سرعت یک قایق موتوری، در آب راکد ۱۰۰ متر در دقیقه است. این قایق فاصله‌ی ۱۲۰۰ متری در رودخانه را رفته و برگشته است. اختلاف زمان رفت و برگشت ۵ دقیقه است. سرعت آب رودخانه، چند متر در دقیقه است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۲۰ ۴) ۲۵

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر سرعت آن رودخانه را x فرض کنیم سرعت قایق در جهت رودخانه $x + ۱۰۰$ و در خلاف آن $x - ۱۰۰$ است، پس:

$$\frac{۱۲۰۰}{۱۰۰ - x} - \frac{۱۲۰۰}{۱۰۰ + x} = ۵ \Rightarrow ۱۲۰۰\left(\frac{۱۰۰ + x - ۱۰۰ + x}{(۱۰۰)^۲ - x^۲}\right) = ۵ \Rightarrow ۲۴۰۰x = ۵(۱۰۰)^۲ - ۵x^۲$$

$$\Rightarrow ۴۸۰x = (۱۰۰)^۲ - x^۲ \Rightarrow x^۲ + ۴۸۰x = (۱۰۰)^۲ \Rightarrow x(x + ۴۸۰) = (۱۰۰)^۲ \Rightarrow x = ۲۰$$

اگر $\frac{۳\pi}{۲} > x > \pi$ باشد، حاصل $\sqrt{۱ + tg^۲ x \left(۲\,Sin^۲ \frac{\pi}{۴} - Sin^۲ x\right)}$ ، کدام است؟

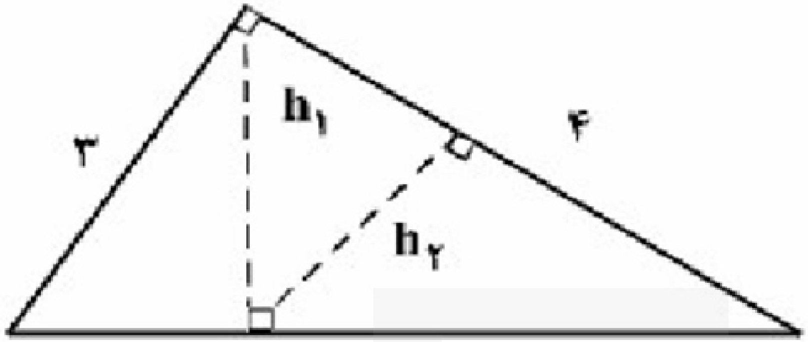
۱) $Sin\,x$ ۲) $Cos\,x$ ۳) $-Sin\,x$ ۴) $-Cos\,x$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\sqrt{۱ + tg^۲ x \left(۲\,Sin^۲ \frac{\pi}{۴} - Sin^۲ x\right)} = \sqrt{\frac{۱}{Cos^۲ x}\left(۱ - Sin^۲ x\right)} = \frac{۱}{|Cos\,x|} Cos^۲ x$$

$$= |Cos\,x| \xrightarrow{\pi < x < \frac{۳\pi}{۲}} -Cos\,x$$

در شکل زیر، h_1 و h_2 ارتفاع‌های دو مثلث قائم‌الزاویه هستند.



نسبت $\frac{h_2}{h_1}$، کدام است؟

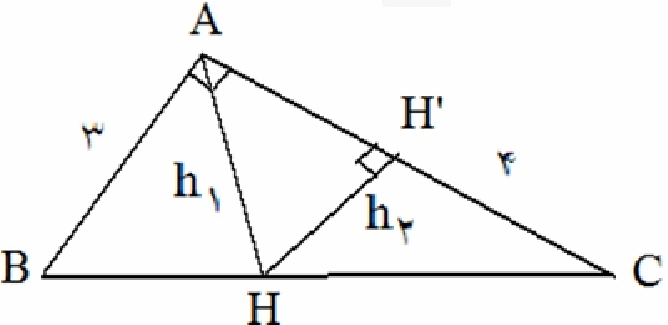
۱) $\frac{۳}{۵}$

۲) $\frac{۴}{۵}$

۳) $\frac{۲}{۳}$

۴) $\frac{۳}{۴}$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC و AHC با داشتن دو زاویه مساوی متشابه‌اند. بنابراین نسبت ارتفاع‌های آن‌ها برابر نسبت اضلاع نظیرشان است.

