اگر نقطه‌ی $A(1, 2)$ بر روی تابع $y = f(x)$ واقع شود، نقطه‌ی متناظر A بر روی تابع $g(x) = 2 - 3f(2x - 1)$ کدام است؟

۱) $(1, 0)$ ۲) $(1, -4)$ ۳) $(2, 1)$ ۴) $(3, -1)$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. چون $f(1) = 2$ و $g(x) = 2 - 3f(2x - 1)$ می‌باشد، داریم:

$$2x - 1 = 1 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 2 - 3\underbrace{f(1)}_{2} = -4$$

پس نقطه‌ی $(1, -4)$ بر $g(x)$ واقع است.

به ازای چند عدد صحیح، نمودار $y = x^۲ - ۴x - ۸$ پایین‌تر از نمودار تابع $y = |x - ۲|$ قرار می‌گیرد؟

۱) ۵　　۲) ۸　　۳) ۶　　۴) ۷

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$x^۲ - ۴x - ۸ < |x - ۲| \Rightarrow (x - ۲)^۲ - |x - ۲| - ۱۲ < ۰ \xrightarrow{|x - ۲| = t} t^۲ - t - ۱۲ < ۰$$
$$\Rightarrow (t - ۴)(t + ۳) < ۰ \Rightarrow -۳ < t < ۴ \Rightarrow -۳ < |x - ۲| < ۴ \Rightarrow |x - ۲| < ۴$$
$$\Rightarrow -۴ < x - ۲ < ۴ \Rightarrow -۲ < x < ۶ \xrightarrow{x \in Z} x \in \{-۱, ۰, ۱, \dots, ۵\}$$

به ازای هفت مقدار صحیح رابطه برقرار است.

حاصل $A=\sqrt{\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{6}}}\;\sqrt[4]{11-\sqrt{120}}$ کدام است؟

۱) ۳   ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۲   ۴) ۱

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$A=\sqrt[4]{\left(\sqrt{5}+\sqrt{6}\right)^{2}}\;\sqrt[4]{11-2\sqrt{30}}=\sqrt[4]{\left(11+2\sqrt{30}\right)\left(11-2\sqrt{30}\right)}$$

$$=\sqrt[4]{121-120}=1$$

حاصل عبارت $A = \frac{۱}{۱ + tg^۲\alpha} + \frac{۱}{۱ + tg^۲\beta}$ به‌ازای $\alpha = ۱۲^\circ$ و $\beta = ۷۸^\circ$ چه‌قدر است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) صفر ۴) $\frac{۳}{۲}$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$A = Cos^۲\alpha + Cos^۲\beta = Cos^۲ ۱۲^\circ + Cos^۲ ۷۸^\circ = Cos^۲ ۱۲^\circ + Sin^۲ ۱۲^\circ = ۱$$

اگر $x = Log\left(۲\sqrt{۲}-۱\right) + Log\left(\sqrt{۲}+۱\right)$ و $y = ۱۰^{x} - ۳$ باشد، حاصل $Log_{۲} y$ کدام است؟

۱) ۲ ‏ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ‏ ۳) ۳ ‏ ۴) $\frac{۱}{۳}$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$۱۰^{x} = ۱۰^{Log\left(۲\sqrt{۲}-۱\right)} \times ۱۰^{Log\left(\sqrt{۲}+۱\right)} = \left(۲\sqrt{۲}-۱\right)\left(\sqrt{۲}+۱\right)$$

$$\Rightarrow ۱۰^{x} = ۴ + ۲\sqrt{۲} - \sqrt{۲} - ۱ = ۳ + \sqrt{۲}$$

$$y = ۱۰^{x} - ۳ = \sqrt{۲} \Rightarrow Log_{۲} y = Log_{۲}\sqrt{۲} = \frac{۱}{۲}$$

جمله‌ی چندم دنباله‌ی حسابی $3+2\sqrt{2}\,,\ 4+\sqrt{2}\,,\ 5\,,\ \dots$ برابر $52-47\sqrt{2}$ است؟

۱) ۴۸   ۲) ۴۹   ۳) ۵۰   ۴) ۵۱

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$d = t_2 - t_1 = \left(4+\sqrt{2}\right) - \left(3+2\sqrt{2}\right) = 1-\sqrt{2}$$

$$n = \frac{t_n - t_1}{d} + 1 = \frac{\left(52-47\sqrt{2}\right) - \left(3+2\sqrt{2}\right)}{1-\sqrt{2}} + 1 = 50$$

به ازای کدام مقدار a دایره‌ای به معادلهٔ $x^۲ + y^۲ + ۲x - ۴y + a = ۰$ بر خط به معادلهٔ $۴x - ۳y = ۵$ مماس است؟

