه جواب برابر بازه $(-\infty, 1)$ است. $x = 1$ جواب معادله گزینه (۱) است.

۱۰۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. برای محاسبه سطح مورد نظر کافی است سطح بین $y = |x-2| + |x|$ را با خط $y = k$ برابر ۶ قرار دهیم.



$$y = \frac{k+2}{2} \cdot (k-2) = 6 \Rightarrow k^2 - 4 = 12 \Rightarrow k = 4$$

۱۰۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$2 \left[\frac{x-2}{3} \right] + \left[\frac{x-2}{3} + 1 \right] = 16 \Rightarrow 2 \left[\frac{x-2}{3} \right] + \left[\frac{x-2}{3} \right] = 15$$

$$\Rightarrow \left[\frac{x-2}{3} \right] = 5 \Rightarrow 5 \leq \frac{x-2}{3} < 6$$

$$17 \leq x < 20 \Rightarrow [x] = 17, 18, 19$$

۱۰۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\text{فاصله مرکز از خط} = \frac{|3 + 8 - k|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|11 - k|}{5} = 2$$

$$\Rightarrow |11 - k| = 10 \Rightarrow \begin{cases} k = 1 \\ k = 21 \end{cases} \Rightarrow k_1 + k_2 = 22$$

۱۰۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. نقطه دلخواه روی خط در نظر می‌گیریم: $A \begin{vmatrix} \alpha \\ 2\alpha + 1 \end{vmatrix}$. فاصله این نقطه تا خط $y = -x$

برابر $4\sqrt{2}$ است، پس:

$$y + x = 0$$

$$\frac{|\alpha + 2\alpha + 1|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \Rightarrow |3\alpha + 1| = 4$$

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \alpha = -\frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} A \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \end{vmatrix} \\ A' \begin{vmatrix} \frac{5}{3} \\ -\frac{5}{3} \\ \frac{5}{3} \\ \frac{5}{3} \end{vmatrix} \end{matrix}$$

$$AA' = \sqrt{\left(1 + \frac{5}{3}\right)^2 + \left(\frac{5}{3} + 1\right)^2} \Rightarrow AA' = \left(1 + \frac{5}{3}\right) \times \sqrt{2} \Rightarrow AA' = \frac{8\sqrt{2}}{3}$$

۱۰۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

شماره	۱	۲	۳	۴	n
رنگ شده	۱	۳	۶	۱۰	$1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$
تعداد کل					
رنگ نشده					$n^2 - \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$

$$\frac{\text{رنگ شده}}{\text{رنگ نشده}} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2 - \frac{n(n+1)}{2}} = \frac{\frac{n+1}{2}}{n - \frac{n+1}{2}} = \frac{\frac{n+1}{2}}{\frac{n-1}{2}} = \frac{n+1}{n-1} \xrightarrow{n=20} \frac{21}{19}$$

۱۱۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\frac{1}{2^6} \times \frac{2}{3^6} \times \frac{3}{2^4} \times \frac{1}{3^4} \times \frac{1}{3^3} \times \frac{1}{2^{12}} \times \frac{1}{3^{12}} = \frac{12}{2^{12}} \times \frac{12}{3^{12}} = 6$$