کدام‌یک از تابع‌های زیر، با تابع $y = x - ۲$ برابر است؟

۱) $y = |x - ۲| \; ; \; x \geq ۲$

۲) $y = \sqrt{(x - ۲)^۲}$

۳) $y = \dfrac{x^۲ - ۴}{x + ۲}$

۴) $\begin{cases} y = \dfrac{x^۲ - ۲x}{x} & ; x \neq ۰ \\ y = -۲ & ; x = ۰ \end{cases}$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

اگر $x \neq ۰$ باشد $\dfrac{x^۲ - ۲x}{x} = x - ۲$ در حالت $x = ۰$ مقدار تابع برابر ۲- است.

قرینه نمودار تابع $y = x^{۲} \; ; \; x \le ۰$ نسبت به نیمساز ناحیه اول با کدام معادله است؟

۱) $y = \sqrt{x}$ ۲) $y = \sqrt{-x}$ ۳) $y = -\sqrt{x}$ ۴) $y = -\sqrt{-x}$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

x را برحسب y محاسبه می‌کنیم $y = x^{۲} \; ; \; x \le ۰ \Rightarrow x = -\sqrt{y} \Rightarrow y = -\sqrt{x}$

با کدام عملیات متوالی از نمودار تابع $y = \sqrt{x}$، نمودار تابع $y = -۳ + \sqrt{۴ - x}$ حاصل می‌شود؟

۱) تقارن نسبت به محور xها، انتقال افقی ۴+ و قائم ۳-

۲) تقارن نسبت به محور xها، انتقال افقی ۴- و قائم ۳+

۳) تقارن نسبت به محور yها، انتقال افقی ۴+ و قائم ۳-

۴) تقارن نسبت به محور yها، انتقال افقی ۴- و قائم ۳+

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$y = \sqrt{x} \Rightarrow y = \sqrt{-x} \Rightarrow y + ۳ = \sqrt{-(x - ۴)} \Rightarrow y = -۳ + \sqrt{۴ - x}$$

تقارن نسبت به محور yها سپس انتقال ۴ واحد به طرف xهای مثبت و ۳ واحد به طرف yها منفی است.

در معادله رادیکالی $\sqrt{x^2 - x + 13} - \sqrt{x^2 - x + 4} = 1$ ، حاصل‌ضرب ریشه‌ها کدام است؟

۱) ‎-۱۲ ۲) ‎-۶ ۳) ۸ ۴) ۱۶

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

با فرض $x^2 - x + 4 = y$ خواهیم داشت $\sqrt{y + 9} - \sqrt{y} = 1 \Rightarrow y + 9 = 1 + y + 2\sqrt{y}$ در نتیجه

$y = 16$ پس $x^2 - x - 12 = 0$ حاصل‌ضرب ریشه‌ها $-12 = \frac{c}{a}$

اگر $f(x)=\sqrt{x^۲-۲x}$ و $g(x)=\sqrt{۲-x}$، دامنه تابع $\frac{f}{g}(x)$ کدام است؟

۱) $[۰,۲)$ ۲) $(-\infty,۰۲)$ ۳) $(-\infty,۰]$ ۴) $(-\infty,۰]\cup\{۲\}$

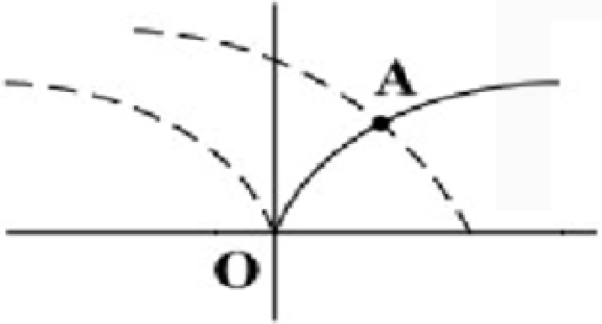
گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$D_f=\{x\mid x^۲-۲x\geq ۰\}=(-\infty,۰]\cup[۲,\infty),\ D_g=(-\infty,۲]$$

اشتراک دو دامنه به صورت $(-\infty,۰]$ است.

نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ رسم شده است. قرینه آن را نسبت به محور yها رسم کنید، سپس ۴ واحد به طرف xهای مثبت انتقال دهید، فاصله نقطه برخورد این دو منحنی از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{۵}$ ۴) $\sqrt{۶}$



گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

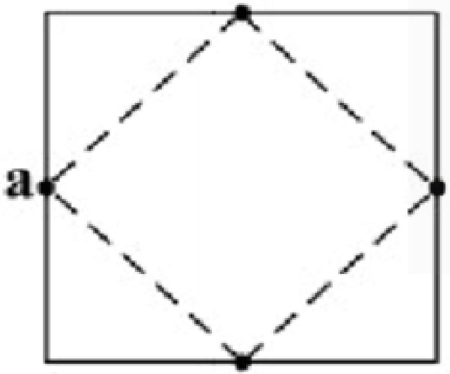
معادله منحنی حاصل $y_۱ = \sqrt{-x} \Rightarrow y_۲ = \sqrt{-(x - ۴)} = \sqrt{-x + ۴}$

$$\sqrt{x} = \sqrt{-x + ۴} \Rightarrow A\left(۲, \sqrt{۲}\right) \Rightarrow OA = \sqrt{۴ + ۲} = \sqrt{۶}$$

در یک مربع وسط اضلاع متوالی را به هم وصل می‌کنیم. مساحت چهارضلعی چند برابر مساحت مربع اصلی است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۸}$ ۴) $\frac{۵}{۸}$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



مثلث‌های گوشه‌ای قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین به ضلع $\frac{a}{۲}$ است چهار ضلعی حاصل مربع است به ضلع $\sqrt{\frac{a^{۲}}{۴}+\frac{a^{۲}}{۴}}=\frac{a\sqrt{۲}}{۲}$ که مساحت آن $\frac{a^{۲}}{۲}$ است. پس مساحت حاصل $\frac{۱}{۲}$ مساحت مربع اصلی است.

معادله سهمی به رأس $\left(\frac{۱}{۲}, \frac{۹}{۴}\right)$ ، گذرا از نقطه $(۱,۲)$ کدام است؟

۱) $y = -x^۲ + x + ۲$

۲) $y = x^۲ - x + ۲$

۳) $y = ۲x^۲ - ۲x + ۲$

۴) $y = -۲x^۲ + ۲x + ۱$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$y = a\left(x - \frac{۱}{۲}\right)^۲ + \frac{۹}{۴} \Rightarrow ۲ = a\left(\frac{۱}{۲}\right)^۲ + \frac{۹}{۴} \Rightarrow a = -۱ \Rightarrow y = -x^۲ + x + ۲$$

فاصله نقطه $A(۲,-۳)$ از رأس سهمی به معادله $y = -x^۲ + x + ۲$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}\sqrt{۳۷}$ ۲) $\frac{۱}{۴}\sqrt{۱۰۵}$ ۳) $\frac{۵}{۴}\sqrt{۱۹}$ ۴) $\frac{۳}{۴}\sqrt{۵۳}$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

رأس سهمی به طول $x = -\frac{b}{۲a} = \frac{۱}{۲}$ است عرض آن $y = -\frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۲} + ۲$ پس $S\left(\frac{۱}{۲}, \frac{۹}{۴}\right)$

$$SA = \sqrt{\left(\frac{۱}{۲} - ۲\right)^۲ + \left(\frac{۹}{۴} + ۳\right)^۲} = \sqrt{\frac{۹}{۴} + \frac{۴۴۱}{۱۶}} = \frac{۱}{۴}\sqrt{۴۷۷} = \frac{۳}{۴}\sqrt{۵۳}$$

با ارقام عدد ۴۳۲۵۹، اعداد شش‌رقمی نوشته‌ایم. در چند عدد حداقل دو رقم زوج به کار رفته است؟

۱) $۲^{۲}\times ۳\times ۵^{۵}$ ۲) $۲^{۲}\times ۵^{۴}$ ۳) $۲^{۲}\times ۵^{۵}$ ۴) $۲^{۲}\times ۳\times ۵^{۴}$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. از شش موقعیت دو تا انتخاب می‌کنیم و ارقام زوج را در آن‌ها قرار می‌دهیم:

$$\underbrace{\binom{۶}{۲}}_{\text{انتخاب دو جایگاه برای زوج ها}} \times \underbrace{۲\times ۲}_{\text{ارقام زوج}} \times \underbrace{۵\times ۵\times ۵\times ۵}_{\text{همه ارقام}} = ۲^{۲}\times ۳\times ۵^{۵}$$