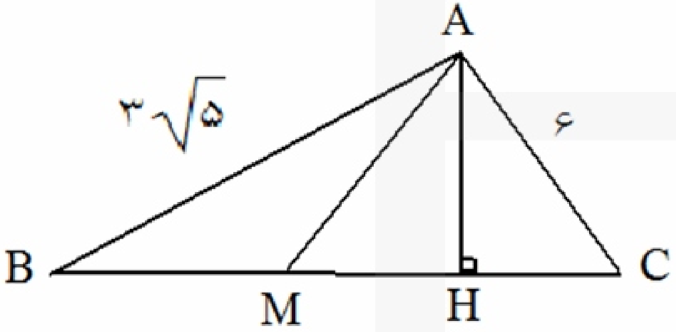


$$A\overset{\triangle}{B}C \sim A\overset{\triangle}{H}C \Rightarrow \frac{h_2}{h_1} = \frac{AC}{BC} \xrightarrow{BC=\sqrt{۱۶+۹}=۵} \frac{h_2}{h_1} = \frac{۴}{۵}$$

در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC، اضلاع قائم $AB = ۳\sqrt{۵}$ و $AC = ۶$ ارتفاع AH و میانه AM رسم شده است.

مساحت مثلث ABC، چند برابر مساحت مثلث AMH، است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۵ ۴) ۱۸



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. بنابر روابط طولی در مثلث قائم الزاویه می‌نویسیم:

$$BC^۲ = AB^۲ + AC^۲ = ۴۵ + ۳۶ = ۸۱ \Rightarrow BC = ۹$$

$$AC^۲ = CH \times BC \Rightarrow ۳۶ = CH \times ۹ \Rightarrow CH = ۴$$

$$MH = MC - CH = \frac{۹}{۲} - ۴ = \frac{۱}{۲}$$

بنابراین:

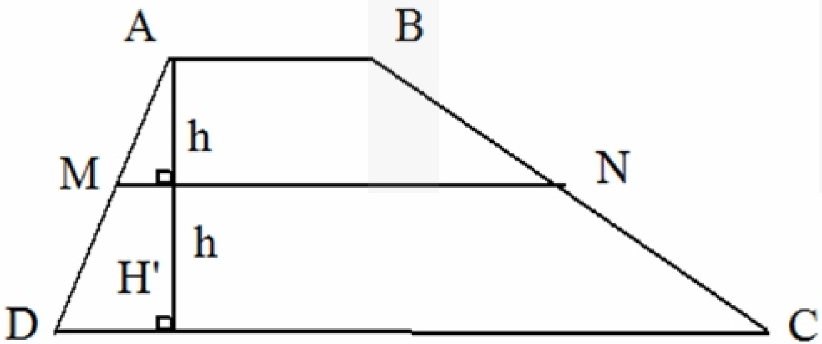
$$\frac{S_{ABC}}{S_{ABH}} = \frac{\frac{۱}{۲} AH \times BC}{\frac{۱}{۲} AH \times MH} = \frac{BC}{MH} = \frac{۹}{\frac{۱}{۲}} = ۱۸$$

در یک ذوزنقه، پاره‌خطی که وسط های دو ساق را به هم وصل کند، مساحت آن‌را به نسبت‌های ۱ و ۲ تقسیم می‌کند. نسبت قاعده‌های آن ذوزنقه، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۲}{۵}$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. می‌دانیم پاره‌خطی که وسط های دو ساق ذوزنقه را به هم وصل می‌کند مساوی نصف مجموع دو قاعده است. در صورتی که M و N وسط های دو ساق ذوزنقه‌ی ABCD باشند پس $MN = \frac{AB + DC}{۲}$ است.