۱) ‎-۳ ۲) ‎-۴ ۳) ۳ ۴) ۴

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. شعاع دایرهٔ داده شده $r = \frac{۱}{۲}\sqrt{۲^۲ + (-۴)^۲ - ۴a} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۲۰ - ۴a} = \sqrt{۵ - a}$ و مرکز دایره $(۲ , -۱)$ می‌باشد و چون خط $۴x - ۳y = ۵$ بر دایره مماس است. فاصلهٔ مرکز دایره تا خط $۴x - ۳y = ۵$ مساوی شعاع دایره است. پس فاصلهٔ نقطهٔ $(۲ , -۱)$ را از خط $۴x - ۳y - ۵ = ۰$ به دست می‌آوریم:

$$R = \frac{|-۴ -۶ -۵|}{\sqrt{۴^۲ + (-۳)^۲}} = \frac{۱۵}{۵} = ۳$$

از طرفی $r = \sqrt{۵ - a}$ پس:

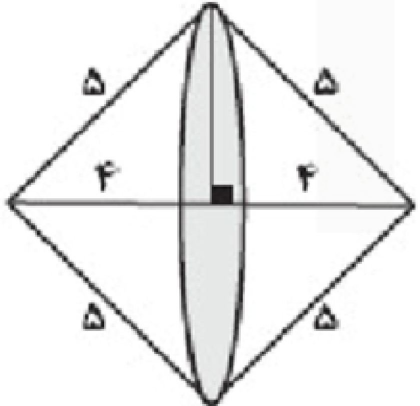
$$\sqrt{۵ - a} = ۳ \Rightarrow ۵ - a = ۹ \Rightarrow a = -۴$$

مثلث متساوی‌الساقین با ساق ۵ و قاعدهٔ ۸ را حول قاعده دوران می‌دهیم. حجم حاصل چه‌قدر است؟

۱) ۱۸π ۲) ۲۴π ۳) ۲۷π ۴) ۳۶π

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. حجم حاصل دو تا مخروط در قاعده مشترک است. شعاع قاعدهٔ مخروطها برابر با ارتفاع مثلث: $r = \sqrt{۵^۲ - ۴^۲} = ۳$ و ارتفاع هر کدام ۴ است. پس داریم:

$$V = ۲ \times \frac{۱}{۳}\pi(۳)^۲ \times ۴ = ۲۴\pi$$



دایره‌ای به مرکز $O(۰ , ۲)$ و مماس بر نیمساز ربع دوم، از محور عرض‌ها، پاره‌خطی با کدام طول را جدا می‌کند؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) ۲ ۴) $۲\sqrt{۲}$

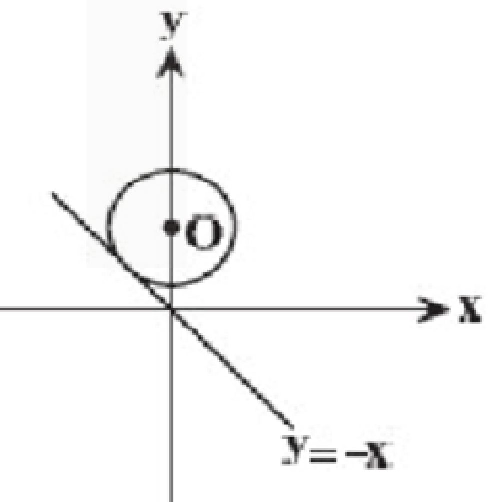
گزینه ۴ پاسخ صحیح است. برای پیدا کردن شعاع دایره، فاصلهٔ مرکز آن را از خط $y + x = ۰$ محاسبه می‌کنیم: پس:

$$y + x = ۰$$

$$O(۰ , ۲)$$

$$R = \frac{|۱(۰) + ۱(۲)|}{\sqrt{۱^۲ + ۱^۲}} = \frac{۲}{\sqrt{۲}} = \sqrt{۲}$$

با توجه به شکل دایره پاره‌خطی به طول $۲R = ۲\sqrt{۲}$ روی محور عرض‌ها جدا می‌کند.



