معرفی، بازه، متناهی و نامتناهی، متمم، تعداد عضو اجتماع

این‌ها را از قدیم به یاد دارید؟

$\mathbb{Z}$ مجموعهٔ اعداد صحیح	$\mathbb{W}$ مجموعهٔ اعداد حسابی	$\mathbb{N}$ مجموعهٔ اعداد طبیعی
$\mathbb{R}$ مجموعهٔ اعداد حقیقی	$\mathbb{Q}'$ مجموعهٔ اعداد گنگ	$\mathbb{Q}$ مجموعهٔ اعداد گویا

و می‌دانید که $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ و نیز $\mathbb{Q}' \subseteq \mathbb{R}$.

چندتا یادآوری هم داریم:

در اعداد گنگ (اعضای $\mathbb{Q}'$) نمایش اعشاری داریم که به صورت غیرتکراری تا بی‌نهایت می‌رود. این عددها می‌توانند مثلاً $\sqrt{۲}$، π، $\log ۲$ یا $\sin ۱۰^\circ$ باشند!

راستی بین هر دو عدد گویای متمایز، بی‌شمار عدد گویا و بی‌شمار عدد گنگ وجود دارد. پس هر قسمت از $\mathbb{Q}$ (و نیز هر قسمت از $\mathbb{Q}'$) نامتناهی است.

عدد $-۲/۴$ عضو چندتا از مجموعه‌های مقابل است؟ $\mathbb{R} \cap \mathbb{Q}, \mathbb{Q} - \mathbb{Q}', \mathbb{Q} - \mathbb{Z}, \mathbb{N} - \mathbb{Q}'$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

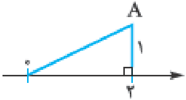
گزینهٔ «۳» اول به این مجموعه‌ها نگاه کنید: $\mathbb{N} - \mathbb{Q}'$ یعنی اعداد طبیعی که گنگ نیستند. خب می‌شود تمام اعداد طبیعی اما $-۲/۴$ توی آن نیست.

$\mathbb{Q} - \mathbb{Z}$ می‌شود اعداد گویایی که صحیح نیستند و $-۲/۴$ جزء آن‌ها است.

$\mathbb{Q} - \mathbb{Q}'$ یعنی اعداد گویای غیرگنگ که شامل تمام اعداد گویا از جمله $-۲/۴$ است.

$\mathbb{R} \cap \mathbb{Q}$ هم می‌شود خود $\mathbb{Q}$ و $-۲/۴$ عضوش هست. خلاصه، $-۲/۴$ عضو ۳ تا از این مجموعه‌ها است.

اشاره اعداد گنگ به شکل $\sqrt{k}$ (k عددی طبیعی است که مربع کامل نیست!) را می‌توان به کمک رابطهٔ فیثاغورس روی محور اعداد نشان داد. مثلاً $\sqrt{۵}$:



حالا اگر به مرکز O و شعاع $\sqrt{۵}$ کمان بزنیم، محور را در $x = \sqrt{۵}$ قطع می‌کند.

بازه

زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ که شامل تمام اعداد حقیقی بین دو عدد باشد را یک بازه می‌نامیم.

نمایش بازه	نامساوی	محوری	توصیف
$[a,b)$	$a \le x < b$	محوری 	تمام اعداد حقیقی بیشتر یا مساوی a و کم‌تر از b

اشاره از هر طرف مساوی داشت، آن طرف را با $\le$ می‌نویسیم و کروشه می‌گذاریم. اگر مساوی‌اش نبود، با $<$ می‌نویسیم و پرانتز می‌گذاریم.

? در $[-۲,۳)\cap[-۱,۴]-\{۰\}$ چند عدد صحیح هست؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

= گزینهٔ «۳» بازه‌ها را روی محور می‌آوریم:

اشتراک این‌ها $[-۱,۳)$ است؛ حالا اگر منهای $\{۰\}$ کنیم به شکل زیر درمی‌آید:

که در آن ۳ عدد صحیح هست: -۱، ۱، ۲

اشاره دقت دارید که دیگر یک بازه نیست بلکه حداقل اجتماع دوتا بازه است.

گاهی بازه‌ها را برای نشان‌دادن تمام اعداد حقیقی بیشتر از a یا کم‌تر از b به کار می‌بریم.

در این حالت بازه‌ها به شکل $(a,+\infty)$ یا $(-\infty,b)$ هستند. باز هم می‌توانیم از بیان‌های مختلف برویم:

نمایش بازه	نامساوی	محوری	توصیف
$[a,+\infty)$	$x \ge a$		اعداد حقیقی بیشتر یا مساوی a

? چندتا از اعداد مقابل عضو $[-۱,۲)$ هستند؟ $\frac{۷}{۹},\sqrt{۵},۲,-۱$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

= گزینهٔ «۲» اعداد ۲ و $\sqrt{۵}$ در این بازه نیستند اما -۱ و $\frac{۷}{۹}$ را دارد. پس ۲ تا از اعداد در این بازه هستند.

? در رابطهٔ $X \subseteq [-۱,۴)$ به جای X، چندتا از مجموعه‌های زیر می‌تواند قرار گیرد؟

$$-۱,\varnothing,\{\varnothing\},\{-۱,۴\},[-۱,۴],(-۱,۴),\{-\frac{\sqrt{۲}}{۲},\sqrt{۳}\}$$

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۶

گزینهٔ «۲» -1 که اصلاً مجموعه نیست. $\varnothing$ همیشه زیرمجموعهٔ تمام مجموعه‌ها است. $\{\varnothing\}$ تهی نیست، مجموعه‌ای یک‌عضوی با عضو $\varnothing$ است؛ پس این هم نبود. در $\{-1,4\}$ و $[-1,4]$ خود عددها را داریم که در بازهٔ ما نیست؛ پس این مجموعه هم نبود.

فقط $(-1,4)$ و $\{-\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{3}\}$ هستند که هر دو زیرمجموعهٔ $[-1,4)$ قرار دارند؛ پس با $\varnothing$، ۳ تا از این مجموعه‌ها را می‌شود قرار داد.

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

مجموعهٔ متناهی	مجموعهٔ نامتناهی
تعداد اعضای آن عددی حسابی است. با حوصله و وقت کافی می‌توان تمام اعضا را شمرد. تمام زیرمجموعه‌هایش نیز متناهی‌اند. درختان، سلول‌ها، انسان‌ها، اتم‌ها و ... با این‌که خیلی زیادند اما متناهی‌اند.	تعداد اعضایش از هر عددی بیشتر است. اعضای آن تا بی‌نهایت می‌روند (مثلاً $\mathbb{Z}$ یا $\mathbb{N}$ یا مضارب ۵)، یا اعضای آن به هم پیوسته‌اند (مثلاً دایره‌ها یا خط‌ها یا ...). راستی تمام مجموعه‌های مهم که در اول درس دیدید و تمام بازه‌ها نامتناهی‌اند.

این‌ها را هم بشنوید:

اگر $A\subseteq B$ باشد، از نامتناهی‌بودن A می‌فهمیم B (که از آن بیشتر و بزرگ‌تر است) هم نامتناهی است.

اگر $A\subseteq B$ باشد، از متناهی‌بودن B می‌فهمیم A نیز (که از آن کم‌تر است) متناهی است.

اگر A و B نامتناهی باشند، $A\bigcup B$ قطعاً نامتناهی است اما در مورد $A\bigcap B$ و $A-B$ و ... نمی‌شود چیزی گفت؛ یعنی ممکن است متناهی هم بشوند.

کدام وجود ندارد؟

۱) دو مجموعهٔ نامتناهی که اشتراکشان متناهی است.

۲) دو مجموعهٔ نامتناهی که تفاضل‌های $A-B$ و $B-A$ هر دو نامتناهی‌اند.

۳) مجموعهٔ نامتناهی که تمام زیرمجموعه‌هایش متناهی‌اند.

۴) دو مجموعهٔ نامتناهی که یکی زیرمجموعهٔ دیگری است.

گزینهٔ «۳» در ۱ مثلاً $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Q}'$ را در نظر بگیرید که اشتراکشان متناهی است.

در ۲ به عنوان مثال $\mathbb{N}\bigcup\{0\}$ و $\mathbb{N}\bigcup\{-1\}$ را ببینید. تفاضل‌هایشان $\{0\}$ و $\{-1\}$ است.

در ۴ هم $\mathbb{N}$ و $\mathbb{Z}$ مثال‌ها هستند!

اما ۳ وجود ندارد؛ یعنی تمام زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ نامتناهی نمی‌توانند متناهی باشند.

متمم و مجموعهٔ مرجع

U را مجموعهٔ مرجع می‌نامیم و تمام مجموعه‌های مورد بحث، زیرمجموعهٔ آن هستند.

حالا $U-A$ را متمم A می‌نامیم و با A' یا $\overline{A}$ نشان می‌دهیم.

لازم به تأکید نیست که $U'=\varnothing$ ، $(\varnothing)'=U$ ، $(A')'=A$ ، $A\cap A'=\varnothing$ و $A\cup A'=U$.

و به خاطر بسپارید که:

$$A\subseteq B \Leftrightarrow B'\subset A'$$

$$(A\cup B)'=A'\cap B'$$

$$(A\cap B)'=A'\cup B'$$

$$A'-B'=B-A$$

$$A-B=A\cap B'=A-(A\cap B)$$

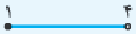
اگر $A=\{۱,۲,۳,-۱\}$ مجموعهٔ مرجع باشد، متمم مجموعهٔ $B=\{x \mid x^۳=x\}$ نسبت به A چندعضوی است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

گزینهٔ «۲» مجموعهٔ B شامل اعضایی از A است که مکعب آن‌ها با خودشان برابر باشد یعنی ۱ و ۱−، پس $A-B$ می‌شود $\{۲,۳\}$ که دو عضو دارد.

متمم مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۳\}$ نسبت به مرجع $U=[۱,۴)$ از اجتماع حداقل چند بازه ساخته شده است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

گزینهٔ «۳» $A' =$  $-\{۱,۲,۳\}=$ 

که از اجتماع حداقل ۳ بازه به صورت $(۱,۲)\cup(۲,۳)\cup(۳,۴)$ ساخته شده است.

کدام درست است؟

۱) اگر U نامتناهی باشد، از بین سه مجموعهٔ جدا از هم A، B و C حداکثر دوتا نامتناهی‌اند.

۲) اگر U نامتناهی و A نیز نامتناهی باشد، A' متناهی است.

۳) اگر U نامتناهی و A متناهی باشد، A' حتماً نامتناهی است.

۴) اگر U نامتناهی باشد، بین A و A' فقط یکی نامتناهی است.

گزینهٔ «۳» وقتی U نامتناهی است، از هر عددی بیشتر عضو دارد اما A تعداد محدودی دارد، پس $U-A$ یعنی A' نیز نامتناهی می‌شود.

اما دلیل نادرستی بقیهٔ گزینه‌ها:

در ۴ گفته «بین A و A' فقط یکی نامتناهی است»؛ $U=\mathbb{N}$ ، $A=E$ و $A'=O$ را در نظر بگیرید. اعداد طبیعی نامتناهی‌اند، اعداد زوج و اعداد فرد نیز نامتناهی‌اند، پس ۴ غلط است. این ۲ را هم رد می‌کند. برای ۱ هم به مجموعهٔ مرجع $\mathbb{N}$ و سه زیرمجموعهٔ صفحهٔ بعد نگاه کنید:

$$A = \{۱,۴,۷,۱۰,\dots\}$$
$$B = \{۲,۵,۸,\dots\}$$
$$C = \{۳,۶,۹,\dots\}$$

هر سه نامتناهی‌اند و اشتراک ندارند.

اشاره استفاده از دو قانون زیر، خیلی وقت‌ها کارمان را ساده می‌کند:

$$\left.\begin{matrix} A\cup(A\cap B)=A \\ A\cap(A\cup B)=A \end{matrix}\right\} \text{قانون جذب}$$

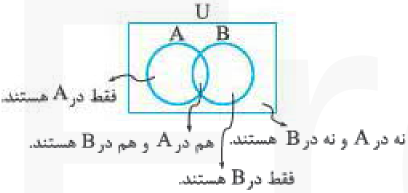
$$\left.\begin{matrix} A\cap(A'\cup B)=A\cap B \\ A\cup(A'\cap B)=A\cup B \end{matrix}\right\} \text{قانون شبه جذب}$$

تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه

می‌دانیم که:
$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

پس تعداد اعضایی که در A یا B هستند می‌شود: تعداد A به‌علاوهٔ تعداد B، منهای تعداد مشترک.

این نمودار را ببینید:



پس برای شمردن اعضایی که فقط در A هستند می‌گوییم:
$$n(A\cap B')=n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$$

و برای اعضایی که فقط در یکی از آن‌ها هستند داریم:
$$n(A\cup B)-n(A\cap B) \text{ یا } n(A-B)+n(B-A)$$

همچنین برای تعداد اعضایی که در هیچ‌کدام هستند (نه در A و نه در B هستند)، می‌نویسیم:
$$n(A'\cap B')=n(U)-n(A\cup B)$$

? در یک کلاس ۳۵ نفری ۱۷ نفر عضو تیم والیبال و ۲۰ نفر عضو تیم فوتبال هستند. کدام نادرست است؟

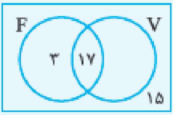
۱) حداکثر ۱۵ نفر عضو هیچ تیمی نیستند.

۲) اگر ۳ نفر عضو هیچ تیمی نباشند، آن‌گاه ۵ نفر عضو هر دو تیم هستند.

۳) اگر ۶ نفر عضو هر دو تیم باشند، آن‌گاه ۲۵ نفر عضو فقط یک تیم هستند.

۴) اگر ۱۰ نفر فقط عضو تیم فوتبال باشند، آن‌گاه ۲۷ نفر حداکثر عضو یک تیم هستند.

گزینهٔ «۴» در این‌جور مسئله‌ها همیشه رسم نمودار ون بهتر است. در ۱ می‌خواهیم



تعداد افرادی که عضو هیچ تیمی نیستند زیاد شود پس تا حد امکان اعضای دو تیم را مشترک می‌گیریم. پس همهٔ ۱۷ عضو والیبال را در فوتبال هم قرار می‌دهیم و کلاً فقط ۲۰ نفر ورزش می‌کنند. پس حداکثر $۱۵ = ۲۰ - ۳۵$ نفر عضو هیچ تیمی نیستند.

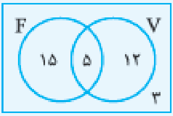
در ۲ قرار است ۳ نفر عضو هیچ تیمی نباشند پس $۳۲ = ۳ - ۳۵$ نفر عضو حداقل یک تیم هستند؛ اما جمع تعداد اعضای دو تیم $۱۷ + ۲۰$ یعنی ۳۷ است پس ۵ نفر مشترک داریم.

این را هم ببینید:

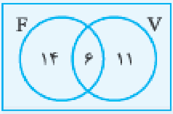
$$n(F \cup V) = n(F) + n(V) - n(F \cap V) \Rightarrow ۳۲ = ۲۰ + ۱۷ - x$$

$$\Rightarrow x = ۳۷ - ۳۲ = ۵$$

این شکلی است:

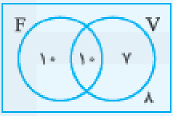


در ۳ قرار است ۶ نفر عضو هر دو تیم باشند پس $۱۴ = ۶ - ۲۰$ نفر فقط در فوتبال و $۱۱ = ۶ - ۱۷$ نفر فقط در والیبال هستند:



پس $۲۵ = ۱۱ + ۱۴$ نفر فقط در یک تیم هستند.

اشاره در این حالت $۲۰ + ۷ - ۶ = ۳۱ = n(F \cup V)$ نفر عضو حداقل یک تیم هستند و بنابراین ۴ نفر عضو هیچ تیمی نیستند.



در ۴ ۱۰ نفر فقط عضو تیم فوتبال‌اند. پس ۱۰ عضو دیگر تیم فوتبال با والیبال مشترک‌اند، پس ۲۷ نفر ورزش می‌کنند و عضو حداقل یک تیم هستند.

اشاره در این صورت $۸ = ۲۷ - ۳۵$ نفر عضو هیچ تیمی نیستند.

پس ۴ درست نبود، چون در حالت ۴ باید بگوید $۲۵ = ۱۰ - ۳۵$ نفر عضو حداکثر یک تیم هستند. (همه به‌جز مشترک‌ها)

اشاره تعداد اعضای اجتماع سه مجموعه هم برابر است با:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

? از مهمانان یک جشن تولد، ۱۲ نفر قهوه و ۱۷ نفر شربت و ۱۱ نفر نوشابه خورده‌اند. ۴ نفر دو نوع از نوشیدنی‌ها را امتحان کردند و یک نفر از هر ۳ نوع خورده است. چند نفر حداقل یک نوع نوشیدنی را خورده‌اند؟

۱) ۳۵　　۲) ۲۹　　۳) ۳۷　　۴) ۳۱

= گزینهٔ «۳» حداقل یک نوع یعنی $A \cup B \cup C$. پس داریم:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) \underbrace{- n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C)}_{\text{روی هم ۴ نفر}}$$

$$+ n(A \cap B \cap C) = ۱۲ + ۱۷ + ۱۱ - ۴ + ۱ = ۴۰ - ۴ + ۱ = ۳۷$$

دنباله‌های حسابی و هندسی

اول این جدول را ببینید و با هم مقایسه کنید:

دنبالهٔ حسابی	دنبالهٔ هندسی
اختلاف هر دو جملهٔ متوالی، مقدار ثابتی است. $d = a_۲ - a_۱ = a_۳ - a_۲ = ...$ $a_۱ \xrightarrow{+d} a_۲ \xrightarrow{+d} a_۳ \xrightarrow{+d} a_۴ ...$	نسبت هر دو جملهٔ متوالی، مقدار ثابتی است. $r = \frac{a_۲}{a_۱} = \frac{a_۳}{a_۲} = ...$ $a_۱ \xrightarrow{\times r} a_۲ \xrightarrow{\times r} a_۳ \xrightarrow{\times r} a_۴ ...$
اگر $d > ۰$ صعودی است و برای $d < ۰$ نزولی است.	در حالت $r < ۰$ یکنوا نیست. اگر $a_۱ > ۰$ و $r > ۱$ صعودی است و اگر $a_۱ > ۰$ و $۰ < r < ۱$ نزولی است.
ویژگی واسطه (شرط جملات متوالی): $۲B = A + C$	شرط جملات متوالی: $B^۲ = AC$
جملهٔ عمومی: $a_n = a_۱ + (n-۱)d$	جملهٔ عمومی: $a_n = a_۱ r^{n-۱}$

حالا بیایید با هم چند مثال حل کنیم:

؟ در یک دنبالهٔ حسابی، جملهٔ سوم ۲۱ تا کم‌تر از جملهٔ دهم است. اگر جملهٔ چهارم ۲ باشد، جملهٔ دوازدهم چند برابر جملهٔ پنجم است؟

۱) ۷/۲ ۲) ۶/۲ ۳) ۵/۲ ۴) ۴/۲

= گزینهٔ «۳» سؤال، این‌ها را داده:

$$\begin{cases} a_{۱۰} - a_۳ = ۲۱ \\ a_۴ = ۲ \end{cases}$$

با استفاده از جملهٔ عمومی داریم:

$$\begin{cases} (a_۱ + ۹d) - (a_۱ + ۲d) = ۷d = ۲۱ \Rightarrow d = ۳ \\ a_۱ + ۳d = ۲ \xrightarrow{d=۳} a_۱ + ۹ = ۲ \Rightarrow a_۱ = -۷ \end{cases}$$

حالا می‌توانیم جملات پنجم و دوازدهم را پیدا کنیم:

$$a_۵ = a_۱ + ۴d = -۷ + ۴(۳) = ۵$$

$$a_{۱۲} = a_۱ + ۱۱d = -۷ + ۱۱(۳) = ۲۶$$

و نسبت آن‌ها می‌شود:

$$\frac{a_{۱۲}}{a_۵} = \frac{۲۶}{۵} = ۵/۲$$

در دنبالهٔ حسابی $2x+1, 3x-2, 5x+3, ...$ اولین جملهٔ کم‌تر از -100 کدام است؟

۱) جملهٔ هشتم ۲) جملهٔ نهم ۳) جملهٔ دهم ۴) جملهٔ یازدهم

گزینهٔ «۲» اول x را پیدا کنیم. شرط سه جملهٔ متوالی این است که: $2B=A+C$

$$2(3x-2)=2x+1+5x+3 \Rightarrow 6x-4=7x+4 \Rightarrow x=-8$$

پس دنبالهٔ حسابی به صورت روبه‌رو است: $\xrightarrow{x=-8} -15, -26, -37, ...$

بنابراین جملهٔ اول و قدرنسبت به ترتیب $a_1=-15$ و $d=-11$ هستند و داریم:

$$a_n=a_1+(n-1)d=-15+(n-1)(-11)=-11n+11-15=-11n-4$$

و اولین جملهٔ کم‌تر از -100 را پیدا می‌کنیم:

$$a_n<-100 \Rightarrow -11n-4<-100 \Rightarrow 96<11n \Rightarrow n>\frac{96}{11}\simeq 8/7$$

پس اولین جملهٔ کم‌تر از -100 می‌شود جملهٔ نهم.

چند عدد طبیعی زوج سه‌رقمی مضرب ۷ وجود دارد؟

۱) ۶۳ ۲) ۶۴ ۳) ۶۵ ۴) ۶۶

گزینهٔ «۲» اعداد طبیعی زوج مضرب ۷ این‌ها هستند: $14, 28, ...$

پس $a_1=14$ و $d=14$ و جملهٔ عمومی آن‌ها می‌شود: $a_n=14n$

حالا دنبال جملات سه‌رقمی هستیم: $100\le 14n<1000$

$$\Rightarrow \frac{100}{14}\le n<\frac{1000}{14} \Rightarrow 7/1\le n<71/5 \Rightarrow n=8,9,...,71$$

$$\Rightarrow \text{تعداد جملات}=71-8+1=64$$

چند مثال از دنبالهٔ هندسی و ترکیب دنباله‌های حسابی و هندسی ببینید:

در دنبالهٔ هندسی با جملات $x+1, 2x-1, 4x+2, ...$. جملهٔ پنجم چند برابر جملهٔ هشتم است؟

۱) $-\frac{64}{27}$ ۲) $-\frac{27}{64}$ ۳) $-\frac{9}{4}$ ۴) $-\frac{4}{9}$

گزینهٔ «۲» اول شرط جملات متوالی را بنویسیم:

$$B^2=AC \Rightarrow (2x-1)^2=(x+1)(4x+2)$$

$$\Rightarrow 4x^2-4x+1=4x^2+6x+2 \Rightarrow 10x=-1 \Rightarrow x=-\frac{1}{10}$$

پس جملات به ترتیب عبارت‌اند از: $\frac{9}{10}, \frac{-12}{10}, \frac{16}{10}, ...$

و قدرنسبت می‌شود:

$$r=\frac{\frac{-12}{10}}{\frac{9}{10}}=\frac{\frac{16}{10}}{\frac{-12}{10}}=\frac{-4}{3}$$

پس نسبت جملهٔ پنجم به هشتم می‌شود:

$$\frac{a_5}{a_8}=\frac{a_1r^4}{a_1r^7}=\frac{1}{r^3}=\frac{1}{(\frac{-4}{3})^3}=\frac{1}{\frac{-64}{27}}=\frac{-27}{64}$$

بین اعداد $2\sqrt{3}$ و ۱۶۲، چند عدد باید بنویسیم تا کل اعداد، دنباله‌های هندسی با قدرنسبت $\sqrt{3}$ بسازند؟

۱) شش ۲) هفت ۳) هشت ۴) نه

گزینهٔ «۱» قرار است این‌طوری شود: $\underbrace{2\sqrt{3}, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, 162}_{\text{جمله } x+2}$

از طرفی می‌دانیم قدرنسبت $\sqrt{3}$ است، پس: $a_{x+2} = a_1 r^{x+1}$

$$162 = 2\sqrt{3} \times \sqrt{3}^{x+1} \Rightarrow \frac{162}{2} = \sqrt{3}^{x+2} \Rightarrow 81 = 3^4 = \sqrt{3}^8 \Rightarrow x = 6$$

جمله‌های دوم و پنجم و سیزدهم از دنباله‌ای حسابی، خود دنباله‌ای هندسی می‌سازند. جملهٔ اول دنبالهٔ حسابی چند برابر قدرنسبت آن است؟

۱) $\frac{1}{5}$ ۲) $\frac{2}{5}$ ۳) $\frac{3}{5}$ ۴) $\frac{4}{5}$

گزینهٔ «۴» جمله‌های دوم و پنجم و سیزدهم دنبالهٔ حسابی به ترتیب $a_1 + d$ و $a_1 + 4d$ و $a_1 + 12d$ هستند.

سؤال گفته این‌ها دنبالهٔ هندسی می‌سازند. پس: $B^2 = AC$

$$\Rightarrow (a_1 + 4d)^2 = (a_1 + d)(a_1 + 12d)$$

$$\Rightarrow a_1^2 + 8a_1 d + 16d^2 = a_1^2 + 13a_1 d + 12d^2 \Rightarrow 4d^2 = 5a_1 d \Rightarrow a_1 = \frac{4}{5}d$$

اشاره دنبالهٔ هندسی را هم ببینید:

$$\xrightarrow{d=\frac{5}{4}a_1} a_1 + d = \frac{9}{4}a_1 \text{ و } a_1 + 4d = 6a_1 \text{ و } a_1 + 12d = 16a_1$$

پس: $q = \frac{16a_1}{6a_1} = \frac{6a_1}{\frac{9}{4}a_1} = \frac{8}{3}$

گاه به خاطر می‌سپارند که اگر جمله‌های a_r و a_s و a_t از دنبالهٔ حسابی، تشکیل دنبالهٔ هندسی بدهند داریم: $\text{قدرنسبت دنبالهٔ هندسی} = \frac{t-s}{s-r}$

البته این فرمول در حالت کلی برای هر سه جملهٔ متوالی دنبالهٔ هندسی برقرار است.

$$\text{قدرنسبت دنبالهٔ هندسی} = \frac{C-B}{B-A} = \frac{\text{اختلاف دومی و سومی}}{\text{اختلاف اولی و دومی}}$$

الگوهای اشکال هندسی

فرض کنید شکل‌ها به دنبال هم در چند مرحله به ما داده شده است و می‌خواهیم قانونی برای این شکل‌ها پیدا کنیم. اول باید ببینیم هر شکل نسبت به قبلی چه تغییری داشته؟ کدام قسمت‌ها ثابت‌اند و کدام قسمت‌ها افزایش می‌یابند؟ چه‌قدر افزایش می‌یابند؟

؟ در شکل‌های زیر تعداد نقاط مرحلهٔ بیستم کدام است؟

(۱) (۲) (۳) (۴)

۱) ۶۰ ۲) ۶۲ ۳) ۶۴ ۴) ۵۸

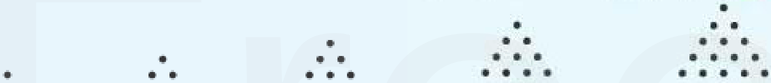
گزینهٔ «۲» دو نقطهٔ چپ و راست ثابت‌اند و در هر مرحله، ۳تا نقطه به قبلی اضافه می‌شود.

شمارهٔ مرحله	۱	۲	۳	۴
تعداد نقاط	$۲+۳$	$۲+۲\times۳$	$۲+۳\times۳$	$۲+۴\times۳$

پس تعداد نقاط در مرحله nاُم، $۲+۳n$ است و در مرحلهٔ بیستم می‌شود $۲+۳\times۲۰=۶۲$.

اشاره هر وقت شکل جدید نسبت به قبلی kتا بیشتر شود، الگو به صورت «$kn+\cdots$» است. یعنی یک عبارت درجه‌اول است که در آن ضریب n برابر k خواهد بود.

؟ در شکل‌های زیر، تعداد نقاط مرحلهٔ بیستم چند برابر تعداد نقاط مرحلهٔ نهم است؟



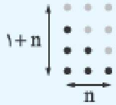
(۱) (۲) (۳) (۴) (۵)

۱) $\frac{۱۴}{۵}$ ۲) $\frac{۱۴}{۳}$ ۳) $\frac{۷}{۵}$ ۴) $\frac{۷}{۳}$

گزینهٔ «۲» اول ببینیم در هر مرحله، به مرحله قبلی چندتا اضافه شده؟

مرحله	۱	۲	۳	۴	۵
تعداد نقاط	۱	$۱+۲$	$۱+۲+۳$	$۱+۲+۳+۴$	$۱+۲+۳+۴+۵$

میزان افزایش ثابت نیست، پس این الگو خطی نیست. کتاب درسی سعی می‌کند با ساختن یک شکل جدید، مجموع $۱+۲+\cdots$ را به دست آورد. این‌جوری:



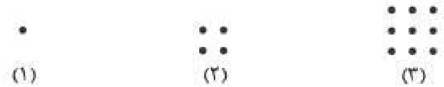
اگر دوتا از این شکل‌ها را روی هم قرار دهیم یک آرایش مستطیلی به ابعاد $n+۱$ و n داریم پس تعداد نقطه‌ها در هر شکل برابر است با: $۱+۲+\cdots+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$

اشاره این را حفظ کنید.

پس در سؤال خودمان در شکل بیستم و نهم به ترتیب $\frac{۲۰(۲۱)}{۲}=۲۱۰$ و $\frac{۹(۱۰)}{۲}=۴۵$ نقطه داریم و نسبت آن‌ها می‌شود:

$$\frac{۲۱۰}{۴۵}\xrightarrow[\div۳]{\div۳}=\frac{۷۰}{۱۵}\xrightarrow[\div۵]{\div۵}=\frac{۱۴}{۳}$$

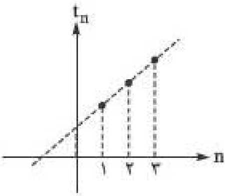
اشاره اگر در شکل الگو، مربع شطرنجی دارید الگوی تعداد نقاط آن به صورت $n^۲$ است.



... $a_n = n^۲$

انواع الگوها

الف) الگوی خطی



هر الگو به شکل $t_n = an + b$ را الگوی خطی می‌نامیم. در الگوی خطی مقدار افزایش در هر مرحله برابر مقدار ثابت a است. نمودار الگوی خطی در واقع همان نمودار خط $y = ax + b$ که نقاط با طول طبیعی انتخاب شده‌اند.

ب) الگوی درجه‌دوم

این الگوها به شکل $t_n = an^۲ + bn + c$ هستند. در الگوهای درجه‌دوم مقدار افزایش جملات ثابت نیست اما خود افزایش‌ها، به اندازه ثابتی زیاد می‌شوند. جملهٔ سختی بود! مثال ببینید:

الف ۱ , ۴ , ۷ , ۱۰
+۳ +۳ +۳

خطی ⇐ افزایش ثابت

ب ۱ , ۴ , ۹ , ۱۶ , ...
+۳ +۵ +۷

افزایش‌ها ثابت نیست.
پس خطی نیست.

⇐ ۱ , ۴ , ۹ , ۱۶
+۳ +۵ +۷
+۲ +۲

افزایشِ افزایش‌ها ثابت شد!
پس درجه‌دوم است.

پ ۱ , ۳ , ۶ , ۱۱
خطی‌نیست: +۲ +۳ +۵
درجه‌دوم هم نیست: +۱ +۲

اشاره پس در الگوی درجه‌دوم، افزایش‌ها الگوی خطی دارند.

اگر تشخیص دادیم که یک الگو درجه‌دوم است، برای نوشتن قانون کلی آن دو راه داریم.

الف روش عادی: $t_n = an^۲ + bn + c$ را در نظر بگیریم و ۳تا مقدار آن را کنترل کنیم.