در ضمن بنابر قضیه‌ی تالس اگر ارتفاع AH را رسم کنیم، آن‌گاه $AH' = HH' = h$. حال بنابر فرض می‌نویسیم.



$$\frac{S_{ABNM}}{S_{MNCD}} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{\frac{۱}{۲}h(AB + MN)}{\frac{۱}{۲}h(MN + DC)} = \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{AB + MN}{MN + DC} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow MN + DC = ۲AB + ۲MN$$

$$\Rightarrow DC - ۲AB = MN \Rightarrow DC - ۲AB = \frac{AB + DC}{۲} \Rightarrow ۲DC - ۴AB = AB + DC$$

$$\Rightarrow DC = ۵AB \Rightarrow \frac{DC}{AB} = \frac{۱}{۵}$$

اگر دامنه‌ی تغییرات داده‌های $۲x_i - ۱$ برابر ۸ باشد، دامنه‌ی تغییرات $۳x_i + ۱$ چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) ۱۰/۵ ۳) ۱۴/۵ ۴) ۱۲

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. اگر دامنه‌ی تغییرات x_i ها را R درنظر بگیریم، آن‌گاه دامنه‌ی تغییرات $۲x_i - ۱$ ها برابر $۲R$ می‌باشد.

$$۲R = ۸ \Rightarrow R = ۴$$

پس دامنه‌ی تغییرات $۳x_i + ۱$ برابر ۱۲ خواهد بود.

واریانس نمرات دو کلاس ۳۰ نفره و ۲۰ نفره با هم برابرند. اگر میانگین نمرات دو کلاس با هم برابر باشند. واریانس نمرات ۵۰ نفر با هم چه‌قدر است؟

۱) واریانس اولیه ۲) دو برابر واریانس اولیه ۳) سه برابر واریانس اولیه ۴) ۵ برابر واریانس اولیه

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

گروه ۳۰ نفره : $$\sigma_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{30} (x_i - \bar{x})^2}{30} \Rightarrow \sum_{i=1}^{30} (x_i - \bar{x})^2 = 30\sigma_1^2$$

گروه ۲۰ نفره : $$\sigma_2^2 = \frac{\sum_{i=1}^{20} (y_i - \bar{y})^2}{20} \Rightarrow \sum_{i=1}^{20} (y_i - \bar{y})^2 = 20\sigma_2^2$$

گروه ۵۰ نفره : $$\sigma^2 = \frac{30\sigma_1^2 + 20\sigma_2^2}{50} = \frac{30\sigma_1^2 + 20\sigma_1^2}{50} = \sigma_1^2$$

مختصات مرکز دایره‌ای $(۱- , ۲)O$ است. اگر خط $۳x - ۴y + m = ۰$ بر این دایره مماس و مساحت دایره $\frac{\pi}{۲۵}$ باشد، مجموع مقادیر m کدام است؟

۱) ۱۱-　　۲) ۹-　　۳) ۲۰-　　۴) ۲۰

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. فاصله‌ی مرکز دایره تا خط مماس بر آن، برابر شعاع دایره است.

$$r = \frac{|۳(۲) - ۴(-۱) + m|}{\sqrt{۳^۲ + ۴^۲}} = \frac{|m + ۱۰|}{۵}$$

$$S = \pi r^۲ = \frac{\pi}{۲۵} \Rightarrow r^۲ = \frac{۱}{۲۵} \Rightarrow r = \frac{۱}{۵} \Rightarrow \frac{|m + ۱۰|}{۵} = \frac{۱}{۵} \Rightarrow |m + ۱۰| = ۱$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m + ۱۰ = ۱ \Rightarrow m = -۹ \\ m + ۱۰ = -۱ \Rightarrow m = -۱۱ \end{cases}$$

مجموع مقادیر m برابر ۲۰- است.