وضعیت نقاط $A(۵ , -۱)$ ، $C(۴ , -۲)$ نسبت به دایره به معادلهٔ $x^۲ + y^۲ - ۶x + ۲y + ۶ = ۰$ به‌ترتیب کدام است؟ (گزینه‌ها را از راست به چپ بخوانید)

۱) روی دایره، دورن دایره، بیرون دایره
۲) درون دایره، بیرون دایره، روی دایره
۳) بیرون دایره، درون دایره، روی دایره
۴) روی دایره، بیرون دایره، درون دایره

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مرکز و شعاع داره را می‌یابیم:

$$r = \frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲ + b^۲ - ۴c} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۳۶ + ۴ - ۲۴} = ۲$$

$$Q\left(-\frac{a}{۲}, -\frac{b}{۲}\right) = \left(-\frac{(-۶)}{۲}, -\frac{۲}{۲}\right) = (۳, -۱)$$

حال با مقایسهٔ فاصلهٔ نقاط تا مرکز دایره با اندازه شعاع دایره داریم:

$$OA = \sqrt{(۳ - ۵)^۲ + (-۱ + ۱)^۲} = ۲ = r \Rightarrow$$ A روی دایره است.

$$OB = \sqrt{(۳ - ۲)^۲ + (-۱ - ۱)^۲} = \sqrt{۵} > r \Rightarrow$$ B بیرون دایره

$$OC = \sqrt{(۳ - ۴)^۲ + (-۱ + ۲)^۲} = \sqrt{۲} < r \Rightarrow$$ C درون دایره است.

دو ضلع مقابل یک مربع بر دو خط به معادلات $y = ۲x - ۱$ و $۲y + kx = ۷$ واقع هستند. مساحت این مربع کدام است؟

۱) ۴/۰۱ ۲) ۴/۰۵ ۳) ۴/۱ ۴) ۴/۵

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. این دو خط موازی‌اند $۲y + kx = ۷ , y = ۲x - ۱$:
معادلهٔ دومی را ۲ برابر می کنیم:

$$\begin{cases} ۲y + kx = ۷ \\ ۲y - ۴x = -۲ \end{cases}$$

پس باید $k = -۴$ باشد، حالا فاصلهٔ این دو خط برابر طول ضلع مربع است:

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}} = \frac{|۷ - (-۲)|}{\sqrt{(-۴)^۲ + ۲^۲}} = \frac{۹}{\sqrt{۲۰}}$$

پس مساحت مربع برابر است با:

$$s = d^۲ = \frac{۸۱}{۲۰} = ۴\frac{۱}{۲۰} = ۴/۰۵$$

در لوزی $ABCD$ دو رأس $A(-۲ , ۱)$ و $C(۴ , ۳)$ مقابل هم هستند. کدام نقطه مختصات رأس B نمی‌تواند باشد؟

۱) $(۰ , ۴)$ ۲) $(۲ , -۱)$ ۳) $(۳ , -۴)$ ۴) $(-۱ , ۸)$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در لوزی نقطهٔ B حتماً باید روی عمودمنصف خط AC قرار داشته باشد. اگر نقطهٔ وسط پاره‌خط AC را M بنامیم، داریم:

$$M\left(\frac{x_A + x_C}{۲}, \frac{y_A + y_C}{۲}\right) = (۱ , ۲)$$

$$m_{AC} = \frac{۳ - ۱}{۴ - (-۲)} = \frac{۱}{۳} \xrightarrow{\text{شیب خط عمود بر } AC} m' = -۳$$

BD معادلهٔ قطر : $y - ۲ = -۳(x - ۱) \Rightarrow y = -۳x + ۵$

همهٔ نقاط به جز نقطهٔ $(۰ , ۴)$ در معادلهٔ فوق صدق می‌کنند.

در یک بیضی افقی به مرکز $(۳ , ۴)$ طول قطر کوچک ۶ و فاصلهٔ کانونی برابر ۸ می باشد. مختصات یکی از دو سر قطر بزرگ این بیضی کدام است؟

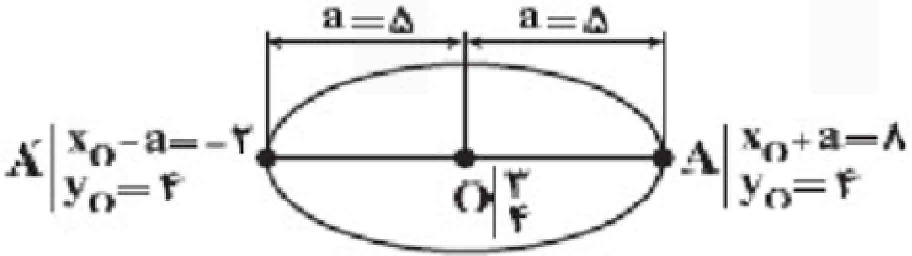
۱) $(۲ , ۴)$ ۲) $(-۴ , ۴)$ ۳) $(-۲ , ۳)$ ۴) $(-۲ , ۴)$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در یک بیضی، طول قطر کوچک و فاصلهٔ کانونی به‌ترتیب برابر $۲b$ و $۲c$ است، بنابراین:

$$۲b \Rightarrow ۶ \Rightarrow b = ۳$$

$$۲c = ۸ \Rightarrow c = ۴$$

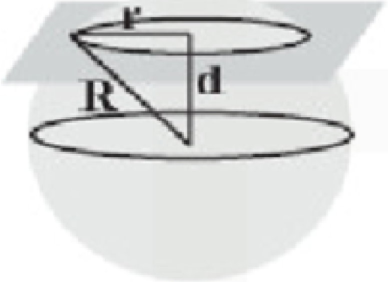
از طرفی در بیضی داریم: $a^۲ = b^۲ + c^۲ \Rightarrow a^۲ = ۹ + ۱۶ = ۲۵ \Rightarrow a = ۵$ حال مختصات دو سر قطر را به دست می‌آوریم:



