در جعبه‌ای ۵ مهره‌ی سفید و ۶ مهره‌ی سیاه است. ابتدا یک مهره را بدون رویت خارج می‌کنیم. سپس از بین بقیه‌ی مهره‌ها، ۲ مهره بیرون می‌کشیم. با کدام احتمال هر دو مهره‌ی اخیر، سفید است؟

۱) $\frac{۱}{۱۱}$ ۲) $\frac{۲}{۱۱}$ ۳) $\frac{۴}{۱۱}$ ۴) $\frac{۵}{۲۲}$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

اگر $f(x) = x^{۲} - ۲x - ۳ \; ; \; x \geq ۱$ باشد، نمودارهای دو تابع $f^{-۱}$ و $g(x) = \frac{x - ۹}{۲}$ با کدام طول، متقاطع هستند؟

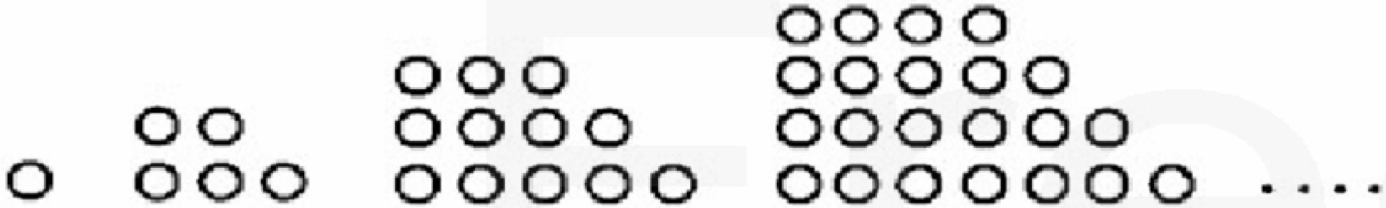
۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۸ ۴) ۲۱

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. کافی است عرض محل برخورد f با وارون $g^{-۱}$ را به دست آوریم:

$$g(x) = \frac{x - ۹}{۲} = y \Rightarrow x - ۹ = ۲y \Rightarrow x = ۲y + ۹ \Rightarrow \left.\begin{array}{l} g^{-۱}(x) = ۲x + ۹ \\ f(x) = x^{۲} - ۲x - ۳ \, , \, x \geq ۱ \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow x^{۲} - ۲x - ۳ = ۲x + ۹ \Rightarrow x^{۲} - ۴x - ۱۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۶ \Rightarrow y = ۲(۶) + ۹ = ۲۱ \\ x = -۲ \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

در الگوی زیر، تعداد نقطه‌ها، در شکل نهم، کدام است؟



۱) ۱۱۷

۲) ۱۲۰

۳) ۱۲۳

۴) ۱۲۵

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$a_n = n^2 + (1 + 2 + \ldots + (n-1)) = n^2 + \frac{n(n-1)}{2} \Rightarrow a_9 = 9^2 + \frac{9 \times 8}{2} = 81 + 36 = 117$$

در یک بیضی به کانون‌های $(2 , -1)$ و $(2 , 7)$، اندازه‌ی قطر کوچک ۶ واحد است. خروج از مرکز این بیضی، کدام است؟

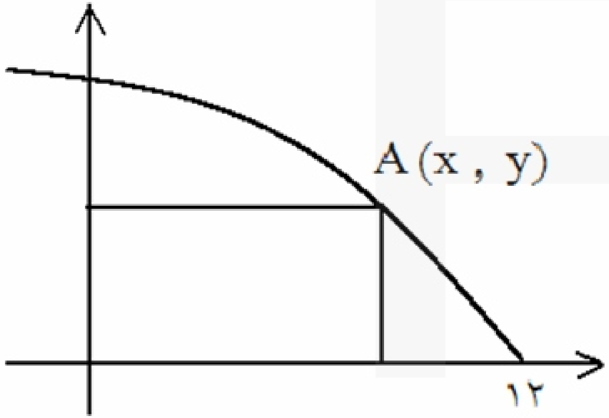
۱) ۰/۶ ۲) ۰/۶۴ ۳) ۰/۷۵ ۴) ۰/۸

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

بیش‌ترین مساحت مستطیلی که دو ضلع آن بر روی محورهای مختصات و رأس چهارم آن، بر روی منحنی به معادله‌ی $y=\sqrt{۱۲-x}$، در ناحیه‌ی اول واقع شود، کدام است؟