اگر $f(\operatorname{Sin} x) = tg^{۲} x + \operatorname{Cos}^{۲} x$ باشد، $f\left(\frac{۱}{۳}\right)$ چه‌قدر است؟

۱) $۲\frac{۱}{۷۳}$ ۲) $۲\frac{۱}{۷۲}$ ۳) $۱\frac{۱}{۷۳}$ ۴) $۱\frac{۱}{۷۲}$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(\operatorname{Sin} x) = tg^{۲} x + \operatorname{Cos}^{۲} x = \frac{\operatorname{Sin}^{۲} x}{۱ - \operatorname{Sin}^{۲} x} + ۱ - \operatorname{Sin}^{۲} x$$

حال کافی است به جای $\operatorname{Sin} x$ عدد $\frac{۱}{۳}$ قرار دهیم:

$$f\left(\frac{۱}{۳}\right) = \frac{\frac{۱}{۹}}{۱ - \frac{۱}{۹}} + ۱ - \frac{۱}{۹} = \frac{۱}{۸} + \frac{۸}{۹} = \frac{۹ + ۶۴}{۷۲} = \frac{۷۳}{۷۲} = ۱\frac{۱}{۷۲}$$

اگر انحراف از میانگین داده‌های آماری $x_1 , x_2 , \dots , x_5$، مقادیر $-3 , -2 , 0 , k-1 , 5$ باشد، واریانس داده‌ها کدام است؟

۱) ۷/۸ ۲) ۷/۶ ۳) ۷/۴ ۴) ۷/۷

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مجموع انحراف از میانگین برابر صفر است، پس:

$$-3-2+0+k-1+5=0 \Rightarrow k=1$$

$$\sigma^2=\frac{\sum_{i=1}^{5}\left(x_i-\bar{x}\right)}{n}=\frac{9+4+0+0+25}{5}=\frac{38}{5}=7/6$$

اگر $f(x) = x^{۲} + bx + c$، $f(۲) \in Z$ و $\lim_{x \to ۲} [f(x)] = ۴$ باشد، $\lim_{x \to ۱} f(x)$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۳

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. نکته: اگر $f(x)$ تابعی پیوسته باشد، تابع $y = [f(x)]$ در تمامی نقاطی که $f(x)$ صحیح می‌شود، حد ندارند مگر آن‌که این نقطه، min یا max نسبی تابع $f(x)$ باشد.
چون $\lim_{x \to ۲} [f(x)]$ وجود دارد، پس نقطه‌ی $(۲ , ۴)$ نقطه‌ی مینیمم نسبی $f(x)$ است.

$$\begin{cases} -\frac{b}{۲} = ۲ \Rightarrow b = -۴ \\ ۴ = ۴ + ۲b + c \Rightarrow c = ۸ \end{cases} \Rightarrow f(x) = x^{۲} - ۴x + ۸$$

$$\lim_{x \to ۱} \left(x^{۲} - ۴x + ۸\right) = ۵$$

روی کارت‌هایی اعداد ۱، ۲، ۳ و ۴ نوشته‌ایم. با سه تا از این کارت‌ها اعداد سه‌رقمی می‌سازیم. با چه احتمالی این عدد بر ۴ بخش‌پذیر است؟

۱) $\frac{۱}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱}{۸}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اعدادی بر ۴ بخش‌پذیرند که دو رقم سمت راست آن‌ها بر ۴ بخش‌پذیر باشند. تعداد دوتایی‌هایی که سمت راست قرار می‌گیرند، $P(۴, ۲) = \frac{۴!}{۲!} = ۱۲$ تا است.