ب روش ابتکاری: اگر سه جملهٔ اول را بدانیم (معمولاً همین‌طور است.) می‌نویسیم:

$$t_n = A(n-۱)(n-۲) + B(n-۱)(n-۳) + C(n-۲)(n-۳)$$

حالا $n = ۱$ و $n = ۲$ و $n = ۳$ را قرار می‌دهیم و A و B و C به دست می‌آیند.

؟ **در الگوی درجه‌دوم به شکل ...,۱,۵,۱۲ جملهٔ یازدهم کدام است؟**

۱) ۱۷۳ ۲) ۱۷۴ ۳) ۱۷۵ ۴) ۱۷۶

گزینهٔ «۴» **راه‌حل اول** در $t_n = an^2 + bn + c$ قرار می‌دهیم:

$$t_1 = a(1)^2 + b(1) + c = 1$$
$$t_2 = a(2)^2 + b(2) + c = 5 \quad \Rightarrow \begin{cases} a+b+c=1 \\ 4a+2b+c=5 \\ 9a+3b+c=12 \end{cases}$$
$$t_3 = a(3)^2 + b(3) + c = 12$$

نترسید، هر معادله را منهای قبلی کنید تا cها بروند:

$$\left.\begin{matrix} 3a+b=4 \ \text{:دومی منهای اولی} \\ 5a+b=7 \ \text{:سومی منهای دومی} \end{matrix}\right\} \xrightarrow{-} 2a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{جای‌گذاری}} b = \frac{-1}{2} \xrightarrow{\text{در اولی}} c = 0$$

پس این دنباله به صورت $t_n = \frac{3}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$ است و جملهٔ یازدهم می‌شود:

$$t_{11} = \frac{3}{2}(11)^2 - \frac{11}{2} = \frac{3(121)-11}{2} = \frac{363-11}{2} = \frac{352}{2} = 176$$

راه‌حل دوم قرار شد بنویسیم:

$$t_n = A(n-1)(n-2) + B(n-1)(n-3) + C(n-2)(n-3)$$
$$\xrightarrow{n=1} t_1 = A(0) + B(0) + C(-1)(-2) \Rightarrow 2C = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{2}$$
$$\xrightarrow{n=2} t_2 = A(0) + B(1)(-1) + C(0) \Rightarrow -B = 5 \Rightarrow B = -5$$
$$\xrightarrow{n=3} t_3 = A(2)(1) + B(0) + C(0) \Rightarrow 2A = 12 \Rightarrow A = \frac{12}{2} = 6$$

پس:
$$t_n = 6(n-1)(n-2) - 5(n-1)(n-3) + \frac{1}{2}(n-2)(n-3)$$

و بنابراین:
$$t_{11} = 6(10)(9) - 5(10)(8) + \frac{1}{2}(9)(8) = 6\times10\times9 - 5\times10\times8 + 9\times4$$
$$= 540 - 400 + 36 = 176$$

پ) سایر الگوها

به هر تعداد عدد که پشت سر هم قرار می‌گیرند دنباله می‌گوییم. کتاب درسی‌تان جملات چند دنباله را نوشته است. جملهٔ عمومی (یعنی فرمول کلی) آن‌ها را یاد بگیرید:

الف $-1, 4, -9, 16, \ldots$

با کمی دقت، این عددها مربع کامل‌اند ولی یک‌درمیان برای اعداد فرد، منفی‌اند. پس:

$$t_n = (-1)^n n^2$$

ب $0/2, 0/02, 0/002, 0/0002, \ldots$

هر جمله از ضرب قبلی در $\frac{1}{10}$ به دست می‌آید. پس در جملهٔ nام باید چیزی شبیه $(\frac{1}{10})^n$ داشته باشیم. با کمی دقت $t_n = \frac{2}{10^n}$ مناسب است.

پ $\sqrt{5}, \sqrt{18}, \sqrt{31}, \sqrt{44}$

اعداد زیر رادیکال، ۱۳تا ۱۳تا زیاد می‌شوند پس الگوی اعداد زیر رادیکال $a_n = 13n + \cdots$ است.

با امتحان یک عدد می‌بینیم $۱۳n - ۸$ خوب است، پس $t_n = \sqrt{۱۳n - ۸}$.

ب) ۱,۲,۴,۷,...

افزایش‌ها ...,۱,۲,۳ هستند که الگوی خطی دارند، پس این یک الگوی درجه‌دوم است. اگر دوست دارید یاد بگیرید که ضریب $n^۲$ در الگوی درجه‌دوم، نصف میزان افزایش افزایش‌ها است:

$$\underset{\text{افزایش افزایش‌ها:}\ \ +۱\quad +۱}{\underset{\text{افزایش‌ها:}\ \ +۱\quad +۲\quad +۳}{۱\ ,\ ۲\ ,\ ۴\ ,\ ۷}}\ \Rightarrow$$ ضریب $n^۲$ می‌شود $\frac{۱}{۲}$ و دنباله درجه‌دوم است.

با روش‌هایی که دیدیم جملهٔ عمومی این دنباله $t_n = \frac{n^۲ - n + ۲}{۲}$ است.

پ) ۱,۱,۲,۳,۵,...

بد نیست بدانید این دنباله «فیبوناتچی» نام دارد و الگوی آن کمی خاص است. هر جمله، جمع دوتای قبلی است:

$$F_n: ۱,۱,\underset{۱+۱}{۲},\underset{۱+۲}{۳},\underset{۲+۳}{۵},\underset{۳+۵}{۸},\underset{۵+۸}{۱۳},\underset{۸+۱۳}{۲۱},\underset{۱۳+۲۱}{۳۴},...$$

سعی نکنید برای آن جملهٔ عمومی بنویسید، چون رسیدن به $F_n = \frac{۱}{\sqrt{۵}}((\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲})^n + (\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲})^n)$ کار ساده‌ای نیست!!!

ج) ۳,−۱,۴,−۱,۵,−۱,...

این دنباله هم دوتا قانون مختلف دارد. جمله‌های اول و سوم و پنجم، یکی‌یکی زیاد می‌شوند. پس در جملات با شماره فرد، خطی است. ولی جملات دوم و چهارم و ششم ثابت و برابر −۱ هستند.

جملهٔ عمومی را ببینید:

$$t_n = \begin{cases} \frac{n+۵}{۲} & n\ \text{فرد} \\ -۱ & n\ \text{زوج} \end{cases}$$

اشاره اگر گفتید چرا در جملات فرد، $t_n = \frac{n+۵}{۲}$ شد؟!

؟ در دنباله با جملهٔ عمومی $t_n = \frac{۲n}{n+۱}$ اولین جمله بیشتر از ۱/۹ کدام است؟

۱) نوزدهم ۲) بیستم ۳) نهم ۴) دهم

= گزینهٔ «۲»

$$\frac{۲n}{n+۱} > ۱/۹ \Rightarrow \frac{۲n}{n+۱} > \frac{۱۹}{۱۰} \xrightarrow{\times ۱۰(n+۱)} ۲n(۱۰) > ۱۹(n+۱)$$

$$\Rightarrow ۲۰n > ۱۹n + ۱۹ \Rightarrow n > ۱۹$$

پس اولین جمله که t_n بیشتر از ۱/۹ باشه، جملهٔ بیستم است.

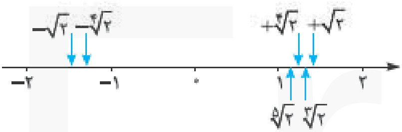
ریشه‌ها

وقتی می‌گوییم b ریشهٔ nام a است، یعنی: $b^n = a$.

ریشهٔ مرتبهٔ فرد	ریشهٔ مرتبهٔ زوج
هر عدد حقیقی یک ریشهٔ فرد دارد که با خود آن عدد هم‌علامت است. ریشهٔ سوم عدد حقیقی a را به صورت $\sqrt[۳]{a}$ نشان می‌دهیم. ریشه‌های پنجم، هفتم و ... هم به ترتیب با $\sqrt[۵]{a}$ و $\sqrt[۷]{a}$ و ... نمایش داده می‌شوند.	اعداد مثبت و صفر، ریشه‌های مرتبهٔ زوج دارند. هر عدد مثبت a دوتا ریشهٔ دوم دارد که $+\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$ هستند. در مورد ریشهٔ چهارم هم همین‌طور است، مثلاً $\pm\sqrt[۴]{a}$ ریشه‌های چهارم عدد مثبت a هستند.

برای نشان‌دادن ریشه‌های اعداد، معمولاً از محور استفاده می‌شود.

مثلاً روی محور مقادیر ریشه‌های ۲ را ببینید:



گاهی اوقات مقدار ریشه‌ها را بلدیم. مثلاً $\sqrt[۳]{۶۴}$، یعنی چه عددی به توان ۳ می‌شود ۶۴؟

خب جواب ۴ است؛ یا ریشه‌های دوم ۶۴ اعداد $\pm\sqrt{۶۴}$ یعنی ±۸ است. در صورتی که مقدار ریشه‌ها را ندانیم، می‌توانیم بگوییم این ریشه‌ها در کدام بازه (یعنی بین کدام اعداد) هستند. مثلاً $\sqrt[۳]{۱۰}$ را بلد نیستیم، اما می‌دانیم $\sqrt[۳]{۸} = ۲$ و $\sqrt[۳]{۲۷} = ۳$ پس $\sqrt[۳]{۱۰}$ نیز عددی بین ۲ و ۳ (و به ۲ نزدیک‌تر) است.

؟ کدام از بقیه بیشتر است؟

۱) $\sqrt[۳]{۳۰}$ ۲) $\sqrt[۴]{۶۰}$ ۳) $\sqrt[۵]{۴۰۰}$ ۴) $\sqrt{۱۷}$

= گزینهٔ «۴» حاصل ۱، ۲ و ۳ از ۴ کم‌تر است اما حاصل ۴ از ۴ بیشتر است. ببینید:

$$\underbrace{\sqrt[۴]{۱۶}}_{۲} < \sqrt[۴]{۶۰} < \underbrace{\sqrt[۴]{۸۱}}_{۳} \quad , \quad \underbrace{\sqrt[۳]{۲۷}}_{۳} < \sqrt[۳]{۳۰} < \underbrace{\sqrt[۳]{۶۴}}_{۴}$$

دقت کنید که $۲^{۱۰} = ۴^۵ = ۱۰۲۴$ و $۳^۵ = ۲۴۳$

$$\underbrace{\sqrt[۵]{۲۴۳}}_{۳} < \sqrt[۵]{۴۰۰} < \underbrace{\sqrt[۵]{۱۰۲۴}}_{۴}$$

اما

$$۴ < \sqrt{۱۷} < ۵$$

؟ ریشهٔ دوم مثبت عدد ۲۰ را a و ریشهٔ چهارم منفی عدد ۹۹ را b می‌نامیم. حاصل $[b]+[-a]$ کدام است؟

۱) -۸ ۲) -۷ ۳) -۹ ۴) -۱۰

گزینهٔ «۳» $+\sqrt{۲۰}$ عددی بین ۴ و ۵ است، پس $۴ < a < ۵$ و $[-a]=-۵$.

$-\sqrt[۴]{۹۹}$ عددی بین -۳ و -۴ است (چون $۳^۴=۸۱$ و $۴^۴=۲۵۶$)، پس $[b]=-۴$ و جمع آن‌ها می‌شود -۹.

اشاره در میان اعداد مثبت، ریشه‌های صفر و ۱ برابر خودشان است: $\sqrt[n]{۱}=۱$ و $\sqrt[n]{۰}=۰$

در میان اعداد منفی، ریشه‌های مرتبهٔ فرد (-۱) برابر خودش است: $\sqrt[\text{فرد}]{-۱}=-۱$

ارتباط ریشه‌ها و خود عدد از نظر بزرگی

۱ در اعداد بیشتر از ۱، هر چه مرتبهٔ ریشه بالاتر برود، حاصل کم‌تر می‌شود. یعنی:

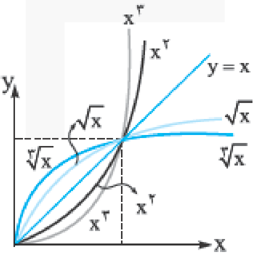
$$\sqrt[۵]{a} < \sqrt[۴]{a} < \sqrt[۳]{a} < \sqrt{a} < a < a^۲ < a^۳ < a^۴ < a^۵ \dots$$

دقت کنید که در مورد ریشه‌های مرتبهٔ زوج، منظورمان ریشهٔ مثبت است.

۲ در اعداد بین صفر و ۱، هر چه مرتبهٔ ریشه بالاتر باشد، حاصل بزرگ‌تر می‌شود.

$$\sqrt[۵]{a} > \sqrt[۴]{a} > \sqrt[۳]{a} > \sqrt{a} > a > a^۲ > a^۳ > a^۴ > \cdots$$

نمودار را هم ببینید:

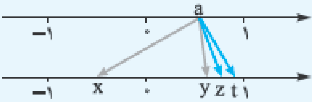


۳ در اعداد بین -۱ و صفر، اول باید تکلیف علامت را معلوم کرد. این عددها ریشهٔ مرتبهٔ زوج ندارند و در ریشه‌های فرد، با افزایش مرتبه، ریشه کوچک‌تر می‌شود: $\sqrt[۵]{a} < \sqrt[۳]{a} < a < a^۳ < a^۵$

۴ در اعداد کم‌تر از -۱، باز هم ریشهٔ مرتبهٔ زوج نداریم. در ریشه‌های فرد با افزایش مرتبه، ریشهٔ عدد بزرگ می‌شود: $\sqrt[۵]{a} > \sqrt[۳]{a} > a > a^۳ > a^۵$

اشاره در توان‌های زوج اعداد منفی، حاصل عددی مثبت است. پس علامت را بی‌خیال می‌شویم.

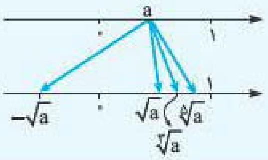
؟ نقطه‌ای از محور بالا، به ریشه‌های دوم و ریشهٔ سوم و ریشهٔ پنجم خود روی محور پایین وصل شده است. کدام درست است؟



۱) z مربوط به ریشهٔ پنجم است. ۲) t مربوط به ریشهٔ دوم است.

۳) y مربوط به ریشهٔ سوم است. ۴) x مربوط به ریشهٔ دوم است.

گزینهٔ «۴» این عدد بین صفر و ۱ است. دوتا ریشهٔ دوم دارد که ریشهٔ دوم مثبت، از خودش بیشتر است و ریشهٔ دوم منفی، قرینهٔ آن است، پس x مربوط به ریشهٔ دوم است. بقیه را ببینید:



قوانین توان و رادیکال

از قبل می‌دانیم که

$$(a^n)^m = a^{nm} \qquad a^n \times a^m = a^{n+m}$$

$$a^n \times b^n = (ab)^n \qquad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

برای اعداد مثبت، می‌توانیم توان کسری $a^{\frac{1}{n}}$ را به صورت $\sqrt[n]{a}$ تعریف کنیم.

هم‌چنین توان کسری $a^{\frac{m}{n}}$ به صورت $\sqrt[n]{a^m}$ تعریف می‌شود. (و برعکس) پس داریم:

$$۳^{\frac{۲}{۵}} = \sqrt[۵]{۳^۲} = \sqrt[۵]{۹} \qquad \sqrt[۷]{۳} = ۳^{\frac{۱}{۷}}$$

حالا قواعد رادیکال‌ها را مرور کنیم:

۱ حاصل $\sqrt[n]{a^n}$ اگر n زوج باشد، می‌شود $|a|$ و اگر n فرد باشد می‌شود خود a.

۲ پس برای n های فرد داریم: $\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n$ اما برای nهای زوج باید a مثبت باشد.

۳ رابطهٔ $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ برای nهای فرد همیشه درست است، اما برای nهای زوج باید a و b مثبت باشند. در مورد $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ نیز همین تحلیل درست است.

۴ اگر $a > ۰$ باشد، اجازه داریم از رادیکال‌های پشت سر هم، فرجه‌ها را در هم ضرب کنیم، یعنی:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

۵ اگر $a > ۰$ باشد، اجازه داریم توان و فرجه را ساده کنیم $\sqrt[kn]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^m}$.

؟ حاصل $\sqrt[۳]{۴\sqrt[۴]{۲}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt[۴]{۴}$ ۲) $\sqrt[۴]{۸}$ ۳) $\sqrt[۴]{۲}$ ۴) $\sqrt[۴]{۱۶}$

گزینهٔ «۲» **راه‌حل اول** از توان کسری می‌رویم:

$$\sqrt[۳]{۲^۲ \times ۲^{\frac{۱}{۴}}} = (۲^{۲+\frac{۱}{۴}})^{\frac{۱}{۳}} = ۲^{\frac{۹}{۴}\times\frac{۱}{۳}} = ۲^{\frac{۳}{۴}} = \sqrt[۴]{۲^۳} = \sqrt[۴]{۸}$$

راه‌حل دوم از ضرب فرجه‌ها می‌رویم:

$$\sqrt[۳]{۴\sqrt[۴]{۲}} = \sqrt[۳]{\sqrt[۴]{۴^۴ \times ۲}}$$

دقت کردید؟ عدد ۴ می‌خواست وارد ریشهٔ چهارم شود، به همین دلیل به توان ۴ رسید.

$$= \sqrt[۱۲]{۴^۴ \times ۲} = \sqrt[۱۲]{۲^۸ \times ۲^۱} = \sqrt[۱۲]{۲^۹} \xrightarrow{\text{توان و فرجه را به ۳ ساده کنیم.}} \sqrt[۴]{۲^۳} = \sqrt[۴]{۸}$$

a عددی منفی است. حاصل $\sqrt[3]{-a^2(\sqrt[4]{a^4})}$ کدام است؟

۱) a ۲) $-a$ ۳) a^2 ۴) $-a^2$

گزینهٔ «۱» $\sqrt[4]{a^4}$ می‌شود $|a|$ که چون $a<0$ است می‌شود $-a$، پس داریم:

$$\sqrt[3]{-a^2|a|}=\sqrt[3]{-a^2\times(-a)}=\sqrt[3]{a^3}=a$$

حاصل $\sqrt[4]{5-2\sqrt{6}}\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

گزینهٔ «۱» ساده‌بودن اعداد گزینه‌ها به ما می‌گوید که این رادیکال‌ها نهایتاً ساده می‌شوند.

راه‌حل اول با کمی دقت می‌بینیم که $5-2\sqrt{6}$ همان $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$ است، پس:

$$\sqrt[4]{(5-2\sqrt{6})}\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\sqrt[4]{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}\times\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$$

$$=\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})}\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\sqrt{3-2}=1$$

راه‌حل دوم دوتا رادیکال را یکی کنیم. باید در $\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$، توان و فرجه را ۲ برابر کنیم تا به $\sqrt[4]{\ }$ برسیم:

$$\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\sqrt[4]{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}=\sqrt[4]{3+2+2\sqrt{3}\sqrt{2}}=\sqrt[4]{5+2\sqrt{6}}$$

حالا این عبارت باید در $\sqrt[4]{5-2\sqrt{6}}$ ضرب شود:

$$\sqrt[4]{(5-2\sqrt{6})(5+2\sqrt{6})}=\sqrt[4]{25-4\times6}=\sqrt[4]{1}=1$$

اتحادها

تساوی‌هایی مانند $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$ را اتحاد می‌نامیم. چون این تساوی‌ها همواره برقرار هستند!

اتحادهای مهم را به یاد دارید؟

$$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$$

$$(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$$

این دو نتیجه را هم به خاطر بسپارید:

$$(a+b)^2+(a-b)^2=2a^2+2b^2$$

$$(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$$

حاصل $(\sin x-\cos x)^2+(\sin x+\cos x)^2$ چند برابر عبارت زیر است؟

$$(\tan x+\cot x)^2-(\tan x-\cot x)^2$$

۱) ۰/۵ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۶

گزینهٔ «۱» کاربرد اتحادهای فرعی را ببینید:

$$(\sin x-\cos x)^2+(\sin x+\cos x)^2=2\sin^2x+2\cos^2x=2(\sin^2x+\cos^2x)=2$$

$$(\tan x+\cot x)^2-(\tan x-\cot x)^2=4\tan x\cot x=4$$

پس نسبت این‌ها می‌شود $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

در فاصلهٔ $0 < x < 1$، حاصل $\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}-2} - \sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}+2}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) -2 ۳) $2x$ ۴) $\frac{2}{x}$

گزینهٔ «۴» به $(x \pm \frac{1}{x})^2$ دقت کنید!

$$(x \pm \frac{1}{x})^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} \pm 2(x)(\frac{1}{x}) = x^2 + \frac{1}{x^2} \pm 2$$

خب ماجرا معلوم شد! زیر رادیکال‌ها $(x+\frac{1}{x})^2$ و $(x-\frac{1}{x})^2$ هستند و داریم:

$$\sqrt{(x+\frac{1}{x})^2} - \sqrt{(x-\frac{1}{x})^2} = |x+\frac{1}{x}| - |x-\frac{1}{x}|$$

حالا دقت کنید که x بین صفر و ۱ است، پس $\frac{1}{x}$ از x بیشتر است و بنابراین $x-\frac{1}{x}$ منفی است:

$$= |\underbrace{x+\frac{1}{x}}_{\oplus}| - |\underbrace{x-\frac{1}{x}}_{\ominus}| = x + \frac{1}{x} + (x - \frac{1}{x}) = 2x$$

اتحادهای دیگری هم داریم:

مکعب دوجمله‌ای:
$$\begin{cases}(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3\end{cases}$$

مربع سه‌جمله‌ای: $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

مزدوج: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

چاق و لاغر:
$$\begin{cases}a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \\ a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)\end{cases}$$

چند مثال کاربردی از این اتحادها ببینید:

حاصل $141^2 - 111^2$ کدام است؟

۱) ۲۵۲۰ ۲) ۵۰۴۰ ۳) ۷۵۶۰ ۴) ۹۰۸۰

گزینهٔ «۳» با اتحاد مزدوج داریم:

$$141^2 - 111^2 = (141-111)(141+111) = 30 \times 252 = 7560$$

اگر جمع دو عدد ۶ و ضرب آن‌ها ۴ باشد، حاصل‌جمع مکعبات آن‌ها کدام است؟

۱) ۷۲ ۲) ۱۰۸ ۳) ۱۲۰ ۴) ۱۴۴

گزینهٔ «۴» سؤال از ما $x^3 + y^3$ را می‌خواهد. اتحاد $(x+y)^3$ را این‌طوری ببینید:

$$(x+y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x+y)$$

حالا مقادیر $x+y=6$ و $xy=4$ را قرار می‌دهیم:

$$6^3 = x^3 + y^3 + 3(4)(6) \Rightarrow x^3 + y^3 = 216 - 72 = 144$$

در تجزیهٔ عبارت a^6-b^6 کدام عامل را **نداریم**؟

۱) $a-b$ ۲) $a+b$ ۳) a^2+b^2 ۴) a^2+b^2-ab

گزینهٔ «۳» تجزیه یعنی نوشتن یک عبارت به صورت حاصل‌ضرب عبارت‌های درجه‌اول یا درجه‌دوم (با دلتای منفی). معمولاً با استفاده از عکس اتحادها، دسته‌بندی، فاکتورگیری و گاهی ابتکار! انجام می‌شود.

در این‌جا اول برای a^6-b^6 اتحاد مزدوج می‌نویسیم: $a^6-b^6=(a^3-b^3)(a^3+b^3)$

و حالا اتحاد چاق و لاغر: $=(a-b)(a^2+ab+b^2)(a+b)(a^2-ab+b^2)$

پس در تجزیه‌اش a^2+b^2 نداریم.

با کمک تجزیه، می‌توانیم با استفاده از ب.م.م و ک.م.م، مخرج مشترک بگیریم و عبارت‌های کسری را ساده‌تر بیان کنیم.

حاصل $\frac{5}{x^2-2x}+\frac{1}{x^2+2x}-\frac{x-4}{x^2-4}$ کدام است؟

۱) $\frac{x^2+4}{x^3-4x}$ ۲) $\frac{x^2+12}{x^3-4x}$ ۳) $\frac{x+12}{x^3-4x}$ ۴) $\frac{x^2+x+4}{x^3-4x}$

گزینهٔ «۲» مخرج‌ها را تجزیه کنیم:

$$=\frac{x-4}{(x-2)(x+2)}-\frac{1}{x(x+2)}+\frac{5}{x(x-2)}$$

ک.م.م مخرج‌ها $x(x+2)(x-2)$ است:

$$=\frac{(x-4)(x)-1(x-2)+5(x+2)}{x(x-2)(x+2)}=\frac{x^2-4x-x+2+5x+10}{x(x-2)(x+2)}=\frac{x^2+12}{x^3-4x}$$

گویاکردن مخرج‌ها

برای ساده‌کردن عبارت‌های رادیکالی، خیلی وقت‌ها لازم است مخرج کسرها را از فرم رادیکال در آوریم.

دستهٔ اول: اگر در مخرج $\sqrt{x}\pm y$ یا $\sqrt{x}\pm\sqrt{y}$ داریم، کافی است صورت و مخرج را در مزدوج آن‌ها ضرب کنیم.

حاصل $\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{-4}{\sqrt{3}-1}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{8}-2$ ۲) $-\sqrt{8}-2$ ۳) $2-\sqrt{8}$ ۴) $2+\sqrt{8}$

گزینهٔ «۲»

$$\frac{-4}{\sqrt{3}-1}=\frac{-4}{\sqrt{3}-1}\times\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}=\frac{-4(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}^2-1^2}=\frac{-4(\sqrt{3}+1)}{2}=-2(\sqrt{3}+1)=-2\sqrt{3}-2$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{2(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{3-2}=2\sqrt{3}-2\sqrt{2}$$

پس جمع آن‌ها می‌شود: $-2-2\sqrt{2}$ یعنی $-2-\sqrt{8}$

دستهٔ دوم: اگر در مخرج کسر یکی از عبارت‌های $\sqrt[3]{x} \pm y$ یا $\sqrt[3]{x} \pm \sqrt[3]{y}$ را داریم، با ضرب صورت و مخرج کسر در پرانتز بزرگ اتحاد چاق و لاغر، مخرج گویا می‌شود.

البته برعکس هم امکان دارد! یعنی اگر در مخرج پرانتز بزرگ اتحاد چاق و لاغر بود باید صورت و مخرج کسر را در پرانتز کوچک ضرب کنیم.

یک مثال پر زحمت ببینید:

حاصل $\sqrt[3]{۴} - \dfrac{۱}{\sqrt[3]{۴} - \sqrt[3]{۲} + ۱} + \dfrac{۱}{\sqrt[3]{۲} - ۱}$ **چند برابر** $\sqrt[3]{۲} + ۱$ **است؟**

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) $\dfrac{۳}{۴}$ ۴) $\dfrac{۴}{۳}$

گزینهٔ «۴» اولی باید در $\sqrt[3]{۴} + \sqrt[3]{۲} + ۱$ ضرب شود تا به $(\sqrt[3]{۲})^۳ - ۱^۳$ برسد و دومی باید در $(\sqrt[3]{۲} + ۱)$ ضرب شود تا به $(\sqrt[3]{۲})^۳ + ۱^۳$ برسد:

$$\frac{۱}{\sqrt[3]{۲} - ۱} + \frac{۱}{\sqrt[3]{۴} - \sqrt[3]{۲} + ۱} = \frac{\sqrt[3]{۴} + \sqrt[3]{۲} + ۱}{(\sqrt[3]{۲})^۳ - ۱^۳} + \frac{\sqrt[3]{۲} + ۱}{(\sqrt[3]{۲})^۳ + ۱^۳} = \frac{\sqrt[3]{۴} + \sqrt[3]{۲} + ۱}{۱} + \frac{\sqrt[3]{۲} + ۱}{۲}$$

$$= \frac{۲\sqrt[3]{۴} + ۲\sqrt[3]{۲} + ۲ + \sqrt[3]{۲} + ۱}{۲} = \frac{۲\sqrt[3]{۴} + ۳\sqrt[3]{۲} + ۳}{۲}$$

سؤال می‌گوید این را منهای $\sqrt[3]{۴}$ کنیم، جواب می‌شود:

$$\frac{۳\sqrt[3]{۲} + ۳}{۲}$$

یعنی:

$$\frac{۳}{۲}(\sqrt[3]{۲} + ۱)$$

قدرمطلق

تعریف قدرمطلق این بود:

$$\sqrt{x^{۲}}=|x|=\begin{cases}x & x\geq ۰\\ -x & x\leq ۰\end{cases}$$

یعنی اگر داخل قدرمطلق مثبت باشد، حاصل قدرمطلق همان عبارت داخلش است و اگر منفی باشد قرینهٔ آن.

پس: $|\sqrt{۲}-۱|=\sqrt{۲}-۱\ ,\ |\pi-۲|=\pi-۲\ ,\ |\sin x|\xlongequal{\text{ربع دوم}}\sin x$

$|\sqrt{۳}-۲|=-(\sqrt{۳}-۲)\ ,\ |\cos x-۳|=-(\cos x-۳)$

$\sqrt{۲}-۱$ و $\pi-۲$ مثبت‌اند، سینوس هم در ربع دوم مثبت است؛ پس بدون تغییر از قدرمطلق خارج می‌شوند.

اما $\sqrt{۳}-۲$ و $\cos x-۳$ منفی‌اند؛ پس با علامت منفی از قدرمطلق خارج شدند، پس برای تعیین جواب قدرمطلق، باید عبارت درون آن را تعیین علامت کنیم.

؟ حاصل $|x+۱|+|x-۲|$ به x بستگی ندارد. x چند مقدار صحیح مختلف دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

= گزینهٔ «۳» قرار شد داخل قدرمطلق‌ها را تعیین علامت کنیم:

		-۱		۲	
$x-۲$	$-$		$-$	۰	$+$
$x+۱$	$-$	۰	$+$		$+$
	الف		ب		پ

الف) $x<-۱ \Rightarrow x+۱<۰\ ,\ x-۲<۰$

$\Rightarrow |x+۱|+|x-۲|=-(x+۱)-(x-۲)=-۲x+۱$

ب) $-۱<x<۲ \Rightarrow x+۱>۰\ ,\ x-۲<۰$

$\Rightarrow |x+۱|+|x-۲|=x+۱-(x-۲)=۳$

پ) $x>۲ \Rightarrow |\underset{\oplus}{x+۱}|+|\underset{\oplus}{x-۲}|=x+۱+x-۲=۲x-۱$

پس در فاصلهٔ $-۱<x<۲$، مقدار عبارت به x بستگی ندارد. دقت کنید که علامت تساوی می‌تواند روی هر کدام از شرط‌ها باشد؛ پس کامل‌ترین جواب $-۱\leq x\leq ۲$ است که ۴ عدد صحیح دارد: ۲، ۱، ۰ و -۱

? اگر $-1 < x < 0$، حاصل $\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2} - 2}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{x} - x$ ۲) $x - \frac{1}{x}$ ۳) $-x - \frac{1}{x}$ ۴) $x + \frac{1}{x}$

گزینهٔ «۲» عبارت زیر رادیکال قرار است به شکل یکی از گزینه‌ها شود، پس حتماً مربع کامل است. با کمی دقت داریم:

$$(x - \frac{1}{x})^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2$$

پس:

$$\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2} - 2} = \sqrt{(x - \frac{1}{x})^2} = |x - \frac{1}{x}|$$

صورت سؤال گفته $-1 < x < 0$، پس مثلاً $x = -\frac{1}{2}$ است:

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} + 2 > 0$$

و از قدرمطلق بیرون می‌آید: $x - \frac{1}{x}$.

خواص قدرمطلق

۱ حاصل $|x|$ همیشه مثبت یا صفر است: $|x| \geq 0$ و همیشه $|x| \geq x$

۲ قدرمطلق در ضرب و تقسیم به تک‌تک ع بارات داده می‌شود: $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$ ، $|ab| = |a||b|$

۳ توان از قدرمطلق بیرون می‌آید: $|a^n| = |a|^n$

پس می‌توانیم قدرمطلق را با توان ۲ از بین ببریم: $|a|^2 = |a^2| = a^2$

۴ در جمع و تفریق داریم: $|a - b| \geq ||a| - |b||$ ، $|a| + |b| \geq |a + b|$

در هر مورد، تساوی مربوط به زمانی است که b و a هم‌علامت باشند.