۱) $۸\sqrt{۲}$ ۲) $۸\sqrt{۳}$ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



$$S = xy = x\sqrt{۱۲-x}$$

$$S' = \sqrt{۱۲-x} + x\left(\frac{-۱}{۲\sqrt{۱۲-x}}\right) = \frac{۲۴-۲x-x}{۲\sqrt{۱۲-x}} = ۰ \Rightarrow ۲۴-۳x = ۰ \Rightarrow x = ۸$$

$$\Rightarrow S_{max} = ۸\sqrt{۱۲-۸} = ۱۶$$

در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x|x - ۴|$، فاصله‌ی دو نقطه ماکسیمم نسبی و می‌نیمم نسبی آن، کدام است؟

۱) $\sqrt{۵}$ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) $۳\sqrt{۲}$ ۴) $۲\sqrt{۵}$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = x|x - ۴| = \begin{cases} x^۲ - ۴x & x \geq ۴ \\ -x^۲ + ۴x & x < ۴ \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} ۲x - ۴ & x > ۴ \\ -۲x + ۴ & x < ۴ \end{cases}$$

$f' = ۰ \Rightarrow x = ۲$

وجود ندارد $f' \Rightarrow x = ۴$

x		۲		۴	
f'	+		-		+
f	↗	max	↘	min	↗
		۴		۰	

$$\begin{matrix} \max(۲, ۴) \\ \min(۴, ۰) \end{matrix} \Rightarrow d = \sqrt{(۲ - ۴)^۲ + (۴ - ۰)^۲} = \sqrt{۴ + ۱۶} = ۲\sqrt{۵}$$

در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{x}$، اختلاف آهنگ تغییر لحظه‌ای در $x=2$، از آهنگ تغییر متوسط در بازه‌ی $[1,4]$، کدام است؟

۱) ۰/۲۵ ۲) ۰/۵ ۳) ۰/۴۵ ۴) ۰/۷۵

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{x}$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(4)-f(1)}{4-1}=\frac{\left(8-\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{1}{2}-1\right)}{3}=\frac{9-\frac{3}{4}}{3}=3-\frac{1}{4}$$

$$f'(x)=x+\frac{1}{x^2}\Rightarrow f'(2)=2+\frac{1}{4}$$

$$\text{اختلاف}=\left(3-\frac{1}{4}\right)-\left(2+\frac{1}{4}\right)=1-\frac{1}{2}=0/5$$

اگر $g(x)=\frac{2x+1}{x-1}$ و $(fog)'(2)=6$ باشد، $f'(5)$ کدام است؟

۱) ۲-   ۲) ۱-   ۳) ۲   ۴) ۳

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$g(x)=\frac{2x+1}{x-1}\Rightarrow g'(x)=\frac{(2)(-1)-(1)(1)}{(x-1)^2}=\frac{-3}{(x-1)^2}\Rightarrow g'(2)=-3$$

$$(fog)'(2)=6\Rightarrow g'(2).\,f'(\cancel{g(2)}^{5})=6\Rightarrow -3f'(5)=6\Rightarrow f'(5)=-2$$

تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \dfrac{۱}{x-۱} & ; \ x \geq ۲ \\ -x^۲ + ax + b & ; \ x < ۲ \end{cases}$ ، روی مجموعه اعداد حقیقی مشتق‌پذیر است. b کدام است؟

