احتمال آنکه محمد در کنکور سال ۹۸ پذیرفته شود $\frac{۱}{۵}$ است و احتمال آنکه در آزمون‌های قلم‌چی شرکت کند $\frac{۱}{۲}$ است. اگر او در آزمون‌های قلم‌چی شرکت کند با احتمال $\frac{۱}{۳}$ در کنوکور پذیرفته می‌شود. با چه احتمالی او در آزمون‌های قلم‌چی شرکت می‌کند یا در کنکور ۹۸ پذیرفته می‌شود؟

۱) $\frac{۸}{۱۵}$ ۲) $\frac{۱۷}{۳۰}$ ۳) $\frac{۷}{۱۰}$ ۴) $\frac{۳۱}{۶۰}$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اگر A پیشامد قبولی در کنکور و B پیشامد شرکت در آزمون‌های قلم‌چی باشد، داریم:

$$P(A)=\frac{۱}{۵}, P(B)=\frac{۱}{۲}, P(A \mid B)=\frac{۱}{۳}$$

$$P(A \mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \Rightarrow \frac{۱}{۳}=\frac{P(A\cap B)}{\frac{۱}{۲}} \Rightarrow P(A\cap B)=\frac{۱}{۶}$$

ما حاصل $P(A\cap B)$ را می‌خواهیم:

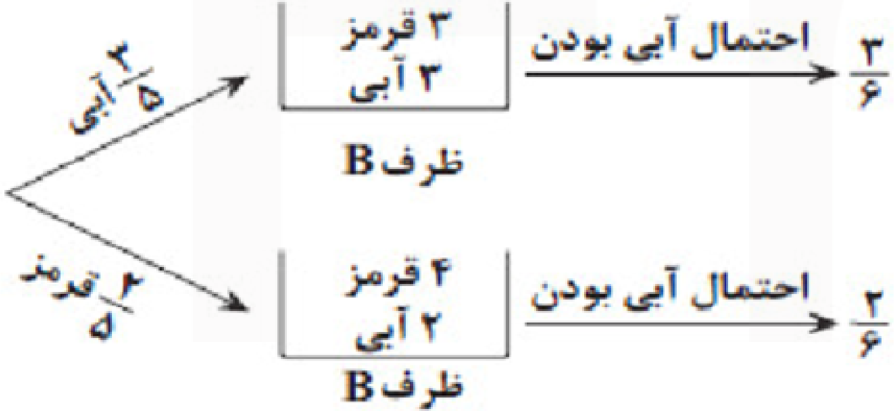
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$=\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۶}=\frac{۶+۱۵-۵}{۳۰}=\frac{۱۶}{۳۰}=\frac{۸}{۱۵}$$

از کیسهٔ A که شامل ۳ مهرهٔ آبی و ۲ مهرهٔ قرمز است، یک مهره به تصادف خارج و در کیسهٔ B که شال ۳ مهرهٔ قرمز و ۲ مهرهٔ آبی است قرار می‌دهیم و از کیسهٔ B یک مهره خارج می‌کنیم. احتمال آن‌که این مهره آبی باشد، چقدر است؟

۱) $\frac{۲}{۵}$
۲) $\frac{۱۳}{۳۰}$
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) $\frac{۲}{۳}$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مهرهٔ انتخابی از جعبهٔ A، به احتمال $\frac{۳}{۵}$ آبی و به احتمال $\frac{۲}{۵}$ قرمز است:



$$\Rightarrow P(\text{آبی}) = \frac{۳}{۵} \times \frac{۳}{۶} + \frac{۲}{۵} \times \frac{۲}{۶} = \frac{۹+۴}{۳۰} = \frac{۱۳}{۳۰}$$

می‌دانیم که رمز چهار رقمی یک کارت اعتباری بانکی با ارقام متمایز ۵ و ۴ و ۲ و ۱ ساخته شده و مضرب ۶ است. در وارد کردن رمز به صورت تصادفی، احتمال آنکه رمز در همان مرتبهٔ اول درست وارد شود، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲۰}$ ۲) $\frac{۵}{۱۲}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۱۲}$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. جمع ارقام $۱ + ۲ + ۴ + ۵ = ۱۲$ است و بر ۳ بخش‌پذیر است. پس اگر عدد ۴ رقمی ساخته شده زوج باشد، مضرب ۶ نیز خواهد بود. بنابراین یکان این رمز باید یکی از اعداد ۲ یا ۴ باشد:

$$n(S) = ۳ \times ۱ \times ۲ = ۱۲$$

پس احتمال این‌که در دفعهٔ اول رمز را درست وارد کنیم $\frac{۱}{۱۲}$ است.