صفحهٔ $P_۱$ کره‌ای به شعاع ۵ واحد را به گونه‌ای قطع می‌کند که سطح مقطع حاصل حداکثر مساحت را داشته باشد. اگر صفحهٔ $P_۲$ که موازی $P_۱$ است، به فاصلهٔ ۳ واحد از $P_۱$، کره را قطع کند، مساحت سطح مقطع فوق چند واحد مربع است؟

۱) ۸π ۲) ۹π ۳) ۱۶π ۴) ۱۸π

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. شکل مسئله را رسم می‌کنیم:



همان‌طور که از شکل برمی‌آید بین شعاع کره (R) و شعاع دایرهٔ کوچک (r) و فاصلهٔ دو صفحه (d) رابطهٔ فیثاغورس برقرار است.

$$R^۲ = d^۲ + r^۲ \Rightarrow ۵^۲ = ۳^۲ + r^۲ \Rightarrow r = ۴$$

پس مساحت سطح مقطع کوچک‌تر برابر است با:

$$S = \pi r^۲ \Rightarrow S = ۱۶\pi$$

در یک بیضی، قطر بزرگ آن ۳ برابر قطر کوچک آن است، خروج از مرکز بیضی کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$ ۴) $\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. اگر قطر بزرگ بیضی را با $۲a$ و قطر کوچک آن را با $۲b$ نشان دهیم، داریم:

$$۲a = ۳ \times ۲b \Rightarrow a = ۳b \Rightarrow a^۲ = ۹b^۲$$

با توجه به آن‌که در بیضی رابطهٔ $a^۲ = b^۲ + c^۲$ برقرار است، پس:

$$\Rightarrow a^۲ = ۹\left(a^۲ - c^۲\right) \Rightarrow ۸a^۲ = ۹c^۲$$

خروج از مرکز بیضی به‌صورت $e = \frac{c}{a}$ تعریف می‌شود:

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{۸}{۹}} = \frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$$

معادلهٔ دایره‌ای که دو نقطهٔ $(۲\ ,\ ۱)$ و $(۳\ ,\ ۰)$ و سر قطری از آن هستند، کدام است؟

۱) $x^۲ + y^۲ - ۴x = ۳$

۲) $x^۲ - ۴x + y^۲ - ۲y = ۰$

۳) $x^۲ + y^۲ - ۴x - ۲y = -۳$

۴) $x^۲ + y^۲ - ۲y = ۰$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. از آنجا که $A(۱\ ,\ ۲)$ و $B(۳\ ,\ ۰)$ دو سر قطر این دایره هستند، مرکز این دایره وسط پاره‌خط AB و شعاع آن نصف طول AB است، پس:

$$\omega\left(\frac{۳+۱}{۲}, \frac{۰+۲}{۲}\right) = (۲\ ,\ ۱)$$

$$R = \frac{۱}{۲}AB = \frac{۱}{۲}\sqrt{(۳-۱)^۲ + (۰-۲)^۲} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۸} = \sqrt{۲}$$

معادلهٔ دایره : $(x-۲)^۲ + (y-۱)^۲ = ۲$

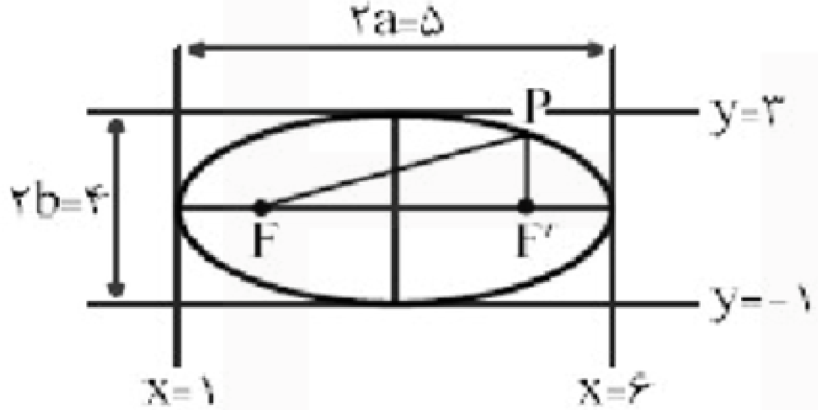
$$\Rightarrow x^۲ - ۴x + ۴ + y^۲ - ۲y + ۱ = ۲$$

$$\Rightarrow x^۲ - ۴x + y^۲ - ۲y = -۳$$

چهار خط به معادله‌های $x = ۱$، $x = ۶$ ، $y = -۱$ و $y = ۳$ بر یک بیضی به کانون‌های F و F' مماس هستند. اگر P نقطه‌ای واقع بر این بیضی باشد، به‌طوری که P، F و F' رأس‌های یک مثلث باشند، محیط این مثلث کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