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) ۲

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{۱}{x-۱} & x \geq ۲ \\ -x^۲ + ax + b & x < ۲ \end{cases}$$

$$\text{شرط پیوستگی} = \frac{۱}{۲-۱} = -۴ + ۲a + b$$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-۱}{(x-۱)^۲} & x > ۲ \\ -۲x + a & x < ۲ \end{cases} \Rightarrow \frac{-۱}{(۲-۱)^۲} = -۴ + a \Rightarrow a = ۳$$

$$\Rightarrow ۱ = -۴ + ۶ + b \Rightarrow b = -۱$$

در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{۱+\sqrt{x}}{۵-۲x}$، حاصل $\lim\limits_{x\to ۴}\frac{f(x)-f(۴)}{x-۴}$، کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۹}$ ۲) $\frac{۵}{۱۲}$ ۳) $\frac{۷}{۱۲}$ ۴) $\frac{۵}{۶}$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(x)=\frac{۱+\sqrt{x}}{۵-۲x}\Rightarrow f'(x)=\frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(۵-۲x)-(۱+\sqrt{x})(-۲)}{(۵-۲x)^{۲}}\Rightarrow f'(۴)=\frac{\frac{۱}{۴}(-۳)-(۳)(-۲)}{۹}$$

$$=\frac{\frac{-۳}{۴}+۶}{۹}=\frac{۲۱}{۴\times ۹}=\frac{۷}{۱۲}\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۴}\frac{f(x)-f(۴)}{x-۴}=f'(۴)=\frac{۷}{۱۲}$$

اگر $f(x) = ۲x + \sqrt{۴x^۲ + x}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $-\frac{۱}{۴}$ ۴) صفر

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. روش اول:

$$\lim_{x \to -\infty} \left(۲x + \sqrt{۴x^۲ + x}\right) = \lim_{x \to -\infty} \frac{(۲x)^۲ - ۴x^۲ - x}{۲x - \sqrt{۴x^۲ + x}} = \frac{-x}{۲x - \sqrt{۴x^۲}} = \frac{-x}{۲x - (-۲x)} = -\frac{۱}{۴}$$

روش دوم (با هم‌ارزی بی‌نهایت):

$$\lim_{x \to -\infty} \left(۲x + \sqrt{۴x^۲ + x}\right) = \lim_{x \to -\infty} \left(۲x + \sqrt{۴}\left|x + \frac{۱}{۸}\right|\right) = ۲x - ۲x - \frac{۲}{۸} = -\frac{۱}{۴}$$

در مورد تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{x^{۲}-۱}{x+|x|}$، کدام بیان، درست است؟

۱) $\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)=+\infty$

۲) $\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)=-\infty$

۳) $\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=+\infty$

۴) $\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=-\infty$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(x)=\frac{x^{۲}-۱}{x+|x|}=\begin{cases}\frac{x^{۲}-۱}{۲x} & x>۰\\ \text{تعریف نشده} & x\le ۰\end{cases}$$

تابع به ازای $x \le ۰$ تعریف نمی‌شود بنابراین گزینه‌ی ۱ و ۲ نادرست می‌باشند.

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x)=\lim_{x\to ۰^+}\frac{x^{۲}-۱}{۲x}=\frac{-۱}{۰^+}=-\infty$$

حدّ عبارت $\dfrac{x^{2}+10x+16}{12+6\sqrt[3]{x}}$، وقتی $x\to -8$، کدام است؟

۱) -24 ۲) -18 ۳) -12 ۴) -6

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to -8}\frac{x^{2}+10x+16}{12+6\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to -8}\frac{(x+2)(x+8)}{6\left(2+\sqrt[3]{x}\right)}=\lim_{x\to -8}\frac{(x+2)\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^{3}+2^{3}\right)}{6\left(2+\sqrt[3]{x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to -8}\frac{(x+2)\cancel{\left(\sqrt[3]{x}+2\right)}\left(\sqrt[3]{x^{2}}-2\sqrt[3]{x}+4\right)}{6\cancel{\left(2+\sqrt[3]{x}\right)}}=\frac{-6(12)}{6}=-12$$

تذکر: این حد با قاعده‌ی هوپیتال هم به راحتی حل می‌شد.