۳۴	۲۴	۲۳	۱۴	۱۳	۱۲
۴۳	۴۲	۳۲	۴۱	۳۱	۲۱

از این ۱۲ عدد فقط ۱۲، ۲۴ و ۳۲ بر ۴ بخش‌پذیراند، پس فقط شش عدد ۳۲۴، ۱۲۴، ۳۱۲، ۴۱۲، ۱۳۲ و ۴۳۲ بر ۴ بخش‌پذیرند:

$$P(A) = \frac{۶}{P(۴, ۳)} = \frac{۶}{۲۴} = \frac{۱}{۴}$$

اگر یکی از ریشه‌های معادله‌ی $\left(b^{۲}+۱\right)x^{۲}+(b+۱)\pi x=۴b^{۲}+۴$ برابر ۳- باشد، مربع ریشه‌ی دیگر کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۱۶}{۹}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۹}{۱۶}$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\alpha\beta=\frac{-۴\left(b^{۲}+۱\right)}{b^{۲}+۱}=-۴\xrightarrow{\alpha=-۳}-۳\beta=-۴\Rightarrow\beta=\frac{۴}{۳}\Rightarrow\beta^{۲}=\frac{۱۶}{۹}$$

اگر $2(\sin x + \cos x) = 1 + 2\sin x \cos x$ باشد، حاصل $tg^3 x + \sqrt[3]{tg x}$ کدام است؟

۱) صفر　　۲) ۲　　۳) -۲　　۴) -۱

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. چون $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2\sin x \cos x$، پس:

$$(\sin x + \cos x)^2 - 2(\sin x + \cos x) = 0$$

$$(\sin x + \cos x)(\sin x + \cos x - 2) = 0$$

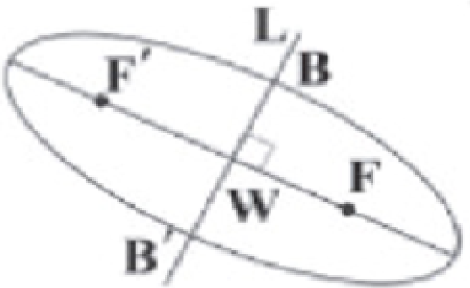
$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x + \cos x = 0 \Rightarrow \sin x = -\cos x \Rightarrow tg x = -1 \\ \sin x + \cos x = 2 \Rightarrow \text{فاقد جواب} \end{cases}$$

$$tg x = -1 \Rightarrow tg^3 x + \sqrt[3]{tg x} = -1 - 1 = -2$$

اگر $F(۱ , -۲)$ و $F'(۳ , -۱۰)$ دو کانون یک بیضی باشند، آن‌گاه معادله‌ی قطر کوچک بیضی کدام است؟

۱) $x = ۴y - ۲۶$ ۲) $y = ۴y - ۲۶$ ۳) $x = ۴y + ۲۶$ ۴) $y = ۴y + ۲۶$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. خط گذرا از B و B' (دو سر قطر کوچک)، عمودمنصف FF' است.



$$W = \frac{(۱ , -۲) + (۳ , -۱۰)}{۲} = (۲ , -۶)$$

$$m_{FF'} = \frac{-۱۰ + ۲}{۳ - ۱} = \frac{-۸}{۲} = -۴ \Rightarrow m_L = \frac{۱}{۴}$$

$$L : y + ۶ = \frac{۱}{۴}(x - ۲) \Rightarrow ۴y + ۲۴ = x - ۲ \Rightarrow x = ۴y + ۲۶$$

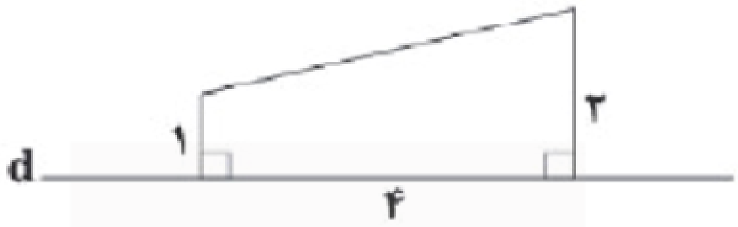
اگر $x^۲ + y^۲ + ۲x - ۶y + k = ۰$ یک دایره باشد، حدود k کدام است؟

۱) $k < ۱۰$ ۲) $k > ۱۰$ ۳) $k < ۱۲$ ۴) $k > ۱۲$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$a^۲ + b^۲ > ۴c \Rightarrow ۴ + ۳۶ > ۴k \Rightarrow k < ۱۰$