سه تاس سالم با رنگ‌های آبی، قرمز و سبز پشت سر هم می‌اندازیم. اگر بدانیم اعداد رو شده متوالی‌اند، در این صورت احتمال آن‌که بین اعداد رو شده رابطهٔ «آبی $<$ قرمز» برقرار باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $\frac{۳}{۸}$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. برای اینکه عددهای ظاهر شده در پرتاب سه تاس متوالی باشند، باید به صورت (۳ و ۲ و ۱) و یا (۵ و ۴ و ۳) و یا (۶ و ۵ و ۴) باشند. هر کدام از این حالات نیز به !۳ حالت می‌توانند جابه‌جا شوند، پس $n(B) = ۴ \times ۳! = ۲۴$ می‌باشد.

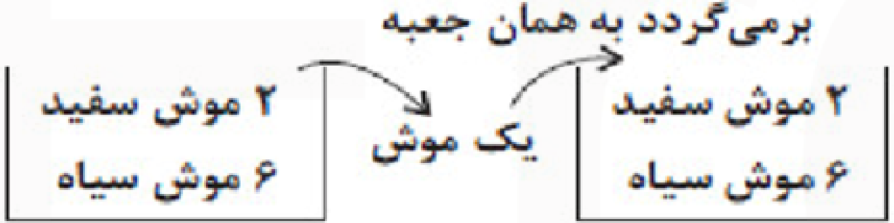
در هر یک از چهار حالت فوق، فقط در یک صورت عدد تاس قرمز بیشتر از سبز و سبز بیشتر از آبی است، لذا $n(A \cap B) = ۴$ می‌باشد، در نتیجه داریم:

$$P(A \mid B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{۴}{۲۴} \Rightarrow P(A \mid B) = \frac{۱}{۶}$$

جعبه‌ای شامل ۲ موش سفید و ۶ موش سیاه است. موشی را به تصادف از ان خارج کرده و پس از مشاهده رنگ آن، به جعبه برمی‌گردانیم و مجدداً موشی از آن خارح می‌کنیم. احتمال اینکه فقط یک بار موش سیاه بیرون آمده باشد، چقدر است؟

۱) $\frac{۳}{۸}$　　۲) $\frac{۱۵}{۱۶}$　　۳) $\frac{۳}{۴}$　　۴) $\frac{۳}{۱۶}$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در اجرای این آزمایش می‌خواهیم فقط یک بار موش سیاه بیرون آمده باشد، پس:



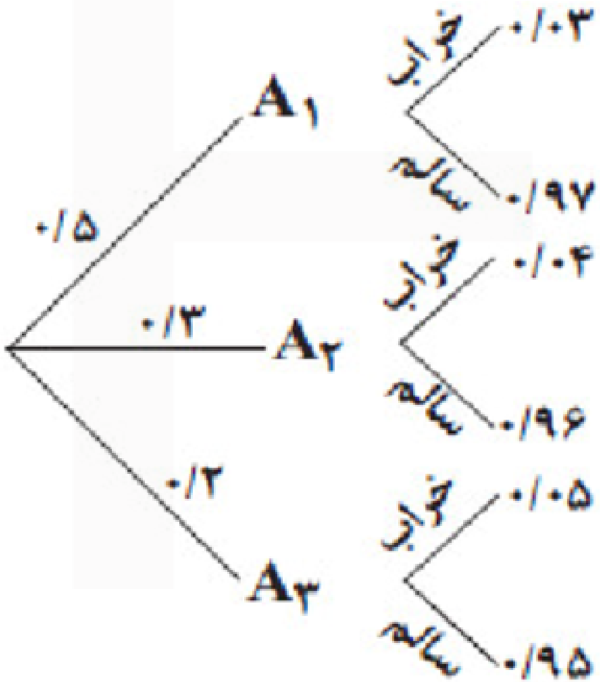
$$P = \underbrace{\frac{۲}{۸}}_{\text{اولی سفید}} \times \underbrace{\frac{۶}{۸}}_{\text{دومی سیاه}} + \underbrace{\frac{۶}{۸}}_{\text{اولی سیاه}} \times \underbrace{\frac{۲}{۸}}_{\text{دومی سفید}}$$

$$= \frac{۱۲}{۶۴} + \frac{۱۲}{۶۴} = \frac{۲۴}{۶۴} = \frac{۳}{۸}$$

سه ماشین A_1، A_2 و A_3 هر کدام به‌ترتیب ۰/۵، ۰/۳ و ۰/۲ از قطعات یک ربات را می‌سازند و می‌دانیم درصد قطعات خراب تولید شده توسط این ماشین‌ها به‌ترتیب ۳%، ۴% و ۵% می‌باشند. اگر یک قطعه از ربات را به تصادف برداریم، احتمال آنکه این قطعه خراب باشد چقدر است؟