مجموع جواب‌های معادله‌ی مثلثاتی $۴\,\mathrm{Sin}\,x\,\mathrm{Sin}\left(\frac{۳\pi}{۲}-x\right)=۱$، در بازه‌ی $[۰\,,\,۲\pi]$، کدام است؟

۱) $\frac{۵\pi}{۲}$ ۲) ۳π ۳) ۴π ۴) ۵π

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$۴\,\mathrm{Sin}\,x\,\mathrm{Sin}\left(\frac{۳\pi}{۲}-x\right)=۱\Rightarrow ۴\,\mathrm{Sin}\,x\,(-\mathrm{Cos}\,x)=۱\Rightarrow -۲(۲\,\mathrm{Sin}\,x\,\mathrm{Cos}\,x)=۱$$

$$\Rightarrow -۲\,\mathrm{Sin}\,۲x=۱\Rightarrow \mathrm{Sin}\,۲x=\left(-\frac{۱}{۲}\right)\Rightarrow \mathrm{Sin}(۲x)=\mathrm{Sin}\left(-\frac{\pi}{۶}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲x=۲k\pi-\frac{\pi}{۶} \\ ۲x=۲k\pi+\frac{۷\pi}{۶} \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} x_۱=k\pi-\frac{\pi}{۱۲} \\ x_۲=k\pi+\frac{۷\pi}{۱۲} \end{cases}$$

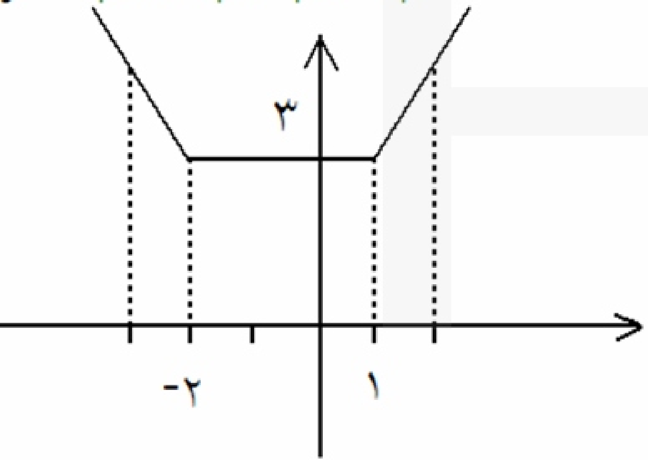
k	۰	۱	۲
$x_۱$	$\times$	$\pi-\frac{\pi}{۱۲}$	$۲\pi-\frac{\pi}{۱۲}$
$x_۲$	$\frac{۷\pi}{۱۲}$	$\pi+\frac{۷\pi}{۱۲}$	$\times$

تابع با ضابطه‌ی $f(x) = |x + ۲| + |x - ۱|$، در کدام بازه، اکیداً نزولی است؟

۱) $(-\infty , -۲)$ ۲) $(-\infty , ۱)$ ۳) $(-۲ , ۱)$ ۳) $(۱ , +\infty)$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. نمودار تابع را به کمک نقطه‌یابی رسم می‌کنیم.

$y = |x + ۲| + |x - ۱|$



نقاط شکست

x	-۳	-۲	۱	۲
	۵	۳	۳	۵

پس تابع درفاصله‌ی $(-\infty , -۲)$ اکیداً نزولی است.

در یک کارگاه، دو گروه مشغول کار هستند، میانگین نمرات مسئولیت‌پذیری و واریانس در گروه اول به‌ترتیب ۸۰ و ۲۵ و در گروه دوم ۷۲ و ۱۶ می‌باشد. کدام گروه بهتر است؟

۱) گروه اول ۲) گروه دوم ۳) یکسان ۴) اظهارنظر نمی‌توان کرد.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

احتمال موفقیت فردی، در آزمان اول ۰/۷ و در آزمون دوم ۰/۶ است. اگر این فرد در آزمون اول موفق شود، احتمال موفقیت وی در آزمون دوم ۰/۸ است. با کدام احتمال، لااقل در یکی از این دو آزمون، موفق می‌شود؟