ذوزنقه‌ی شکل زیر را حول خط d دوران داده، سپس شکل حاصل را با صفحه‌ی شامل خط d برش داده‌ایم. مساحت سطح مقطع چه‌قدر است؟



۱) ۱۲
۲) ۱۶
۳) ۱۸
۴) ۲۰

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با دوران ذوزنقه حول خط d، یک مخروط ناقص حاصل می‌شود و سطح مقطع موردنظر

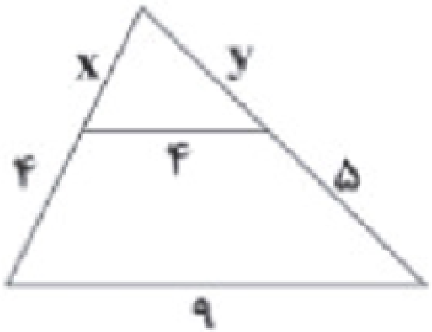
یک ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین است.

$$S = \frac{۱}{۲}(۲ + ۴) \times ۴ = ۱۲$$

در ذوزنقه‌ای که طول قاعده‌ها ۴ و ۹ و طول ساق‌ها ۴ و ۵ باشد، ساق‌ها را امتداد می‌دهیم. محیط مثلث ساخته شده در خارج ذوزنقه چه‌قدر است؟

۱) ۱۱/۴ ۲) ۱۱/۲ ۳) ۱۲/۲ ۴) ۱۲/۱

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



$$\frac{x}{x+۴}=\frac{y}{y+۵}=\frac{۴}{۹}\Rightarrow\begin{cases}۹x=۴x+۱۶\\ ۹y=۴y+۲۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۵x=۱۶\Rightarrow x=۳/۲\\ ۵y=۲۰\Rightarrow y=۴\end{cases}$$

محیط مثلث $=۳/۲+۴+۴=۱۱/۲$

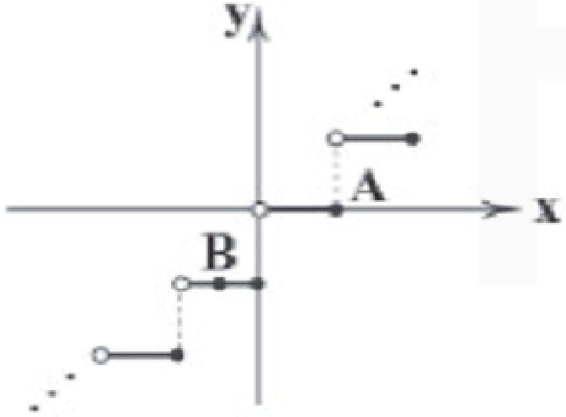
در مورد اکسترهای نسبی تابع $f(x) = \begin{cases} [x] & x \notin Z \\ x - 1 & x \in Z \end{cases}$ کدام گزینه صحیح است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

۱) نقاط با طول صحیح max نسبی‌اند.

۲) همه‌ی نقاط R برای این تابع اکسترمم نسبی‌اند.

۳) نقاط غیرصحیح فقط min نسبی‌اند.

۴) این تابع فاقد اکسترمم نسبی است.



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نمودار تابع را رسم می‌کنیم.

نقاط با طول صحیح (مانند A) مینیمم نسبی و نقاط با طول غیرصحیح (مانند B) هم max و هم min نسبی هستند، پس همه‌ی نقاط R برای این تابع اکسترمم نسبی هستند.

اگر a و b دو عدد مثبت باشند، حداقل مقدار $A = \frac{a}{b+۱} + \frac{b+۱}{۲a} + \sqrt{۲}$ چه‌قدر است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $۳\sqrt{۲}$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. برای هر دو عدد مثبت x و y داریم:

$$x + y \geq ۲\sqrt{xy}$$

پس برای دو عدد مثبت $\frac{a}{b+۱}$ و $\frac{b+۱}{۲a}$ داریم:

$$\frac{a}{b+۱} + \frac{b+۱}{۲a} \geq ۲\sqrt{\frac{a}{b+۱} \times \frac{b+۱}{۲a}} = \frac{۲}{\sqrt{۲}} = \sqrt{۲}$$

$$A \geq \sqrt{۲} + \sqrt{۲} \Rightarrow A \geq ۲\sqrt{۲} \Rightarrow \min A = ۲\sqrt{۲}$$