۱) ۰/۰۲۷ ۲) ۰/۰۳۷ ۳) ۰/۰۴۷ ۴) ۰/۰۴۹

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با رسم نمودار درختی می‌بینیم:



که در این سؤال احتمال قطعهٔ خراب خواسته شده است.

$$(۰/۵\times ۰/۰۳)+(۰/۳\times ۰/۰۴)+(۰/۲\times ۰/۰۵)=۰/۰۳۷$$

در پرتاب دو سکه با هم، چند پیشامد با پیشامد «هر دو رو» ناسازگارند؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۶ ۳) ۸ ۴) ۷

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. فضای نمونه‌ای به‌صورت $S = \{$(پ ، پ) ، (پ ، ر) ، (ر ، پ) ، (ر ، ر)$\}$ و پیشامد مورد نظر باید فاقد (ر ، ر) باشد. پس زیرمجموعه‌ای از S فاقد (ر ، ر) می خواهیم که $۲^{۳} = ۸$ حالت دارد.

پدر و مادر و ۴ فرزند یک خانواده به تصادف در یک صف می‌ایستند. چقدر احتمال دارد نه مادر در دو انتهای صف باشند و نه پسر؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{2}{5}$ ۴) $\frac{3}{5}$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. فضای نمونه‌ای، کل جایگشت‌های ۶ نفر است که برابر است با: $n(S) = 6 = 6!$ برای تعیین تعداد عضوهای پیشامد، ۶ جایگاه در نظر می‌گیریم. ابتدا و انتهای صف باید با فرزندان پر شود که یک از ۴ حالت و دیگری ۳ حالت خواهد داشت. پدر و مادر و ۲ فرزند دیگر بین آن‌ها هستند که به !۴ حالت جابه‌جا می‌شوند:

$$n(A) = \underline{\ 4\ }\ \underbrace{\underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}}_{4!}\ \underline{\ 3\ }$$

در نتیجه:

$$P(A) = \frac{4 \times 3 \times 4!}{6!} = \frac{2}{5}$$

از بین اعداد طبیعی چهاررقمی، عددی به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که حاصلضرب ارقام عدد انتخاب شده بر ۳ بخش‌پذیر نباشد، کدام است؟

۱) ۰/۱۴۴ ۲) ۰/۳۸۴ ۳) ۰/۶۴۸ ۴) ۰/۶۸۶ $\times \frac{۱}{۳}$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. تعداد کل اعداد طبیعی چهاررقمی برابر است با: $n(S) = ۹ \times ۱۰ \times ۱۰ \times ۱۰$ برای آن‌که حاصل‌ضرب ارقام عدد انتخابی بر ۳ بخش‌پذیری نباشد، عدد مورد نظر باید فاقد ارقام ۰ و ۳ و ۶ و ۹ باشد. پس تعداد حالات مطلوب برابر است با تعداد اعداد طبیعی چهاررقمی که با استفاده از ارقام ۱، ۲، ۴، ۵، ۷، ۸ ساخته می‌شود:

$$n(A) = ۶ \times ۶ \times ۶ \times ۶$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{۶ \times ۶ \times ۶ \times ۶}{۹ \times ۱۰ \times ۱۰ \times ۱۰} = \frac{۲ \times ۲ \times ۶ \times ۶}{۱۰ \times ۱۰ \times ۱۰} = ۰/۱۴۴$$

جعبه‌ای شامل ۶ گوی آبی و ۴ گوی سفید است. گوی‌ها را یکی‌یکی از جعبه خارج می‌کنیم. چقدر احتمال دارد گوی سوم و پنجم همرنگ باشند؟

۱) $\frac{7}{15}$ ۲) $\frac{2}{15}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{2}{3}$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. چون نتیجهٔ بقیهٔ گوی‌ها مهم نیست، پس آن‌ها را در نظر نمی‌گیریم. بنابراین گوی سوم و پنجم را مانند گوی اول و دوم در نظر می‌گیریم و احتمال هم‌رنگ بودن آن‌ها را به دست می‌آوریم:

$$\frac{6}{10} \times \frac{5}{9} + \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{30 + 12}{90} = \frac{42}{90} = \frac{7}{15}$$

دو تاس را پرتاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد که جمع اعداد رو شده حداقل ۸ و اختلاف آن‌ها حداکثر ۱ باشد؟