۵ مهم‌تر از همه، معادله و نامعادله‌های قدرمطلقی را داریم:

$|u| = |v| \Rightarrow u = \pm v$ ، $|u| = a \Rightarrow u = \pm a$

$|u| > a \Rightarrow u > a$ یا $u < -a$ ، $|u| < a \Rightarrow -a < u < a$

? از نامعادله‌های $|x - 3| < 2$ و $|\frac{x}{2} - 1| > 1$، چند جواب صحیح برای x وجود دارد؟

۱) هیچ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

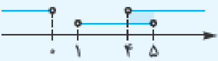
گزینهٔ «۱»

الف) $|x - 3| < 2 \Rightarrow -2 < x - 3 < 2 \xrightarrow{+3} 1 < x < 5$

ب) $|\frac{x}{2} - 1| > 1 \Rightarrow \frac{x}{2} - 1 > 1$ یا $\frac{x}{2} - 1 < -1 \Rightarrow \frac{x}{2} > 2$ یا $\frac{x}{2} < 0$

$\Rightarrow x > 4$ یا $x < 0$

از اشتراک دو شرط داریم:



پس جواب می‌شود: $4 < x < 5$ که هیچ مقدار صحیحی برای x نداریم.

اشاره اگر قسمتی از معادله یا نامعادله قدرمطلقی بود و قسمت دیگر نبود، مجبوریم قدرمطلق را در دو حالت مثبت و منفی بررسی کنیم.

؟ از معادلهٔ $|2x-4|+x=5$ مجموع جواب‌های x کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

گزینهٔ «۲» اگر $2x-4$ مثبت باشد؛ یعنی:

$$2x-4+x=5 \Rightarrow 3x=9 \Rightarrow x=3 \xrightarrow{x>2\ \text{است}} \text{قق}$$

اگر $2x-4$ منفی باشد؛ یعنی $x<2$ است: $-(2x-4)+x=5 \Rightarrow x=-1$ قق

پس دو جواب $x=3$ و $x=-1$ داریم، که هر دو قبول‌اند و جمع جواب‌ها می‌شود ۲.

؟ از نامعادلهٔ $x^2-x<|x+1|$ طول بازهٔ جواب x کدام است؟

۱) $2\sqrt{2}$ ۲) $2\sqrt{3}$ ۳) $2\sqrt{5}$ ۴) $2\sqrt{10}$

گزینهٔ «۱» الف) اگر $x+1>0$ باشد داریم: $x^2-x<x+1 \Rightarrow x^2-2x-1<0$

ریشه‌های x^2-2x-1 اعداد $1\pm\sqrt{2}$ هستند و داریم:

	$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$	
+	0	−	0	+
		ج		

ما این جواب را با شرط $x>-1$ به دست آوردیم؛ پس $1-\sqrt{2}<x<1+\sqrt{2}$ خوب است.

ب) اگر $x+1<0$ باشد، داریم: $x^2-x<-(x+1)$

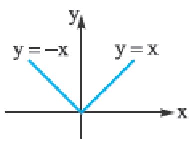
که از آن نتیجه می‌شود $x^2<-1$ و غیرممکن است.

جواب فقط $1-\sqrt{2}<x<1+\sqrt{2}$ بود و داریم:

$$\text{طول بازهٔ جواب}=1+\sqrt{2}-(1-\sqrt{2})=2\sqrt{2}$$

نمودارهای قدرمطلق

رسم $y=|x|$ را بلدیم:



$$y=\begin{cases} x & x\ge 0\ (\text{نیمساز ربع اول}) \\ -x & x<0\ (\text{نیمساز ربع دوم}) \end{cases}$$

دامنهٔ آن $\mathbb{R}$ و بردش $[0,+\infty)$ است.

با کمک انتقال می‌توانیم نمودارهایی مثل $-|x|$، $|x-2|$، $|x|+2$ و ... را بکشیم.

؟ در مورد $y=3-|x+2|$ کدام درست نیست؟

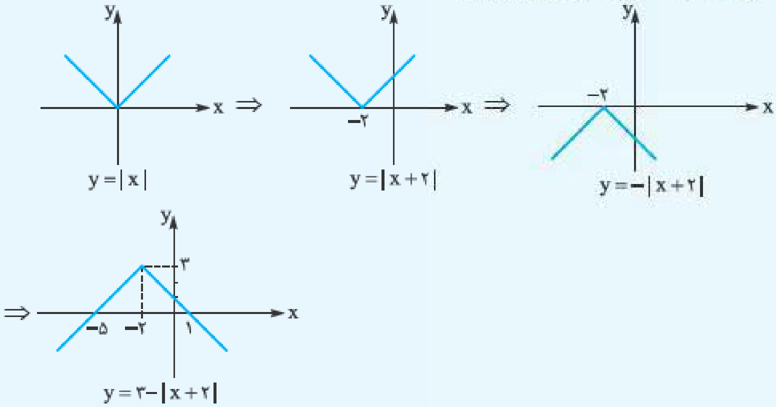
۱) محور x را در دو نقطه قطع می‌کند.

۲) با محورها در ربع اول مساحتی به اندازهٔ $\frac{1}{2}$ می‌سازد.

۳) فقط از ۳ ناحیه می‌گذرد.

۴) با محور xها، مساحتی به اندازهٔ ۹ می‌سازد.

گزینهٔ «۳» مراحل رسم را ببینید:



خب نمودار را ببینید، محور xها را در ۲ نقطه قطع می‌کند.

$$۳-|x+۲|=۰ \Rightarrow |x+۲|=۳ \Rightarrow x+۲=\pm ۳ \Rightarrow x=۱ \text{ یا } -۵$$

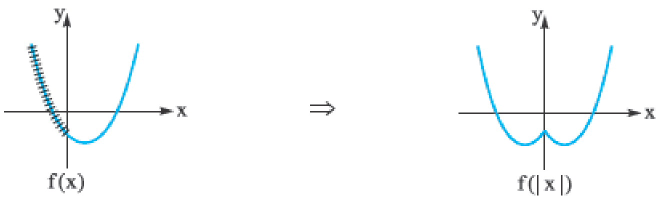
همچنین نمودار محور yها را در $(۰,۱)$ قطع می‌کند.

پس سطح محصور به نمودار و محورها (در ربع اول) $\frac{۱\times۱}{۲}$ است. همچنین سطح محصور به نمودار و محور xها ۹ $\frac{۶\times۳}{۲}$ است. دقت کنید که نمودار از ۴ ناحیه می‌گذرد و ۳ درست نبود.

برای رسم نمودارهای $y=|f(x)|$ و $y=f(|x|)$ از روی نمودار $f(x)$ قانون داریم:

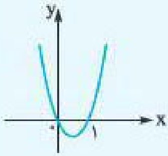
رسم $y=|f(x)|$: در نمودار $y=f(x)$، قسمت زیر محور x را حذف کرده و به بالا قرینه می‌کنیم.

رسم $y=f(|x|)$: در نمودار $y=f(x)$، قسمت سمت چپ محور y را حذف می‌کنیم، سپس قسمت راست را به چپ آینه می‌کنیم.



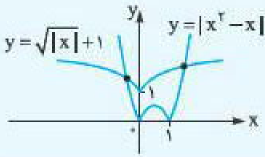
؟ نمودارهای $f(x)=|x^۲-x|$ و $g(x)=\sqrt{|x|}+۱$ چند نقطهٔ مشترک دارند؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴



گزینهٔ «۲» نمودار سهمی $y=x^۲-x$ را بلدیم:
قدرمطلق روی آن، قسمت زیر نمودار (بین صفر و ۱) را به بالا قرینه می‌کند.

برای $y=\sqrt{|x|}+۱$ اول $\sqrt{x}+۱$ را می‌کشیم؛ پس در قسمت xهای منفی، قرینهٔ نمودار را نسبت به محور yها رسم می‌کنیم. دو نمودار در دو نقطه متقاطع‌اند.



رسم نمودار توابع قدرمطلق‌دار با عبارات خطی

برای رسم نمودار تابع‌هایی مثل $y=|x-۱|-|x+۱|$ یا $y=|x|-|x-۲|-x$، از روش زیر استفاده می‌شود:

گام اول ریشهٔ داخل قدرمطلق‌ها را در تابع قرار می‌دهیم و نقطه‌ها را در صفحهٔ مختصات مشخص می‌کنیم.

گام دوم نقطه‌ها را به ترتیب طول به هم وصل می‌کنیم.

گام سوم وقتی x خیلی بزرگ $(+\infty)$ و خیلی کوچک $(-\infty)$ می‌شود، علامت x را معلوم می‌کنیم تا شیب نیم‌خط‌های اول و آخر را بفهمیم.

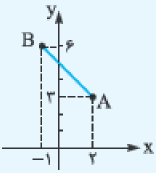
؟ کم‌ترین مقدار عرض نقاط در تابع $f(x)=|x+۱|+|۲x-۴|$ کدام است؟

۱) ۶   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

گزینهٔ «۳» ریشهٔ داخل قدرمطلق‌ها $x=۲$ و $x=-۱$ هستند، با قراردادن آن‌ها در تابع داریم:

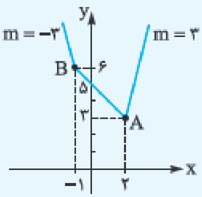
$$f(۲)=|۲+۱|+۰=۳ \Rightarrow A(۲,۳)$$

$$f(-۱)=۰+|۲(-۱)-۴|=۶ \Rightarrow B(-۱,۶)$$



سپس نقاط $A(۲,۳)$ و $B(۱,-۶)$ را به هم وصل می‌کنیم:
و در آخر وقتی x خیلی بزرگ باشد قدرمطلق‌ها برداشته می‌شود و $x+۲x=۳x$ را داریم؛ پس نیم‌خط سمت راست شیب ۳ دارد.

در سمت $-\infty$، درون قدرمطلق‌ها منفی است و $-x-۲x=-۳x$ داریم؛ پس شیب نیم‌خط سمت چپ -۳ است.



پس عرض مینیمم تابع می‌شود $y_{min}=۳$.

نمودارهای ترکیبی

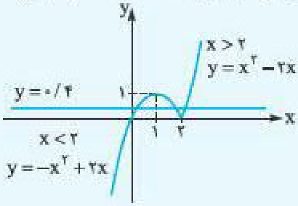
اگر قسمتی از ضابطه قدرمطلق داشت و قسمت دیگر نداشت می‌توانیم مثل همیشه از تعریف قدرمطلق برویم. ببینید:

نمودار $y = x|x-2|$ و خط $y = 0/4$ در چند نقطه متقاطع‌اند؟

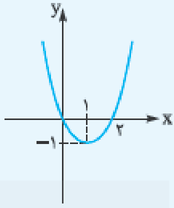
۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

گزینهٔ «۳» برای $x > 2$، ضابطه به صورت $y = x(x-2)$ یا $y = x^2 - 2x$ است و برای $x < 2$ قرینهٔ آن را داریم: $y = -x^2 + 2x$

اشاره رأس سهمی $y = x^2 - 2x$ در $(1,-1)$ است.



$\Rightarrow$

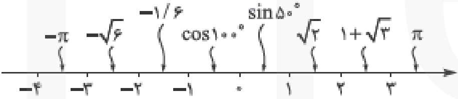


$y = x^2 - 2x$

موافقید که نمودار و خط $y = 0/4$ در ۳ نقطه متقاطع‌اند؟

جزء صحیح

$[x]$ یعنی عدد صحیح قبل از x، به محور اعداد نگاه کنید ...



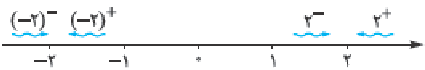
وقتی x عدد صحیح است، براکتِ x می‌شود x.

وقتی x عدد صحیح نیست، بزرگ‌ترین عدد صحیح قبل از x را اعلام می‌کنیم؛ یعنی عدد صحیحی که روی محور اعداد، در سمت چپ x قرار دارد.

$$[-\pi] = -4\ ,\ [-\sqrt{6}] = -3\ ,\ [-1/6] = -2\ ,\ [\cos 100^\circ] = -1$$

$$[\sin 50^\circ] = 0\ ,\ [\sqrt{2}] = 1\ ,\ [1+\sqrt{3}] = 2\ ,\ [\pi] = 3$$

اشاره در حد به براکت اعداد از سمت چپ و راست برخورد می‌کنیم. این‌ها را ببینید:



داریم: $[(-2)^-] = -3\ ,\ [(-2)^+] = -2\ ,\ [2^-] = 1\ ,\ [2^+] = 2$

اشاره یک تعریف دیگر برای براکت با استفاده از حدود عدد است، این‌جوری:

$$n \le x < n+1 \Leftrightarrow [x] = n$$

یعنی اگر عدد حقیقی x بین دو عدد صحیح متوالی باشد، $[x]$ برابر عدد صحیح کوچک‌تر است.

؟ اگر $[\frac{x+۱}{۲}]=۳$ و $[\frac{x+۲}{۳}]=۲$، حدود مقادیر x کدام بازه است؟

۱) $[۴,۷)$ ۲) $[۴,۵)$ ۳) $[۵,۷)$ ۴) $[۶,۹)$

= گزینهٔ «۳» این‌جوری باید بنویسید:

الف) $[\frac{x+۲}{۳}]=۲ \Rightarrow ۲\leq\frac{x+۲}{۳}<۳ \xrightarrow{\times ۳} ۶\leq x+۲<۹ \Rightarrow ۴\leq x<۷$

ب) $[\frac{x+۱}{۲}]=۳ \Rightarrow ۳\leq\frac{x+۱}{۲}<۴ \xrightarrow{\times ۲} ۶\leq x+۱<۸ \Rightarrow ۵\leq x<۷$

و از اشتراک این‌ها داریم: $۵\leq x<۷$

اشاره گاهی اوقات زحمت تعیین مقدار تقریبی را باید بکشیم.

؟ حاصل $[\log_۲ ۲۰]+[\sqrt{۴۱}]+[-۲\sqrt[۳]{۲}]$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۸ ۳) ۶ ۴) ۷

= گزینهٔ «۴» این برای اولی:

$$\sqrt{۳۶}<\sqrt{۴۱}<\sqrt{۴۹} \Rightarrow ۶<\sqrt{۴۱}<۷ \Rightarrow [\sqrt{۴۱}]=۶$$

برای $-۲\sqrt[۳]{۲}$ این را ببینید: $-۲\sqrt[۳]{۲}=-\sqrt[۳]{۲^۳\times ۲}=-\sqrt[۳]{۱۶}$

حالا: $\underbrace{-\sqrt[۳]{۸}}_{-۲}>-\sqrt[۳]{۱۶}>\underbrace{-\sqrt[۳]{۲۷}}_{-۳} \Rightarrow [-\sqrt[۳]{۱۶}]=-۳$

برای سومی هم داریم: $\underbrace{\log_۲ ۱۶}_{\text{این ۴ است}}<\log_۲ ۲۰<\underbrace{\log_۲ ۳۲}_{\text{این ۵ است}} \Rightarrow [\log_۲ ۲۰]=۴$

پس جواب می‌شود $-۳+۶+۴=۷$

یک مدل دیگر هم ببینید:

؟ برای اعداد طبیعی و سه‌رقمی n، حاصل $[\frac{۲n+۱}{n+۱}]-[\sqrt{n^۲+۳n+۲}]$ کدام است؟

۱) n ۲) $n+۱$ ۳) $n-۲$ ۴) $n-۱$

= گزینهٔ «۱» برای $\sqrt{n^۲+۳n+۲}$ دنبال دوتا عبارت می‌گردیم که $n^۲+۳n+۲$ بین آن‌ها باشد و هر دو جذر داشته باشند. به اتحادها نگاه کنید:

$$(n+۱)^۲=n^۲+۲n+۱$$

$$(n+۲)^۲=n^۲+۴n+۴$$

دقیقاً $n^۲+۳n+۲$ بین این‌ها است.

پس: $\underbrace{\sqrt{n^۲+۲n+۱}}_{n+۱}<\sqrt{n^۲+۳n+۲}<\underbrace{\sqrt{n^۲+۴n+۴}}_{n+۲}$

و براکتش می‌شود: $n+۱$

برای $\frac{۲n+۱}{n+۱}$ هم این‌طوری بنویسیم: $\frac{۲(n+۱)-۱}{n+۱}=۲-\frac{۱}{n+۱}$

خب مقدار این عبارت کمی از ۲ کم‌تر است (به اندازهٔ $\frac{۱}{n+۱}$ از ۲ کم‌تر است). پس براکتش می‌شود ۱ و داریم: جواب: $n+۱-۱=n$

خواص جزءصحیح (براکت)

۱ عدد صحیح از براکت خارج می‌شود: $[x \pm k] \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} [x]\pm k$

مثلاً: $[۲-x]=۲+[-x]$ یا $[x+۱]=[x]+۱$

و از همه جالب‌تر: $[x+[x]]=[x]+[x]=۲[x]$

۲ همواره داریم: $x-۱<[x]\le x$

یعنی مقدار جزءصحیح x هرگز از x بیشتر نیست.

۳ برای اعداد صحیح x است $[x]=x$، برای سایر اعداد هم $[x]$ عددی صحیح است.

پس مثلاً معادلهٔ $[x]=\frac{۱}{۲}$ ریشه ندارد؛ یا معادلهٔ $x^۲+[x]=۶$ فقط جواب صحیح دارد (چرا؟)

۴ اگر عدد را منهای براکتش کنیم، قسمت کسری (قسمت اعشاری) عدد به دست می‌آید. این‌جوری:

جزء اعشاری $x = x-[x]$

حاصل آن همیشه بین ۰ و ۱ است.

ببینید: $\underbrace{۰/۶}_{\text{جزء اعشاری}} + \underbrace{۵}_{\text{جزء صحیح}} = ۵/۶$ ، $\underbrace{۰/۴}_{\text{جزء اعشاری}} + \underbrace{-۲}_{\text{جزء صحیح}} = -۱/۶$

اشاره دقت کردید؟ برای اعداد منفی، جزء اعشاری همان چیزی که می‌بینیم نیست.

۵ $[-x]$ برابر است با:
$$[-x]=\begin{cases}-[x] & x\in\mathbb{Z}\\ -[x]-۱ & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

پس داریم:
$$[x]+[-x]=\begin{cases}۰ & x\in\mathbb{Z}\\ -۱ & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

؟ از معادلهٔ $۳x^۲+۴x=\frac{۱}{[x]+[-x]}$ چند جواب برای x وجود دارد؟

۱) یک جواب مثبت ۲) یک جواب منفی ۳) دو جواب منفی ۴) دو جواب مثبت

= گزینهٔ «۲» برای xهای صحیح، مخرج سمت راست صفر است که به درد نمی‌خورد.

برای xهای غیرصحیح مخرج سمت راست ۱- است و داریم:

$$۳x^۲+۴x=\frac{۱}{-۱} \Rightarrow ۳x^۲+۴x+۱=۰$$

$$\xrightarrow{b=a+c} \begin{cases}x_۱=-۱\\ x_۲=-\frac{۱}{۳}\end{cases} \xrightarrow{x\notin\mathbb{Z}} x=-\frac{۱}{۳}$$

؟ برد تابع $f(x)=x-۳[\frac{x}{۳}]$ کدام بازه است؟

۱) $[۰,۱)$ ۲) $[۰,۳)$ ۳) $[۰,\frac{۱}{۳})$ ۴) $[۱,۳)$

= گزینهٔ «۲» اگر از ۳ فاکتور بگیریم داریم:

$$y=۳(\underbrace{\frac{x}{۳}-[\frac{x}{۳}]}_{\text{همیشه بین صفر و ۱ است}}) \Rightarrow ۳\times۰\le y<۳\times۱ \Rightarrow ۰\le y<۳ \Rightarrow R_f=[۰,۳)$$

از معادلهٔ $[x+\frac{۲}{۳}]+[x-\frac{۱}{۳}]=۱۱$، حاصل $[\frac{۲۰}{x}]$ چند مقدار مختلف دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

گزینهٔ «۱» این کمی دقت می‌خواهد:

$$x+\frac{۲}{۳}=(x-\frac{۱}{۳})+۱$$

پس:

$$[x-\frac{۱}{۳}]+[x+\frac{۲}{۳}]=[x-\frac{۱}{۳}]+[x-\frac{۱}{۳}+۱]$$

$$\xrightarrow{\text{عدد صحیح بیرون آید}} =[x-\frac{۱}{۳}]+[x-\frac{۱}{۳}]+۱$$

$$=۲[x-\frac{۱}{۳}]+۱=۱۱ \Rightarrow [x-\frac{۱}{۳}]=۵ \Rightarrow ۵\le x-\frac{۱}{۳}<۶ \Rightarrow \frac{۱۶}{۳}\le x<\frac{۱۹}{۳}$$

$$\Rightarrow \frac{۳}{۱۶}\ge\frac{۱}{x}>\frac{۳}{۱۹} \xrightarrow{\times ۲۰} \frac{۶۰}{\underbrace{۱۶}_{\text{۳ و خرده‌ای}}}\ge\frac{۲۰}{x}>\frac{۶۰}{\underbrace{۱۹}_{\text{۳ و خرده‌ای}}} \Rightarrow [\frac{۲۰}{x}]=۳$$

یعنی فقط یک مقدار دارد.

اگر $f(x)=[x]+[۲-x]$ و $g(x)=x^۲+x$، آن‌گاه مجموع اعضای برد gof چند برابر مجموع اعضای برد fog است؟

۱) -۲ ۲) $-\frac{۸}{۳}$ ۳) $\frac{۸}{۳}$ ۴) ۲

گزینهٔ «۳» f را می‌شناسیم:

$$f(x)=[x]+[۲-x]=[x]+۲+[-x]$$

$$=\underbrace{[x]+[-x]}_{\text{۰ یا ۱-}}+۲=\begin{cases}۰+۲ & x\in\mathbb{Z}\\ -۱+۲ & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}=\begin{cases}۲ & x\in\mathbb{Z}\\ ۱ & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

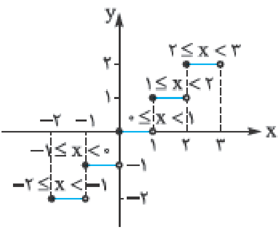
پس:

$$f(g(x))=\begin{cases}۲ & g(x)\in\mathbb{Z}\\ ۱ & g(x)\notin\mathbb{Z}\end{cases}=\begin{cases}۲ & x^۲+x\in\mathbb{Z}\\ ۱ & x^۲+x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$g(f(x))=\begin{cases}g(۲) & x\in\mathbb{Z}\\ g(۱) & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}=\begin{cases}۶ & x\in\mathbb{Z}\\ ۲ & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

جمع عناصر برد fog برابر $۲+۱=۳$ و جمع اعضای برد gof برابر $۶+۲=۸$ است و نسبت این‌ها می‌شود $\frac{۸}{۳}$.

نمودارهای براکتی

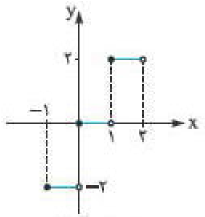


اول نمودار خود $y=[x]$:

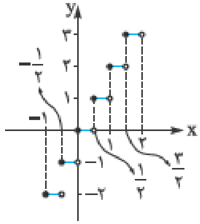
دامنهٔ آن $\mathbb{R}$ و بردش $\mathbb{Z}$ است.

صعودی است اما صعودی اکید نیست.

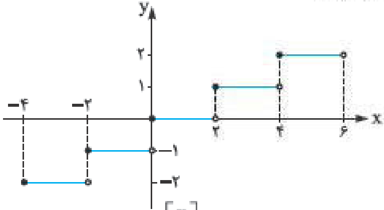
با کمک قوانین انتقال نمودار مثلاً می‌توانیم $f(x)=[۲x]$ یا $f(x)=[\frac{x}{۲}]$ یا $f(x)=۲[x]$ را بکشیم:



$f(x)=۲[x]$
(yها دو برابر می‌شوند.)

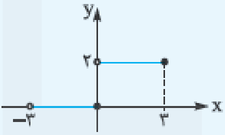


$f(x)=[۲x]$
(xها نصف می‌شوند.)



$f(x)=\left[\frac{x}{2}\right]$
(طول‌ها دو برابر می‌شوند.)

شکل روبه‌رو نمودار کدام تابع است؟



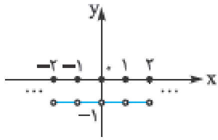
۱) $2[\frac{x}{3}]$ ۲) $-2[\frac{x}{3}]$

۳) $2[-\frac{x}{3}]$ ۴) $-2[-\frac{x}{3}]$

گزینهٔ «۴» طول پله‌ها ۳ است، پس xها ۳ برابر شده و حتماً درون براکت $\frac{1}{3}x$ داریم. عرض پلهٔ اول ۲ شده، پس حتماً ضریب ۲ داریم. با کمی دقت، نمودار در مقایسه با $y=[x]$ هم نسبت به محور x و هم نسبت به محور y آینه شده پس ۴ مناسب است.

$f(1)$ عددی مثبت است پس ۱، ۲ و ۳ نیستند. در ۱ و ۲ مقدار $f(1)$ صفر است و در ۳ منفی است.

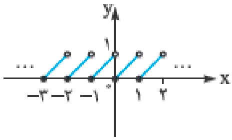
نمودارهای $y=x-[x]$ و $y=[x]+[-x]$ را حفظ باشید:



$y=[x]+[-x]$

$D=\mathbb{R}, R=\{-1,0\}$

$T=1$



$y=x-[x]$

$D=\mathbb{R}, R=[0,1)$

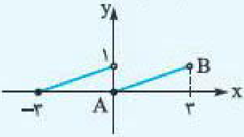
$T=1$ و متناوب

طول هر یک از پاره‌خط‌ها $\sqrt{2}$ است.

؟ در نمودار $y=\frac{x}{۲}-[\frac{x}{۲}]$ طول هر پاره‌خط چه‌قدر است؟

۱) ۳　　۲) $۳\sqrt{۲}$　　۳) $\sqrt{۱۰}$　　۴) $۲\sqrt{۳}$

= گزینهٔ «۳» باید در $y=x-[x]$ طول‌ها را ۳ برابر کرد.

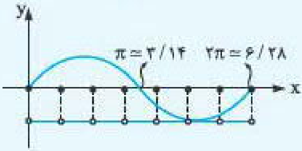


$$A(۰,۰)\ ,\ B(۳,۱)\ \Rightarrow\ \ell=AB=\sqrt{۳^۲+۱^۲}=\sqrt{۱۰}$$

؟ نمودارهای $y=[x]+[-x]$ و $y=\sin x$ در $[۰,۲\pi]$ در چند نقطه مشترک‌اند؟

۱) صفر　　۲) ۱　　۳) ۲　　۴) بی‌شمار

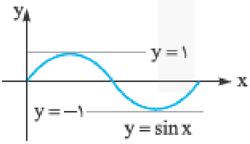
= گزینهٔ «۳»



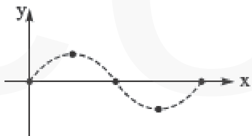
دو نمودار در $(۰,۰)$ و $(\frac{۳\pi}{۲},-۱)$ مشترک‌اند؛ یعنی در ۲ نقطه.

رسم نمودار $y=[f(x)]$

اول نمودار $y=f(x)$ را رسم می‌کنیم، سپس در این نمودار خط‌های افقی $y=۱$، $y=۲$، ...، $y=-۱$، $y=-۲$، ... را می‌کشیم ($y=۰$ هم که خودبه‌خود رسم شده! همان محور xها است). نقاط تلاقی را پررنگ کرده و سپس قسمتی از نمودار f را که بین دو خط افقی است روی خط زیری تصویر می‌کنیم:

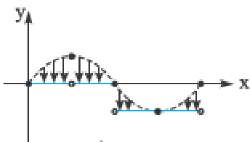


$\Rightarrow$



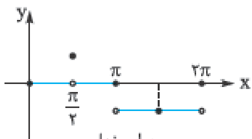
نقاط تلاقی پررنگ

$\Rightarrow$



تصویر می‌کنیم
(زیر نقطهٔ توپر، توخالی می‌گذاریم)

$\Rightarrow$



جواب نهایی

اشاره حالا به این سؤالات جواب می‌دهیم:

۱ نمودار $y=[\sin x]$ در فاصلهٔ $۰\le x\le ۲\pi$ از چند پاره‌خط و چند نقطهٔ مجزا ساخته شده است؟

سه پاره‌خط و ۲ نقطه

۲ طول بلندترین پاره‌خط؟　　$۲\pi-\pi=\pi$

۳ برد تابع $y=[\sin x]$؟　　$\{۰,۱,-۱\}$

اشاره نمودار $y=[f(x)]$ در نقاطی که مقدار $f(x)$ صحیح می‌شود با خط‌های افقی برخورد می‌کند و خطر ناپیوستگی دارد (اگر f در آن نقطه به شکل مینیمم یا ماکزیمم نباشد، ناپیوسته است).

پس مثلاً $y=[\frac{x+۱}{۳}]$ در $x=۲$ پیوسته نیست (مقدار توی براکت صحیح است)؛ اما در $x=۱$ پیوسته است.

در کدام نقطه هر دو تابع $f(x)=[\log_۲ x]$ و $f(x)=[\sqrt{x+۱}]$ پیوسته‌اند؟

۱) ۸ ۲) ۳ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱۰

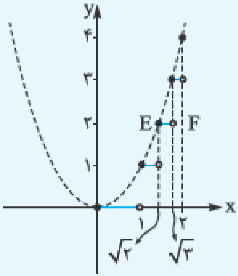
گزینهٔ «۴» باید نقطه‌ای را انتخاب کرد که $\log_۲ x$ و $\sqrt{x+۱}$ صحیح نشوند، پس ۸ اصلاً خوب نیست. ۳ و $\frac{۱}{۲}$ هم خوب نیستند: $\log_۲ ۸=۳$, $\log_۲ \frac{۱}{۲}=-۱$, $\sqrt{۳+۱}=۲$

اما ۱۰ خوب است و هیچ‌کدام را صحیح نمی‌کند.

در نمودار $y=[x^۲]$ طول سومین پاره‌خط در xهای مثبت کدام است؟

۱) ۵ ۲) $\sqrt{۵}$ ۳) $\sqrt{۲}-۱$ ۴) $\sqrt{۳}-\sqrt{۲}$

گزینهٔ «۴» شکل را ببینید. در xهای $\pm\sqrt{k}\ (k\in\mathbb{N})$ پرش داریم؛ بنابراین:



$$EF=\sqrt{۳}-\sqrt{۲}$$

معادلهٔ درجه‌دوم

برای حل معادلهٔ درجه‌دوم $ax^2 + bx + c = 0$ راه‌های زیر را داریم:

الف) اگر $a + b + c = 0$ باشد، یک ریشه ۱ و دیگری $\frac{c}{a}$ است.

$$2x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$2 + (-3) + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1 , x_2 = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$$

ب) اگر $a + c = b$ باشد، یک ریشه -1 و دیگری $-\frac{c}{a}$ است.

$$2x^2 + 5x + 3 = 0$$

$$2 + 3 = 5 \Rightarrow x_1 = -1 , x_2 = -\frac{c}{a}$$

پ) اگر $a = 1$ باشد، سعی می‌کنیم معادله را به صورت $(x + \cdots)(x + \cdots) = 0$ درآوریم.