تاسی ساخته‌ایم که روی آن اعداد ۱، ۱، ۱، ۲، ۳ و ۴ حک شده است. اگر این تاس را دو بار پرتاب کنیم، با چه احتمالی مجموع دو عدد روشده مضرب ۳ است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در جدول زیر خانه‌هایی که مجموع اعداد آن‌ها بر ۳ بخش‌پذیر باشد را علامت زدیم:

	۱	۱	۱	۲	۳	۴
۱				✓		
۱				✓		
۱				✓		
۲	✓	✓	✓			✓
۳					✓	
۴				✓		

$$P(A)=\frac{۹}{۳۶}=\frac{۱}{۴}$$

با حروف کلمه‌ی gajmarket، چند کلمه‌ی نُه حرفی می‌توان نوشت که دو حرف a کنار هم باشند؟

۱) !۹ ۲) !۸×۸ ۳) !۹×۹ ۴) !۸

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. دو حرف a را کنار هم و یک حرف حساب می‌کنیم، به این ترتیب !۸ حالت وجود دارد.

اگر A و B زیرمجموعه‌هایی از مجموعه‌ی مرجع U باشند، به طوری‌که $n(U) = ۱۰۰$ و $\frac{n(A \cap B)}{۲} = \frac{n(A)}{۶} = \frac{n(B)}{۴} = ۱۰$ باشند، حاصل $n((A \cup B)') + n(B')$ چه‌قدر است؟

۱) ۸۰ ۲) ۶۰ ۳) ۲۰ ۴) ۴۰

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\frac{n(A)}{۶} = ۱۰ \Rightarrow N(A) = ۶۰$$

$$\frac{n(B)}{۴} = ۱۰ \Rightarrow n(B) = ۴۰$$

$$\frac{n(A \cap B)}{۲} = ۱۰ \Rightarrow n(A \cap B) = ۲۰ \Rightarrow n(B') = n(U) - n(B) = ۱۰۰ - ۴۰ = ۶۰$$

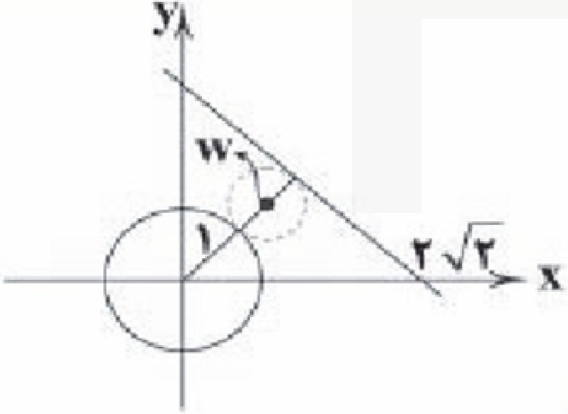
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = ۶۰ + ۴۰ - ۲۰ = ۸۰$$

$$n((A \cup B)') = n(U) - n(A \cup B) = ۱۰۰ - ۸۰ = ۲۰$$

$$n((A \cup B)') + n(B') = ۲۰ + ۶۰ = ۸۰$$

از بین دایره‌هایی که بر هر دو نمودار $\begin{cases} x^{2}+y^{2}=1 \\ x+y=2\sqrt{2} \end{cases}$ مماس می‌باشند، طول مرکز دایره‌ای با کوچک‌ترین شعاع کدام است؟

۱) $\frac{5}{2}\sqrt{2}$ ۲) $\frac{5}{4}\sqrt{2}$ ۳) $\frac{3}{2}\sqrt{2}$ ۴) $\frac{3}{4}\sqrt{2}$



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. فاصله‌ی مبدأ مختصات (مرکز دایره) تا خط $x+y=2\sqrt{2}$ برابر ۲ است، پس با توجه به ابعاد داده شده قطر دایره‌ی موردنظر ۱ واحد است و مرکز آن w روی خط $y=x$ قرار دارد.