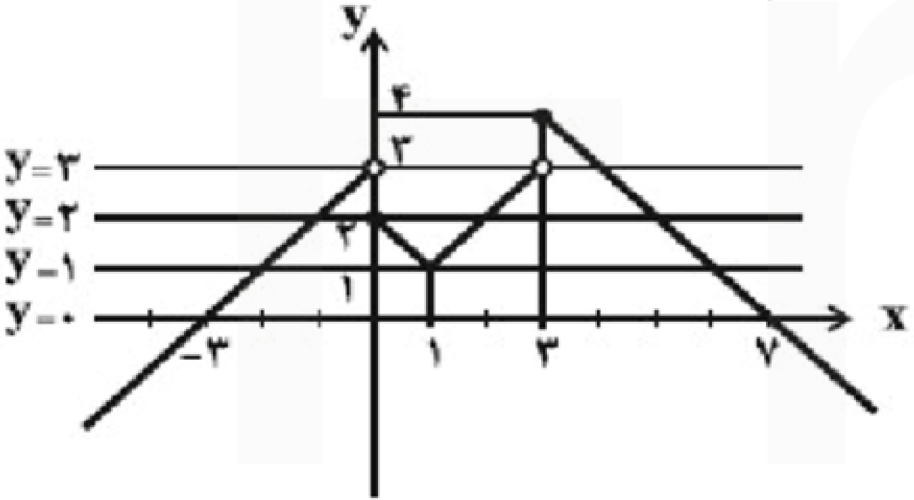
با توجه به شکل بالا، در این بیضی $۲a = ۵$ و $۲b = ۴$ ، پس با توجه به اینکه $a^۲ = b^۲ + c^۲$ داریم $۲c = ۳$. از طرفی محیط مثلث FPF' برابر است با:

$$\underbrace{PF + PF'}_{۲a} + \underbrace{FF'}_{۲c} = ۵ + ۳ = ۸$$

کدام خط، تابع $f(x)=\begin{cases} x+3 & ; x<0 \\ |x-1|+1 & ; 0\leq x<3 \\ 7-x & ; x\geq 3 \end{cases}$ را در تعداد نقاط بیشتری قطع می‌کند؟

۱) $y=0$ ۲) $y=1$ ۳) $y=2$ ۴) $y=3$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا نمودار تابع چند ضابطه‌ای f را رسم می‌کنیم.



خطوط $y=0$، $y=1$ ، $y=2$ و $y=3$ به‌ترتیب نمودار f را در ۲، ۳، ۴ و ۱ نقطه قطع می‌کنند، پس از بین خطوط داده شده، خط $y=2$ در تعداد نقاط بیشتری تابع f را قطع می‌کند.

تابع f همانی، تابع g ثابت و تابع h خطی است. اگر داشته باشیم: $2f(-2)=g(2)$ ، $h(-2)=g(0)+1$ و $h(2)=f(2)+g(3)+1$ مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $h(x)\geq 0$ کدام است؟ (دامنهٔ هر سه تابع، R است.)

۱) $(-\infty,-2]$ ۲) $[0,+\infty)$ ۳) $[4,+\infty)$ ۴) $(-\infty,0]$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

تابع همانی : $f(x)=x \Rightarrow f(-2)=-2,\ f(2)=2$

تابع ثابت : $g(x)=c$

$$\begin{cases} g(x)=c \\ 2f(-2)=g(2) \end{cases} \Rightarrow -4=c$$

تابع خطی : $h(x)=ax+b$

$$\begin{cases} h(-2)=-2a+b=-3 \\ h(2)=2a+b=-1 \end{cases} \Rightarrow a=\frac{1}{2},\ b=-2$$