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

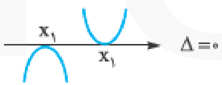
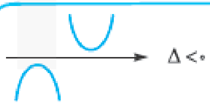
$$(x - 3)(x - 4) = 0 \Rightarrow x_1 = 3 , x_2 = 4$$

ت) حل کلی به روش دلتا:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

حالت‌های مختلف در روش دلتا

		
معادله دو ریشهٔ حقیقی و متمایز دارد و به صورت زیر تجزیه می‌شود. $a(x - x_1)(x - x_2)$	معادله یک ریشهٔ مضاعف (دو ریشهٔ یکسان) دارد: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ و به صورت $a(x - x_1)^2$ تجزیه می‌شود.	معادله ریشهٔ حقیقی ندارد و تجزیه نمی‌شود.

؟ به ازای چند مقدار صحیح m، معادلهٔ $x^2 + 3x + m^2 = 0$ دارای ۲ ریشهٔ حقیقی متمایز است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

گزینهٔ «۳» باید دلتای معادله مثبت باشد:

$$\Delta = 3^2 - 4(1)(m^2) = 9 - 4m^2 > 0 \Rightarrow m^2 < \frac{9}{4} \xrightarrow{\text{m صحیح است.}} m = \pm 1, 0$$

پس سه مقدار صحیح برای m است.

جمع و ضرب ریشه‌ها

وقتی $\Delta > ۰$ است و معادله دو ریشهٔ حقیقی دارد، مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها را می‌توان بدون حل معادله پیدا کرد: $ax^۲ + bx + c = ۰$

$$S = x_۱ + x_۲ = -\frac{b}{a} \quad , \quad P = x_۱x_۲ = \frac{c}{a}$$

از روی علامت S و P می‌توانیم، در مورد ریشه‌ها نظر بدهیم.

$P = -۱$ دو ریشه عکس و قرینهٔ هم	$P < ۰$ $S = ۰$ دو ریشه قرینهٔ هم	$P = ۱$ $\Delta > ۰$ دو ریشه عکس هم	$P < ۰$ دو ریشهٔ مختلف‌العلامت	$\Delta > ۰$ $S < ۰$ $P > ۰$ دو ریشهٔ منفی	$\Delta > ۰$ $S > ۰$ $P > ۰$ دو ریشهٔ مثبت
				وقتی $P > ۰$ دو ریشه هم‌علامت‌اند.	

❓ هر دو ریشهٔ معادلهٔ $۲x^۲ + mx + m + ۶ = ۰$ اعداد مثبت‌اند. m در کدام بازه است؟

۱) $(-۱۲, -۶)$ ۲) $(-۶, ۰)$ ۳) $(-۶, -۴)$ ۴) $(-۴, ۰)$

✅ گزینهٔ «۳» $S = -\frac{b}{a} = -\frac{m}{۲} > ۰ \Rightarrow m < ۰ \, , P = \frac{c}{a} = \frac{m+۶}{۲} > ۰ \Rightarrow m > -۶$

$$\Delta = b^۲ - ۴ac = m^۲ - ۴(m+۶)(۲) = m^۲ - ۸m - ۴۸ > ۰$$

$$\Rightarrow (m-۱۲)(m+۴) > ۰ \xrightarrow{\text{خارج دو ریشه}} \begin{cases} m > ۱۲ \\ m < -۴ \end{cases}$$

از اشتراک سه شرط داریم: $-۶ < m < -۴$

اشاره اگر بین دو ریشه، رابطه‌ای بدهند، می‌توانیم از S و P کمک بگیریم.

❓ در معادلهٔ $x^۲ - ۱۴x + k = ۰$ یک ریشه ۲ واحد بیشتر از ۳ برابر ریشهٔ دیگر است. k کدام است؟

۱) ۳۳ ۲) ۳۲ ۳) ۳۰ ۴) ۳۱

✅ گزینهٔ «۱»

$$\left.\begin{aligned} x_۱ &= ۳x_۲ + ۲ \\ S = x_۱ + x_۲ &= ۱۴ \end{aligned}\right\} \Rightarrow (۳x_۲ + ۲) + x_۲ = ۱۴$$

$$\Rightarrow ۴x_۲ = ۱۲ \Rightarrow x_۲ = ۳ \Rightarrow x_۱ = ۱۱ \quad , \quad P = x_۱x_۲ = k = ۱۱ \times ۳ = ۳۳$$

روابط متقارن ریشه‌ها

اختلاف ریشه‌ها	مجموع جذر ریشه‌ها	مجموع مکعبات ریشه‌ها	مجموع مربعات ریشه‌ها
$\lvert x_۱ - x_۲ \rvert = \sqrt{S^۲ - ۴P}$	$\sqrt{x_۱} + \sqrt{x_۲} = \sqrt{S + ۲\sqrt{P}}$	$x_۱^۳ + x_۲^۳ = S^۳ - ۳PS$	$x_۱^۲ + x_۲^۲ = S^۲ - ۲P$
مثال: $\lvert x_۱ - x_۲ \rvert = \sqrt{۶^۲ - ۴(۲)} = \sqrt{۲۸}$	مثال: $\sqrt{x_۱} + \sqrt{x_۲} = \sqrt{۶ + ۲\sqrt{۲}}$	مثال: $x_۱^۳ + x_۲^۳ = ۶^۳ - ۳(۶)(۲) = ۱۸۰$	مثال: $x_۱^۲ + x_۲^۲ = ۶^۲ - ۲ \times ۲ = ۳۲$

در معادلهٔ $x^۲ - ۶x + ۲ = ۰$ داریم: $P = ۲$ و $S = ۶$.

اشاره برای $|x_۱ - x_۲|$ یک فرمول دیگر هم هست: $|x_۱ - x_۲| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$

البته این فرمول خیلی پرکاربرد نیست!

? در معادلهٔ $۲x^۲ - ۳x - ۱ = ۰$ ریشه‌ها را α و β می‌نامیم. حاصل $|\alpha^۲ - \beta^۲|$ کدام است؟

۱) $\frac{۳\sqrt{۱۷}}{۴}$ ۲) $\frac{\sqrt{۱۷}}{۴}$ ۳) $\frac{\sqrt{۱۷}}{۲}$ ۴) $\frac{۳\sqrt{۱۷}}{۲}$

گزینهٔ «۱» از اتحاد مزدوج داریم:

$$|\alpha^۲ - \beta^۲| = |\alpha - \beta||\alpha + \beta|$$

حالا $\alpha - \beta$ و $\alpha + \beta$ را حساب می‌کنیم:

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = +\frac{۳}{۲}$$

$$P = \alpha\beta = -\frac{۱}{۲}$$

$$|\alpha - \beta| = \sqrt{S^۲ - ۴P} = \sqrt{(\frac{۳}{۲})^۲ - ۴(-\frac{۱}{۲})} = \sqrt{\frac{۹}{۴} + ۲} = \frac{\sqrt{۱۷}}{۲}$$

پس جواب می‌شود:

$$\frac{۳}{۲} \times \frac{\sqrt{۱۷}}{۲} = \frac{۳\sqrt{۱۷}}{۴}$$

اشاره وقتی صحبت از ۲ ریشه می‌شود، حواستان به دلتای معادله هم باشد.

? در معادلهٔ $m^۲ = x^۲ + ۲mx + ۳$، مجموع معکوس دو ریشه ۱ است. m کدام است؟

۱) ۱− یا ۳ ۲) فقط ۱− ۳) فقط ۳ ۴) نشدنی

گزینهٔ «۳»

$$\frac{۱}{x_۱} + \frac{۱}{x_۲} = \frac{x_۱ + x_۲}{x_۱x_۲} = \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = -\frac{b}{c} = \frac{-۲m}{۳ - m^۲} = ۱$$

$$\Rightarrow ۳ - m^۲ = -۲m \Rightarrow m^۲ - ۲m - ۳ = ۰ \Rightarrow m = -۱ \text{ یا } ۳$$

اما دقت کنید که معادله باید دو ریشه داشته باشد، پس شرط $\Delta > ۰$ را هم باید کنترل کرد:

$$m = ۳ \Rightarrow x^۲ + ۶x + ۳ = ۹ \Rightarrow x^۲ + ۶x - ۶ = ۰ \Rightarrow \Delta > ۰ \text{ ق ق}$$

$$m = -۱ \Rightarrow x^۲ - ۲x + ۳ = ۱ \Rightarrow x^۲ - ۲x + ۲ = ۰ \Rightarrow \Delta < ۰ \text{ غ ق ق}$$

پس فقط $m = ۳$ قبول است.

ساختن معادلهٔ درجه‌دوم

اگر S و P را داشته باشیم، معادلهٔ درجه‌دوم به صورت $x^۲ - Sx + P = ۰$ خواهد بود. مثال ببینید:

الف	ب	پ
$S = ۲, P = -۳$ $\Rightarrow x^۲ - ۲x - ۳ = ۰$	$x_۱ = ۱ - \sqrt{۷}$ $x_۲ = ۱ + \sqrt{۷}$ $\Rightarrow S = ۲, P = -۶$ $\Rightarrow x^۲ - ۲x - ۶ = ۰$	$x_۱ = \tan\frac{\pi}{۸}$ $x_۲ = \cot\frac{\pi}{۸}$ $\Rightarrow P = ۱, S = \frac{۲}{\sin\frac{\pi}{۴}} = ۲\sqrt{۲}$ $\Rightarrow x^۲ - ۲\sqrt{۲}x + ۱ = ۰$

اشاره در مورد از فصل مثلثات به یاد دارید که $\tan\alpha + \cot\alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}$.

در اکثر سؤالات ریشه‌های معادلهٔ جدید را برحسب ریشه‌های یک معادلهٔ دیگر می‌دهند.

مثلاً در معادلهٔ $x^2 - 2x - 4 = 0$ ریشه‌ها را α و β می‌نامیم. واضح است که $\alpha\beta = -4$ و $\alpha + \beta = 2$.

حالا معادله‌ای با ریشه‌های مقابل می‌سازیم: ★ $x_1 = \alpha\beta^2$ و $x_2 = \beta\alpha^2$

$$S = \alpha\beta^2 + \beta\alpha^2 = \underbrace{\alpha\beta}_{-4}\underbrace{(\alpha+\beta)}_{2} = -8$$

$$P = \alpha\beta^2 \times \beta\alpha^2 = (\alpha\beta)^3 = (-4)^3 = -64 \Rightarrow x^2 + 8x - 64 = 0$$

ریشه‌های جدید از عکس ریشه‌های قبلی یک واحد بیشترند: ★ $x_1 = \frac{1}{\alpha} + 1$ و $x_2 = \frac{1}{\beta} + 1$

$$S = \frac{1}{\alpha} + 1 + \frac{1}{\beta} + 1 = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} + 2 = \frac{3}{2}$$

$$P = (\frac{1}{\alpha} + 1)(\frac{1}{\beta} + 1) = \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} + 1 = \frac{1}{4} \Rightarrow x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4} = 0$$

★ $x_1 = 2\alpha - 1$ و $x_2 = 2\beta - 1$

بیان فارسی: ریشه‌های جدید از دو برابر ریشه‌های اولیه یک واحد کم‌ترند.

$$S = 2\alpha - 1 + 2\beta - 1 = 2\underbrace{(\alpha+\beta)}_{2} - 2 = 2$$

$$P = (2\alpha - 1)\times(2\beta - 1) = 4\underbrace{\alpha\beta}_{-4} - 2\underbrace{(\alpha+\beta)}_{2} + 1 = -19 \Rightarrow x^2 - 2x - 19 = 0$$

به ازای کدام مقدار k، ریشه‌های معادلهٔ $x^2 - kx + 16 = 0$ مجذور ریشه‌های معادلهٔ $x^2 - 6x + 4 = 0$ هستند؟

۱) ۳۶ ۲) ۳۲ ۳) ۲۸ ۴) ۲۴

گزینهٔ «۳» ریشه‌های $x^2 - 6x + 4 = 0$، را α و β می‌نامیم و داریم:

$\alpha\beta = 4, \alpha + \beta = 6$

حالا معادلهٔ جدید، ریشه‌های $x_1 = \alpha^2$ و $x_2 = \beta^2$ دارد؛ پس جمع و ضرب ریشه‌های آن برابر است با:

$x_1 + x_2 = \alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P = 6^2 - 2(4) = 36 - 8 = 28$

$x_1 x_2 = \alpha^2\beta^2 = P^2 = 4^2 = 16$

پس در معادلهٔ جدید باید $S = 28$ باشد، یعنی $k = 28$.

معادلات شبه درجه‌دوم

این معادله‌ها در نگاه اول شبیه درجه‌دوم نیستند، ولی اگر عبارت مناسبی را برابر t در نظر بگیریم؛ معادله تبدیل به درجه‌دوم می‌شود و می‌توانیم آن را حل کنیم. البته بعد از به دست آوردن t، باید عبارتش را به جای t قرار بدهیم و x را پیدا کنیم.

شبیه این سؤال‌ها در معادلهٔ نمایی و مثلثاتی هم می‌آیند.

الف

$$x^4-7x^2+12=0 \xrightarrow{x^2=t} t^2-7t+12=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t=x^2=3 \\ t=x^2=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\pm\sqrt{3} \\ x=\pm 2 \end{cases}$$

ب

$$(x^2-x)^2-(x^2-x)-12=0 \xrightarrow{x^2-x=t} t^2-t-12=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t=x^2-x=-3 \\ t=x^2-x=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta<0 \ \text{نشدنی} \\ x=\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

پ

$$4^x-2^{x+2}-21=0 \xrightarrow{2^x=t} t^2-4t-21=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t=2^x=7 \\ t=2^x=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\log_2 7 \\ \text{نشدنی} \end{cases}$$

ت

$$2\cos^2 x-\cos x-3=0 \xrightarrow{\cos x=t} 2t^2-t-3=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t=\cos x=-1 \\ t=\cos x=\dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\pi+2k\pi \\ \text{نشدنی} \end{cases}$$

جواب a^x هرگز صفر یا منفی نیست. مقدار سینوس و کسینوس نیز همیشه بین ۱ و ۱− است.

در معادلهٔ $x^4-6x^2+4=0$ تعداد ریشه‌ها ....، جمع آن‌ها .... و جمع مربعاتشان .... است.

۱) ۲،۰،۶ ۲) ۲،۶،۱۲ ۳) ۴،۰،۱۲ ۴) ۴،۰،۶

گزینهٔ «۴» اگر x^2 را t بگیریم به، معادلهٔ $t^2-6t+4=0$ می‌رسیم که برای t دو ریشهٔ مثبت دارد. پس داریم:

$$t_1=x^2 \Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{t_1}$$

$$t_2=x^2 \Rightarrow x_{3,4}=\pm\sqrt{t_2}$$

یعنی معادله ۴ ریشه دارد، این ریشه‌ها دوبه‌دو عدد قرینه هستند، پس مجموع آن‌ها صفر می‌شود. مجموع مربعات ریشه‌ها برابر است با:

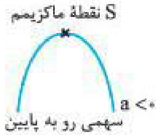
$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=(\sqrt{t_1})^2+(-\sqrt{t_1})^2+(\sqrt{t_2})^2+(-\sqrt{t_2})^2$$

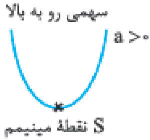
$$=t_1+t_1+t_2+t_2=2(t_1+t_2)$$

در معادلهٔ $t^2-6t+4=0$ جمع ریشه‌ها ۶ است، پس جواب می‌شود $2\times 6=12$.

تابع درجه‌دوم

تابع با ضابطهٔ $y = ax^{2} + bx + c$ را (با شرط $a \neq 0$) یک تابع درجه‌دوم می‌نامیم که نمودارش به شکل سهمی است.





مختصات رأس سهمی $S(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$ است. البته به جای حفظ‌کردن فرمول برای y_S، می‌توانیم x_S را در معادله قرار دهیم.

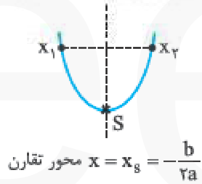
$$y = 2x^{2} - 4x + 1$$

$$x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2(2)} = 1 \quad , \quad y_S = y(1) = 2 - 4 + 1 = -1$$

این سهمی رو به بالا است (چون $a > 0$) و مختصات رأس آن $S(1, -1)$ است.

اشاره معادلهٔ محور تقارن سهمی $x = x_S = -\frac{b}{2a}$ است. محور تقارن بر سهمی عمود است و از S می‌گذرد.

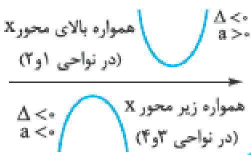
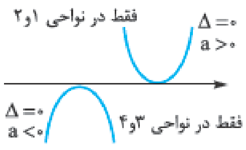
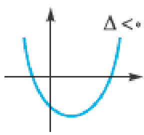
منظور از محور تقارن این است که دو نقطهٔ هم‌عرض سهمی، نسبت به x_S متقارن‌اند.



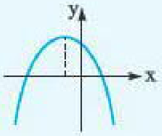
$$x_S = -\frac{b}{2a} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

اشاره سهمی، محور yها را در نقطهٔ $(0, c)$ قطع می‌کند.

برای بررسی قرارگیری سهمی در صفحهٔ مختصات، باید به Δ و علامت ریشه‌ها نگاه کرد.

الف اگر $\Delta < 0$ باشد، سهمی فقط در ۲ ناحیه است. 	**ب** اگر $\Delta = 0$، سهمی بر محور x مماس است و فقط از ۲ ناحیه رد می‌شود. 	**پ** اگر $\Delta > 0$ باشد، در حالت $P < 0$، سهمی حتماً از ۴ ناحیه می‌گذرد و محور x را در دو نقطهٔ چپ و راست مبدأ قطع می‌کند. 	**ت** اگر $\Delta > 0$ و $P \geq 0$ باشد، سهمی فقط از ۳ ناحیه می‌گذرد. باید به علامت a و علامت ریشه‌ها دقت کرد.

در سهمی روبه‌رو، چندتا از مقادیر a و b و c و Δ منفی است؟



۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

گزینهٔ «۲» سهمی رو به پایین است، پس $a < 0$.

دو ریشهٔ مختلف‌العلامت دارد، پس $\Delta > 0$ و $P < 0$ است. $P = \frac{c}{a} < 0 \xrightarrow{a<0} c > 0$

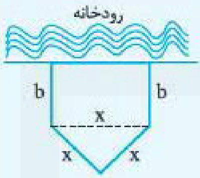
البته مثبت‌بودن c را از محل برخورد با محور yها هم می‌توانیم بفهمیم.

با توجه به شکل، جمع دو ریشه عددی منفی است، پس: $S = -\frac{b}{a} < 0$

یعنی فقط a و b (۲تا از مقادیر) منفی‌اند. $\xrightarrow{a<0} b < 0$

اشاره با استفاده از رأس سهمی، می‌توانیم بیشترین یا کم‌ترین مقدار تابع درجه‌دوم را در مسائل مختلف پیدا کنیم.

با طنابی به طول ۲۶ متر، می‌خواهیم زمین به شکل روبه‌رو را در حاشیهٔ رودخانه مشخص کنیم. اگر بخواهیم مساحت زمین ماکزیمم شود، x باید چه مقدار باشد؟



۱) $4+\sqrt{3}$ ۲) $4+2\sqrt{3}$

۳) $8+\sqrt{3}$ ۴) $8+2\sqrt{3}$

گزینهٔ «۴» مساحت زمین برابر است با: $S = bx + \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$

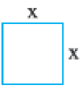
از طرفی طول طناب برابر $L = 2b + 2x = 26$ است، پس: $b = 13 - x$

بنابراین: $S = (13 - x)x + \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$ ، $S = (\frac{\sqrt{3}}{4} - 1)x^2 + 13x$

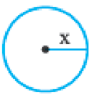
و مقدار S به ازای $x = -\frac{13}{2(\frac{\sqrt{3}}{4} - 1)}$ ماکزیمم است، فقط باید x را ساده کرد:

$$x = -\frac{13}{\frac{\sqrt{3}}{2} - 2}\,\frac{\times 2}{\times 2} = \frac{26}{4 - \sqrt{3}} \xrightarrow{\text{گویا کنیم}} \frac{26(4+\sqrt{3})}{16 - 3} = 2(4+\sqrt{3})$$

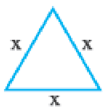
فرمول‌های مساحت را به خاطر دارید؟



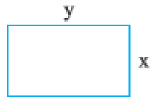
$S = x^2$



$S = \pi x^2$



$S = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$



$S = xy$

معادلات گویا

برای حل معادله‌های گویا دو طرف را در ک.م.م مخرج‌ها ضرب می‌کنیم. حالا یک معادلهٔ غیرکسری داریم و جواب‌هایش را پیدا می‌کنیم، فقط باید کنترل کنیم که ریشه‌ها، مخرج را صفر نکنند.

$$\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x}=\frac{6}{x^2+2x}$$

ک.م.م مخرج‌ها $x(x+2)$ است:

$$\xrightarrow{\times x(x+2)} x+(x+2)=6 \Rightarrow x=2$$

$$\frac{2x}{x^2-1}+\frac{3}{x^2-x}=\frac{1}{x+1}$$

ک.م.م مخرج‌ها $x(x-1)(x+1)$ است:

$$\Rightarrow 2x(x)+3(x+1)=x(x-1) \Rightarrow 2x^2+3x+3=x^2-x$$

$$\Rightarrow x^2+4x+3=0 \Rightarrow x=-1 \text{ یا } -3$$

اما فقط $x=-3$ قبول است، چون $x=-1$ مخرج را صفر می‌کند.

اشاره در بعضی از مسائل این قسمت، نیاز به مفهوم سرعت داریم. اگر متحرک، مسیری به طول d را با سرعت v طی کند، زمان این حرکت $t=\frac{d}{v}$ خواهد بود. در مسائل دیگری که صحبت از کارکردن چند شخص یا شیء یا ... با هم است، همیشه سراغ واحد زمان (مثلاً یک ساعت) بروید. مثال ببینید:

علی و دوستش با هم کاری را شش‌ساعته تمام می‌کنند. اگر علی به تنهایی کار کند ۲ ساعت زودتر از دوستش کار را تمام می‌کند. دوست علی به تنهایی در چه زمانی کار را انجام می‌دهد؟

۱) تقریباً ۱۱ ساعت
۲) تقریباً ۱۲ ساعت
۳) تقریباً ۱۳ ساعت
۴) تقریباً ۱۴ ساعت

گزینهٔ «۳» اگر دوست علی در x ساعت کار را تمام کند، علی در $x-2$ ساعت تمام می‌کند. پس این دو نفر در هر ساعت به ترتیب $\frac{1}{x}$ و $\frac{1}{x-2}$ از کار را انجام می‌دهند، یعنی در یک ساعت با هم $\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x}$ را انجام می‌دهند که طبق صورت سؤال $\frac{1}{6}$ کار است.

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-2}=\frac{1}{6} \xrightarrow{\times 6x(x-2)} 6(x-2)+6x=x(x-2)$$

$$\Rightarrow x^2-2x=12x-12 \Rightarrow x^2-14x+12=0 \Rightarrow x=7\pm\sqrt{37}$$

$\sqrt{37}$ تقریباً $6/1$ است و دوست علی نمی‌تواند در $7-\sqrt{37}$ ساعت تمام کند، چون جواب x باید از ۲ بیشتر باشد، پس فقط $7+\sqrt{37}$ یعنی تقریباً ۱۳ ساعت مورد قبول است.

معادلات گنگ (رادیکالی)

در معادلهٔ رادیکالی به شکل $\sqrt{P(x)}=Q(x)$ اولین کار نگاه به دامنه است. عبارت زیر رادیکال و جواب آن، هیچ‌کدام نمی‌توانند منفی باشند. پس شرط اولیهٔ مسئله $P\geq 0$ و $Q\geq 0$ است و هر جوابی که به دست آوردیم باید با این شرط‌ها کنترل شود.

اشاره جمع دو یا چند رادیکال، هیچ وقت منفی نیست و فقط وقتی صفر می‌شود که تمام آن‌ها هم‌زمان صفر باشند.

مثلاً معادلهٔ $\sqrt{۳x-۴}=۲-۳x$ جواب ندارد، چون عبارت زیر رادیکال برای $x \geq \frac{۴}{۳}$ مثبت است و عبارت سمت راست برای $x \leq \frac{۲}{۳}$ مثبت می‌شود و هیچ عددی هم‌زمان در این دو نامساوی صدق نمی‌کند.

معادلهٔ $\sqrt{۱-x^۲}+\sqrt{x-۳}=x$ نیز مشکلی مشابه دارد! در زیر رادیکال اول، باید $-۱\leq x \leq ۱$ باشد و برای رادیکال دوم $x \geq ۳$ باشد که با هم امکان ندارند.

معادلهٔ $\sqrt{x^۲-۱}+\sqrt{x^۲-x-۲}=۰$، فقط یک جواب $(x=-۱)$ دارد. چون فقط در -۱ هر دو عبارت زیر رادیکال‌ها، صفر هستند.

برای حل معادله‌های رادیکالی، باید رادیکال را در طرف چپ نگه داریم و سپس دو طرف را به توان ۲ برسانیم تا رادیکال از بین برود.

? **از معادلهٔ $\sqrt{۲x+۱}=x-۷$ جواب x چگونه است؟**

۱) فقط یک جواب مثبت
۲) دو جواب مثبت
۳) فاقد جواب
۴) دو جواب مختلف‌العلامت

= گزینهٔ «۱» $۲x+۱=(x-۷)^۲=x^۲-۱۴x+۴۹$

$$\Rightarrow x^۲-۱۶x+۴۸=۰ \Rightarrow (x-۴)(x-۱۲)=۰ \Rightarrow x=۴ \text{ یا } ۱۲$$

اما دقت کنید که $x=۴$ طرف راست را منفی می‌کند، پس فقط $x=۱۲$ قبول است.

اشاره اگر معادله، دوتا رادیکال داشته باشد، باید در دو مرحله آن را به توان ۲ برسانیم.

? **از معادلهٔ $\sqrt{۵x-۴}+\sqrt{x+۱}=۳$ مجموع خود جواب و جزءصحیح آن کدام است؟**

۱) ۲
۲) ۲/۷۵
۳) ۲/۵
۴) ۲/۲۵

= گزینهٔ «۴» اول $\sqrt{x+۱}$ را به طرف راست می‌بریم تا در طرف چپ، یک رادیکال تنها باشد:

$$\sqrt{۵x-۴}=۳-\sqrt{x+۱} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} ۵x-۴=۹-۶\sqrt{x+۱}+x+۱$$

$$\Rightarrow ۴x-۱۴=-۶\sqrt{x+۱} \xrightarrow{\div(-۲)} ۷-۲x=۳\sqrt{x+۱}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} ۴۹-۲۸x+۴x^۲=۹(x+۱)$$

$$\Rightarrow ۴x^۲-۳۷x+۴۰=۰ \Rightarrow (۴x-۵)(x-۸)=۰$$

$$\Rightarrow x=۸ \text{ یا } x=\frac{۵}{۴}$$

اما $x=۸$، طرف چپ معادلهٔ دوم را منفی می‌کند و قبول نیست، پس تنها جواب $x=\frac{۵}{۴}$ است و داریم:

$$\frac{۵}{۴}+[\frac{۵}{۴}]=۱/۲۵+۱=۲/۲۵$$

تعیین علامت

تعیین علامت عبارت درجه‌اول را به یاد دارید؟

x		$-\frac{b}{a}$	
$ax+b$	مخالف علامت a	۰	موافق علامت a

$-\frac{b}{a}$ ریشهٔ عبارت است. پس قبل از ریشه، مخالف علامت a و بعد از ریشه، موافق علامت a است.

راستی توان فرد و ریشهٔ فرد اثری روی علامت ندارند؛ اما توان زوج و قدرمطلق، تمام علامت‌ها را مثبت می‌کنند. ببینید.

x		$\frac{۵}{۲}$	
$۵-۲x$	+	۰	−

x		$\frac{۱}{۳}$	
$-۱+۳x$	−	۰	+

x		-۱	
$\sqrt[۳]{x+۱}$ یا $(x+۱)^۵$	−	۰	+

x		$\frac{۱}{۲}$	
$\|۲x-۱\|$ یا $(۲x-۱)^۴$	+	۰	+

اشاره در ضرب و تقسیم عبارت‌ها، علامت‌ها در هم ضرب می‌شوند.

? $P(x)=\frac{(x-۲)^۳x^۲}{(۱-۲x)\,|x+۱|}$ **در کدام بازه مثبت است؟**

۱) $(-۱,۰)$ ۲) $(۰,\frac{۱}{۲})$ ۳) $(\frac{۱}{۲},۲)$ ۴) $(۲,+\infty)$

= گزینهٔ «۳»

	x		-۱		۰		$\frac{۱}{۲}$		۲	
صورت	$(x-۲)^۳$	−		−		−		−	۰	+
	$x^۲$	+		+	۰	+		+		+
مخرج	$۱-۲x$	+		+		+	۰	−		−
	$\|x+۱\|$	+	۰	+		+		+		+
	$P(x)$	−	ن	−	۰	−	ن	+	۰	−

پس در $(\frac{۱}{۲},۲)$ مثبت است.

اشاره یک بار دیگر به دقت جدول را ببینید. عبارت $P(x)$ در ریشه‌های صورت کسر، صفر می‌شود و در ریشه‌های مخرج تعریف‌نشده می‌شود. در هر ستون علامت‌ها در هم ضرب می‌شوند. اگر ریشه، مربوط به عبارت توان زوج یا قدرمطلق باشد، علامت تغییر نمی‌کند.

❓ **به ازای کدام مقدار a، تعیین علامت عبارت $ax-\frac{۱}{a}$ به صورت مقابل است؟**

x		۴	
	−	۰	+

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\pm\frac{۱}{۲}$ ۴) نشدنی

گزینهٔ «۱» جدول می‌گوید a مثبت است و ریشهٔ عبارت $x=۴$ است؛ پس داریم:

$$\xrightarrow{x=۴} a(۴)-\frac{۱}{a}=۰ \Rightarrow ۴a=\frac{۱}{a} \Rightarrow a^۲=\frac{۱}{۴} \Rightarrow a=\pm\frac{۱}{۲} \xrightarrow{a>۰} a=\frac{۱}{۲}$$

❓ **نمودار $y=f(x)$ در شکل روبه‌رو داده شده است. $(x-۳)f(x)$ به ازای چند مقدار صحیح x مثبت است؟**

۱) صفر ۲) ۱
۳) ۲ ۴) ۳

گزینهٔ «۲» شکل می‌گوید علامت f این‌جوری است:

x		−۱		۱	
f(x)	+	۰	+	۰	−

علامت $x-۳$ را هم بلدیم:

x		۳	
x − ۳	−	۰	+

از ضرب این‌ها داریم:

x	−∞	−۱		۱		۳	
f(x)	+	۰	+	۰	−		−
x	−		−		+	۰	+
(x − ۳)f(x)	−	۰	−	۰	+	۰	−

پس فقط در بازهٔ $(۱,۳)$ مثبت است که در اعداد صحیح فقط شامل $x=۲$ می‌شود؛ یعنی به ازای ۱ عدد صحیح، مثبت است.