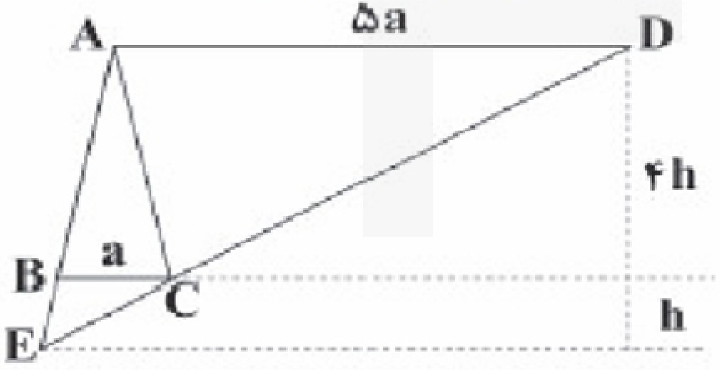
اگر مرکز دایره را $(\alpha\,,\,\alpha)$ فرض کنیم، آن‌گاه:

$$\sqrt{\alpha^{2}+\alpha^{2}}=\frac{3}{2}\Rightarrow 2\alpha^{2}=\frac{9}{4}\xrightarrow{\alpha>0}\alpha=\frac{3}{4}\sqrt{2}$$

مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB = AC)$ مفروض است. از رأس A به موازات قاعده‌ی BC و به اندازه‌ی ۵ برابر آن، پاره‌خط AD را رسم می‌کنیم. از نقطه‌ی D به C وصل و امتداد می‌دهیم تا امتداد AB را در E قطع کند. مساحت مثلث ACD چند درصد مساحت مثلث ADE است؟

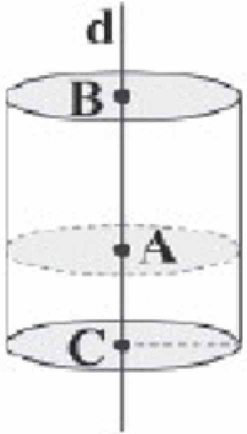
۱) ۶۰   ۲) ۷۰   ۳) ۸۵   ۴) ۸۰

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چون $AD \parallel BC$، پس در مثلث EAD تعمیم قضیه‌ی تالس صادق است.



$$\frac{S(\overset{\triangle}{ACD})}{S(\overset{\triangle}{EAD})} = \frac{\frac{۱}{۲} \times ۵a \times ۴h}{\frac{۱}{۲} \times ۵a \times ۵h} = \frac{۴}{۵} = \%۸۰$$

پس مساحت مثلث ACD، ۸۰ درصد مساحت مثلث ADE خواهد بود.



از دوران یک پاره‌خط حول خط d استوانه‌ای پدید آمده است. مساحت سطح مقطع حاصل از برش صفحه‌ای عمود بر d، برابر ۱۶π است. اگر فاصله‌ی A از B، دو برابر فاصله‌ی A از C و حجم استوانه ۴۸π باشد، اندازه‌ی پاره‌خط AB چه‌قدر است؟

۱) ۲

۲) ۱

۳) ۳

۴) ۴

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. سطح مقطع حاصل، دایره‌ای است به شعاع r، پس:

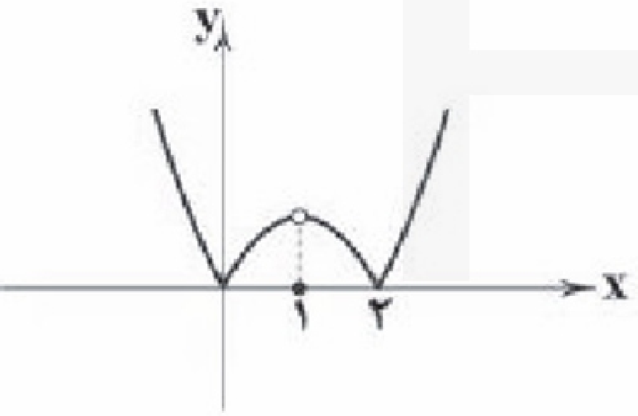
$$\pi r^۲ = ۱۶\pi \Rightarrow r = ۴$$

اگر ارتفاع استوانه را $۳h$ درنظر بگیریم، آن‌گاه $AB = ۲h$ و $AC = h$ خواهد بود.