$$h(x)=\frac{1}{2}x-2$$

$$\xrightarrow{h(x)\geq 0} \frac{1}{2}x-2\geq 0 \Rightarrow x\geq 4$$

به‌ازای چند مقدار صحیح m، نمودار سهمی $y = (m - ۱)x^۲ - x + (۳ - m)$ از ناحیهٔ سوم دستگاه مختصات نمی‌گذرد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. واضح است که دهانهٔ سهمی باید روبه‌بالا باشد $(m - ۱ > ۰)$ در این حالت طول رأس برابر است با $\frac{۱}{۲(m - ۱)}$ که با توجه به شرط قبلی، این مقدار نیز مثبت است، یعنی رأس سهمی در سمت راست محور y ها قرار دارد. بنابراین برای اینکه سهمی از ربع سوم نگذرد، کافی است عرض از مبدأ سهمی نامنفی باشد $(۳ - m \geq ۰)$ بنابراین داریم:

$$\begin{cases} m - ۱ > ۰ \Rightarrow m > ۱ \\ ۳ - m \geq ۰ \Rightarrow m \leq ۳ \end{cases} \Rightarrow ۱ < m \leq ۳ \xrightarrow{m \in Z} m = ۲ \text{ یا } ۲$$

اگر $a = \sqrt[۳]{۳ + ۲\sqrt{۲}} + \sqrt[۳]{۳ - ۲\sqrt{۲}}$ باشد، حاصل $a^۳ - ۳a$ کدام است؟

۱) ۶   ۲) $۴\sqrt{۲}$ ۳) ۸   ۴) $۸\sqrt{۳}$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. طبق اتحاد $(x + y)^۳ = x^۳ + y^۳ + ۳xy(x + y)$ داریم:

$$a^۳ = ۳ + ۲\sqrt{۲} + ۳ - ۲\sqrt{۲} + ۳\left(\sqrt[۳]{۳ + ۲\sqrt{۲}}\sqrt[۳]{۳ - ۲\sqrt{۲}}\right)(a)$$

$$\Rightarrow a^۳ = ۶ + ۳a \Rightarrow a^۳ - ۳a = ۶$$

مقدار x در تساوی $\sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{\sqrt[3]{4}\times 8^{\frac{x}{4}}}{\sqrt{2\sqrt[3]{2}\times 2^{x}}}$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) -۶ ۳) ۳ ۴) -۳

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\frac{2^{\frac{2}{3}}\times 2^{\frac{3x}{4}}}{\sqrt{2^{\frac{4}{3}}\times 2x}} = \sqrt{2^{-3}} \Rightarrow \frac{2^{\frac{2}{3}}\times 2^{\frac{3x}{4}}}{2^{\frac{2}{3}}\times 2^{x}} = 2^{-\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow 2^{-\frac{x}{4}} = 2^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow \frac{-x}{4} = \frac{-3}{2} \Rightarrow x = 6$$

اگر $\operatorname{Sin}x + \operatorname{Cos}x = \frac{\sqrt{6}}{2}$ باشد، حاصل $\tan x + \cot$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\operatorname{Sin}x + \operatorname{Cos}x = \frac{\sqrt{6}}{2} \xrightarrow{\text{توان ۲}} \underbrace{\operatorname{Sin}^2 x + \operatorname{Cos}^2 x}_{1} + 2\operatorname{Sin}x\operatorname{Cos}x = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Sin}x\operatorname{Cos}x = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \tan x + \cot x = \frac{\operatorname{Sin}x}{\operatorname{Cos}x} + \frac{\operatorname{Cos}x}{\operatorname{Sin}x}$$

$$= \frac{\operatorname{Sin}^2 x + \operatorname{Cos}^2 x}{\operatorname{Sin}x\operatorname{Cos}x} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$$

اگر $10m + 8$، $5m + 1$ و $5m - 3$ جملات متوالی یک دنباله هندسی مثبت باشند، معادلهٔ $x^2 - 2mx + m = 0$ درای چه نوع جوابی است؟

۱) مضاعف مثبت
۲) مضاعف منفی
۳) دو جواب متمایز هم‌علامت
۴) دو جواب غیرهم‌علامت

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اگر a، b و c جملات متوالی یک دنبالهٔ هندسی باشند، رابطهٔ $ac = b^2$ برقرار است.