تعیین علامت عبارت درجه دوم

$$P(x)=ax^۲+bx+c$$

با توجه به علامت Δ سه حالت داریم:

$\Delta=۰$

x		$x_۱=x_۲$	
P(x)	موافق a	۰	موافق a

$\Delta>۰$

x		$x_۱$		$x_۲$	
P(x)	موافق a	۰	مخالف a	۰	موافق a

$\Delta<۰$

x	ندارد
P(x)	موافق a

پس این‌طوری شد:

$P(x)$ همواره مثبت است. $\Leftrightarrow$ $a>۰, \Delta<۰$

$P(x)$ همواره منفی است. $\Leftrightarrow$ $a<۰, \Delta<۰$

$P(x)$ همواره بیشتر یا مساوی صفر است. $\Leftrightarrow$ $a>۰, \Delta\le۰$

$P(x)$ همواره کم‌تر یا مساوی صفر است. $\Leftrightarrow$ $a<۰, \Delta\le۰$

؟ جدول مقابل مربوط به تعیین علامت کدام عبارت است؟

x		۲	
P	−	۰	−

۱) $-(x+۲)^۲$ ۲) $\dfrac{-۱}{(x-۲)^۲}$

۳) $-۲x+۴$ ۴) $۴x-x^۲-۴$

گزینهٔ «۴» این جدول مربوط به یک عبارت درجه‌دوم است نه درجه‌اول! پس ۳ نیست. ریشه‌اش ۲ بوده پس ۱ هم نیست. در $x=۲$ صفر شده پس ۲ هم نیست. بنابراین ۴ جواب است:

$$۴x-x^۲-۴=۰ \Rightarrow \Delta=۰$$

$$\Rightarrow x_۱=x_۲=۲ \xrightarrow{a<۰}$$

x		۲	
P	−	۰	−

؟ به ازای چند مقدار صحیح یک‌رقمی m، نمودار $f(x)=mx^۲-۴x+m$ همواره در زیر محور xها است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

گزینهٔ «۴» باید $\Delta<۰$ و $a<۰$ باشد:

$$\Delta=(-۴)^۲-۴(m)(m)=۱۶-۴m^۲<۰ \Rightarrow ۴m^۲>۱۶$$

$$m^۲>۴ \xrightarrow{\text{جذر}} |m|>۲ \xrightarrow{\text{خواص قدرمطلق}} m>۲ \text{ یا } m<-۲$$

$$\xrightarrow{a=m<۰} m<-۲ \xrightarrow[\text{یک‌رقمی}]{m\in\mathbb{Z}} m=-۳,-۴,\dots,-۹$$

پس هفت مقدار برای m داریم.

حالا سؤال سخت:

؟ اگر نمودار $f(x)=mx^۲-۴x+m$ همواره زیر محور xها باشد. بیشترین مقدار طول رأس سهمی کدام است؟ (m عدد صحیح یک‌رقمی است.)

۱) $\dfrac{-۲}{۷}$ ۲) $\dfrac{-۲}{۳}$ ۳) $-\dfrac{۱}{۲}$ ۴) $-\dfrac{۲}{۹}$

گزینهٔ «۴» خب طول رأس می‌شود:

$$x_s=-\frac{b}{۲a}=-\frac{-۴}{۲m}=\frac{۲}{m}$$

پس با توجه به مقادیر m داریم:

$$-\frac{۲}{۳}\le x_s\le -\frac{۲}{۹}$$

یعنی بیشترین مقدار x_s برابر $-\frac{۲}{۹}$ و کم‌ترین مقدارش $-\frac{۲}{۳}$ است.

؟ اگر جواب نامعادلهٔ $kx^2 - kx - 1 < 0$ به صورت $\mathbb{R}$ باشد. مجموعه‌جواب k شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

گزینهٔ «۱» قرار است $kx^2 - kx - 1$ همواره منفی باشد، پس داریم: $\Delta < 0, a < 0$

$$\Delta = (-k)^2 - 4k(-1) = k^2 + 4k < 0 \Rightarrow k(k+4) < 0$$

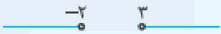
$$\xrightarrow[\text{منفی است}]{\text{بین دو ریشه}} -4 < k < 0$$

دقت می‌کنید که شرط $a = k < 0$ هم برقرار است؛ پس جواب همین $-4 < k < 0$ است.

اشاره به $k = 0$ دقت کنید! اگر $k = 0$ باشد، جملات x^2 و x از بین می‌روند و نامعادله به صورت $-1 < 0$ درمی‌آید که همواره برقرار است.

پس $k = 0$ هم جزء جواب است و بازهٔ کامل جواب $(-4, 0]$ خواهد بود که ۴ عدد صحیح $\{0, -3, -2, -1\}$ را دارد.

؟ اگر جواب $ax^2 + x + c < 0$ به صورت مقابل باشد. $a - c$ کدام است؟



۱) ۷ ۲) -7

۳) ۵ ۴) -5

گزینهٔ «۲» جدول این شکلی بوده:

	-2		3	
P	−	0	+	0	−

و عبارت برای $x < -2$ و $x > 3$ منفی شده، پس اولاً $a < 0$ است و ثانیاً -2 و ۳ ریشه‌های عبارت هستند.

$$\left.\begin{aligned} S &= \frac{-1}{a} = 3 + (-2) = 1 \Rightarrow a = -1 \\ P &= \frac{c}{a} = 3 \times (-2) = -6 \Rightarrow c = -6a = +6 \end{aligned}\right\} \Rightarrow a - c = -7$$

⇦ روش تعیین علامت سریع (یک سطری)

تمام ریشه‌های صورت و مخرج را می‌نویسیم؛ برای ریشه‌های صورت، صفر و برای ریشه‌های مخرج «ت ن» می‌گذاریم. (یعنی تعریف‌نشده)

مثلاً برای $P(x) = \dfrac{x^2 |x-3| (x-2)^3}{\sqrt[3]{(x-1)(2x^2+x-1)}}$ تا اینجا داریم:

$|x-3| \Rightarrow x = 3$, $x^2 \Rightarrow x = 0$

$\sqrt[3]{x-1} \Rightarrow x = 1$, $(x-2)^3 \Rightarrow x = 2$

$2x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x = -1, \frac{1}{2}$

	مخرج	صورت	مخرج	مخرج		
x	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
P	ت ن	0	ت ن	ت ن	0	0

حالا علامت ضریب بزرگ‌ترین توان x را در صورت و مخرج تعیین می‌کنیم و حاصل‌ضربشان را در اولین خانهٔ سمت راست می‌گذاریم:

x	-۱	۰	$\frac{۱}{۲}$	۱	۲	۳	$+\infty$
P	ت ن	۰	ت ن	ت ن	۰	۰	+

اصل کار این‌جا است! از روی هر ریشه که عبور کنیم، علامت عوض می‌شود. فقط ریشه‌های مربوط به عبارت توان زوج یا قدرمطلق را بی‌خیال می‌شویم (یعنی علامت را عوض نمی‌کنیم).

x		-۱		$\overset{*}{۰}$		$\frac{۱}{۲}$		۱		۲		$\overset{*}{۳}$	
P	+	ت ن	−	۰	−	ت ن	+	ت ن	−	۰	+	۰	+
		توان۱ دارد		توان ۲ دارد (بی‌خیال)		توان۱ دارد		ریشهٔ سوم دارد		توان ۳ دارد		قدرمطلق دارد (بی‌خیال)	

ویژگی‌های نامساوی

دیدیم که به جای تست تعیین علامت معمولاً نامساوی $f(x) > g(x)$ را می‌دهند. پس باید خواص نامساوی و بیان‌های آن را یاد بگیریم. ببینید:

الف $f > g$ یعنی نمودار f بالای نمودار g قرار می‌گیرد و عرض نقطه روی نمودار f از عرض نقطهٔ هم‌طول آن روی g بیشتر است.

ب $f \geq g$ یعنی نمودار f زیر نمودار g قرار ندارد و مقادیر $g(x)$ نابیشتر از $f(x)$ هستند. حالا می‌خواهیم از نامساوی $f > g$ به نامساوی $P(x) > ۰$ برسیم.

این قاعده‌ها را داریم:

۱ اجازه داریم به دو طرف نامساوی عددی را اضافه یا کم کنیم:

$$a > b \Rightarrow a + c > b + c \quad , \quad a - c > b - c$$

۲ اجازه داریم دو طرف را در عدد مثبت، ضرب یا تقسیم کنیم:

$$c > ۰ , a > b \Rightarrow ac > bc \quad , \quad \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$$

۳ اگر $c < ۰$ باشد، جهت عوض می‌شود:

$$c < ۰ , a > b \Rightarrow ac < bc \quad , \quad \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$$

۴ اجازه داریم از دو طرف ریشهٔ فرد بگیریم و به توان فرد برسانیم.

فرد n و $a > b \Rightarrow a^n > b^n \quad , \quad \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$

۵ در مورد ریشه و توان زوج، باید دو طرف مثبت باشند تا جهت عوض نشود.

زوج n و $a > b > ۰ \Rightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b} \quad , \quad a^n > b^n$

۶ اگر دو طرف هم‌علامت باشند، می‌توانیم آن‌ها را معکوس کنیم و جهت عوض می‌شود:

$$a > b \xrightarrow[ab>۰]{\text{هم‌علامت‌اند } a,b} \frac{۱}{a} < \frac{۱}{b}$$

از نامساوی $\frac{۱}{x+۳} > \frac{۱}{x-۱}$. کدام مجموعه‌مقادیر برای x به دست می‌آید؟

۱) $\varnothing$ ‏ ۲) $(-۳,۱)$ ‏ ۳) $(۱,+\infty)$ ‏ ۴) $(-\infty,-۳)$

گزینهٔ «۲» $x=۰$ می‌خورد؛ پس گزینهٔ شامل $x=۰$ یعنی ۲ را می‌زنیم. تمام!

اما راه‌حل: یک وقت فکر معکوس‌کردن دو طرف نباشید!

حواستان باشد که خبری از علامت دو طرف نداریم و نمی‌توانیم پیش‌بینی کنیم که جهت عوض می‌شود یا نه. پس بهتر است همه را به یک طرف ببریم:

$$\frac{۱}{x-۱}-\frac{۱}{x+۳}<۰ \Rightarrow \frac{(x+۳)-(x-۱)}{(x-۱)(x+۳)}<۰$$

$$\Rightarrow \frac{۴}{(x-۱)(x+۳)}<۰ \xrightarrow[\text{و کسر منفی است.}]{\text{صورت مثبت است}} (x-۱)(x+۳)<۰$$

$$\xrightarrow{\text{بین دو ریشه منفی است}} -۳<x<۱ \Rightarrow (-۳,۱)$$

از نامعادلهٔ $۲ > \frac{۲x-۱}{x+۱} > \frac{۴}{۳}$. بازهٔ مقادیر x کدام است؟

۱) $(\frac{۱}{۲},+\infty)$ ‏ ۲) $(\frac{۴}{۳},+\infty)$ ‏ ۳) $(\frac{۷}{۲},+\infty)$ ‏ ۴) $(۴,+\infty)$

گزینهٔ «۳» در تست‌ها معمولاً تعیین علامت به ما نمی‌دهند! پس چی می‌دهند؟ نامعادله می‌دهند.

خودمان در نامعادله، همهٔ جملات را به یک طرف می‌بریم و به $P(x)>۰$ یا $P(x)<۰$ می‌رسیم، بعد تعیین علامت می‌کنیم. این را با دقت دنبال کنید.

الف) $$\frac{۲x-۱}{x+۱}<۲ \Rightarrow \frac{۲x-۱}{x+۱}-۲<۰ \Rightarrow \frac{۲x-۱-۲(x+۱)}{x+۱}<۰ \Rightarrow \frac{-۳}{x+۱}<۰$$

$$\xrightarrow[\text{و کسر هم منفی است}]{\text{صورت منفی است}} x+۱>۰ \Rightarrow x>-۱$$

پس جواب نامعادلهٔ سمت راست می‌شود $x>-۱$.

ب) $$\frac{۴}{۳}<\frac{۲x-۱}{x+۱} \Rightarrow \frac{۲x-۱}{x+۱}-\frac{۴}{۳}>۰ \Rightarrow \frac{۳(۲x-۱)-۴(x+۱)}{۳(x+۱)}>۰ \Rightarrow \frac{۲x-۷}{۳(x+۱)}>۰$$

	مخرج		صورت	
x	-۱		$\frac{۷}{۲}$	
P	$+$	ت ن	$-$	۰	$+$

$$\xrightarrow{\text{می‌خواهیم بیشتر از صفر باشد}} x>\frac{۷}{۲} \text{ یا } x<-۱$$

از شرط الف داشتیم $x>-۱$ و اشتراک این‌ها می‌شود $x>\frac{۷}{۲}$ یعنی $(\frac{۷}{۲},+\infty)$.

اما این‌جوری که یک صفحه طول می‌کشه! حالا بریم سراغ چتربازی:

اگر در نامعادله، گزینه‌ها به صورت بازهٔ مقادیر x باشند، می‌توانیم عدد بدهیم.

الان در نامعادلهٔ $2 > \frac{2x-1}{x+1} > \frac{4}{3}$، $x=1$ صدق نمی‌کند: $\frac{4}{3} \not< \frac{1}{2} < 2$

پس $x=1$ جزء جواب نیست و ۱ که شامل $x=1$ است، غلط است.

$x=2$ هم صدق نمی‌کند $\frac{4}{3} \not< \frac{3}{3} < 2$، پس ۲ هم نیست (۲ را دارد).

در بین ۳ و ۴ باید عددی بین $\frac{7}{2} = 3/5$ و ۴ را تست کنیم. خود $x=4$ خوب است!

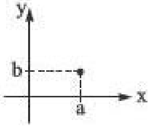
می‌بینیم که $\frac{4}{3} < \frac{7}{5} < 2$، پس $x=4$ می‌خورد و ۴ غلط است، چون $x=4$ را ندارد، پس جواب شد ۳.

اشاره یک چتربازی دیگر هم می‌شود یاد گرفت! مرز جواب نامعادله **معمولاً** عددی است که دو طرف نامعادله را مساوی می‌کند. از درس تابع هموگرافیک می‌دانیم $\frac{2x-1}{x+1}$ هرگز با ۲ مساوی نمی‌شود؛ اما اگر آن را مساوی $\frac{4}{3}$ قرار دهیم، داریم: $\frac{4}{3} = \frac{2x-1}{x+1}$

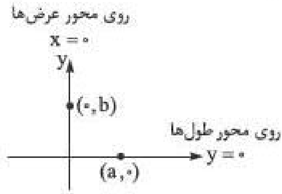
$$\Rightarrow 4x+4 = 6x-3 \Rightarrow 2x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{2}$$

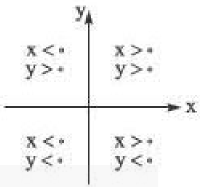
پس مرز جواب $\frac{7}{2}$ است.

از گذشته به یاد دارید که (a,b) مختصات نقطه‌ای با طول a و عرض b است.

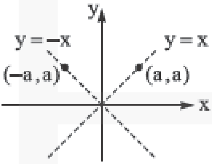


در ناحیهٔ اول طول و عرض مثبت‌اند؛ در ناحیهٔ دوم فقط عرض مثبت است؛ در ناحیهٔ سوم هر دو منفی‌اند و در ناحیهٔ چهارم فقط طول مثبت است. روی محور yها، مقدار x صفر است و روی محور xها مقدار y صفر است:

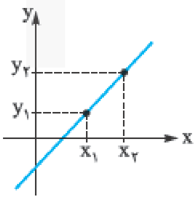




بر روی نیمساز نواحی اول و سوم، طول و عرض مساوی‌اند و بر روی نیمساز نواحی دوم و چهارم، طول و عرض قرینه‌اند.

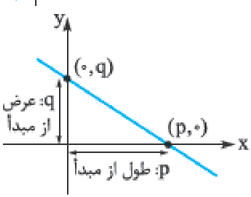


شیب خط، نسبت افزایش عرض به افزایش طول دو نقطه است.



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

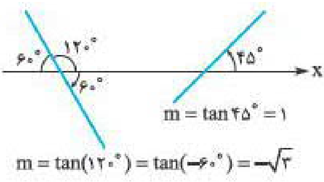
عرض نقطهٔ برخورد خط با محور y را، عرض از مبدأ می‌نامیم.



طول نقطهٔ برخورد خط با محور x را، طول از مبدأ می‌نامیم. مساحت مثلث محصور به خط و محورها می‌شود:

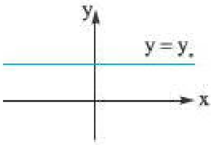
$$S = \frac{1}{2}|pq|$$

اشاره شیب خط از نسبت $-\dfrac{q}{p}$ یا $-\dfrac{\text{عرض از مبدأ}}{\text{طول از مبدأ}}$ نیز به دست می‌آید. هم‌چنین شیب خط، تانژانت زاویهٔ خط با جهت مثبت محور x است:

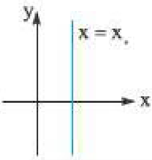


خط‌های موازی محورهای مختصات

۱ اگر خط موازی محور xها باشد، افقی است و معادله‌اش $y = y_0$ خواهد بود. شیب این خط صفر است. (معادلهٔ خود محور xها هم $y = 0$ است.)

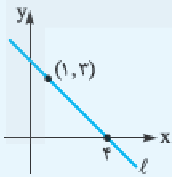


۲ اگر خط موازی محور yها باشد (قائم است)، معادله‌اش $x = x_0$ است. شیب این خط تعریف‌نشده است. (معادلهٔ محور yها می‌شود: $x = 0$)



برای نوشتن معادلهٔ خط‌های مایل، باید شیب و یک نقطه را داشته باشیم. اگر شیب m و یک نقطه $A(x_0, y_0)$ باشد، داریم:
$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

؟ در شکل روبه‌رو، معادلهٔ خط ℓ کدام است؟



۱) $y = 3x$

۲) $x + y + 4 = 0$

۳) $y = 3(x - 4)$

۴) $x + y = 4$

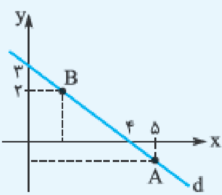
گزینهٔ «۴» شیب خط را با دو نقطهٔ $(4,0)$ و $(1,3)$ حساب کنیم:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - 0}{1 - 4} = -1$$

حالا معادله را با $m = -1$ و $A(4,0)$ می‌نویسیم:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 0 = -1(x - 4) \Rightarrow y = 4 - x \text{ یا } x + y = 4$$

؟ عرض نقطهٔ A و طول نقطهٔ B چه‌قدر اختلاف دارند؟



۱) $\dfrac{7}{6}$

۲) $\dfrac{3}{2}$

۳) $\dfrac{4}{3}$

۴) $\dfrac{25}{12}$

گزینهٔ «۴» معادلهٔ خط d را با نقاط $(4,0)$ و $(0,3)$ می‌نویسیم. اگر نکته دوست دارید:

اشاره با داشتن طول از مبدأ p و عرض از مبدأ q، معادلهٔ خط به صورت $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1$ است.

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1 \Rightarrow y=3(1-\frac{x}{4})=3-\frac{3x}{4}$$

پس داریم:

$$x_A=5 \Rightarrow y_A=3-\frac{3\times 5}{4}=\frac{12-15}{4}=\frac{-3}{4}$$

$$y_B=2 \Rightarrow 2=3-\frac{3x_B}{4} \Rightarrow \frac{3x_B}{4}=1 \Rightarrow x_B=\frac{4}{3}$$

و اختلاف این‌ها می‌شود:

$$\frac{4}{3}-(\frac{-3}{4})=\frac{25}{12}$$

وضع دو خط نسبت به هم

الف) اگر $m_1=m_2$ باشد؛ یعنی شیب دو خط مساوی باشند، دو خط با هم موازی‌اند.

ب) اگر $1+m_1m_2=0$؛ یعنی شیب خط‌ها عکس و قرینهٔ باشند، دو خط بر هم عمودند.

؟ در مثلث با رئوس $A(1,2)$، $B(-1,0)$ و $C(2,1)$، معادلهٔ ارتفاع رأس A کدام است؟

۱) $y=5-3x$ ۲) $y=3x-1$ ۳) $3y+x=7$ ۴) $3y-x=5$

= گزینهٔ «۱» ارتفاع رأس A از A بر BC عمود می‌شود، پس شیب آن عکس و قرینهٔ شیب BC است:

$$m_{BC}=\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=\frac{1-0}{2-(-1)}=\frac{1}{3} \Rightarrow m'=-3$$

با نقطهٔ $A(1,2)$ و شیب -3 معادله را می‌نویسیم:

$$y-y_0=m(x-x_0) \Rightarrow y-2=-3(x-1) \Rightarrow y=-3x+3+2=5-3x$$

؟ خط ℓ به معادلهٔ $2kx+(k-1)y=k+2$ و خط $2x-5y=1$ با یکدیگر موازی‌اند. عرض از مبدأ خط ℓ کدام است؟

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $-\frac{1}{6}$ ۳) $-\frac{13}{5}$ ۴) $\frac{13}{5}$

= گزینهٔ «۳» شیب دو خط را پیدا می‌کنیم و مساوی هم می‌گذاریم:

$$2kx+(k-1)y=k+2 \Rightarrow y=\frac{-2k}{k-1}x+\frac{k+2}{k-1} \Rightarrow m_1=\frac{-2k}{k-1}$$

$$2x-5y=1 \Rightarrow 5y=2x-1 \Rightarrow y=\frac{2}{5}x-\frac{1}{5} \Rightarrow m_2=\frac{2}{5}$$

$$m_1=m_2 \Rightarrow \frac{-2k}{k-1}=\frac{2}{5} \xrightarrow[\text{وسطین}]{\text{طرفین}} -10k=2k-2 \Rightarrow 12k=2 \Rightarrow k=\frac{1}{6}$$

عرض از مبدأ خط ℓ می‌شود:

$$\frac{k+2}{k-1} \xrightarrow{k=\frac{1}{6}} \frac{\frac{1}{6}+2}{\frac{1}{6}-1}=\frac{\frac{13}{6}}{\frac{-5}{6}}=\frac{-13}{5}$$

نقطهٔ وسط پاره‌خط

اگر دو سر پاره‌خط $A(x_۱,y_۱)$ و $B(x_۲,y_۲)$ باشند، مختصات نقطهٔ وسط پاره‌خط به صورت $M(\frac{x_۱+x_۲}{۲},\frac{y_۱+y_۲}{۲})$ است؛ یعنی میانگین طول‌ها و عرض‌ها را حساب می‌کنیم.

حالا می‌توانیم قرینهٔ نقطه A نسبت به نقطهٔ O را تعریف کنیم:

چون O در وسط A و A' قرار دارد می‌گوییم:

$$O=\frac{A+A'}{۲}$$

پس:

$$A'=۲O-A=(۲x_O-x_A,۲y_O-y_A)$$

اشاره یک حالت خاص را حفظ کنیم که قرینهٔ $A(a,b)$ نسبت به مبدأ، نقطهٔ $A'(-a,-b)$ است.

? **قرینهٔ نقطهٔ $A(۱,۴)$ نسبت به نقطهٔ $M(۲,۳)$ را نقطهٔ B می‌نامیم. وسط پاره‌خط BM کدام نقطه است؟**

۱) $(۱/۵,۳/۵)$ ۲) $(۲/۵,۲/۵)$ ۳) $(۳,۲)$ ۴) $(۱/۵,۲/۵)$

= گزینهٔ «۲» اول قرینه را پیدا می‌کنیم:

$$B=۲M-A=(۲\times۲-۱,۲\times۳-۴)=(۳,۲)$$

حالا وسط B و M:

$$N=\frac{B+M}{۲}=(\frac{۳+۲}{۲},\frac{۲+۳}{۲})=(۲/۵,۲/۵)$$

? **عمودمنصف پاره‌خط با دو انتهای $A(-۱,۷)$ و $B(۳,۳)$، محور xها را در کدام طول قطع می‌کند؟**

۱) $-۲/۵$ ۲) -۳ ۳) $-۳/۵$ ۴) -۴

= گزینهٔ «۴» عمودمنصف AB از M در وسط AB می‌گذرد:

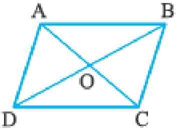
$$M=\frac{A+B}{۲}=(\frac{-۱+۳}{۲},\frac{۷+۳}{۲})=(۱,۵)$$

و شیب آن عکس و قرینهٔ شیب AB است:

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{۳-۷}{۳-(-۱)}=\frac{-۴}{۴}=-۱\Rightarrow m'=۱$$

پس معادلهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB، $y-۵=۱(x-۱)$ یا $y=x+۴$ است و محور x را در طول -۴ قطع می‌کند.

ویژگی متوازی‌الاضلاع



چون در متوازی‌الاضلاع (و هم‌خانواده‌های آن، مستطیل، لوزی، مربع) قطرها همدیگر را نصف می‌کنند، داریم:

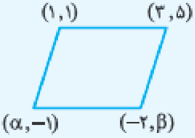
$$O = \text{وسط } AC = \text{وسط } BD \Rightarrow \frac{A+C}{۲} = \frac{B+D}{۲}$$

یعنی باید داشته باشیم:

جمع طول‌های دو سر هر قطر: $x_A + x_C = x_B + x_D$

جمع عرض‌های دو سر هر قطر: $y_A + y_C = y_B + y_D$

به ازای کدام مقادیر α و β، شکل روبه‌رو متوازی‌الاضلاع است؟



۱) $\begin{cases}\alpha = -۲\\ \beta = ۳\end{cases}$

۲) $\begin{cases}\alpha = -۲\\ \beta = -۵\end{cases}$

۳) $\begin{cases}\alpha = -۴\\ \beta = ۳\end{cases}$

۴) $\begin{cases}\alpha = -۴\\ \beta = -۵\end{cases}$

گزینهٔ «۳» قرار شد جمع مختصات در دو سر قطرها برابر باشد.

$$x_۱ + x_۳ = x_۲ + x_۴ \Rightarrow ۱ + (-۲) = ۳ + \alpha \Rightarrow \alpha = -۴$$

$$y_۱ + y_۳ = y_۲ + y_۴ \Rightarrow ۱ + \beta = ۵ + (-۱) \Rightarrow \beta = ۳$$

طول پاره‌خط

طول پاره‌خط AB با دو انتهای $A(x_۱, y_۱)$ و $B(x_۲, y_۲)$ برابر است با:

$$AB = \sqrt{(\Delta x)^۲ + (\Delta y)^۲} = \sqrt{(x_۲ - x_۱)^۲ + (y_۲ - y_۱)^۲}$$

فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_۱, y_۱)$ از مبدأ برابر است با: $OA = \sqrt{x_۱^۲ + y_۱^۲}$

در مثلث ABC با رئوس $A(۱,۲)$ ، $B(-۲,۳)$ و $C(۰,۵)$، طول میانهٔ رأس A کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) $۲\sqrt{۳}$ ۳) $\sqrt{۱۳}$ ۴) $\sqrt{۱۰}$

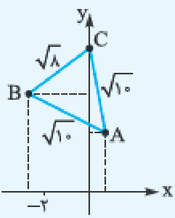
گزینهٔ «۱» میانهٔ رأس A از نقطهٔ A به وسط ضلع BC وصل می‌شود. اول وسط BC را پیدا کنیم:

$$M = \frac{B+C}{۲} = (\frac{-۲+۰}{۲}, \frac{۳+۵}{۲}) = (-۱, ۴)$$

پس:

$$\xrightarrow{A(۱,۲)} AM = \sqrt{(-۱-۱)^۲ + (۴-۲)^۲} = \sqrt{۴+۴} = \sqrt{۸} = ۲\sqrt{۲}$$

اشاره اگر بررسی کنیم می‌بینیم که در این مثلث $AC = AB$ است؛ یعنی مثلث متساوی‌الساقین است. حالا مساحتش را پیدا می‌کنیم:



$$\left.\begin{array}{l} \text{ارتفاع: } AH = AM = ۲\sqrt{۲} \\ BC = \sqrt{۸} = ۲\sqrt{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow S = \frac{۲\sqrt{۲} \times ۲\sqrt{۲}}{۲} = ۴$$

اشاره عشق نکته‌ها حفظ کنند که در حالت کلی مساحت مثلث ABC به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$S=\frac{۱}{۲}\left|(x_B-x_A)(y_C-y_A)-(x_C-x_A)(y_B-y_A)\right|$$

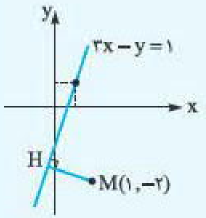
مثلاً این‌جا:

$$S=\frac{۱}{۲}\left|(-۲-۱)(۵-۲)-(۰-۱)(۳-۲)\right|=\frac{۱}{۲}\left|-۹+۱\right|=\frac{۱}{۲}\times ۸=۴$$

؟ تصویر نقطهٔ $M(۱,-۲)$ بر خط $۳x-y=۱$ تا مبدأ مختصات چه‌قدر فاصله دارد؟

۱) $\sqrt{۲/۸}$ ۲) $\sqrt{۲/۶}$ ۳) $\sqrt{۱/۸}$ ۴) $\sqrt{۱/۴}$

= گزینهٔ «۲» این سؤال کمی سخت است، دقت کنید.



تصویر M بر خط یعنی پای عمود H که از M بر خط رسم می‌شود.

پس مراحل کار این است:

۱ معادلهٔ MH را بنویسیم (عمود بر خط و از نقطهٔ M).

۲ محل برخورد MH و خط را پیدا کنیم.