کم‌ترین مقدار تابع $y = x^{۴} - ۴x + a$ برابر ۳ است. $f(۲)$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۴ ۳) ۶ ۴) ۸

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. تابع درجه چهارم $y = x^{۴} - ۴x + a$ مینیمم مطلق دارد که در ریشه‌های مشتق رخ می‌دهد:

$$y' = ۴x^{۳} - ۴ = ۰ \Rightarrow x = ۱ \Rightarrow f(۱) = ۱ - ۴ + a = a - ۳ = ۳ \Rightarrow a = ۶$$

$$f(۲) = ۱۶ - ۸ + ۶ = ۱۴$$

آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x) = \frac{۴}{x^۲}$ در فاصله‌ی $[۲ , ۱]$ با آهنگ لحظه‌ای تغییر در نقطه‌ی c برابر است. مقدار $c^۳$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۳}{۸}$ ۳) $\frac{۸}{۳}$ ۴) $\frac{۸}{۷}$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f'(c) = \frac{f(۲) - f(۱)}{۲ - ۱} \Rightarrow \frac{-۸}{c^۳} = \frac{۱ - ۴}{۱} \Rightarrow c^۳ = \frac{۸}{۳}$$

اگر $\lim\limits_{x\to ۳} \frac{f(x)-۴}{x^۲-۹}=۲$ باشد، مشتق $g(x)=\frac{f(۳x)}{\sqrt{x}}$ در $x=۱$ چه‌قدر است؟

۱) ۳۰ ۲) ۳۶ ۳) ۳۲ ۴) ۳۴

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to ۳} \frac{f(x)-۴}{x-۳}\times\lim_{x\to ۳}\frac{۱}{x+۳}=۲ \Rightarrow \lim_{x\to ۳}\frac{f(x)-۴}{x-۳}=۱۲ \Rightarrow \begin{cases} f(۳)=۴ \\ f'(۳)=۱۲ \end{cases}$$

$$g'(x)=\frac{۳f'(۳x)\sqrt{x}-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}f(۳x)}{x}$$

$$g'(۱)=۳f'(۳)-\frac{f(۳)}{۲}=۳\times ۱۲-۲=۳۴$$

اگر $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{(x-۱)^۲ + b(x+۲)^۲}{bx^۲ + (۲x-۱)^۲} = ۳$ باشد، $\lim\limits_{x \to ۱^+} \dfrac{۲b}{۲bx + ۱۱}$ کدام است؟

۱) $-\infty$ ۲) $+\infty$ ۳) ۰ ۴) $-\dfrac{۱۱}{۲}$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^۲ + bx^۲}{bx^۲ + ۴x^۲} = ۳ \Rightarrow \frac{b+۱}{b+۴} = ۳ \Rightarrow ۳b + ۱۲ = b + ۱ \Rightarrow b = -\frac{۱۱}{۲}$$

$$\lim_{x \to ۱^+} \frac{۲b}{۲bx + ۱۱} = \frac{-۱۱}{۱۱ - ۱۱^+} = \frac{-۱۱}{۰^-} = +\infty$$

یکی از جواب‌های معادله‌ی $\cos 2x + \sqrt{3}\cos x = 2$ کدام است؟

۱) $2k\pi + \frac{\pi}{3}$ ۲) $2k\pi - \frac{\pi}{3}$ ۳) $2k\pi - \frac{\pi}{6}$ ۴) $k\pi + \frac{\pi}{6}$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\cos 2x + \sqrt{3}\cos x = 2 \Rightarrow 2\cos^2 x - 1 + \sqrt{3}\cos x - 2 = 0$$

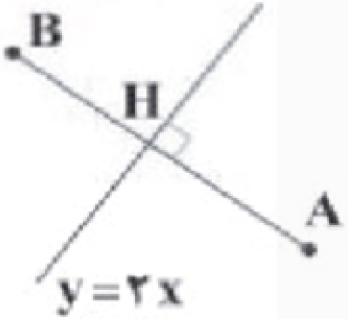
$$2\cos^2 x + \sqrt{3}\cos x - 3 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{-\sqrt{3} \pm \sqrt{3 + 24}}{2 \times 2} = \frac{-\sqrt{3} \pm 3\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \\ \cos x = -\sqrt{3} \quad \text{جواب ندارد} \end{cases}$$