۱) $\frac{۲}{۹}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۵}{۳۶}$ ۴) $\frac{۷}{۳۶}$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. حالاتی را که جمع اعداد رو شده حداقل ۸ باشد می‌نویسیم:

$$A = \{\overbrace{(۲,۶),(۶,۲),(۵,۳),(۳,۵),(۴,۴)}^{\text{جمع ۸}},\overbrace{(۳,۶),(۶,۳),(۵,۴),(۴,۵)}^{\text{جمع ۹}},$$

$$\overbrace{(۴,۶),(۶,۴),(۵,۵)}^{\text{جمع ۱۰}},\overbrace{(۵,۶),(۶,۵)}^{\text{جمع ۱۱}},\overbrace{(۶,۶)}^{\text{جمع ۱۲}}\}$$

از بین حالات بالا آنهایی را که اختلاف اعداد رو شده صفر یا یک می‌باشند انتخاب می‌کنیم.

$$B = \{\underbrace{(۴,۴),(۵,۵),(۶,۶)}_{\text{اختلاف صفر}},\underbrace{(۴,۵),(۵,۴),(۵,۶),(۶,۵)}_{\text{اختلاف ۱}}\}$$

بنابراین احتمال خواستهٔ سؤال برابر است با:

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{۷}{۳۶}$$

درون جعبه‌ای پنج مهرهٔ سفید با شماره‌های ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و چهار مهرهٔ سیاه با شماره‌های ۱، ۲، ۳، و ۴ وجود دارد. دو مهره بدون رؤیت به تصادف خارج می‌کنیم. اگر مجموع شماره‌های خارج شده ۶ باشد، با کدام احتمال هر دو شمارهٔ زوج است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۴}{۷}$ ۳) $\frac{۸}{۱۳}$ ۴) $\frac{۹}{۱۷}$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر مهره های سفید را به‌صورت «۵، ۴، ۳، ۲، ۱» و مهره‌های سیاه را به‌صورت «چهار، سه، دو، یک» نشان دهمی، آن‌گاه:

$$B = \text{مجموع } ۶ = \{(۱ , ۵) , (۵ , \text{یک}) , (۲ , ۴) , (۴ , \text{دو}) , (\text{دو} , \text{چهار}) , (۲ , \text{چهار}) \text{ و } (۲ , \text{سه})\}$$

$$P(A \mid B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{۴}{۷}$$

از هر کدام از کلمات season و paris یک حرف به تصادف انتخاب می‌کنیم. با کدام احتمال حروف منتخب یکسان هستند؟

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۱۲ ۳) ۰/۱۸ ۴) ۰/۰۸

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. دو حالت مختلف وجود دارد:

۱) حرف یکسان s باشد: $\frac{۲}{۶} \times \frac{۱}{۵} = \frac{۲}{۳۰}$

۲) حرف یکسان a باشد: $\frac{۱}{۶} \times \frac{۱}{۵} = \frac{۱}{۳۰}$

پس جواب برابر است با: $\frac{۲}{۳۰} + \frac{۱}{۳۰} = \frac{۳}{۳۰} = ۰/۱$

اگر برای ساخت یک عدد دو رقمی، دهگان از مجموعهٔ $\{0, 1, 2, \ldots, 5\}$ و یکان از مجموعه $\{1, 2, \ldots, 8\}$ انتخاب شود، احتمال آن که عدد ساخته شده بر ۳ بخش‌پذیر باشد، کدام است؟

۱) $\frac{7}{24}$ ۲) $\frac{7}{20}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{4}$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. می‌دانیم که رقم دهگان نمی‌تواند صفر باشد، بنابراین:

$$n(S) = 5 \times 8 = 40$$

تمام اعدادی را که بر ۳ بخش‌پذیر هستند از دو مجموعهٔ مورد نظر می‌نویسیم:

$$A = \{12, 15, 18, 21, 24, 27, 33, 36, 42, 45, 48, 51, 54, 57\}$$

$$\Rightarrow n(A) = 14$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{14}{40} = \frac{7}{20}$$

هر یک از اعداد طبیعی کوچکتر از ۱۲ را روی یک کارت نوشته و به تصادف کارتی از بین آن‌ها خارج می‌کنیم. اگر مضرب ۳ باشد، ۳ سکه و اگر مضرب ۴ باشد، ۴ سکه پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال دقیقاً ۳ سکه رو می‌آید؟