۳ فاصلهٔ H تا مبدأ را به دست آوریم.

$$۳x-y=۱ \Rightarrow y=۳x-۱ \Rightarrow \text{شیب}=۳ \Rightarrow \text{شیب عمود}=\frac{-۱}{۳}$$

$$\xrightarrow[M(۱,-۲)]{m'=\frac{-۱}{۳}} y-(-۲)=\frac{-۱}{۳}(x-۱) \xrightarrow{\times ۳} ۳y+۶=-x+۱$$

$$\Rightarrow x+۳y=-۵ \xrightarrow{\text{تلاقی با } y=۳x-۱} H(-۰/۲,-۱/۶)$$

فاصله تا مبدأ:

$$OH=\sqrt{x_H^{۲}+y_H^{۲}}=\sqrt{(-۰/۲)^{۲}+(-۱/۶)^{۲}}=\sqrt{۰/۰۴+۲/۵۶}=\sqrt{۲/۶}$$

فاصلهٔ نقطه از خط و فاصلهٔ دو خط موازی

برای پیداکردن فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_۱,y_۱)$ از خط d، باید معادلهٔ آن را به صورت $ax+by+c=۰$ بنویسیم (یعنی حتماً طرف راست معادله صفر باشد)، آن‌گاه:

$$d=AH=\frac{|ax_۱+by_۱+c|}{\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}}$$

پس فاصلهٔ $A(۱,۲)$ از خط $۳x+۴y+۱=۰$ برابر است با:

$$\frac{|۳(۱)+۴(۲)+۱|}{\sqrt{۳^{۲}+۴^{۲}}}=\frac{|۳+۸+۱|}{۵}=\frac{۱۲}{۵}=۲/۴$$

یا فاصلهٔ نقطهٔ $A(-۱,۲)$ از خط $x-۲y=۳$ برابر است با:

$$\frac{|-۱-۲(۲)-۳|}{\sqrt{۱^{۲}+(-۲)^{۲}}}=\frac{|-۱-۴-۳|}{\sqrt{۵}}=\frac{۸}{\sqrt{۵}}=\frac{۸\sqrt{۵}}{۵}$$

فاصلهٔ نقطهٔ $A(a,a-1)$ از خط به معادلهٔ $x+2y=6$ برابر $\sqrt{5}$ است. مقادیر a کدام‌اند؟

۱) $\frac{5}{3}$ یا ۱ ۲) $\frac{8}{3}$ یا ۱ ۳) $\frac{11}{3}$ یا ۱ ۴) $\frac{13}{3}$ یا ۱

گزینهٔ «۴»

$$\xrightarrow[x+2y-6=0]{A(a,a-1)} d=\frac{|a+2(a-1)-6|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{|a+2a-2-6|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow |3a-8|=5 \Rightarrow 3a-8=\pm 5 \Rightarrow a=\frac{13}{3} \text{ یا } 1$$

یک رأس مربعی نقطهٔ $A(-1,2)$ و یک ضلع آن بر امتداد $3x-y=1$ قرار دارد. مساحت این مربع چه‌قدر است؟

۱) ۰/۶ ۲) ۱/۸ ۳) ۲/۴ ۴) ۳/۶

گزینهٔ «۴» خب فاصلهٔ رأس از ضلع برابر طول ضلع است:

$$\xrightarrow[3x-y-1=0]{A(-1,2)} d=\frac{|3(-1)-2-1|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{6}{\sqrt{10}} \Rightarrow S=d^2=\frac{36}{10}=3/6$$

فاصلهٔ دو خط موازی

برای پیداکردن فاصلهٔ دو خط موازی، باید معادلهٔ هر دو خط را به صورت $ax+by=c$ درآوریم. یعنی ضریب‌های x و y در دو خط یکسان باشد و عدد ثابت هم در طرف راست تنها باشد. آن‌وقت می‌توان گفت: فاصلهٔ دو خط موازی با معادلات $ax+by=c$ و $ax+by=c'$ برابر است با:

$$d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

مثلاً فاصلهٔ دو خط $2x-3y=11$ و $2x-3y=-6$ برابر است با:

$$d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|11-(-6)|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\frac{17}{\sqrt{13}}$$

یا برای فاصلهٔ دو خط $3x-4y=1$ و $y=\frac{3}{4}x+1$ اول باید ضرایب x و y را در معادله‌ها را یکی کنیم:

$$y=\frac{3}{4}x+1 \xrightarrow{\times 4} 4y=3x+4 \Rightarrow 3x-4y=-4$$

حالا:

$$d=\frac{|-4-1|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{5}{5}=1$$

؟ معادلهٔ دو ضلع از مربعی $2x+y=1$ و $y=-2x-4$ است. طول قطر این مربع چه‌قدر است؟

۱) $\sqrt{5}$ ۲) $\sqrt{10}$ ۳) $\sqrt{15}$ ۴) $2\sqrt{5}$

= گزینهٔ «۲» این دو خط موازی‌اند، پس فاصلهٔ بین آن‌ها می‌شود طول ضلع مربع.

$$\left.\begin{array}{r} y=-2x-4 \Rightarrow 2x+y=-4 \\ 2x+y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow d=\frac{|-4-1|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

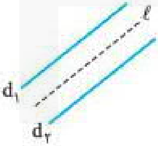
$$\text{طول قطر}=d\sqrt{2}=\sqrt{10}$$

نقاط متساوی‌الفاصله از دو خط

۱ اگر دو خط موازی باشند نقاط با فاصلهٔ مساوی از دو خط، روی خطی موازی آن دو و به فاصلهٔ مساوی از آن‌ها (وسط آن‌ها!) قرار می‌گیرند که معادله‌اش برابر است با:

دو خط موازی:

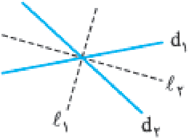
$$\begin{cases} d_1: ax+by+c=0 \\ d_2: ax+by+c'=0 \end{cases}$$



$$\text{معادلهٔ خط } \ell: \ ax+by+\frac{c+c'}{2}=0$$

۲ اگر دو خط متقاطع باشند نقاط با فاصلهٔ مساوی از دو خط، روی نیمسازهای زاویهٔ بین دو خط قرار دارند (نیمسازها بر هم عمودند) و معادلهٔ نیمسازها از برابر قراردادن فاصلهٔ نقاط، از دو خط به دست می‌آید:

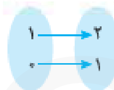
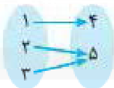
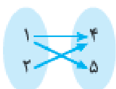
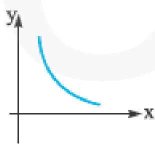
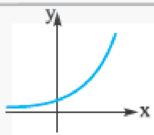
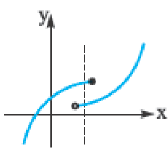
$$\begin{cases} d_1: ax+by+c=0 \\ d_2: a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$$



$$\Rightarrow \text{معادلهٔ نیمسازها: } \frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|a'x+b'y+c'|}{\sqrt{a'^2+b'^2}}$$

تابع یک ورودی و یک خروجی دارد. به هر ورودی، یک خروجی منحصربه‌فرد نسبت می‌دهد. تابع را با زوج‌های مرتب، مفهوم، نمودار پیکانی، نمودار ون یا ضابطه می‌توانیم نشان بدهیم. (به این‌ها می‌گوییم بازنمایی‌های تابع) ورودی → تابع → خروجی

اگر تابع f به ورودی $x=a$، خروجی $y=b$ را نسبت دهد، می‌نویسیم: $f(a)=b$

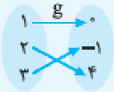
نمایش	شرط تابع‌بودن	مثال
مفهوم تابع	به هر ورودی یک خروجی نسبت دهد.	رابطه‌ای که به هر فرد سن او را نسبت می‌دهد، تابع است. رابطه‌ای که به هر کس دوست او را نسبت دهد، تابع نیست.
نمودار پیکانی 	از هر عضو مجموعهٔ اول فقط یک پیکان خارج شود.	 ✓  ✗
نمودار مختصاتی 	هر خط عمودی (موازی محور y) نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.	 ✓  ✗
مجموعهٔ زوج‌های مرتب $f=\{(۱,۲),(۲,۳)\}$	در زوج‌های مرتب، مؤلفه‌های اول متمایز باشند. اگر xها برابر بودند، yها برابر باشند.	$\{(-۱,۱),(۱,۲)\}$ ✓ $\{(-۱,۱),(۱,۲),(-۱,۴)\}$ ✗
ضابطهٔ $y=f(x)$	به هر x فقط یک y نسبت دهد. معمولاً ضابطه‌هایی که $\lvert y\rvert$ و $y^۲$ و $[y]$ و $\sin y$ هستند، تابع نیستند.	$y^۳=x$ ✓ $y^۲=x$ ✗

از $A=\{۱,۲,۳\}$ به $B=\{۴,۵\}$ چند تابع مختلف وجود دارد؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۹

گزینهٔ «۳» باید ۱، ۲، ۳ را به یکی از اعداد ۴ یا ۵ نظیر کنیم. پس برای $f(۱)$, $f(۲)$, $f(۳)$ هر کدام ۲ حالت داریم. یعنی $۲\times۲\times۲=۸$ تابع مختلف می‌توان نوشت.

تابع‌های f و g به صورت زیر داده شده‌اند:



x	۰	۱	۱−	۲
f(x)	۳	۲	۵	۰

مقدار $f(g(۳))-g(f(۱))$ کدام است؟

۱) ۳− ۲) ۳ ۳) ۱ ۴) ۱−

گزینهٔ «۳» $g(۳)$ می‌شود ۱−. پس $f(g(۳))$ می‌شود $f(-۱)$ که با توجه به جدول، f برابر ۵ است. $f(۱)$ می‌شود ۲ و طبق نمودار پیکانی g، مقدار $g(۲)$ برابر ۴ است. پس داریم:

$$f(g(۳))-g(f(۱))=f(-۱)-g(۲)=۵-۴=۱$$

$f=\{(۱,۲),(۱,۳),(-۱,۰),(۱,۰),(۴,۱),(-۱,۲)\}$ با حذف حداقل چند عضو تابع می‌شود؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

گزینهٔ «۱» سه‌تا زوج مرتب با مؤلفهٔ اول ۱ داریم که باید حداقل ۲ تا از آن‌ها را حذف کرد. دوتا زوج مرتب با مؤلفهٔ اول ۱− هم داریم که باید حداقل یکی از آن‌ها حذف شود، پس حداقل حذف ۳ زوج لازم است.

اشاره حذف این ۳ زوج مرتب، به ۶ طریق امکان دارد. (بگویید چرا؟)

دامنه و برد تابع در بازنمایی‌های مختلف

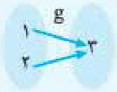
دامنه، مجموعهٔ ورودی‌ها و برد، مجموعهٔ خروجی‌های تابع است.

نمایش	دامنه	برد
زوج‌های مرتب	مجموعهٔ مؤلفه‌های اول	مجموعهٔ مؤلفه‌های دوم
پیکانی	کل مجموعهٔ اول (مبدأ فلش‌ها)	مقصد فلش‌ها (ممکن است کل مجموعهٔ دوم نباشد.)
نمودار مختصاتی	تصویر نمودار روی محور x	تصویر نمودار روی محور y
ضابطه	مجموعهٔ xهای مجاز (مخرج صفر نشود.)، (زیر رادیکال (با فرجهٔ زوج) منفی نشود.)، (جلوی لگاریتم معنی‌دار باشد.)	مجموعهٔ yهایی که به دست می‌آیند.

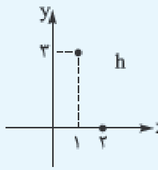
؟ دامنهٔ کدام تابع با بقیه فرق دارد؟

۱) $f=\{(۱,۲),(۲,۴)\}$

۲)



۳)



۴) $k(x)=\dfrac{x-۲}{x-۱}$

= گزینهٔ «۴» در f مؤلفه‌های اول ۱ و ۲ هستند؛ در g مبدأ فلش‌ها ۲ و ۱ هستند؛ در h تصویر نمودار روی محور x، طول‌های ۱ و ۲ را می‌دهد؛ اما در k می‌توانیم به x هر عددی به‌جز ۱ را بدهیم پس دامنهٔ این تابع می‌شود $\mathbb{R}-\{۱\}$.

اشاره همیشه تعداد اعضای دامنه بیشتر یا مساوی تعداد اعضای برد است. مثلاً تابع با دامنهٔ ۳ عضوی و برد ۵ عضوی وجود ندارد.

؟ اگر $f=\{(۱,۲),(۲,b),(-۱,۳),(۱,a^۲-a),(a,۴)\}$ تابع باشد. مجموع اعضای برد آن کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۹ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

= گزینهٔ «۲» دوتا زوج مرتب $(۱,۲)$ و $(۱,a^۲-a)$ داریم؛ پس $a^۲-a=۲$ و در نتیجه:

$a^۲-a-۲=۰ \Rightarrow a=-۱$ یا ۲

به ازای $a=-۱$ داریم: $f=\{(۱,۲),(۲,b),(-۱,۳),(۱,۲),(-۱,۴)\}$

که تابع نیست (۱− به دو عدد نظیر شده است).

به ازای $a=۲$ داریم: $f=\{(۱,۲),(۲,b),(-۱,۳),(۱,۲),(۲,۴)\}$

حالا به خاطر $(۲,b)$ و $(۲,۴)$ باید $b=۴$ باشد. برد تابع می‌شود: $R=\{۲,۴,۳\}$

و جمع اعضای برد می‌شود: $۲+۳+۴=۹$

تابع خطی

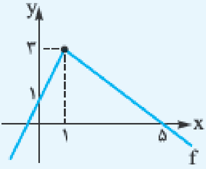
$f(x)=ax+b$ را یک تابع خطی می‌نامیم. (دقت کنید که خط عمودی به معادلهٔ $x=k$ تابع نیست.)

اگر $a=۰$ باشد، خط افقی $y=b$ را تابع ثابت می‌نامیم.

اگر $f(x)=x$ باشد، تابع را همانی می‌نامیم.

اشاره اگر جدولی از مقادیر x و y در تابع خطی بدهند، باید نسبت $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ در تمام نقطه‌ها ثابت و برابر شیب (a) باشد.

در تابع به شکل روبه‌رو، مقدار $f(۲)-f(-۱)$ کدام است؟



۱) ۱/۲۵

۲) ۲/۲۵

۳) ۳/۲۵

۴) ۴/۲۵

گزینهٔ «۳» برای نوشتن ضابطهٔ هر خط، باید ۲ نقطه از آن را داشته باشیم. تابع f از دو قسمت خطی ساخته شده:

الف $(۱,۳),(۰,۱) \Rightarrow \text{شیب} = \frac{۳-۱}{۱-۰} = ۲ \xrightarrow{(۰,۱)} y = ۲x+۱$

ب $(۱,۳),(۵,۰) \Rightarrow \text{شیب} = \frac{۰-۳}{۵-۱} = -\frac{۳}{۴} \xrightarrow{(۵,۰)} y-۰ = -\frac{۳}{۴}(x-۵)$

پس ضابطهٔ f به صورت قطعه‌ای زیر است.

$$f(x)=\begin{cases} ۲x+۱ & x<۱ \\ -\frac{۳}{۴}(x-۵) & x\geq ۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(-۱)=۲(-۱)+۱=-۱ \\ f(۲)=-\frac{۳}{۴}(۲-۵)=\frac{۹}{۴}=۲/۲۵ \end{cases}$$

و اختلاف این‌ها می‌شود ۳/۲۵.

دامنهٔ یک تابع خطی $(۱,۲)$ و برد آن $(-۱,۳)$ است. چند تابع با این ویژگی وجود دارد؟

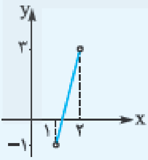
۱) ۱

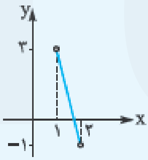
۲) ۲

۳) ۳

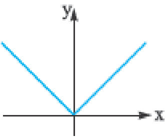
۴) هیچ

گزینهٔ «۲» نمودارها را ببینید:

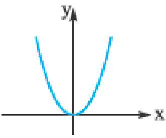




اشاره علاوه بر تابع خطی، نمودار تابع‌های درجه‌دوم و قدرمطلق را هم بلدیم:



$y=|x|$



$y=x^۲$

اگر دامنهٔ سهمی $f(x)=x^۲$ به $[-۱,۲]\cup\{-۲\}$ محدود شود، برد آن کدام است؟

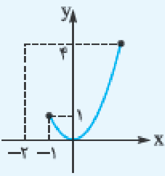
۱) $[۱,۴]$

۲) $[۰,۴]$

۳) $[۱,۲]$

۴) $[-۴,۴]$

گزینهٔ «۲» نمودار را ببینید:



❓ یک تابع درجه‌دوم از نقاط $(۱,۲)$، $(-۱,۰)$ و $(۳,-۴)$ می‌گذرد. مقدار $f(\frac{۱}{۲})$ کدام است؟

۱) ۲/۷۵ ۲) ۲/۵ ۳) ۲/۲۵ ۴) ۲

گزینهٔ «۳» اگر تابع را به صورت $f(x)=ax^۲+bx+c$ در نظر بگیریم، داریم:

$$\xrightarrow{(۱,۲)} f(۱)=۲ \Rightarrow ۲=a+b+c$$

$$\xrightarrow{(-۱,۰)} f(-۱)=۰ \Rightarrow ۰=a-b+c$$

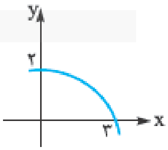
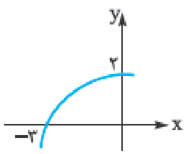
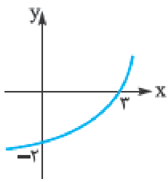
$$\xrightarrow{(۳,-۴)} f(۳)=-۴ \Rightarrow -۴=۹a+۳b+c$$

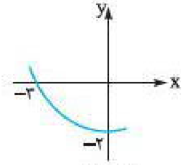
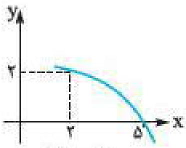
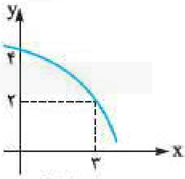
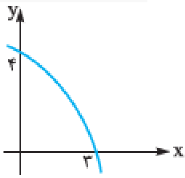
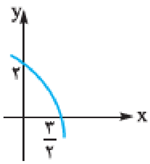
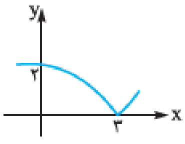
حالا هر معادله را منهای بالایی‌اش می‌کنیم:

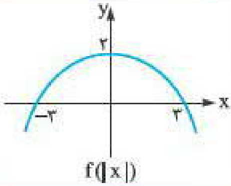
$$\left.\begin{array}{l} -۴=۸a+۴b \xrightarrow{\div ۴} ۲a+b=-۱ \\ -۲=-۲b \Rightarrow b=+۱ \end{array}\right\} \Rightarrow a=-۱ \xrightarrow{\text{در اولی}} c=۲$$

پس معادلهٔ سهمی $y=-x^۲+x+۲$ است و داریم: $f(\frac{۱}{۲})=-\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۲}+۲=۲/۲۵$

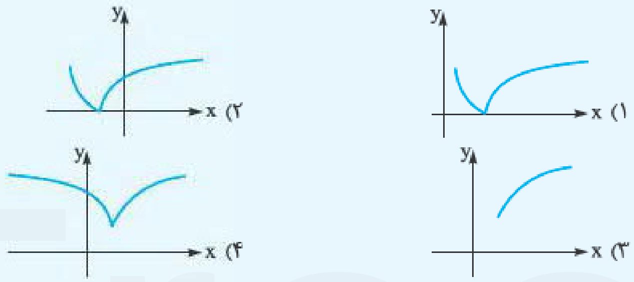
انتقال نمودارها و رسم نمودارهای وابسته

تابع	روش رسم از روی نمودار f	نمونه
$y=f(x)$	نمودار تابع f	 $f(x)$
$y=f(-x)$	قرینه نسبت به محور yها	 $f(-x)$
$y=-f(x)$	قرینه نسبت به محور xها	 $-f(x)$

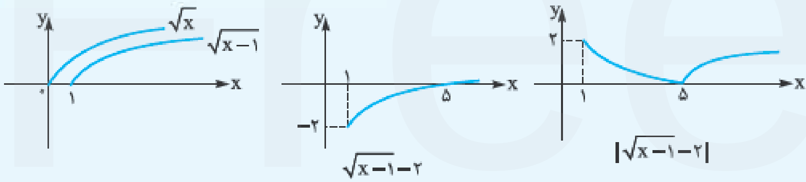
تابع	روش رسم از روی نمودار f	نمونه
$y=-f(-x)$	قرینه نسبت به مبدأ	 $-f(-x)$
$y=f(x-a)$ $(a>۰)$	انتقال a واحد در راستای محور xها	 $f(x-۲)$
$y=f(x)+b$ $(b>۰)$	انتقال b واحد در راستای محور yها	 $f(x)+۲$
$y=kf(x)$	عرض نقاط نمودار k برابر می‌شوند.	 $۲f(x)$
$y=f(kx)$	طول نقاط نمودار در $\frac{۱}{k}$ ضرب می‌شوند.	 $f(۲x)$
$y=\|f(x)\|$	قسمت زیر محور xها نسبت به آن قرینه می‌شود.	 $\|f(x)\|$

تابع	روش رسم از روی نمودار f	نمونه
$y=f(\|x\|)$	سمت چپ محور xها را حذف و سمت راست را به چپ آینه می‌کنیم.	

❓ اگر $f(x)=\sqrt{x-۱}-۲$، نمودار $y=|f(x)|$ به کدام شکل است؟

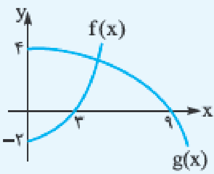


گزینهٔ «۱» مراحل را ببینید:



ابتدا یک واحد به راست و ۲ واحد به پایین و سپس به خاطر قدرمطلق، قسمت زیر محور افقی به بالا می‌آید.

❓ در شکل زیر نمودارهای $f(x)$ و $g(x)$ رسم شده است. ضابطهٔ g کدام می‌تواند باشد



۱) $۲f(۳x)$

۲) $-۲f(۳x)$

۳) $۲f(\frac{x}{۳})$

۴) $-۲f(\frac{x}{۳})$

گزینهٔ «۴» عرض‌ها در ۲− ضرب شده‌اند و طول‌ها ۳ برابر شده‌اند؛ پس $-۲f(\frac{x}{۳})$ مناسب است.

تعیین دامنهٔ توابع گویا، گنگ و لگاریتمی

توابع گویا	توابع گنگ	توابع لگاریتمی
در تابع $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ مخرج نباید صفر شود. پس دامنه به صورت $\{x \mid Q(x)\neq ۰\}$ یا $\mathbb{R}-\{x \mid Q(x)=۰\}$ نوشته می‌شود؛ یعنی: $\mathbb{R}-\{\text{ریشه‌های مخرج}\}$ مثلاً دامنهٔ $y=\dfrac{x}{x-۲}$ به صورت $\mathbb{R}-\{۲\}$ و دامنهٔ $y=\dfrac{\frac{۱}{x-۲}}{\frac{۱}{x}-۱}$ برابر $\mathbb{R}-\{۰,۱,۲\}$ است.	در تابع $f(x)=\sqrt{P(x)}$ زیر رادیکال نباید منفی شود. پس دامنه به صورت $\{x \mid P(x)\geq ۰\}$ است. دقت کنید که ریشه‌های مرتبهٔ فرد به شکل $\sqrt[۲n+۱]{P(x)}$ شرطی برای دامنه ندارند. پس مثلاً دامنهٔ $f(x)=\sqrt{x-۱}$ به صورت $x\geq ۱$ یا $[۱,+\infty)$ است. دامنهٔ $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{۳-x}}$ به صورت $[۰,۳)$ است.	در تابع زیر: $f(x)=\log_{Q(x)}P(x)$ دامنه از اشتراک سه شرط به دست می‌آید: $P(x)>۰$ $Q(x)>۰$ $Q(x)\neq ۱$ پس اگر مبنای لگاریتم عدد b باشد، فقط شرط $P(x)>۰$ را داریم؛ بنابراین دامنهٔ تابع زیر $f(x)=\log_{۳}(۲x-۵)$ به صورت $x>\dfrac{۵}{۲}$ است.

؟ دامنهٔ تابع $f(x)=\log_{x-۱}\dfrac{۳-x}{x+۱}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) هیچ

گزینهٔ «۴» گفتیم باید $\dfrac{۳-x}{x+۱}$ و $x-۱$ مثبت باشند و $x-۱$ برابر ۱ نشود:

الف) $\dfrac{۳-x}{x+۱}>۰ \Rightarrow$

x		۱-		۳	
f(x)	−	ت ن	+	۰	−

$\Rightarrow -۱<x<۳$

ب) $x-۱>۰ \Rightarrow x>۱$

پ) $x-۱\neq ۱ \Rightarrow x\neq ۲$

از اشتراک این‌ها دامنه به صورت $(۱,۳)-\{۲\}$ است که شامل هیچ عدد صحیحی نیست.

؟ اگر دامنهٔ $f(x)=\dfrac{x-۲}{۲x^۲+ax+b}$ به صورت $\mathbb{R}-\{۲,۳\}$ باشد. $f(۱)$ کدام است؟

۱) $-۰/۵$ ۲) $-۰/۲۵$ ۳) $-۰/۷۵$ ۴) نشدنی

گزینهٔ «۲» حتماً ۲ و ۳ ریشه‌های مخرج‌اند که از $\mathbb{R}$ حذف شده‌اند. پس ریشه‌های $۲x^۲+ax+b$، $x_۱=۲$ و $x_۲=۳$ هستند و داریم:

راه‌حل اول

$$۲x^۲+ax+b=۲(x-۲)(x-۳)=۲(x^۲-۵x+۶)$$

پس:

$$f(۱)=\frac{۱-۲}{۲(۱-۵+۶)}=\frac{-۱}{۴}=-۰/۲۵$$

راه‌حل دوم

$$S=x_۱+x_۲\Rightarrow -\frac{a}{۲}=۲+۳\Rightarrow a=-۱۰$$

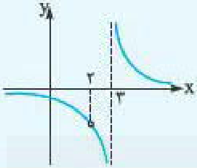
$$P=x_۱x_۲\Rightarrow \frac{b}{۲}=۲\times۳\Rightarrow b=۱۲$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{x-۲}{۲x^۲-۱۰x+۱۲}\Rightarrow f(۱)=-\frac{۱}{۴}$$

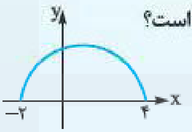
اشاره این‌که $x=۲$ هم صورت و هم مخرج را صفر می‌کند، نگرانتان نکند! قبل از تعیین دامنه حق نداریم تابع را ساده کنیم.

نمودار این تابع را هم ببینید:

$$f(x)=\frac{۱}{۲(x-۳)}\ (x\neq۲)$$



? اگر نمودار $f(x)=\sqrt{-x^۲+mx+n}$ به شکل مقابل باشد، mn کدام است؟



۱) ۸
۲) -۸
۳) ۱۶
۴) -۱۶

= گزینهٔ «۳» شکل می‌گوید دامنهٔ f به صورت $[-۲,۴]$ است؛ پس حتماً جدول تعیین علامت عبارت زیر رادیکال، این بوده:

x		-۲		۴	
$-x^۲+mx+n$	$-$	۰	$+$	۰	$-$

و ریشه‌های آن -۲ و ۴ هستند. با استفاده از S و P داریم:

$$S=x_۱+x_۲=-\frac{m}{-۱}=-۲+۴=۲\Rightarrow m=۲$$

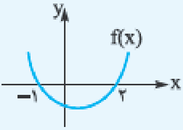
$$P=x_۱x_۲=\frac{n}{-۱}=-۲\times۴=-۸\Rightarrow n=۸$$

پس:

$$mn=۱۶$$

اشاره نمودار $y=\sqrt{-x^۲+mx+n}$ یک نیم‌دایره است.

? شکل روبه‌رو نمودار $y=f(x)$ است. دامنهٔ $y=\sqrt{\frac{x}{f(x)}}$ کدام است؟



۱) $(-\infty,-۱)\cup[۰,۲)$
۲) $[-۱,۰]\cup[۲,+\infty)$
۳) $(-۱,۰]\cup(۲,+\infty)$
۴) $(-\infty,-۱]\cup(۰,۲]$

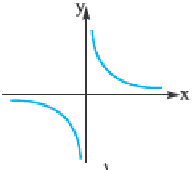
گزینهٔ «۳» تعیین علامت را ببینید:

		-۱		۰		۲	
x	$-$		$-$	۰	$+$		$+$
$f(x)$	$+$	۰	$-$		$-$	۰	$+$
$\frac{x}{f(x)}$	$-$	ت ن	$+$	۰	$-$	ت ن	$+$

$$(-۱,۰]\cup(۲,+\infty)$$

رسم نمودار تابع‌های $y=\frac{ax+b}{cx+d}$

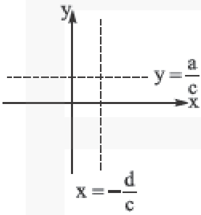
این تابع‌ها هم‌خانوادهٔ $y=\frac{۱}{x}$ هستند. نمودار خود $y=\frac{۱}{x}$ را بلدید:



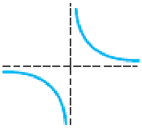
$y=\frac{۱}{x}$

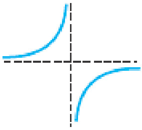
$$D=R=\mathbb{R}-\{۰\}$$

در حالت کلی در $y=\frac{ax+b}{cx+d}$، دامنه، $\mathbb{R}-\{\text{ریشهٔ مخرج}\}$، یعنی $\mathbb{R}-\{-\frac{d}{c}\}$ و برد برابر $\mathbb{R}-\{\frac{a}{c}\}$ است. مثلاً در $y=\frac{۲x-۱}{۳x+۵}$ دامنه $\mathbb{R}-\{-\frac{۵}{۳}\}$ و برد $\mathbb{R}-\{\frac{۲}{۳}\}$ است. در دستگاه مختصات دو خط $x=-\frac{d}{c}$ و $y=\frac{a}{c}$ را به صورت خط‌چین می‌کشیم.

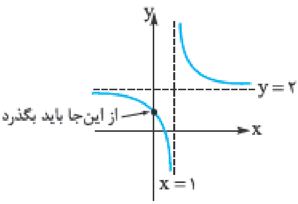


نمودار تابع باید در این شکل، شبیه $\frac{۱}{x}$ یا قرینهٔ آن رسم شود:





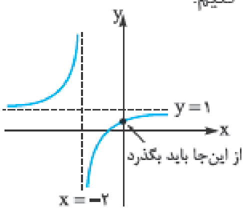
برای انتخاب شکل می‌توانیم به محل برخورد با محور yها (x را مساوی صفر قرار دهیم) یا علامت مشتق تابع دقت کنیم.



$y=\frac{۲x-۱}{x-۱}$

مشتق منفی است.

$f(۰)=۱$



$y=\frac{x+۱}{x+۲}$

مشتق مثبت است.

$f(۰)=\frac{۱}{۲}$

? تابع با ضابطهٔ $f(x)=\left|\dfrac{x-1}{x-2}\right|$ در کدام بازه صعودی است؟

۱) $(0,1)$ ۲) $(1,2)$ ۳) $(-\infty,1)$ ۴) $(2,+\infty)$

= گزینهٔ «۲» نمودار را ببینید. ریشهٔ مخرج $x=2$ و نسبت $\dfrac{a}{c}$ برابر $y=1$ است؛ پس:

حالا با توجه به شکل می‌گوییم f در فاصلهٔ $(1,2)$ صعودی است.

اعمال جبری روی توابع

با دو تابع f و g می‌توانیم تابع‌های $f+g$، $f-g$، $f.g$، $\dfrac{f}{g}$ و... را بسازیم. این تابع‌ها در دامنهٔ مشترک f و g معنی دارند، البته در مورد تقسیم نباید مخرج صفر شود.

? اگر $f(x)=\sqrt{x-2}$ و $g(x)=\log(3-x)$. تابع $\dfrac{g}{f}$ در کدام دامنه تعریف می‌شود؟

۱) $(2,3)$ ۲) $[2,3)$ ۳) $[2,+\infty)$ ۴) $(-\infty,3)$

= گزینهٔ «۱» قرار شد دامنهٔ مشترک را در نظر بگیریم و مخرج کسر صفر نباشد:

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{x-2}\ \Rightarrow\ x\geq 2\\ \log(3-x)\ \Rightarrow\ x<3\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{مشترک}} 2\leq x<3\xrightarrow{f\neq 0} 2<x<3$$

? اگر $f(x)=\left\{\begin{array}{l}(1,2),(-1,1)\\(0,3),(2,-1)\end{array}\right\}$ و $g(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$. دامنهٔ تابع $\dfrac{\sqrt{f}}{g}$ شامل چند عضو است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

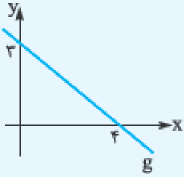
= گزینهٔ «۱» خب باید دامنهٔ f را داشته باشیم، دامنهٔ g را هم داشته باشیم (تا این‌جا یعنی دامنهٔ مشترک f و g) و بتوانیم $\sqrt{f}$ را بر g تقسیم کنیم. (پس $f\geq 0$ باشد و g صفر نشود.) دامنهٔ f شامل $-1,1,0,2$ است، اما دامنهٔ g، شامل $x=1$ نیست.

پس دامنهٔ مشترک می‌شود $-1,0,2$ اما در $x=2$ مقدار f منفی است و در $x=-1$ مقدار g صفر است، پس فقط برای $x=0$ می‌توان $\dfrac{\sqrt{f}}{g}$ را ساخت.

$$\frac{\sqrt{f}}{g}=\{0,(\frac{\sqrt{3}}{-1})\}$$

اشاره فهمیدید چه‌کار کردیم؟ برای ساختن $\dfrac{\sqrt{f}}{g}$ باید در دامنهٔ مشترک، مقدار $\sqrt{f}$ را بر g تقسیم کنیم. یعنی عمل جبری گفته‌شده را در دامنهٔ مشترک، روی yها انجام دهیم.