قرینه‌ی نقطه‌ی $A(۳, ۱)$ نسبت به خط $y = ۲x$ کدام است؟

۱) $(۱, ۳)$ ۲) $(۰, ۳)$ ۳) $(۰, ۴)$ ۴) $(-۱, ۳)$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. شیب خط گذرا از A و B برابر $-\frac{۱}{۲}$ است، معادله‌ی پاره‌خط AB را می‌نویسیم:

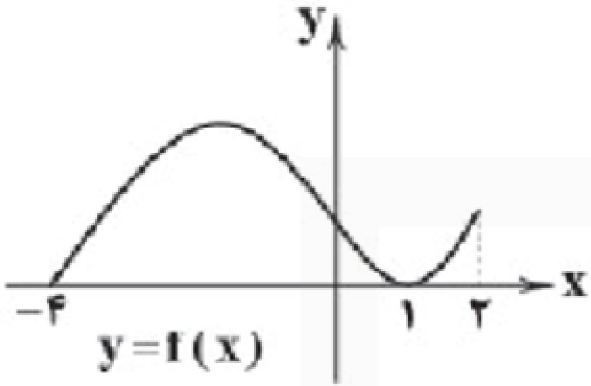


$$y - ۱ = -\frac{۱}{۲}(x - ۳) \Rightarrow ۲y + x = ۵$$

حال دو خط را برخورد می‌دهیم تا نقطه‌ی H به دست آید:

$$\begin{cases} y = ۲x \\ ۲y + x = ۵ \end{cases} \Rightarrow ۴x + x = ۵ \Rightarrow x = ۱ , y = ۲ \Rightarrow H(۱, ۲)$$

$$H = \frac{A + B}{۲} \Rightarrow B = ۲H - A = (۲, ۴) - (۳, ۱) = (-۱, ۳)$$



اگر نمودار تابع $f(x)$ به صورت زیر باشد، دامنه‌ی تابع $m(x)=\frac{۱}{\sqrt{۲x-x^{۲}}}+\sqrt{f(۲x)}$ کدام است؟

۱) $[۰\,,\,۱]$
۲) $[۰\,,\,۱)$
۳) $(۰\,,\,۱]$
۴) $(۰\,,\,۲]$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$g(x)=\sqrt{f(۲x)}\Rightarrow D_g=[-۲\,,\,۱]$$

$$h(x)=\frac{۱}{\sqrt{۲x-x^{۲}}}\Rightarrow D_h=\{x \mid ۲x-x^{۲}>۰\}=(۰\,,\,۲)$$

$$D_m=D_g\cap D_h=[-۲\,,\,۱]\cap(۰\,,\,۲)=(۰\,,\,۱]$$

ضابطه‌ی تابع وارون $f(x) = x + ۲\sqrt{x} + ۱$ کدام است؟

۱) $f^{-۱}(x) = x - ۲\sqrt{x} + ۱ , x \ge ۱$

۲) $f^{-۱}(x) = x - ۲\sqrt{x} + ۱ , x \ge ۰$

۳) $f^{-۱}(x) = x - ۲\sqrt{x} , x \ge ۱$

۴) $f^{-۱}(x) = x - ۲\sqrt{x} , x \ge ۰$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. دامنه‌ی تابع $[۰ , +\infty)$ است.

$$f(x) = x + ۲\sqrt{x} + ۱ = \left(\sqrt{x} + ۱\right)^{۲} = y \Rightarrow \sqrt{x} + ۱ = \sqrt{y} \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{y} - ۱$$

$$\Rightarrow x = \left(\sqrt{y} - ۱\right)^{۲} = y - ۲\sqrt{y} + ۱ = f^{-۱}(x) = x - ۲\sqrt{x} + ۱$$

اما دامنه‌ی $f^{-۱}$ برابر برد $f(x)$ است.

$$\sqrt{x} \ge ۰ \Rightarrow \sqrt{x} + ۱ \ge ۱ \Rightarrow \left(\sqrt{x} + ۱\right)^{۲} \ge ۱ \Rightarrow R_f = D_{f^{-۱}} = [۱ , +\infty)$$