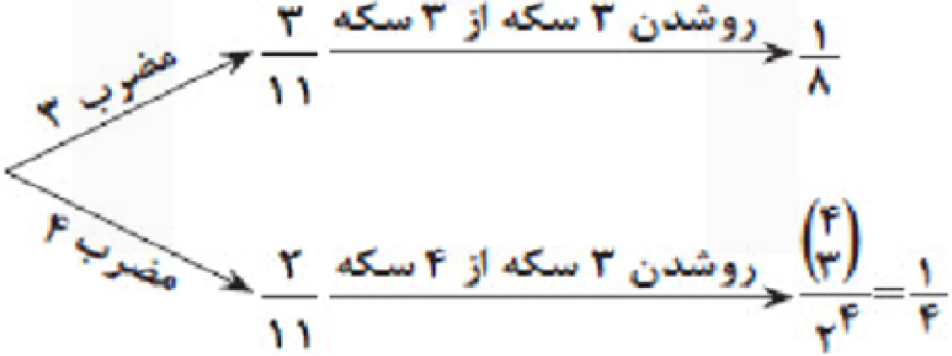
۱) $\frac{۷}{۸۸}$　　۲) $\frac{۱۳}{۱۲۰}$　　۳) $\frac{۱۱}{۴۸}$　　۴) $\frac{۱۳}{۴۸}$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$S = \{۱ , ۲ ,. .., \ ۱۱\} \Rightarrow n(S) = ۱۱$$

$$\text{مضارب ۳} \Rightarrow A = \{۳ , ۶ , ۹\} \Rightarrow P(A) = \frac{۳}{۱۱}$$

$$\text{مضارب ۴} \Rightarrow B = (۴ , ۸) \Rightarrow P(B) = \frac{۳}{۱۱}$$



$$\Rightarrow \frac{۳}{۱۱} \times \frac{۱}{۸} + \frac{۲}{۱۱} \times \frac{۱}{۴} = \frac{۳}{۸۸} + \frac{۴}{۸۸} = \frac{۷}{۸۸}$$

تاس سالمی را پرتاب می کنیم. اگر ۱ بیاید دو سکه، اگر ۲ یا ۳ بیاید سه سکه و اگر بزرگتر از ۳ بیاید چهار سکه پرتاب می‌کنیم، احتمال آن‌که حداقل یک سکه رو بیاید کدام است؟

۱) $\frac{۲۵}{۳۴}$ ۲) $\frac{۳۸}{۶۳}$ ۳) $\frac{۸۵}{۹۶}$ ۴) $\frac{۴}{۹}$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$P\left(B_۱\right)=\frac{۱}{۶}$ احتمال آمدن ۱

$P\left(B_۲\right)=\frac{۲}{۶}$ احتمال آمدن ۲ یا ۳

$P\left(B_۳\right)=\frac{۳}{۶}$ احتمال آمدن ۴ یا ۵ یا ۶

$$\Rightarrow P\left(\text{حداقل یک رو}\right)=P(A)=P\left(B_۱\right)P\left(A\mid B_۱\right)+P\left(B_۲\right)P\left(A\mid B_۲\right)$$

$$+P\left(B_۳\right)P\left(A\mid B_۳\right)=\frac{۱}{۶}\times\frac{۳}{۴}+\frac{۲}{۶}\times\frac{۷}{۸}+\frac{۳}{۶}\times\frac{۱۵}{۱۶}$$

$$=\frac{۱}{۸}+\frac{۷}{۲۴}+\frac{۱۵}{۳۲}=\frac{۸۵}{۹۶}$$

کلاس A، ۵ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی و ۳ دانش‌آموز رشتهٔ تجربی و کلاس B، ۳ دانش‌آموز رشتهٔ تجربی دارد. اگر از هر کدام از این کلاس‌ها ۲ دانش‌آموز به تصادف انتخاب شود، احتمال این‌که تمام دانش‌آموزان انتخاب شده رشتهٔ یکسانی نداشته باشند، کدام است؟

۱) $\frac{۲۳}{۱۹۶}$ ۲) $\frac{۴}{۴۹}$ ۳) $\frac{۴۵}{۴۹}$ ۴) $\frac{۱۷۳}{۱۹۶}$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. اگر پیشامد این که هر چهار دانش‌آموز انتخاب شده، از یک رشته باشند A بنامیم داریم:

$$P(A)=\overbrace{\frac{\binom{۵}{۲}}{\binom{۸}{۲}}\times\frac{\binom{۴}{۲}}{\binom{۷}{۲}}}^{\text{احتمال آن‌که دانش‌آموزان رشتهٔ ریاضی باشند.}}+\overbrace{\frac{\binom{۳}{۲}}{\binom{۸}{۲}}\times\frac{\binom{۳}{۲}}{\binom{۷}{۲}}}^{\text{احتمال آن‌که دانش آموزان رشتهٔ تجربی باشند.}}=\frac{۶۹}{۲۸\times۲۱}=\frac{۲۳}{۱۹۶}$$