اگر $f=\{(۲,۱),(۰,۳),(۱,۲),(-۱,۰),(۴,۱)\}$ و g تابع خطی به شکل زیر باشد، مقدار $\frac{f+g}{۲f-g}(۱)$ کدام است؟



۱) $\frac{۱۳}{۵}$

۲) $\frac{۱۳}{۷}$

۳) $\frac{۱۷}{۵}$

۴) $\frac{۱۷}{۷}$

گزینهٔ «۴» ببینید:

$$h(۱)=\frac{f+g}{۲f-g}(۱)=\frac{f(۱)+g(۱)}{۲f(۱)-g(۱)}\xrightarrow[f(۱)=۲]{(۱,۲)\in f}\frac{۲+g(۱)}{۴-g(۱)}$$

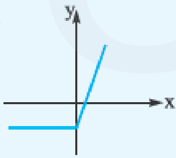
$g(۱)$ را هم می‌توانیم حساب کنیم. معادلهٔ خط g را می‌نویسیم:

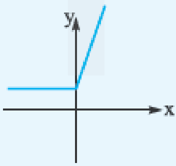
$$\xrightarrow[(۴,۰)]{(۰,۳)} y=-\frac{۳}{۴}x+۳ \xrightarrow{x=۱} g(۱)=-\frac{۳}{۴}+۳=\frac{۹}{۴}$$

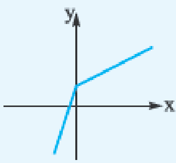
پس:

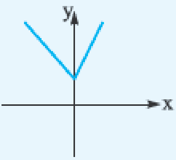
$$h(۱)=\frac{۲+\frac{۹}{۴}}{۴-\frac{۹}{۴}}=\frac{\frac{۱۷}{۴}}{\frac{۷}{۴}}=\frac{۱۷}{۷}$$

اگر $f(x)=|x|$ و $g(x)=x-۲$، نمودار $f+g$ چگونه است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

گزینهٔ «۱» قرار شد $f(x)$ و $g(x)$ را جمع کنیم:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=|x|+x-۲$$

پس برای xهای مثبت خط $y=۲x-۲$ و برای xهای منفی $y=-۲$ را داریم.

$$f+g=\begin{cases}۲x-۲ & x\geq ۰\\ -۲ & x<۰\end{cases}$$

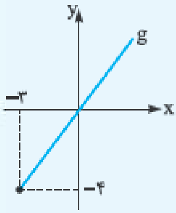
؟ نمودار توابع f و g در شکل زیر رسم شده است. در تابع $f\times g$، دامنه و برد چند عضو صحیح مشترک دارند؟

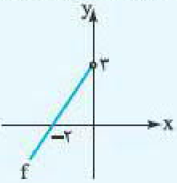
۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴





= گزینهٔ «۲» دامنه‌ها به ترتیب $(-\infty,\circ)$ و $[-۳,+\infty)$ است، پس دامنهٔ مشترک می‌شود:

$[-۳,\circ)$

ضابطهٔ f به صورت $f(x)=\frac{۳}{۲}x+۳$ و ضابطهٔ g به شکل $g(x)=\frac{۴}{۳}x$ است، پس:

$$(f\times g)(x)=(\frac{۳}{۲}x+۳)\times(\frac{۴}{۳}x)=۲x^۲+۴x$$

$$(f\times g)(-۳)=۲(-۳)^۲+۴(-۳)=۱۸-۱۲=۶$$

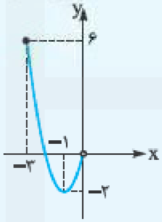
$$(f\times g)(\circ)=\circ$$

نمودار $f\times g$ را هم ببینید:

$$y=۲x^۲+۴x$$

$$x_S=-\frac{b}{۲a}=-\frac{۴}{۲(۲)}=-۱$$

$$y_S=۲(-۱)^۲+۴(-۱)=-۲$$

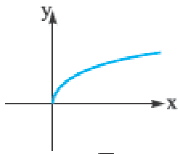


پس برد تابع $(f\times g)$ به صورت $[-۲,۶]$ است که با دامنه‌اش در اعداد صحیح -۲ و -۱ مشترک‌اند، یعنی ۲ عضو مشترک دارند.

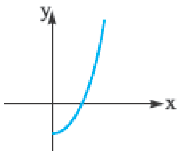
توابع صعودی و نزولی

وقتی x افزایش می‌یابد، یعنی از چپ به راست روی نمودار حرکت کنیم، ممکن است y زیاد شود، کم شود یا ثابت بماند. این حالت‌ها را داریم:

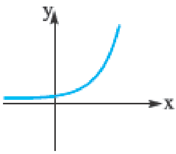
الف اگر در یک بازه با افزایش x، مقدار y هم افزایش یابد، می‌گوییم تابع در آن بازه اکیداً صعودی است. ببینید:



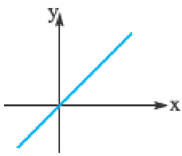
$y=\sqrt{x}$



$y=x^۲-۱$
$x\geq\circ$



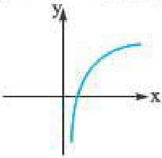
$y=۲^x$



$y=x$

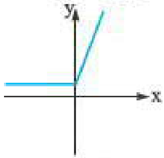
به زبان ریاضی: $x_۲>x_۱ \Rightarrow y_۲>y_۱$

ب اگر در یک بازه، با افزایش x مقدار y زیاد شود یا ثابت بماند، می‌گوییم تابع در آن بازه، صعودی است.



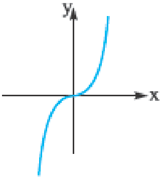
$y = \log x$

اکیداً صعودی و صعودی



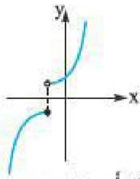
$y = x + |x| + 1$

صعودی

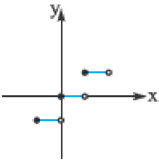


$y = x|x|$

اکیداً صعودی است، صعودی هم هست.



اکیداً صعودی و صعودی



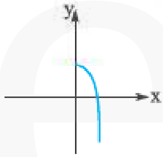
$y = [x]$

صعودی

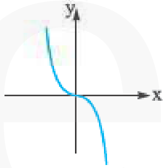
اشاره شرط ریاضی‌اش می‌شود: $x_2 > x_1 \Rightarrow y_2 \geq y_1$

دقت می‌کنید که هر تابع اکیداً صعودی، صعودی هم هست.

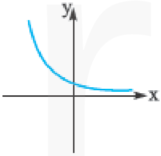
پ اگر با افزایش x، مقدار y کم شود، تابع اکیداً نزولی است؛ یعنی $x_2 > x_1 \Rightarrow y_2 < y_1$. این‌ها را ببینید:



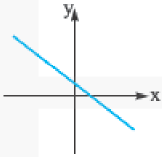
$y = 3 - x^2$
$x \geq 0$



$y = -x^3$



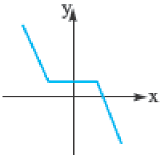
$y = (\frac{1}{2})^x$



$y = -x + 1$

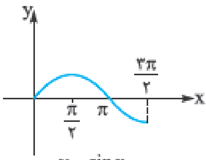
ت اگر با افزایش x مقدار y کم شود یا ثابت بماند، می‌گوییم تابع نزولی است، پس: $x_2 > x_1 \Rightarrow y_2 \leq y_1$

مثلاً این شکلی:



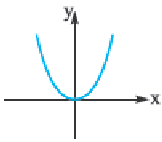
ث تابع ثابت هم صعودی و هم نزولی است.

ج اگر در یک بازه، هم اکیداً صعودی و هم اکیداً نزولی ببینیم، می‌گوییم تابع در آن بازه یکنوا نیست.



$y = \sin x$

در $(0, \frac{\pi}{2})$ صعودی و در $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ نزولی و در $(0, \frac{3\pi}{2})$ غیریکنوا



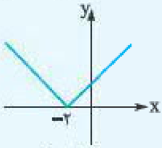
$y = x^2$

قبل از صفر: نزولی، بعد از صفر: صعودی، در $\mathbb{R}$: غیریکنوا

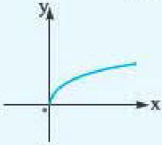
? اگر $f(x)=\sqrt{x}+|x+۲|$ باشد، کدام درست است؟

۱) f اکیداً نزولی است.
۲) f اکیداً صعودی است.
۳) f ابتدا نزولی و سپس صعودی است.
۴) f ابتدا صعودی و سپس نزولی است.

= گزینهٔ «۲» دو نمودار را ببینید:



$|x+۲|$



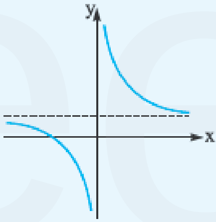
$\sqrt{x}$

به خاطر شرط دامنهٔ مجموع دو تابع، فقط $x\geq ۰$ را داریم که هر دو تابع در این بازه، اکیداً صعودی‌اند. جمع دو تابع اکیداً صعودی نیز همواره اکیداً صعودی است؛ پس f اکیداً صعودی است.

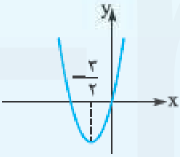
? در کدام بازه $y=x^۲+۳x$ صعودی و $y=\frac{x+۳}{x}$ نزولی است؟

۱) $(-۱,۱)$
۲) $(-۲,۰)$
۳) $(۱,۲)$
۴) $(-۲,۱)$

= گزینهٔ «۳» نمودارها را ببینید:



$y=\frac{x+۳}{x}$



$y=x^۲+۳x$

در $(-\infty,۰)$ و نیز در $(۰,+\infty)$ نزولی است.

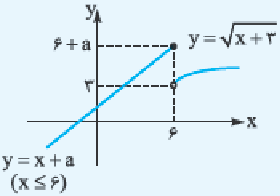
رأس سهمی در $x_S=-\frac{۳}{۲}$ است. در $(-\infty,-\frac{۳}{۲})$ نزولی و در $(-\frac{۳}{۲},+\infty)$ صعودی است.

پس بازهٔ انتخابی باید قسمتی از $(-\frac{۳}{۲},+\infty)$ باشد و شامل $x=۰$ نباشد. بین گزینه‌ها ۳ مناسب است.

? اگر $f(x)=\begin{cases} x+a & x\leq ۶ \\ \sqrt{x+۳} & x>۶ \end{cases}$ اکیداً صعودی باشد، آن‌گاه $g(x)=ax+|۲x-۱|$ چگونه است؟

۱) اکیداً صعودی
۲) اکیداً نزولی
۳) ابتدا صعودی و سپس نزولی
۴) ابتدا نزولی و سپس صعودی

گزینهٔ «۲» نمودار f را ببینید:



این تابع وقتی اکیداً صعودی است که $6+a\le 3$ باشد، پس $a\le -3$ است.

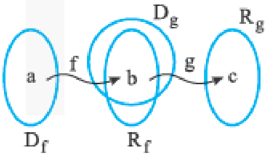
حالا به g نگاه کنید:

$$g(x)=\begin{cases}ax+2x-1 & 2x-1\ge 0\\ ax-(2x-1) & 2x-1<0\end{cases}=\begin{cases}(a+2)x-1 & x\ge \frac{1}{2}\\ (a-2)x+1 & x<\frac{1}{2}\end{cases}$$

چون a از -3 کم‌تر است $a+2$ و $a-2$ هر دو منفی‌اند؛ پس هر دو نیم‌خط در g نزولی‌اند و خود g هم اکیداً نزولی است.

تابع مرکب

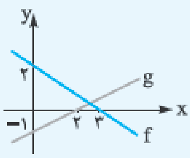
$g(f(x))$ یا $gof(x)$ تابعی است که با عمل پی‌درپی f و g به دست می‌آید. اول $x=a$ را به تابع f می‌دهیم و $b=f(a)$ را به دست می‌آوریم؛ سپس b (یعنی خروجی f) را به تابع g می‌دهیم و $c=g(b)$ را می‌گیریم.



$$b=f(a)$$
$$c=g(b)=g(f(a))$$

پس اولاً $x=a$ باید در دامنهٔ تابع f باشد و ثانیاً باید $b=f(a)$ در دامنهٔ تابع g باشد.

اگر f و g به شکل مقابل باشند. مقدار $gof(2)$ کدام است؟



۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $-\frac{2}{3}$

۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $-\frac{1}{3}$

گزینهٔ «۲» ضابطهٔ f با توجه به دو نقطهٔ $(0,2)$ و $(3,0)$ به صورت $f(x)=-\frac{2}{3}x+2$ است؛ پس $f(2)=-\frac{4}{3}+2=\frac{2}{3}$ ضابطهٔ g نیز با استفاده از نقاط $(2,0)$ و $(0,-1)$ به صورت $g(x)=\frac{1}{2}x-1$ است؛ پس:

$$gof(2)=g(f(2))=g(\frac{2}{3})=\frac{1}{2}(\frac{2}{3})-1=\frac{1}{3}-1=-\frac{2}{3}$$

؟ توابع f و g به صورت زیر داده شده‌اند. اگر $(۲,۳)\in fog$ و $(-۱,۲)\in gof$، مقدار ab کدام است؟

$$f=\{(-۱,۴),(۲,۱),(۵,۳)\}$$
$$g=\{(۲,a),(۱,۳),(۴,b)\}$$

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

گزینهٔ «۳» از $(۲,۳)\in fog$ نتیجه می‌گیریم: $x=۲\to\boxed{g}\to\boxed{f}\to ۳$

پس در g باید زوج مرتب $(۲,k)$ باشد و در f باید زوج مرتب $(k,۳)$ ببینیم. پس با نگاهی به f و g داریم: $a=۵$

همچنین $(-۱,۲)$ در gof به ما می‌گوید چنین زنجیره‌ای را داریم: $x=-۱\to\boxed{f}\to\boxed{g}\to ۲$

حالا چون $f(-۱)=۴$ است؛ پس باید $g(۴)=۲$ باشد؛ یعنی $b=۲$ و در نتیجه: $ab=۵\times۲=۱۰$

؟ اگر $f(x)=۲x-۱$ با دامنهٔ $D_f=\{-۱,۰,۱,۲,۳\}$ باشد، ضرب اعضای برد تابع fof کدام است؟

۱) ۴۵ ۲) ۱۵ ۳) -۴۵ ۴) -۱۵

گزینهٔ «۴» با توجه به ضابطهٔ f داریم:

$-۱\xrightarrow{f}-۳\ ,\ ۱\xrightarrow{f}۱\ ,\ ۳\xrightarrow{f}۵$

$۰\xrightarrow{f}-۱\ ,\ ۲\xrightarrow{f}۳$

حالا f را روی خروجی‌ها اثر می‌دهیم: $-۱\xrightarrow{f}-۳\xrightarrow{f}\times$

$۰\to-۱\to-۳$

$۱\to۱\to۱$

$۲\to۳\to۵$

$۳\to۵\to\times$

پس fof به این صورت است: $fof(x)=\{(۰,-۳),(۱,۱),(۲,۵)\}$

که ضرب عناصر بردش $-۳\times۱\times۵$ یعنی -۱۵ است.

اشاره اگر ضابطه‌های f و g را داشته باشیم، برای تشکیل ضابطهٔ fog باید در f به جای xها، g(x) را قرار دهیم. ببینید:

الف) $f(x)=۲x^۲-۱$

$g(x)=\cos x$

$fog(x)=۲(\cos x)^۲-۱=\cos ۲x$

$gof(x)=\cos(۲x^۲-۱)$

ب) $f(x)=\dfrac{x-۱}{x+۱}$

$g(x)=\sqrt{x}$

$fog(x)=f(\sqrt{x})=\dfrac{\sqrt{x}-۱}{\sqrt{x}+۱}$

$gof(x)=\sqrt{\dfrac{x-۱}{x+۱}}$

پ) $f(x)=x^۲-۱$

$g(x)=۲x+۱$

$fog(x)=(۲x+۱)^۲-۱$

$gof(x)=۲(x^۲-۱)+۱$

اگر $f(x)=\frac{x-۱}{۲x-۱}$ و $g(x)=\frac{۲x+۱}{x+۲}$، ضابطهٔ تابع fog کدام است؟

۱) $\frac{x-۱}{۳x}$ ۲) $\frac{x-۳}{۳x}$ ۳) $\frac{x-۱}{۳x+۴}$ ۴) $\frac{x-۳}{۳x+۴}$

گزینهٔ «۱»

$$fog(x)=f(g(x))=f(\frac{۲x+۱}{x+۲})=\frac{\frac{۲x+۱}{x+۲}-۱}{۲\frac{۲x+۱}{x+۲}-۱}$$

$$=\frac{\frac{۲x+۱-(x+۲)}{x+۲}}{\frac{۴x+۲-(x+۲)}{x+۲}}=\frac{\frac{x-۱}{x+۲}}{\frac{۳x}{x+۲}}=\frac{x-۱}{۳x}$$

به x عدد می‌دهیم، مثلاً: $\xrightarrow{x=۲} fog(۲)=f(g(۲))$

$$\xrightarrow{g(۲)=\frac{۵}{۴}} f(\frac{۵}{۴})=\frac{\frac{۵}{۴}-۱}{۲(\frac{۵}{۴})-۱}=\frac{\frac{۱}{۴}}{\frac{۵}{۲}-۱}=\frac{\frac{۱}{۴}}{\frac{۳}{۲}}=\frac{۱}{۶}$$

پس گزینه‌ای جواب است که به ازای $x=۲$ بشود $\frac{۱}{۶}$ که فقط در ۱ این‌طور است.

اگر $f(g(x))=x^۲-۱$ و $g(x)=۲x-۱$ ضابطهٔ تابع f کدام است؟

۱) $\frac{(x+۱)(x+۳)}{۴}$ ۲) $\frac{(x-۱)(x+۳)}{۴}$

۳) $\frac{(x-۱)(x-۳)}{۴}$ ۴) $\frac{(x+۱)(x-۳)}{۴}$

گزینهٔ «۲» سؤال می‌گوید: $f(۲x-۱)=x^۲-۱$

اگر $۲x-۱$ را t بگیریم، داریم: $۲x-۱=t \Rightarrow x=\frac{t+۱}{۲}$

$$f(t)=(\frac{t+۱}{۲})^۲-۱=\frac{t^۲+۲t+۱}{۴}-۱=\frac{۱}{۴}(t^۲+۲t-۳)=\frac{(t-۱)(t+۳)}{۴}$$

پس: $f(x)=\frac{(x-۱)(x+۳)}{۴}$

می‌دانیم: $f(۲x-۱)=x^۲-۱$

با قراردادن $x=۰$ داریم: $f(-۱)=-۱$ و در بین ضابطه‌ها فقط برای ۲ این شرط درست است:

$$f(-۱)=\frac{-۲(۲)}{۴}=-۱$$

اگر $g(x)=۲x+۱$ و $g(f(x))=x^۲-x$ آن‌گاه $f(۳)$ کدام است؟

۱) ۱/۵ ۲) ۲/۵ ۳) ۳/۵ ۴) ۴/۵

گزینهٔ «۲» سؤال می‌گوید $g(f(x))=۲f(x)+۱=x^۲-x$، پس داریم:

$$f(x)=\frac{x^۲-x-۱}{۲}\Rightarrow f(۳)=\frac{۹-۳-۱}{۲}=\frac{۵}{۲}=۲/۵$$

اگر $f(x)=\sqrt{x-۱}$ و $g(x)=\frac{\sqrt{۵-x}}{x-۲}$ آن‌گاه در دامنهٔ gof، چند نقطه طول صحیح دارند؟

۱) ۲۶ ۲) ۲۵ ۳) ۲۳ ۴) ۲۴

گزینهٔ «۲» گفتیم در gof باید اولاً $x\in D_f$ باشد تا وارد f شود؛ سپس خروجی f یعنی $f(x)$ باید در دامنهٔ g قرار گیرد، پس داریم:

$$D_f=\{x\,|\,x\geq ۱\}\;,\;D_g=\{x\,|\,x\leq ۵,x\neq ۲\}$$

$$D_{gof}=\{x\,|\,x\in D_f,f(x)\in D_g\}=\{x\,|\,x\geq ۱,\sqrt{x-۱}\leq ۵,\sqrt{x-۱}\neq ۲\}$$

$$=\{x\,|\,x\geq ۱,\underbrace{x-۱\leq ۲۵}_{x\leq ۲۶},\underbrace{x-۱\neq ۴}_{x\neq ۵}\}=[۱,۲۶]-\{۵\}$$

که در آن ۲۵ عدد صحیح است.

اگر $f(x)=\frac{x-۱}{x-۲}$ و $g(x)=\log_۲(x^۲-x)$ دامنهٔ gof کدام است؟

۱) $(۱,+\infty)$ ۲) $(-\infty,۰)$ ۳) $(۱,+\infty)-\{۲\}$ ۴) $\{۱\}\cup(-\infty,۰)$

گزینهٔ «۳» باید $x\in D_f$ و نیز $f(x)$ عضو D_g باشد، پس اول دامنهٔ دو تابع را حساب می‌کنیم:

f: مخرج $\neq ۰\Rightarrow x-۲\neq ۰\Rightarrow x\neq ۲$

g: جلوی لگاریتم $>۰\Rightarrow x^۲-x>۰\Rightarrow x>۱$ یا $x<۰$

پس داریم: $D_{gof}=\{x\neq ۲\,|\,\frac{x-۱}{x-۲}>۱$ یا $\frac{x-۱}{x-۲}<۰\}$

حالا از $\frac{x-۱}{x-۲}<۰$ نتیجه می‌شود x بین دو ریشه است؛ یعنی $x\in(۱,۲)$ و از $\frac{x-۱}{x-۲}>۱$ داریم:

$$\frac{x-۱}{x-۲}-۱=\frac{x-۱-(x-۲)}{x-۲}=\frac{۱}{x-۲}>۰$$

پس $x>۲$ بنابراین: $D_{gof}=\{x\neq ۲\,|\,x>۲$ یا $۱<x<۲\}=(۱,+\infty)-\{۲\}$

$x=-۱$ را کنترل می‌کنیم:

$-۱\rightarrow f\xrightarrow{\frac{۲}{۳}} g\rightarrow$ نشدنی

پس ۱− در دامنهٔ gof نیست و گزینه‌هایی که ۱− را شامل می‌شوند غلط هستند. (۲ و ۴ نیست.)

حالا اختلاف ۱ و ۳ در عدد ۲ است، اما واضح است که $x=۲$ را نمی‌توانیم بدهیم؛ پس گزینه‌ای درست است که ۲ را ندارد؛ یعنی ۳.

یک مثال فانتزی هم ببینید:

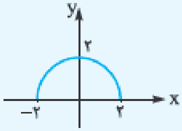
اگر $f(x)=۲^{x-۱}$ و $g(x)=\sqrt{۴-x^۲}$ آن‌گاه برد تابع fog بازه‌ای با کدام طول است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

گزینهٔ «۳» مراحل fog را ببینید:

$$x \rightarrow \boxed{g(x)=\sqrt{۴-x^۲}} \rightarrow \boxed{f(x)=۲^{x-۱}} \rightarrow y$$

اول $\sqrt{۴-x^۲}$ به ما اجازه می‌دهد xهای بین ۲− تا ۲ را بدهیم و خروجی آن اعداد بین صفر و ۲ است. نمودارش را هم بلدید:



$g(x)=\sqrt{۴-x^۲}$

حالا این اعداد بین صفر تا ۲ را به $۲^{x-۱}$ می‌دهیم:

$$۰ \le x \le ۲ \Rightarrow -۱ \le x-۱ \le ۱$$

$$\xrightarrow{۲^x \text{ صعودی است}} ۲^{-۱} \le ۲^{x-۱} \le ۲^۱ \Rightarrow \frac{۱}{۲} \le y \le ۲$$

پس برد تابع fog بازهٔ $[\frac{۱}{۲},۲]$ می‌باشد و طول این بازه $۲-\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۲}$ است.

تابع یک‌به‌یک و وارون تابع

در تابع یک‌به‌یک برای هر ورودی، یک خروجی غیرتکراری داریم. پس مؤلفه‌های اول متمایز و مؤلفه‌های دوم نیز متمایزند. به هر عضو B فقط یک فلش وارد می‌شود (پس تعداد اعضای دامنه و برد برابر است). و هر خط افقی، نمودار را حداکثر یک بار قطع می‌کند.

اشاره هر تابع اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی همواره یک‌به‌یک است.

با حذف حداقل .... زوج مرتب می‌توان از تابع $f=\{(۱,۲),(-۲,۳),(۵,۲),(-۱,۴),(۲,۳)\}$ به .... تابع یک‌به‌یک رسد.

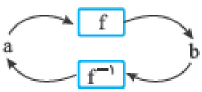
۱) ۲، ۳ ۲) ۲، ۴ ۳) ۳، ۴ ۴) ۳، ۳

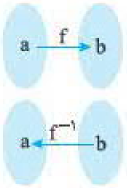
گزینهٔ «۲» از بین $(۱,۲)$ و $(۵,۲)$ باید یکی حذف شود و از بین $(۲,۳)$ و $(-۲,۳)$ نیز باید یکی حذف شود تا مؤلفه‌های دوم متمایز باشند، پس حداقل ۲ زوج مرتب را باید برداشت و به تعداد $۴=\binom{۲}{۱}\times\binom{۲}{۱}$ تابع یک‌به‌یک به دست می‌آید.

اگر تابع f یک‌به‌یک باشد، وارون آن تابع را تابع $f^{-۱}$ می‌نامیم.

الف در زوج‌های مرتب باید جای مؤلفه‌ها را عوض کرد. پس اگر در f زوج مرتب (a,b) داریم در $f^{-۱}$ زوج مرتب (b,a) وجود دارد.

ب در مقادیر تابع اگر $f(a)=b$ باشد، در تابع $f^{-۱}$ می‌نویسیم $f^{-۱}(b)=a$ یعنی جای ورودی و خروجی عوض می‌شود:

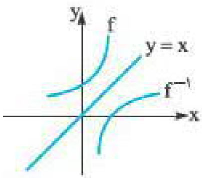




پ در نمودار پیکانی جهت فلش‌ها را عوض می‌کنیم.

پس دامنه و برد جابه‌جا می‌شوند؛ یعنی $D_f = R_{f^{-1}}$ و $R_f = D_{f^{-1}}$

ت در نمودار مختصاتی شکل f را نسبت به $y = x$ قرینه می‌کنیم:



ث در ضابطهٔ $y = f(x)$ جای x و y را عوض می‌کنیم. سپس ضابطهٔ جدید را مرتب می‌کنیم. بد نیست در ذهن داشته باشید که:

- وارون تابع خطی (با شیب a)، خطی با شیب $\frac{۱}{a}$ است.
- وارون تابع نمایی $y = a^x$ تابع لگاریتمی $y = \log_a x$ است.
- وارون تابع $y = \sqrt{ax+b}$، نیمی از یک سهمی است.
- وارون تابع $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ به صورت $y = \frac{-dx+b}{cx-a}$ است.
- وقتی تابع را وارون می‌کنیم، گاهی جلوی ضابطهٔ f^{-1} دامنهٔ آن را هم می‌نویسیم. دامنهٔ f^{-1} همان برد f است.

؟ اگر $f(x) = ۳x - ۱ ; ۱ \le x < ۳$، ضابطهٔ f^{-1} کدام است؟

۱) $y = ۳x + ۱ ; ۱ \le x < ۳$
۲) $y = \frac{x+۱}{۳} ; ۱ \le x < ۳$
۳) $y = ۳x + ۱ ; ۲ \le x < ۸$
۴) $y = \frac{x+۱}{۳} ; ۲ \le x < ۸$

گزینهٔ «۴» قرار شد جای x و y را عوض کنیم:

$$y = ۳x - ۱ \Rightarrow x = ۳y - ۱ \Rightarrow x + ۱ = ۳y \Rightarrow y = \frac{x+۱}{۳}$$

و برد تابع را به جای دامنه بنویسیم.

$$f(۱) = ۲ , f(۳) = ۸ \Rightarrow R_f = D_{f^{-1}} = [۲,۸]$$

اشاره چون $f(x) = ۳x - ۱$ اکیداً صعودی و پیوسته است، برد آن با دامنهٔ (a,b) به صورت $(f(a), f(b))$ است.

؟ اگر $f = \{(۱,۲), (-۴,۰), (۲,-۴), (-۱,۳)\}$ و $g(x) = \frac{۲x-۱}{x+۱}$ حاصل $f^{-1}(g^{-1}(۳))$ کدام است؟

۱) -۱
۲) ۱
۳) ۲
۴) صفر

گزینهٔ «۳» $g^{-1}(3)$ یعنی چه عددی به g بدهیم تا ۳ شود؟

$$g^{-1}(3)=b \Rightarrow g(b)=3$$

$$\Rightarrow \frac{2b-1}{b+1}=3 \Rightarrow 3b+3=2b-1 \Rightarrow b=-4$$

حالا $f^{-1}(-4)$ یعنی چه عددی به f بدهیم تا ۴− شود؟ خب با توجه به زوج مرتب $(2,-4)$ داریم:

$$f^{-1}(-4)=2$$

در بازه‌ای که $f(x)=|2x-4|-x-1$ صعودی است، ضابطهٔ وارون آن کدام است؟

۱) $y=x+3\,;\,x\geq 5$
۲) $y=x+5\,;\,x\geq 7$
۳) $y=x+5\,;\,x\geq -3$
۴) $y=x+3\,;\,x\geq 2$

گزینهٔ «۳» برای $x>2$ و $x<2$ به ترتیب داریم:

$$x\geq 2: f(x)=2x-4-x-1 \Rightarrow f(x)=x-5 \ (\text{صعودی})$$

$$x<2: f(x)=-(2x-4)-x-1=-3x+3 \ (\text{نزولی})$$

پس ضابطهٔ $y=x-5$ با دامنهٔ $x\geq 2$ را وارون می‌کنیم:

$$y=x-5 \xrightarrow{\text{وارون}} x=y-5 \Rightarrow y=x+5 \quad \underbrace{(x\geq -3)}_{f(x)\ \text{برد}}$$

خواص تابع وارون

الف) ترکیب f و f^{-1} همانی است و داریم:

$$f(f^{-1}(x))=x \quad (D_{fof^{-1}}=D_{f^{-1}}=R_f) \quad , \quad f^{-1}(f(x))=x \quad (D_{f^{-1}of}=D_f)$$

ب) اگر f صعودی باشد، f^{-1} هم صعودی است و اگر f نزولی باشد، f^{-1} نیز نزولی است.

پ) اگر f صعودی باشد، f و f^{-1} همدیگر را فقط روی نیمساز ربع اول و سوم قطع می‌کنند. پس به جای حل معادلهٔ $f=f^{-1}$ در این حالت، $f(x)=x$ را حل می‌کنیم.

ت) تابع‌های زیر وارون خودشان هستند. $(f=f^{-1})$

$$y=\sqrt[n]{1-x^n}\ ,\ y=-x+b\ ,\ y=\frac{ax+b}{cx-a}$$

تابع $f(x)=x^3+2x-10$ وارون خود را با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) غیرمتقاطع

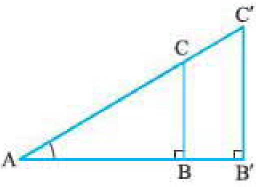
گزینهٔ «۲» چون x^3 و $2x-10$ اکیداً صعودی‌اند، مجموع آن‌ها یعنی f نیز اکیداً صعودی است؛ پس به جای حل معادلهٔ $f=f^{-1}$ کافی است $f(x)=x$ قرار دهیم:

$$x^3+2x-10=x \Rightarrow x^3+x=10 \xrightarrow{\text{جستوجو}} x=2 \Rightarrow y=2$$

پس با عرض ۲ متقاطع‌اند.

معرفی نسبت‌های مثلثاتی

توی مثلث قائم‌الزاویه، مقدار این نسبت‌ها فقط به اندازه زاویهٔ A بستگی دارد.



$$\sin A = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{AC'}$$

$$\cos A = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'}$$

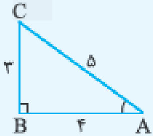
$$\tan A = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{AB'}$$

$$\cot A = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}} = \frac{AB}{BC} = \frac{AB'}{B'C'}$$

در مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع قائم ۳ و ۴، مجموع سینوس و تانژانت زاویهٔ کوچک‌تر چه‌قدر است؟

۱) ۱/۴ ۲) ۱/۳ ۳) ۱/۳۵ ۴) ۱/۲

گزینهٔ «۳» از رابطهٔ فیثاغورس می‌دانیم که طول وتر این مثلث ۵ است، زاویهٔ کوچک‌تر هم زاویهٔ مقابل به ضلع کوچک‌تر است. پس:



$$\left.\begin{array}{l} \sin A = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{۳}{۵} = ۰/۶ \\ \tan A = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{۳}{۴} = ۰/۷۵ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{مجموع}} \sin A + \tan A = ۱/۳۵$$

بین نسبت‌های مثلثاتی این رابطه‌ها را داریم:

$$\sin^۲\theta + \cos^۲\theta = ۱,\ \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta},\ \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta},\ \tan\theta \times \cot\theta = ۱$$

و این رابطه‌ها را هم می‌شود نتیجه گرفت:

$$۱ + \tan^۲\theta = \frac{۱}{\cos^۲\theta},\ ۱ + \cot^۲\theta = \frac{۱}{\sin^۲\theta}$$

البته به جای این رابطه‌ها می‌شود از مثلث قائم‌الزاویه هم استفاده کرد.