$$V = \pi r^۲ \times ۳h = ۳\pi \times ۴^۲ \times h = ۴۸\pi h = ۴۸\pi \Rightarrow h = ۱ \Rightarrow AB = ۲$$

تابع $f(x) = \begin{cases} |x^{۲} - ۲x| & x \neq ۱ \\ ۰ & x = ۱ \end{cases}$ دارای ...... مینیمم نسبی و ...... ماکزیمم نسبی است.

۱) ۱ , ۲   ۲) ۲ , ۲   ۳) ۰ , ۳   ۴) ۲ , ۱



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به نمودار، تابع در نقاط (۰ , ۰)، (۱ , ۰) و (۲ , ۰) مینیمم نسبی دارد و فاقد ماکزیمم نسبی است.

اگر بیش‌ترین مقدار تابع $f(x) = -x^۳ - x + \frac{a}{۲}$ در فاصله‌ی $\left[\frac{a}{۲}, -a\right]$ برابر ۱ باشد، کم‌ترین مقدار آن در این بازه چه‌قدر است؟

۱) صفر ۲) -۱ ۳) -۹ ۴) -۱۱

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. $f'(x) = -۳x^۲ - ۱ < ۰$

چون به ازای هر x، $f'(x) < ۰$ است، پس f نزولی اکید است، در نتیجه بیش‌ترین مقدار آن در ابتدای بازه رخ می‌دهد.

$$f\left(\frac{a}{۲}\right) = ۱ \Rightarrow -\frac{a^۳}{۸} - \frac{a}{۲} + \frac{a}{۲} = ۱ \Rightarrow a = -۲$$

$$\min f(x) = f(-a) = f(۲) = -۸ - ۲ - ۱ = -۱۱$$

اگر $f(x) = |x - ۲|[-x]$ باشد، حاصل $\lim\limits_{h \to ۰^-} \dfrac{f(۲ + h) - f(۲)}{h}$ کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) ۱   ۲) ۳   ۳) ۲   ۴) ۲-

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. تابع در $x = ۲$ پیوسته است، زیرا: $f(۲) = \lim\limits_{x \to ۲} f(x) = ۰$

خواسته‌ی مسئله، مشتق چپ در $x = ۲$ است. در همسایگی چپ $x = ۲$ قدرمطلق را تعیین علامت و براکت را تعیین عدد می‌کنیم.

$$f(x) = -(x - ۲)\left[-\left(۲^-\right)\right] = (۲ - x)(-۲)$$

$$f(x) = ۲x - ۴ \Rightarrow f'(x) = ۲ \Rightarrow f'_-(۲) = ۲$$

بیش‌ترین مقدار شیب خط مماس بر نمودار تابع $y = -x^3 + 6x^2 - 4x$، در نقطه‌ای با کدام طول رخ می‌دهد؟

۱) ۲-　　۲) ۲　　۳) ۱　　۴) صفر

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مشتق تابع $y' = -3x^2 + 12x - 4$ می‌باشد. بیش‌ترین مقدار تابع y' (که یک تابع درجه دوم است) در رأس آن رخ می‌دهد.

$$y' = -3x^2 + 12x - 4 \Rightarrow \text{طول راس} = \frac{-12}{2(-3)} = 2$$

تابع $f(x)=\begin{cases} \dfrac{|\cos x|}{۲x-\pi} & x\neq \dfrac{\pi}{۲} \\ a+۱ & x=\dfrac{\pi}{۲}\end{cases}$ در $x=\dfrac{\pi}{۲}$ پیوستگی راست دارد. حاصل $a+\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}^-} f(x)$ چه‌قدر است؟