حال احتمال حالتی را که در آن چهار دانش‌آموز انتخابی از یک رشته نیستند، به دست می‌آوریم:

$$P(A')=۱-P(A)=۱-\frac{۲۳}{۱۹۶}=\frac{۱۷۳}{۱۹۶}$$

درخانواده‌ای با ۴ فرند، احتمال آنکه فرزند سوم پسر باشد یا همهٔ فرزندان هم‌جنس باشند، چقدر است؟

۱) $\frac{۵}{۸}$ ۲) $\frac{۹}{۱۶}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱۱}{۱۶}$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$n(S) = ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ = ۱۶$

اگر پیشامد پسر بودن فرزند سوم را A و پیشامد هم‌جنس بودن همهٔ فرزندان را B بنامیم، داریم:

$n(A) = ۲ \times ۲ \times ۱ \times ۲ = ۸$

$B = \{(\text{پ پ پ پ}), (\text{د د د د})\} \Rightarrow n(B) = ۲$

حال $P(A \cup B)$ را می‌خواهیم، می‌دانیم که $A \cap B = \{(\text{پ پ پ پ})\}$ است.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= \frac{۸}{۱۶} + \frac{۲}{۱۶} - \frac{۱}{۱۶} = \frac{۹}{۱۶}$

در خانواده‌ای با ۶ فرزند چقدر احتمال دارد تعداد دختران از تعداد پسران بیشتر باشد؟

۱) $\frac{۱۱}{۶۴}$ ۲) $\frac{۱۱}{۳۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۹}{۳۲}$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. تعداد اعضای فضای نمونه‌ای:

$n(S) = ۲^۶ = ۶۴$

تعداد حالاتی که تعداد دختران و پسران برابرند، برابر با $\binom{۶}{۳} = ۲۰$ می‌باشد. در $۶۴ - ۲۰ = ۴۴$ حالت تعداد دختران و پسران برابر نمی‌باشد که در نصف این حالات تعداد دختران از پسران بیشتر است:

$n(A) = ۲۲$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۲۲}{۶۴} = \frac{۱۱}{۳۲}$$

می‌خواهیم از بین ۶ دانش‌آموز رشتهٔ تجربی و ۴ دانش‌آموز رشته ریاضی، سه نفر به تصادف انتخاب کنیم. احتمال اینکه حداقل یک نفر از رشتهٔ ریاضی انتخاب شود، کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۶}$ ۲) $\frac{۴}{۵}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. برای راحتی کار، متمم خواستهٔ صورت سوال را حساب می‌کنیم:

$$n(S)=\binom{۱۰}{۳}=\frac{۱۰\times ۹\times ۸}{۳\times ۲}=۱۲۰$$

$A =$ حداقل یک نفر از رشته ریاضی باشد

$A' =$ هیچ کدام از سه نفر از رشته ریاضی نباشند $=\binom{۶}{۳}=۲۰$

$$P(A')=\frac{n(A')}{n(S)}=\frac{۲۰}{۱۲۰}=\frac{۱}{۶}\rightarrow P(A)=\frac{۵}{۶}$$

سه تاس سالم و یکسان را با هم پرتاب می‌کنیم. احتمال آن‌که سه عدد رو شده یک دنبالهٔ حسابی با قدر نسبت ۲ تشکیل دهند، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳۶}$ ۲) $\frac{۱}{۱۸}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۹}$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$n(S)=۶^{۳}=۲۱۶$$

$$n(A)=\begin{cases} \text{۱ و ۳ و ۵} \xrightarrow{\text{تعداد حالت}} ۳!=۶ \\ \text{۲ و ۴ و ۶} \xrightarrow{\text{تعداد حالت}} ۳!=۶ \end{cases} \rightarrow n(A)=۱۲$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۲}{۲۱۶}=\frac{۱}{۱۸}$$