$$\Rightarrow (5m - 3)(10m + 8) = (5m + 1)^2$$

$$50m^2 + 40m - 30m - 24 = 25m^2 + 10m + 1$$

$$\Rightarrow 25m^2 = 25 \Rightarrow m^2 = 1 \Rightarrow m = \pm 1$$

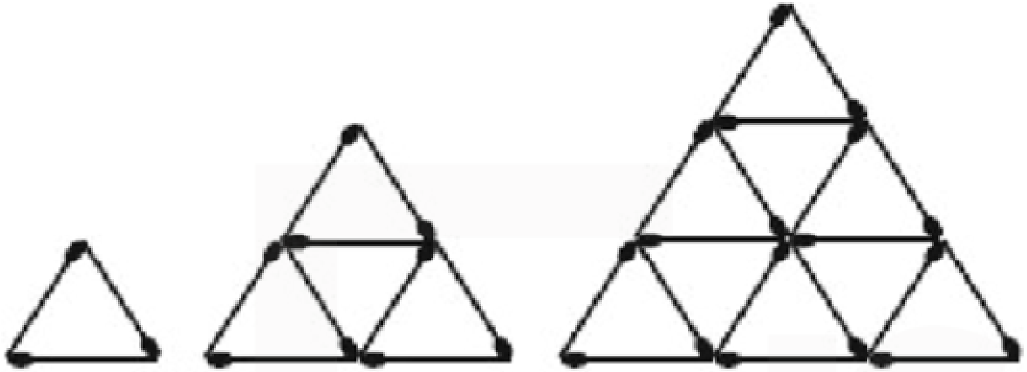
به‌ازی $m = 1$ ریشهٔ مضاعف مثبت برای معادله به دست می‌آید.
$m = -1$ قابل قبول نیست، زیرا جملات دنباله منفی به‌دست می‌آیند:

جملات پایه : $-2, -4, -8$

با توجه به الگوی مقابل، اختلاف تعداد چوب کبریت‌ها و تعداد مثلث‌ها (کوچکترین مثلث ممکن) در مرحلهٔ هشتم کدام است؟

۱) ۴۴ ۲) ۴۰

۳) ۳۶ ۴) ۳۲



(۱) (۲) (۳)

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

تعداد مثلث‌ها : $۱ , ۴ , ۹ ,. . .,\ n^{۲}$

تعداد چوب کبریت‌ها : $(۱) \times ۳,\ (۱ + ۲) \times ۳,\ (۱ + ۲ + ۳) \times ۳,. . .,\ \frac{n(n + ۱)}{۲} \times ۳$

$$\xrightarrow{n = ۸} \begin{cases} \text{تعداد مثلث ها : } ۶۴ \\ \frac{۸(۹)}{۲} \times ۳ = ۱۰۸ : \text{تعداد چوب کبریت ها} \end{cases} \Rightarrow \text{اختلاف} = ۴۴$$

در جعبه‌ای، n کارت سفید، ۳ کارت سیاه و $۳n + ۹$ کارت قرمز دارد. کارتی به تصادف از این جعبه خارج می‌کنیم. احتمال کدام‌یک از پیشامدهای تصادفی زیر، وابسته به n نیست؟ $(n \in N)$

۱) پیشامد سیاه یا قرمز بودن کارت
۲) پیشامد سفید یا قرمز بودن کارت
۳) پیشامد سفید یا سیاه بودن کارت
۴) هیچ‌کدام

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. تعداد کل کارت‌های درون جعبه برابر است با:

$$n(S) = n + ۳ + ۳n + ۹ = ۴n + ۱۲$$

حال تعداد حالات مطلوب هر پیشامد و احتمال آن را حساب می‌کنیم:

«۱» گزینهٔ : $n(A) = ۳ + (۳n + ۹) = ۳n + ۱۲$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{۳n + ۱۲}{۴n + ۱۲} \Rightarrow$$ وابسته به

«۲» گزینهٔ : $n(B) = n + (۳n + ۹) = ۴n + ۹$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{۴n + ۹}{۴n + ۱۲} \Rightarrow$$ وابسته به

«۳» گزینهٔ : $n(C) = n + ۳$

$$\Rightarrow P(C) = \frac{n + ۳}{۴n + ۱۲} = \frac{n + ۳}{۴(n + ۳)} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow n$$ مستقل از

اگر $P(A \cup B) = \frac{۴}{۵}$ و $P(A \cap B) = \frac{P(B)}{۱۰} = \frac{P(A')}{۱۲}$ باشند. مقدار $P(B - A)$ کدام است؟

۱) ۰/۸ ۲) ۰/۲ ۳) ۰/۶ ۴) ۰/۴

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. $P(A \cap B)$ را k فرض می‌کنیم و چنین می‌نویسیم:

$$\frac{P(A')}{۱۲} = \frac{P(B)}{۱۰} = P(A \cap B) = k$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P(A') = ۱۲k \\ P(B) = ۱۰k \end{cases} \Rightarrow P(A) = ۱ - ۱۲k$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\Rightarrow \frac{۴}{۵} = ۱ - ۱۲k + ۱۰k - k$$

$$\Rightarrow \frac{۴}{۵} = ۱ - ۳k \Rightarrow ۳k = ۱ - \frac{۴}{۵}$$

$$\Rightarrow ۳k = \frac{۱}{۵} \Rightarrow k = \frac{۱}{۱۵}$$

$$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = ۱۰\left(\frac{۱}{۱۵}\right) - \frac{۱}{۱۵} = \frac{۹}{۱۵} = \frac{۳}{۵} = ۰/۶$$