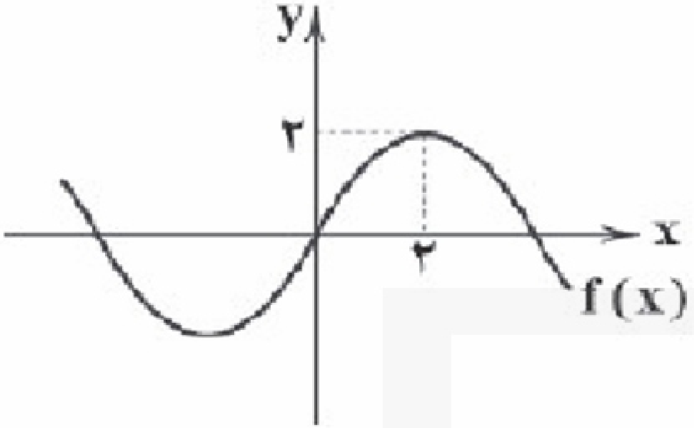
۱) -۱ ۲) ۱ ۳) صفر ۴) $-\dfrac{۱}{۲}$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^+}\frac{|\cos x|}{۲x-\pi} = \lim_{x\to\frac{\pi}{۲}} \frac{-\cos x}{۲x-\pi} = \lim_{x\to\frac{\pi}{۲}} \frac{-\sin\left(\frac{\pi}{۲}-x\right)}{-۲\left(\frac{\pi}{۲}-x\right)} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow a+۱=\frac{۱}{۲}\Rightarrow a=-\frac{۱}{۲}$$

$$a+\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^-}\frac{|\cos x|}{۲x-\pi} = -\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲} = -۱$$

اگر نمودار f به صورت زیر باشد، حاصل $\lim\limits_{x \to ۲} \frac{|x| + \left[-\frac{x}{۳}\right]}{f(x) - ۲}$ کدام است؟



([ ] نماد جزء صحیح است.)

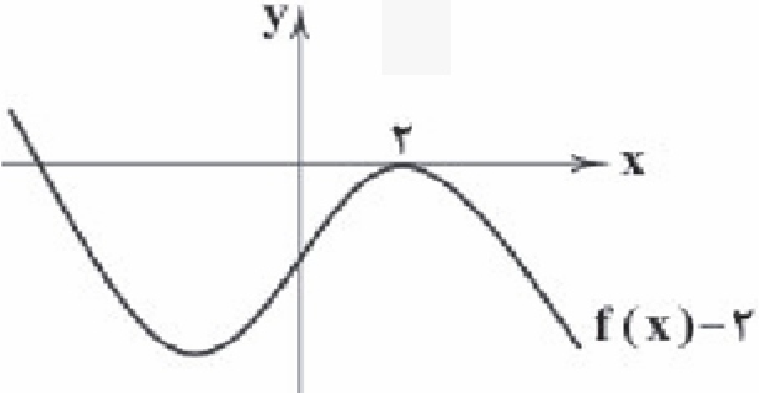
۱) صفر

۲) $-\infty$

۳) ۱

۴) $+\infty$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر نمودار $f(x)$ را دو واحد به پایین انتقال دهیم، تابع $f(x) - ۲$ در $x = ۲$ بر محور xها مماس و در اطراف $x = ۲$ منفی است.



$$\lim\limits_{x \to ۲} \frac{|x| + \left[\frac{-x}{۳}\right]}{f(x) - ۲} = \frac{۲ - ۱}{۰^-} = \frac{۱}{۰^-} = -\infty$$

اگر $\lim\limits_{x \to ۲^+} \dfrac{x-۲}{۲x^۲+ax+b} = +\infty$ باشد، $\lim\limits_{x \to (-۲)^+} ab[x]$ چه‌قدر است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) ۶۴   ۲) ۶۴   ۳) ۱۲۸   ۴) ۱۲۸