سه تاس سالم را با هم پرتاب می‌کنیم. احتمال این که فقط تاس اول و دوم ۳ بیاید، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳۶}$ ۲) $\frac{۵}{۲۱۶}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۲۵}{۲۱۶}$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. تاس اول و دوم، هر کدام یک حالت و تاس سوم، پنج حالت دارد:

$$\underset{۱}{\underline{\{۳\}}} \times \underset{۱}{\underline{\{۳\}}} \times \underset{\text{۵ حالت}}{\underline{\{۱, ۲, ۴, ۵, ۶\}}}$$

$$n(A) = ۵$$

$$n(S) = ۶^{۳} = ۲۱۶$$

$$P(A) = \frac{۵}{۲۱۶}$$

در پرتاب دو تاس سالم اگر هیچ کدام ۵ نیامده باشد، با کدام احتمال مجموع اعداد رو شده بر ۸ بخش‌پذیر است؟

۱) $\frac{۱}{۱۲}$ ۱) $\frac{۵}{۳۶}$ ۳) $\frac{۳}{۲۵}$ ۴) $\frac{۴}{۲۵}$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. هر تاس ۵ حالت د ارد. در نتیجه $n(S) = ۵ \times ۵ = ۲۵$، حالت‌هایی را که جمع دو تاس ۸ می‌شود، می‌نویسیم:

$$A = \{(۴\,,\,۴)\,,\,(۲\,,\,۶)\,,\,(۶\,,\,۲)\}$$

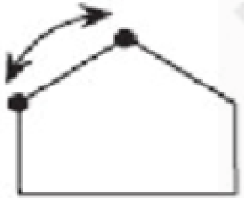
$$n(A) = ۳$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۳}{۲۵}$$

دو رأس از یک پنج ضلعی را به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که دو رأس مجار هم باشند، کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۵}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



فضای نمونه‌ای، انتخاب دو رأس از بین پنج رأس است. برای که دو رأس مجاور هم باشند باید هر دو سر یک ضلع انتخاب شود. در واقع یک ضلع از پنج ضلع را انتخاب می‌کنیم. پس:

$$n(S) = \binom{۵}{۲} = ۱۰$$

$$n(A) = \binom{۵}{۱} = ۵$$

$$n(A) = \frac{۵}{۱۰} = \frac{۱}{۲}$$

در پرتاب یک تاس سالم، احتمال اول بودن عدد رو شده چقدر بیشتر از احتمال فرد بودن عدد رو شده است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) صفر

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. از آنجایی که تعداد فرد در یک تاس (۱، ۳ و ۵) با تعدد اعداد اول (۲، ۳ و ۵) برابر است، پس احتمال هر دو حالت برابر است.

اگر $\lim\limits_{x \to ۲} \dfrac{\sqrt{ax+۱}-۳}{۴-x^۲} = b$ باشد، مقدار $a - ۱۸b$ کدام است؟ $(b \in R)$

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۷

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چون حد مخرج کسر وقتی $x \to ۲$ برابر صفر است، حد صورت کسر هم باید صفر باشد (تا حاصل حد متناهی باشد):

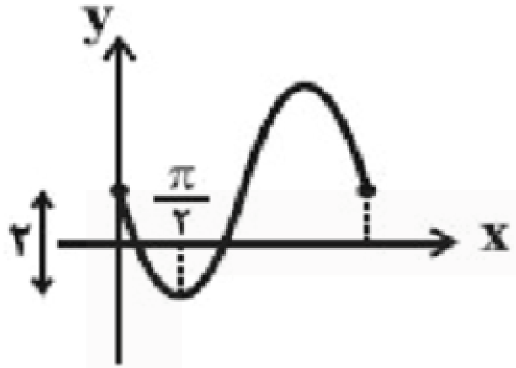
$$\Rightarrow \lim_{x \to ۲}\left(\sqrt{ax+۱}-۳\right) = ۰ \Rightarrow \sqrt{۲a+۱}-۳ = ۰ \Rightarrow a = ۴$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to ۲} \frac{\sqrt{۴x+۱}-۳}{۴-x^۲} \times \frac{\sqrt{۴x+۱}+۳}{\underbrace{\sqrt{۴x+۱}+۳}_{۶}}$$

$$= \lim_{x \to ۲} \frac{۴x+۱-۹}{\left(x^۲-۴\right)} = \lim_{x \to ۲} \frac{۴(x-۲)}{۶(x-۲)(x+۲)} = -\frac{۱}{۶} \Rightarrow b = -\frac{۱}{۶}$$

$$\Rightarrow a - ۱۸b = ۴ - ۱۸\left(-\frac{۱}{۶}\right) = ۴ + ۳ = ۷$$

شکل مقابل بخشی از نمودار تابع $f(x) = ۱ - b\,\mathrm{Sin}\,x$ است.