۱) ۰/۷۴ ۲) ۰/۷۶ ۳) ۰/۸۲ ۴) ۰/۸۴

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

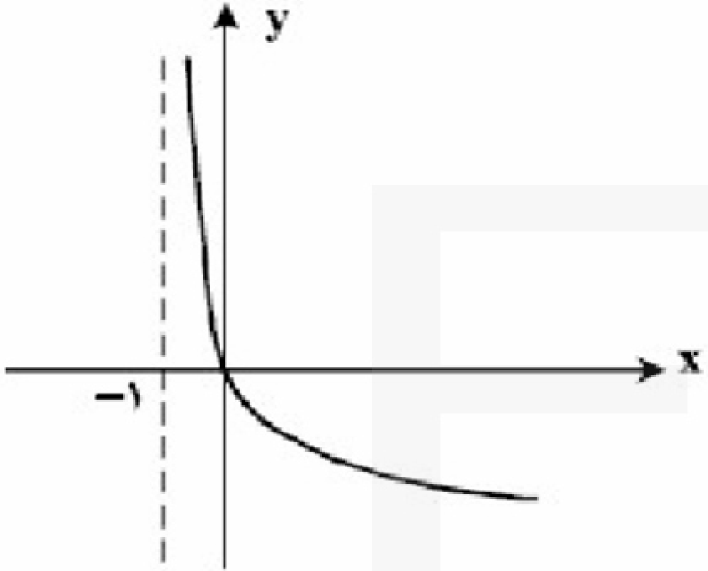
به ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\dfrac{۸+x^{۳}}{|x+۲|} & ; \ x\neq -۲\\ a & ; \ x=-۲\end{cases}$، در نقطه‌ی $x=-۲$، فقط از چپ پیوسته است؟

۱) ‎-۱۲ ۲) ‎-۶ ۳) ۶ ۴) ۱۲

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\left.\begin{array}{l} f(-۲)=a \\ \lim\limits_{x\to(-۲)^-} f(x)=\lim\limits_{x\to(-۲)^-}\dfrac{۸+x^{۳}}{-(x+۲)}=\lim\limits_{x\to(-۲)^-}\dfrac{\cancel{(x+۲)}(x^{۲}-۲x+۴)}{-\cancel{(x+۲)}}=-۱۲\end{array}\right\}\Rightarrow a=-۱۲$$

شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y = \mathrm{Log}_{۲} U(x)$ است. $U(x)$ کدام است؟



۱) $x + ۱$

۲) $(x + ۱)^{-۱}$

۳) $x - ۱$

۴) $۱ - x$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$D_f = (-۱ , +\infty)$

و f تابعی نزولی است $\Rightarrow y = -\mathrm{Log}_{۲}(x + ۱) = \mathrm{Log}_{۲}(x + ۱)^{-۱}$

اگر $(0/4)^{2x-1} = \left(\frac{125}{8}\right)^{x^2}$ باشد، $Log_8(9x+1)$، کدام است؟

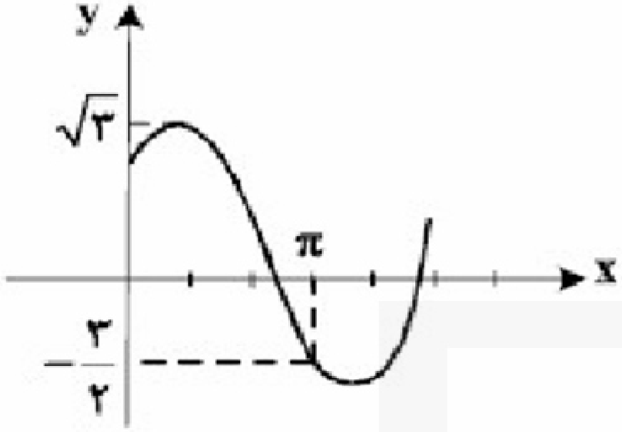
۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$(0/4)^{2x-1} = \left(\frac{125}{8}\right)^{x^2} \Rightarrow (0/4)^{2x-1} = \left(\frac{8}{125}\right)^{-x^2} \Rightarrow (0/4)^{2x-1} = \left(\left(\frac{2}{5}\right)^3\right)^{-x^2}$$

$$\Rightarrow (0/4)^{2x-1} = (0/4)^{-3x^2} \Rightarrow 2x-1 = -3x^2 \Rightarrow 3x^2 + 2x - 1 = 0 \quad \begin{cases} x = -1 \quad \text{غ ق ق} \\ \text{یا} \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$Log_8(9x+1) = Log_8 4 = Log_{2^3} 2^2 = \frac{2}{3}$$



شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع $y = a + b\,\text{Sin}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ است. b کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۲) $\frac{3}{2}$