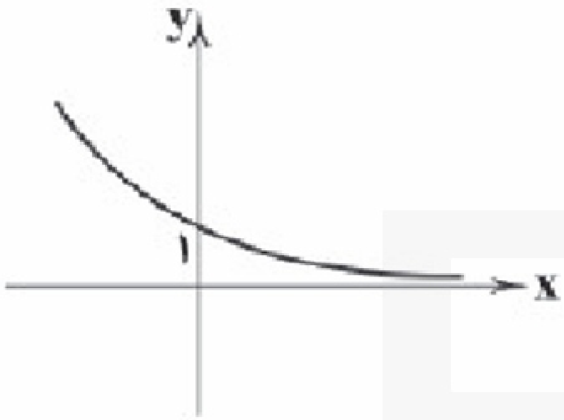
گزینه ۳ پاسخ صحیح است. چون حد صورت صفر است، پس باید مخرج ریشه‌ی مضاعف ۲ داشته باشد.

$$۲(x-۲)^۲ = ۲\left(x^۲ - ۴x + ۴\right) = ۲x^۲ - ۸x + ۸ \quad (*)$$

با مقایسه‌ی رابطه‌ی (*) با مخرج، $a = -۸$ و $b = ۸$ به دست می‌آید.

$$\lim_{x \to (-۲)^+} ab[x] = -۶۴\left[(-۲)^+\right] = -۶۴(-۲) = ۱۲۸$$

اگر ضابطه‌ی نمودار نمایی زیر $f(x)=\left(\frac{m-3}{m-5}\right)^{x}+\left(m^{2}+m-2\right)x$ باشد، $f(-1)$ کدام می‌تواند باشد؟



۱) فقط ۲

۲) فقط $\frac{7}{5}$

۳) ۲ یا $\frac{5}{7}$

۴) ۲ یا $\frac{7}{5}$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چون تابع نمایی است، چون:

$$m^{2}+m-2=0 \Rightarrow (m-1)(m+2)=0 \Rightarrow m=1\,,\,-2$$

$$m=1 \Rightarrow f(x)=\left(\frac{1-3}{1-5}\right)^{x}=\left(\frac{2}{4}\right)^{x} \Rightarrow f(-1)=2$$

$$m=-2 \Rightarrow f(x)=\left(\frac{-2-3}{-2-5}\right)^{x}=\left(\frac{5}{7}\right)^{x} \Rightarrow f(-1)=\frac{7}{5}$$

اگر $x^{۲} + ۴y^{۲} = ۶۵$ و $x = \frac{۴}{y}$ باشد، لگاریتم $x + ۲y$ در مبنای $\sqrt{۳}$ چه‌قدر است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۴

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$(x + ۲y)^{۳} = x^{۲} + ۴y^{۲} + ۴xy = ۶۵ + ۴ \times ۴ = ۶۵ + ۱۶ = ۸۱ \Rightarrow x + ۲y = ۹$$

$$\Rightarrow \mathrm{Log}_{\sqrt{۳}}(x + ۲y) = \mathrm{Log}_{\sqrt{۳}} ۹ = \mathrm{Log}_{۳^{\frac{۱}{۲}}} ۳^{۲} = \frac{۲}{\frac{۱}{۲}} = ۴$$

اگر $x^2 \le -x^3$ باشد، با شرط $x > -4$، حاصل $[x]$ چند مقدار صحیح را اختیار می‌کند؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$x^2 + x^3 \le 0 \Rightarrow x^2(1 + x) \le 0 \Rightarrow x \in (-\infty , -1] \cup \{0\}$

جواب نامعادله با شرط $x > -4$ به صورت $(-4 , -1] \cup \{0\}$ تبدیل می‌شود که در این صورت:

$[x] \in \{-4, -3, -2, -1 , 0\}$