مقدار $f\left(\frac{۹۴\pi}{۳}\right)$ کدام است؟

۱) $۱ - \sqrt{۳}$ ۲) $۲ - \sqrt{۳}$

۳) $۱ + \sqrt{۳}$ ۴) $۲ + \sqrt{۳}$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = ۱ - b\,\mathrm{Sin}\,x \xrightarrow{x = ۰} y = f(۰) = ۱$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{۲}\right) = ۱ - b(۱) = -۱ \Rightarrow b = ۲$$

$$\Rightarrow f(x) = ۱ - ۲\,\mathrm{Sin}\,x$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{۹۴\pi}{۳}\right) = ۱ - ۲\,\mathrm{Sin}\left(\frac{۹۴\pi}{۳}\right) = ۱ - ۲\,\mathrm{Sin}\left(\frac{۹۳\pi + \pi}{۳}\right)$$

$$= ۱ - ۲\,\mathrm{Sin}\left(۳۱\pi + \frac{\pi}{۳}\right) = ۱ - ۲\,\mathrm{Sin}\left(\pi + \frac{\pi}{۳}\right) = ۱ + ۲\,\mathrm{Sin}\frac{\pi}{۳} = ۱ + ۲\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right) = ۱ + \sqrt{۳}$$

اگر $5^{(\log x)-1} - 5^{(\log x)-1} - 3^{(\log x)-1} - 3^{\log x}\,5$ باشد، حاصل $\log_{\sqrt{3}}(x-19)$ کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۲ ۳) ۸ ۴) ۴

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$5^{\log x} + 5^{(\log x)-1} = 3^{(\log x)+1} + 3^{(\log x)-1}$$

$$\Rightarrow 5^{\log x}\left(1+\frac{1}{5}\right) = 3^{\log x}\left(3+\frac{1}{3}\right) \Rightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^{\log x} = \frac{\frac{10}{3}}{\frac{6}{5}}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^{\log x} = \frac{25}{9} \Rightarrow \log x = 2 \Rightarrow x = 100$$

$$\Rightarrow \log_{\sqrt{3}}(x-19) = \log_{\sqrt{3}} 81 = \log_{3^{\frac{1}{2}}} 3^{4} = 8\log_{3} 3 = 8$$

اگر $f(x) = ۲ + \sqrt{x - ۱}$ و $g(x) = ۱ - ۳x$ باشد، ضابطهٔ تابع $gof^{-۱}$ کدام است؟

۱) $-۳x^۲ + ۱۲x - ۱۴$

۲) $x^۲ - ۶x + ۸$

۳) $-۲x^۲ - ۵x + ۱۰$

۴) $۴x^۲ - ۶x + ۳$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. راه حل اول:

$$y = f(x) = ۲ + \sqrt{x - ۱} \Rightarrow y - ۲ = \sqrt{x - ۱}$$

$$\Rightarrow (y - ۲)^۲ = x - ۱ \Rightarrow x = (y - ۲)^۲ + ۱$$

$$\Rightarrow f^{-۱}(x) = (x - ۲)^۲ + ۱$$

$$\Rightarrow gof^{-۱}(x) = g\left(f^{-۱}(x)\right) = ۱ - ۳\left((x - ۲)^۲ + ۱\right) = -۳x^۲ + ۱۲x - ۱۴$$

راه حل دوم: از عددگذاری استفاده می‌کنیم:

$$f(۱) = ۲ \Rightarrow f^{-۱}(۲) = ۱$$

$$\Rightarrow g\left(f^{-۱}(۲)\right) = g(۱) = -۲$$

با جای‌گذاری $x = ۲$، فقط در گزینهٔ «۱» مقدار ۲- حاصل می‌شود.

محل برخورد وارون تابع $f(x) = ۲x - |x| + ۳$ با محور y ها از نیمساز ربع اول و سوم چقدر فاصله دارد؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۴}$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = ۲x - |x| + ۳ = \begin{cases} ۳x + ۳ & ; x < ۰ \\ x + ۳ & ; x \geq ۰ \end{cases}$$

عرض نقطهٔ برخورد تابع $f^{-۱}$ و محور yها، با طول نقطهٔ برخورد تابع f و محور x ها برابر است.بنابراین داریم:

$$\Rightarrow f(x) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} ۳x + ۳ = ۰ \Rightarrow x = -۱ < ۰ \\ x + ۳ = ۰ \Rightarrow x = -۳ \not\geq \text{غ.ق.ق} \end{cases}$$

بنابراین محل برخود تابع $f^{-۱}$ و محور yها نقطهٔ $(۰ , -۱)$ است. فاصلهٔ این نقطه از خط $y = x$ برابر است با:

$$\frac{|(-۱) - (۰)|}{\sqrt{(۱)^۲ + (-۱)^۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$