اگر احتمال وقوع A یا B برابر ۰/۷۶ و احتمال وقوع A برابر ۰/۵۲ باشد، آن‌گاه احتمال وقوع 'B به شرط وقوع 'A برابر کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به داده‌های مسئله داریم:

$$P(A \cup B) = ۰/۷۶$$
$$P(A) = ۰/۵۲$$

حال به خواستهٔ مسئله می‌پردازیم:

$$P(B' \mid A') = \frac{P(A' \cap B')}{P(A')} = \frac{P((A \cup B)')}{P(A')} = \frac{۱ - P(A \cup B)}{۱ - P(A)}$$
$$= \frac{۱ - ۰/۷۶}{۱ - ۰/۵۲} = \frac{۰/۲۴}{۰/۴۸} = \frac{۱}{۲}$$

اگر احتمال قهرمانی یک تیم فوتبال در لیگ ایتالیا ۰/۷ و امکان قهرمانی تیم دیگری در لیگ ایران ۰/۶ باشد، احتمال این‌که حداقل یکی از این دو تیم در کشور خود قهرمان شوند کدام است؟

۱) ۰/۷۵ ۲) ۰/۸۵ ۳) ۰/۸۸ ۴) ۰/۶۵

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. واضح است که لیگ ایران و ایتالیا ارتباطی به هم ندارند، وقوع قهرمانی هر یک از دو تیم تأثیری بر دیگری نداشته و مستقل‌اند، پس:

A: قهرمانی در لیگ ایتالیا

B: قهرمانی در لیگ ایران

$$P(A \cap B) = P(A).P(B) \Rightarrow P(A \cap B) = ۰/۷ \times ۰/۶ = ۰/۴۲$$

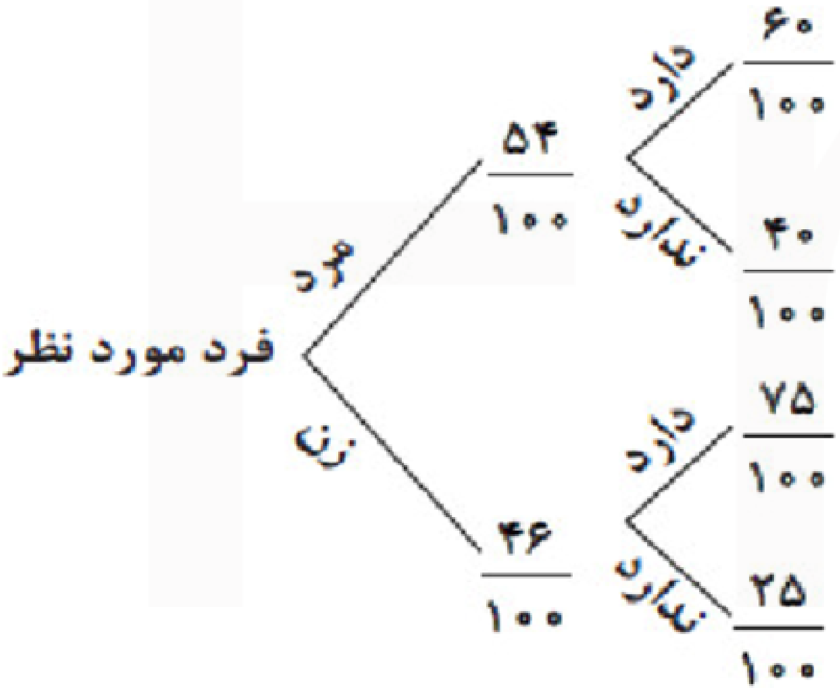
پس احتمال این‌که حداقل یکی از دو تیم فهرمان شوند برابر است با:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$\Rightarrow P(A \cup B) = ۰/۷ + ۰/۶ - ۰/۴۲ = ۱/۳ - ۰/۴۲ = ۰/۸۸$$

در یک شهر ۵۴ درصد جمعیت را مردان تشکیل می‌دهند. فرض کنید ۶۰ درصد مردان و ۷۵ درصد زنان دارای دفترچه سلامت باشند. اگر فردی به تصادف از شهر انتخاب کنیم، با کدام احتمال دارای دفترچه سلامت نیست؟

۱) ۰/۶۶۹ ۲) ۰/۶۹۶ ۳) ۰/۳۰۴ ۴) ۰/۳۳۱

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به نمودار درختی زیر داریم:



احتمال دفترچه سلامت نداشتن: $\frac{۵۴}{۱۰۰} \times \frac{۴۰}{۱۰۰} + \frac{۴۶}{۱۰۰} \times \frac{۲۵}{۱۰۰} = ۰/۳۳۱$