۳) $\sqrt{3}$

۴) ۲

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به شروع صعودی به ازای $x > 0$ پس $b > 0$ بنابراین:

$$\max = a + b = \sqrt{3}$$

$$f(\pi) = -\frac{3}{2} \Rightarrow a + b\,\text{Sin}\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{3}{2} \Rightarrow a - \frac{\sqrt{3}}{2}b = -\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow b + \frac{\sqrt{3}}{2}b = \sqrt{3} + \frac{3}{2} \Rightarrow b\left(\cancel{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) = \sqrt{3}\left(\cancel{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) \Rightarrow b = \sqrt{3}$$

حاصل عبارت $\sin\left(\frac{۱۷\pi}{۳}\right)\cos\left(\frac{-۱۷\pi}{۶}\right)+tg\left(\frac{۱۹\pi}{۴}\right)\sin\left(\frac{-۱۱\pi}{۶}\right)$ ، کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۴}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\sin\left(\frac{۱۷\pi}{۳}\right)\cos\left(\frac{-۱۷\pi}{۶}\right)+tg\left(\frac{۱۹\pi}{۴}\right)\sin\left(\frac{-۱۱\pi}{۶}\right)$$
$$=\sin\left(۶\pi-\frac{\pi}{۳}\right)\cos\left(-۳\pi+\frac{\pi}{۶}\right)+tg\left(۵\pi-\frac{\pi}{۴}\right)\sin\left(-۲\pi+\frac{\pi}{۶}\right)$$
$$=\left(-\sin\frac{\pi}{۳}\right)\left(-\cos\frac{\pi}{۶}\right)+\left(-tg\frac{\pi}{۴}\right)\left(\sin\frac{\pi}{۶}\right)=\frac{-\sqrt{۳}}{۲}\times\frac{-\sqrt{۳}}{۲}+(-۱)\left(\frac{۱}{۲}\right)$$
$$=\frac{۳}{۴}-\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۴}$$

اگر $3a+\sqrt{2a^2+4a}=2$ باشد، عدد $\frac{a+1}{a}$، کدام است؟

۱) ۱/۵ ۲) ۲/۵ ۳) ۳/۵ ۴) ۴/۵

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$3a+\sqrt{2a^2+4a}=2 \Rightarrow \sqrt{2a^2+4a}=2-3a \xrightarrow{2-3a\geq 0} 2a^2+4a=9a^2-12a+4$$

$$\Rightarrow 7a^2-16a+4=0 \xrightarrow{\div 2} \frac{7}{2}a^2-8a+\frac{4}{2}=0$$

$$a=\frac{8\pm\sqrt{64-28}}{7}=\frac{8\pm 6}{7}\begin{cases} a=2 \text{ غ ق ق} \\ a=\frac{2}{7}\Rightarrow \frac{a+1}{a}=1+\frac{1}{a}=1+\frac{7}{2}=\text{۴/۵}\end{cases}$$

گل‌فروشی از ۸ نوع گل مختلف، به چند طریق، می‌تواند دسته گل‌های متمایز درست کند، به طوری‌که در هر دسته ۴ یا ۵ یا ۶ شاخه مختلف، موجود باشد؟

۱) ۱۲۶ ۲) ۱۴۰ ۳) ۱۵۴ ۴) ۱۶۸

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

مجموعه جواب نامعادله‌ی $۱ < \frac{۲x - ۳}{x + ۱} < ۳$، به کدام صورت است؟

۱) $R - [-۶, ۴]$ ۲) $R - [-۴, ۶]$ ۳) $x > ۴$ ۴) $x < -۶$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

نکته: $a < \frac{f(x)}{g(x)} < b \xrightarrow{g(x) \neq ۰} (f(x) - ag(x))(g(x) - bg(x)) < ۰$

$$۱ < \frac{۲x - ۳}{x + ۱} < ۳ \xrightarrow{x \neq -۱} (۲x - ۳ - x - ۱)(۲x - ۳ - ۳x - ۳) < ۰$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(x - ۴)}_{x = ۴}\underbrace{(-x - ۶)}_{x = -۶} < ۰ \Leftrightarrow x < -۶ \text{ یا } x > ۴ \Leftrightarrow x \in R - [-۶ , ۴]$$

تذکر: به کمک عددگذاری و رد گزینه هم پاسخ این تست به راحتی مشخص می‌شد.