اگر $\sin A = \frac{۱۲}{۱۳}$، مقدار $\tan A$ کدام است؟ (A زاویه‌ای از مثلث قائم‌الزاویه است.)

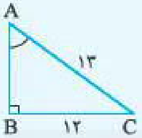
۱) ۲/۴ ۲) ۱/۲ ۳) ۱/۳ ۴) ۲/۶

گزینهٔ «۱» **راه‌حل اول** گفتیم $\sin^۲ A + \cos^۲ A = ۱$، پس داریم:

$$\frac{۱۴۴}{۱۶۹} + \cos^۲ A = ۱$$

$$\Rightarrow \cos^۲ A = ۱ - \frac{۱۴۴}{۱۶۹} = \frac{۱۶۹ - ۱۴۴}{۱۶۹} = \frac{۲۵}{۱۶۹} \Rightarrow \cos A = \frac{۵}{۱۳}$$

$$\Rightarrow \tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\frac{۱۲}{۱۳}}{\frac{۵}{۱۳}} = \frac{۱۲}{۵} = ۲/۴$$



راه‌حل دوم مثلث قائم‌الزاویه را به صورت روبه‌رو در نظر بگیرید:

با استفاده از رابطهٔ فیثاغورس طول ضلع سوم مثلث می‌شود $AB = ۵$؛

پس داریم: $\tan A = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{BC}{AB} = \frac{۱۲}{۵} = ۲/۴$

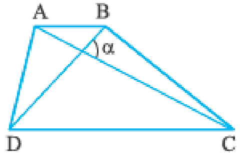
اشاره بد نیست سه‌تایی‌های فیثاغورس مانند: $(۸,۱۵,۱۷)$، $(۷,۲۴,۲۵)$، $(۵,۱۲,۱۳)$ و $(۳,۴,۵)$ را حفظ باشیم.

نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های ۰°، ۳۰°، ۴۵°، ۶۰° و ۹۰° را باید حفظ باشیم.

	۰°	۳۰°	۴۵°	۶۰°	۹۰°
sin	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱
cos	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰
tan	۰	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$	ت ن
cot	ت ن	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۰

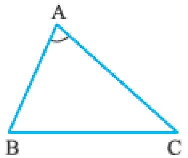
منظور از «ت ن» همان تعریف نشده است. (چون مخرج صفر می‌شود، می‌گوییم جواب تعریف‌نشده است.)

با استفاده از سینوس، می‌توانیم مساحت مثلث و چهارضلعی را حساب کنیم.



$$S_{ABCD} = \frac{۱}{۲} AC \times BD \times \sin \alpha$$

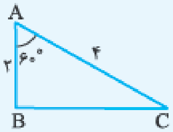
(نصف حاصل‌ضرب دو قطر در سینوس زاویهٔ بین قطرها)



$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲} AB \times AC \times \sin A$$

(نصف حاصل‌ضرب دو ضلع در سینوس زاویهٔ بین آن‌ها)

❓ در شکل روبه‌رو، طول ارتفاع وارد بر ضلع AC کدام است؟



۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $\sqrt{۳}$

۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) $۴\sqrt{۳}$

گزینهٔ «۲» **راه‌حل اول** مساحت مثلث را حساب کنیم:

$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲}AB \times AC \times \sin A = \frac{۱}{۲}(۲)\,(۴)\sin ۶۰^\circ = ۴ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۲\sqrt{۳}$$

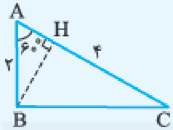
از طرف دیگر این مساحت برابر است با:

$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲}AC \times BH$$

پس:

$$۲\sqrt{۳} = \frac{۱}{۲}\underbrace{(۴)}_{AC}BH \Rightarrow BH = \sqrt{۳}$$

راه‌حل دوم شکل را ببینید:



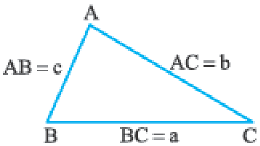
در مثلث ABH تعریف سینوس را می‌نویسیم:

$$\sin\hat{A} = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{BH}{AB}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{BH}{۲} \Rightarrow BH = \sqrt{۳}$$

اشاره مساحت مثلث ABC را با هر کدام از فرمول‌های زیر می‌شود حساب کرد و جواب همهٔ آن‌ها یکی است:

$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲}AB \times AC \times \sin A = \frac{۱}{۲}AB \times BC \times \sin B = \frac{۱}{۲}AC \times BC \times \sin C$$



پس داریم:

$$ab\sin C = bc\sin A = ac\sin B$$

یا:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

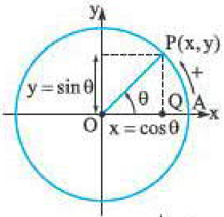
یعنی در مثلث، تقسیم سینوس هر زاویه به طول ضلع مقابلش، مقدار ثابتی است.

اشاره برای مساحت مثلث برحسب طول اضلاع، یک فرمول دیگر به نام هرون داریم:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \qquad (p = \frac{a+b+c}{۲} = \text{نصف محیط})$$

دایرهٔ مثلثاتی

مرکز این دایره مبدأ مختصات و شعاعش برابر ۱ است. نقطهٔ $A(۱,۰)$ نقطهٔ شروع است و جهت مثبت، پادساعت‌گرد است. اگر از نقطهٔ P (انتهای کمان) بر دو محور عمود کنیم، مقدار $\sin\theta$ و $\cos\theta$ به دست می‌آید.

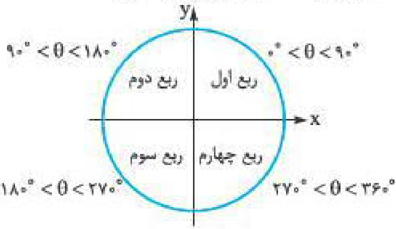


$\cos\theta$ همان طول نقطهٔ P است: $x_P=\cos\theta=OQ$

$\sin\theta$ همان عرض نقطهٔ P است: $y_P=\sin\theta=PQ$

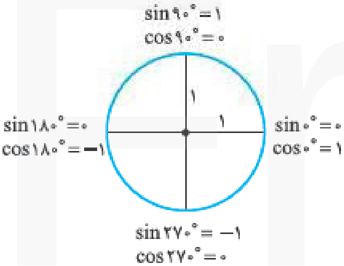
مقدار $\tan\theta$ را هم داریم: $\tan\theta=\frac{y_P}{x_P}=\frac{PQ}{OQ}$

محورها دایره را به ۴ قسمت تقسیم می‌کنند که هر کدام را یک ناحیه یا ربع می‌نامیم.



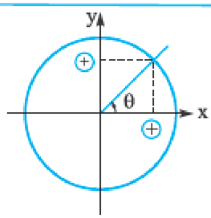
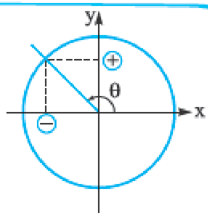
خود زاویه‌های ۰°، ۹۰°، ۱۸۰°، ۲۷۰° و ۳۶۰° در مرز ناحیه‌ها هستند و آن‌ها را جزء هیچ‌کدام از ناحیه‌ها در نظر نمی‌گیریم.

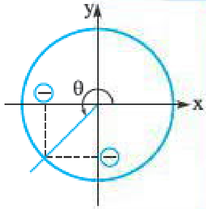
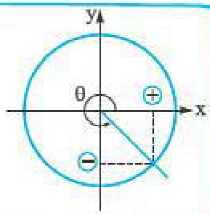
اشاره چون شعاع دایرهٔ مثلثاتی ۱ است، داریم:



همواره مقدار $\sin\theta$ و $\cos\theta$ بین ۱ و ۱- هستند.

علامت نسبت‌های مثلثاتی در نواحی مختلف را باید بلد باشیم:

شکل دایره		
ناحیه	اول	دوم
$\sin\theta$	+	+
$\cos\theta$	+	–
$\tan\theta$	+	–
$\cot\theta$	+	–

شکل دایره		
ناحیه	سوم	چهارم
$\sin\theta$	$-$	$-$
$\cos\theta$	$-$	$+$
$\tan\theta$	$+$	$-$
$\cot\theta$	$+$	$-$

؟ اگر $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$ و این زاویه در ربع دوم باشد. مقدار $\cot\theta$ کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) ۲ ۳) $-\sqrt{2}$ ۴) -2

گزینهٔ «۳» از همین اول کار حواسمان باشد که جواب، عددی منفی است؛ چون در ربع دوم $\cot\theta<0$ است. حالا با فرمول $1+\cot^2\theta=\frac{1}{\sin^2\theta}$ داریم:

$$1+\cot^2\theta=\frac{1}{(\frac{1}{\sqrt{3}})^2}=3 \Rightarrow \cot^2\theta=2 \xrightarrow{\cot\theta<0} \cot\theta=-\sqrt{2}$$

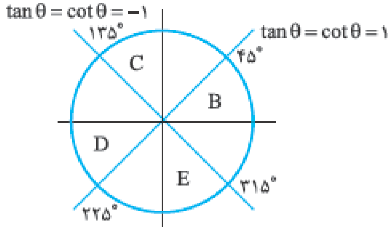
؟ اگر $\sqrt{1+\tan^2\theta}=\frac{1}{\cos\theta}$ و $\sqrt{1-\cos^2\theta}=-\sin\theta$، آن‌گاه حاصل $\frac{\tan\theta}{|\tan\theta|}+\frac{\cot\theta-1}{|\cot\theta|+1}$ کدام است؟

۱) -2 ۲) ۲ ۳) صفر ۴) ۱

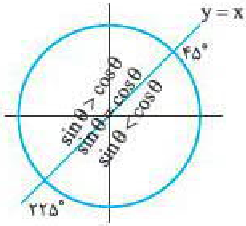
گزینهٔ «۱» می‌دانیم $1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$ پس $\sqrt{1+\tan^2\theta}=\frac{1}{|\cos\theta|}$، اما سؤال گفته $\frac{1}{\cos\theta}$؛ پس $\cos\theta>0$ است. در مورد $\sqrt{1-\cos^2\theta}$ هم می‌دانیم جواب $\sqrt{\sin^2\theta}=|\sin\theta|$ است و سؤال گفته $-\sin\theta$ پس $\sin\theta<0$. با این شرایط θ در ربع چهارم قرار دارد و تانژانت و کتانژانت آن منفی‌اند:

$$\tan\theta<0,\cot\theta<0 \Rightarrow \frac{\tan\theta}{|\tan\theta|}+\frac{\cot\theta-1}{|\cot\theta|+1}=\frac{\tan\theta}{-\tan\theta}+\frac{\cot\theta-1}{-\cot\theta+1}$$
$$=-1+-1=-2$$

مقایسهٔ مقدار نسبت‌های مثلثاتی

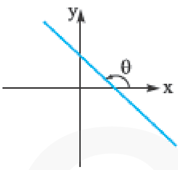


در نواحی B، C، D و E مقدار تانژانت از کتانژانت کم‌تر است.



خط $y = x$ و زاویه‌های ۴۵° و ۲۲۵°، مرز سینوس و کسینوس هستند.

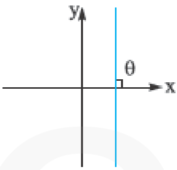
اشاره مقدار شیب یک خط برابر تانژانت زاویهٔ خط با جهت مثبت محور xها است. حالت‌های مختلف را ببینید:



$۹۰^\circ < \theta < ۱۸۰^\circ$

$m = \tan\theta < ۰$

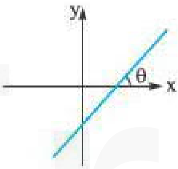
شیب منفی است.



$\theta = ۹۰^\circ$

$m = \tan\theta =$ ت ن

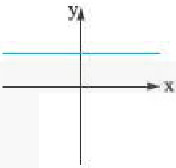
شیب تعریف نمی‌شود.



$۰ < \theta < ۹۰^\circ$

$m = \tan\theta > ۰$

شیب مثبت است.



$\theta = ۰$

$m = \tan\theta = ۰$

شیب صفر است.

اتحادهای مثلثاتی

با استفاده از روابط مثلثاتی می‌توانیم نشان بدهیم که بعضی از تساوی‌ها همیشه درست هستند. این تساوی‌ها را اتحاد مثلثاتی می‌نامیم. در حل برخی از تست‌ها بد نیست که یک مقدار مشخص به θ بدهیم:

؟ اگر رابطهٔ $\sin^4\theta + \cos^4\theta = 1 + B\sin^2\theta\cos^2\theta$ یک اتحاد باشد، B کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۱− ۴) ۲−

گزینهٔ «۴» **راه‌حل اول** θ را ۴۵° قرار دهیم:

$$\sin^4 45^\circ + \cos^4 45^\circ = 1 + B\sin^2 45^\circ \cos^2 45^\circ$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 = 1 + B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4$ یا همان $\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)^2$ می‌شود $\frac{1}{4}$ پس:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 + B\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{B}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow B = -2$$

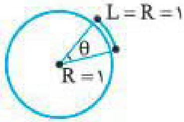
راه‌حل دوم از طرف چپ به راست برسیم: (صورت اتحاد به شکل $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ را به یاد داریم)

$$\sin^4\theta+\cos^4\theta=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta=1-2\sin^2\theta\cos^2\theta$$

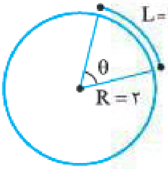
$$\Rightarrow\ B=-2$$

معرفی رادیان

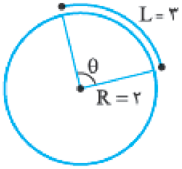
یک رادیان زاویه‌ای است که طول کمان روبرویش برابر شعاع دایره باشد.



این دایرهٔ مثلثاتی است و زاویهٔ θ ۱ رادیان است.



این زاویه ۱ رادیان است.

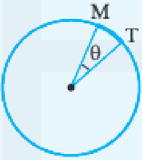


این زاویه از ۱ رادیان بیشتر است.

درواقع اندازهٔ زاویه برحسب رادیان برابر است با:

$$\theta=\frac{\text{طول کمان}}{\text{شعاع دایره}}=\frac{L}{R}$$

❓ **روی زمین فاصله تهران تا مشهد ۹۰۰ کیلومتر و شعاع زمین ۶۳۰۰ کیلومتر است. زاویه‌ای که رأسش مرکز زمین رسم شده و انتهای ضلع‌های آن تهران و مشهد باشند چند رادیان است؟**

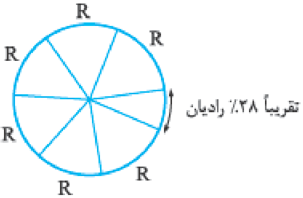


۱) $\frac{1}{10}$
۲) $\frac{1}{7}$
۳) $\frac{1}{14}$
۴) $\frac{1}{21}$

گزینهٔ «۲»

$$\theta=\frac{L}{R}=\frac{900}{6300}=\frac{1}{7}$$

اشاره محیط دایره برابر $2\pi R$ است، پس با دقت به این‌که $\pi\simeq 3/14$، محیط دایره تقریباً $6/28R$ است. یعنی در محیط دایره شش زاویه به اندازهٔ ۱ رادیان جا می‌شود.



در دایره به شعاع ۱، کل محیط دایره برابر $L=2\pi$ است که می‌شود 360° پس: $2\pi=360^\circ\ \Rightarrow\ \pi=180^\circ$

پس اولاً هر ۱ رادیان می‌شود $\frac{180}{\pi}$ درجه (تقریباً $57/3$ درجه)

ثانیاً هر ۱ درجه می‌شود $\frac{\pi}{180}$ رادیان (تقریباً $0/017$ رادیان)

ثالثاً برای تبدیل از درجه به رادیان باید مقدار زاویه را در $\frac{\pi}{180}$ ضرب کنیم. مثلاً:

$$36^\circ=36\times\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{5}(\text{rad})$$

$$50^\circ=50\times\frac{\pi}{180}=\frac{5\pi}{18}(\text{rad})$$

? **زاویهٔ ۲۴° برحسب رادیان چه‌قدر از $\frac{\pi}{۱۰}$ بیشتر است؟**

۱) $\frac{\pi}{۴۰}$ ۲) $\frac{\pi}{۳۰}$ ۳) $\frac{\pi}{۶۰}$ ۴) $\frac{\pi}{۲۰}$

گزینهٔ «۲» **راه‌حل اول** اول ۲۴° را برحسب رادیان بنویسیم: $۲۴^\circ = ۲۴\frac{\pi}{۱۸۰} \overset{\div ۶}{=} \frac{۴\pi}{۳۰} = \frac{۲\pi}{۱۵}$

اختلاف با $\frac{\pi}{۱۰}$: $\frac{۲\pi}{۱۵} - \frac{\pi}{۱۰} = \frac{۴\pi - ۳\pi}{۳۰} = \frac{\pi}{۳۰}$

راه‌حل دوم $\frac{\pi}{۱۰}$ رادیان می‌شود ۱۸°، اختلاف آن با ۲۴° می‌شود ۶° و سؤال برحسب رادیان خواسته: $۶^\circ = \frac{۶\pi}{۱۸۰} = \frac{\pi}{۳۰}(\text{rad})$

? **کدام درست است؟**

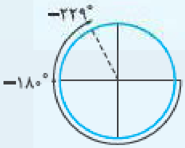
۱) -۴ رادیان در ربع سوم است.

۲) در مثلثی با دو ضلع ۱، زاویهٔ بین برابر ۱ رادیان، طول ضلع سوم از ۱ بیشتر است.

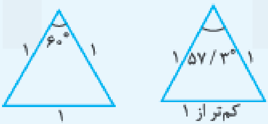
۳) کمان ۱۸° در دایرهٔ با شعاع ۱، طولی برابر $۰/۳۱۴$ دارد.

۴) سینوس زاویهٔ ۳ رادیان، منفی است.

گزینهٔ «۳» در ۱، -۴ رادیان یعنی $-۴ \times ۵۷/۳ \simeq -۲۲۹^\circ$ که در ربع دوم می‌افتد.



در ۲، زاویهٔ بین دو ضلع ۱ رادیان یعنی $۵۷/۳^\circ$ که از ۶۰° کم‌تر است؛ پس ضلع سوم از ۱ کم‌تر است.



در ۳، کمان ۱۸° می‌شود $\frac{\pi}{۱۰} = ۱۸ \times \frac{\pi}{۱۸۰}$ رادیان و طولش برابر است با:

و این درست است. $L = R\theta = ۱ \times \frac{\pi}{۱۰} = \frac{۳/۱۴}{۱۰} = ۰/۳۱۴$

در ۴، زاویهٔ ۳ رادیان می‌شود $۱۷۲^\circ \simeq ۳ \times ۵۷/۳^\circ$ که در ربع دوم قرار دارد و سینوسش مثبت است.

نسبت‌های مثلثاتی زوایای وابسته به θ

زاویه‌هایی مثل $\frac{\pi}{۲} \pm \theta$، $\pi \pm \theta$، $\frac{۳\pi}{۲} \pm \theta$ و $-\theta$ را در این قسمت می‌بینیم.

در اولین قدم یادتان باشد که ۲π یا همان ۳۶۰° را می‌توانیم از کمان حذف یا به آن اضافه کنیم؛ مثلاً ۳۹۰° همان ۳۰° است (در اصطلاح این دو کمان «هم‌انتها» هستند)، یا $\frac{۲۵\pi}{۳}$ همان $\frac{\pi}{۳}$ است

در قدم بعدی باید ربع کمان را تعیین کنیم. $\frac{\pi}{2}-\alpha$ ربع اول است، $\frac{\pi}{2}+\alpha$ و $\pi-\alpha$ ربع دوم هستند. کمان‌های $\pi+\alpha$ و $\frac{3\pi}{2}-\alpha$ در ربع سوم قرار دارند و کمان $\frac{3\pi}{2}+\alpha$ و $-\alpha$ در ربع چهارم واقع می‌شوند. علامت نسبت را در آن ربع می‌نویسیم و در گام آخر باید روی نسبت مثلثاتی تصمیم بگیریم. قانون این است که اگر $\frac{\pi}{2}$ یا $\frac{3\pi}{2}$ داشت نسبت را عوض می‌کنیم (sin می‌شود cos و برعکس، tan می‌شود cot و برعکس)؛ این‌ها را ببینید:

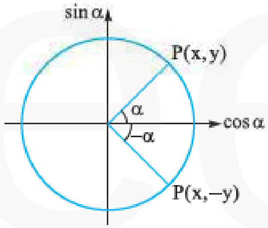
$\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha) \xrightarrow{\text{ربع دوم}} +\cos\alpha$ ($\frac{\pi}{2}$ دارد و عوض می‌شود.)

$\cos(\pi+\alpha) \xrightarrow{\text{ربع سوم}} -\cos\alpha$ (π دارد و عوض نمی‌شود.)

$\tan(\frac{3\pi}{2}+\alpha) \xrightarrow{\text{ربع چهارم}} -\cot\alpha$ ($\frac{3\pi}{2}$ دارد و عوض می‌شود.)

کتاب درسی سه حالت خاص هم دارد:

دو زاویهٔ قرینه



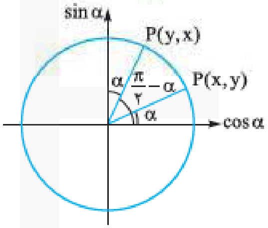
$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$$
$$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$$
$$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$$
$$\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$$

*کسینوس منفی را می‌خورد و بقیه به پشت خود می‌اندازند.

دو زاویهٔ متمم

$$\alpha+\beta=90^\circ$$

$\beta=90-\alpha$ یا $\frac{\pi}{2}-\alpha$

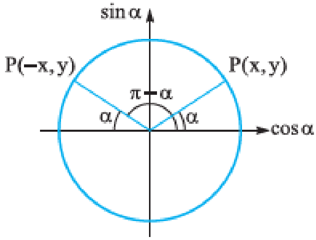


$$\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha$$
$$\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha$$
$$\tan(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cot\alpha$$
$$\cot(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\tan\alpha$$

دو زاویهٔ مکمل

$$\alpha+\beta=180^\circ$$

$\beta=180^\circ-\alpha$ یا $\pi-\alpha$



$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$$
$$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$$
$$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$$
$$\cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha$$

؟ اگر α کمانی در ربع اول باشد، در میان عبارات زیر چند مقدار مختلف هست؟

$$\sin(\pi+\alpha),\cos(\alpha+\frac{\pi}{۲}),\sin(\alpha-\pi),\cos(\alpha-\frac{\pi}{۲})$$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

= گزینهٔ «۲»

$$\sin(\pi+\alpha)\xrightarrow[\sin<۰]{\text{ربع سوم}}=-\sin\alpha$$

(چون $\frac{\pi}{۲}$ داشت، عوض شد.)

$$\cos(\frac{\pi}{۲}+\alpha)\xrightarrow[\cos<۰]{\text{ربع دوم}}=-\sin\alpha$$

$$\sin(\alpha-\pi)=-\sin(\pi-\alpha)\xrightarrow[\sin>۰]{\text{ربع دوم}}=-\sin\alpha$$

اشاره دقت کردید؟ برای $\alpha-\pi$ نوشتیم $-(\pi-\alpha)$ و چون سینوس بود، منفی را به پشت خودش آورد.

$$\cos(\alpha-\frac{\pi}{۲})=\cos(-(\frac{\pi}{۲}-\alpha))\xrightarrow{\text{منفی را می‌خورد}}=\cos(\frac{\pi}{۲}-\alpha)$$

$$\xrightarrow[\cos>۰]{\text{ربع اول}}=+\sin\alpha$$

پس ۳تا از آن‌ها $-\sin\alpha$ و یکی دیگر $\sin\alpha$ بود، یعنی ۲ مقدار مختلف وجود دارد.

؟ حاصل $\frac{\sin ۱۲۰^\circ}{\tan ۶۰۰^\circ}$ چه‌قدر بیشتر از $\cos ۸۴۰^\circ \tan\frac{۱۱\pi}{۴}$ است؟

۱) صفر ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) ۱

= گزینهٔ «۱»

$$\sin ۱۲۰^\circ=\sin(۱۸۰^\circ-۶۰^\circ)\xrightarrow[\sin>۰]{\text{ربع دوم}}=\sin ۶۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan ۶۰۰^\circ=\tan ۲۴۰^\circ=\tan(۱۸۰^\circ+۶۰^\circ)\xrightarrow[\tan>۰]{\text{ربع سوم}}=\tan ۶۰^\circ=\sqrt{۳}$$

۳۶۰° کم کنیم

پس جواب اولی می‌شود $\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\sqrt{۳}}$ یعنی $\frac{۱}{۲}$.

حالا دومی:

$$\tan\frac{۱۱\pi}{۴}\xrightarrow{\frac{۸\pi}{۴}\text{ کم کنیم}}=\tan\frac{۳\pi}{۴}=\tan(\pi-\frac{\pi}{۴})\xrightarrow[\tan<۰]{\text{ربع دوم}}$$

$$=-\tan\frac{\pi}{۴}=-۱$$

$$\cos ۸۴۰^\circ\xrightarrow[(۲\times ۳۶۰^\circ)]{۷۲۰^\circ\text{ کم کنیم}}=\cos ۱۲۰^\circ=\cos(۹۰^\circ+۳۰^\circ)\xrightarrow[\cos<۰]{\text{ربع دوم}}=-\sin ۳۰^\circ=-\frac{۱}{۲}$$

پس حاصل سومی هم می‌شود $+\frac{۱}{۲}$ و اختلافشان صفر است.

؟ اگر $\tan ۴۰^\circ = ۰/۸$، حاصل $\dfrac{\sin ۱۳۰^\circ - \cos ۳۱۰^\circ}{\sin ۲۳۰^\circ + \cos ۱۴۰^\circ}$ کدام است؟

۱) $۰/۱$ ۲) $۰/۳$ ۳) $-۰/۱$ ۴) $-۰/۳$

گزینهٔ «۳» همه کمان‌ها را برحسب ۴۰° بنویسیم:

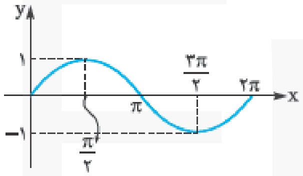
$$\frac{\sin(\overbrace{۹۰^\circ + ۴۰^\circ}^{\text{دوم}}) - \cos(\overbrace{۲۷۰^\circ + ۴۰^\circ}^{\text{چهارم}})}{\sin(\underbrace{۲۷۰^\circ - ۴۰^\circ}_{\text{سوم}}) + \cos(\underbrace{۱۸۰^\circ - ۴۰^\circ}_{\text{دوم}})}$$

در صورت نسبت‌ها عوض می‌شوند، در مخرج هم سینوس باید کسینوس شود:

$$= \frac{\cos ۴۰^\circ - \sin ۴۰^\circ}{-\cos ۴۰^\circ - \cos ۴۰^\circ} = \frac{\cos ۴۰^\circ - \sin ۴۰^\circ}{-۲\cos ۴۰^\circ}$$

$$\xrightarrow{\text{تفکیک}} = -\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲}\tan ۴۰^\circ = -\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} \times \frac{۸}{۱۰} = \frac{-۱}{۲} + \frac{۴}{۱۰} = -\frac{۱}{۱۰}$$

نمودار توابع سینوسی و کسینوسی



نمودار $y = \sin x$ به صورت مقابل است:

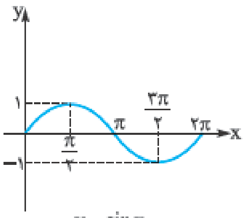
البته این نمودار فقط در فاصلهٔ $[۰, ۲\pi]$ رسم شده است.

اما در بازه‌های دیگر به صورت $[۲k\pi, ۲k\pi + ۲\pi]$ هم همین شکل را دارد، چون مضارب زوج π تأثیری روی کمان نمی‌گذارند.

ویژگی‌های نمودار $y = \sin x$ را مرور کنیم:

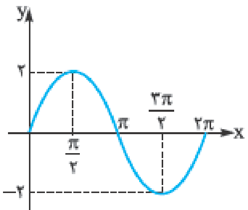
- دامنه $= \mathbb{R}$، برد $= [-۱, ۱]$، دورهٔ تناوب $= ۲\pi$
- نقاط برخورد تابع با محور x (صفرهای تابع): $x = k\pi$
- نقاط ماکزیمم (جاهایی که حداکثر مقدار را دارد): $x = ۲k\pi + \dfrac{\pi}{۲}$
- نقاطی که تابع حداقل مقدار را دارد (نقاط مینیمم): $x = ۲k\pi + \dfrac{۳\pi}{۲}$

اشاره مثل هر تابع دیگر، با انتقال نمودار تابع $\sin x$ می‌توانیم نمودارهای جدیدی بکشیم. شکل‌ها را ببینید:

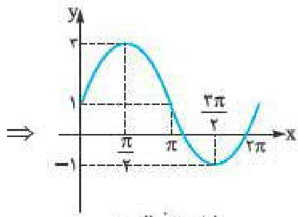


$y = \sin x$

$\Rightarrow$

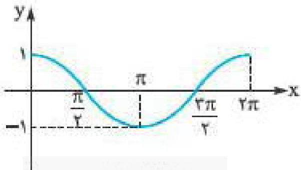


$y = ۲\sin x$



$y = ۲\sin x + ۱$

اشاره تغییرات مقدار $\sin x$ هم مورد توجه کتاب درسی است. از صفر تا $\frac{\pi}{۲}$ سینوس زیاد می‌شود (از صفر به ۱ می‌رسد) سپس از $\frac{\pi}{۲}$ تا $\frac{۳\pi}{۲}$ مقدار سینوس از ۱ به -۱ کاهش می‌یابد و در انتها، از $\frac{۳\pi}{۲}$ تا ۲π، سینوس از -۱ به صفر می‌رسد (زیاد می‌شود).



$y = \cos x$

نمودار $y = \cos x$ به صورت مقابل است:

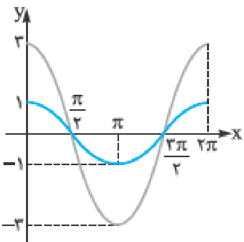
نمودار این تابع هم در فاصله‌های $[۲k\pi, ۲k\pi + ۲\pi]$ تکرار می‌شود.

دامنه، برد و دورهٔ تناوب آن مثل $y = \sin x$ است: $T = ۲\pi \;,\; R = [-۱,۱] \;,\; D = \mathbb{R}$

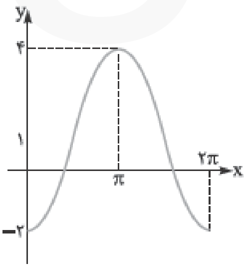
نقاط برخورد $y = \cos x$ با محور xها در طول‌های $x = k\pi + \frac{\pi}{۲}$ است.

بیشترین مقدار تابع در نقاط $x = ۲k\pi$ رخ می‌دهد و کم‌ترین مقدار آن در $x = ۲k\pi + \pi$ است.

نمودار $y = ۱ - ۳\cos x$ را ببینید:

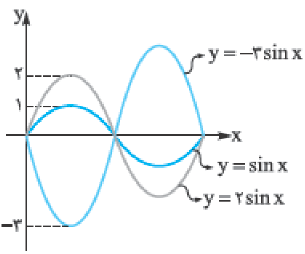


$y = ۳\cos x$



$y = -۳\cos x + ۱$

بررسی نمودارهای $y = b\cos ax$ و $y = b\sin ax$:



وقتی ضریب b را در تابع ضرب می‌کنیم عرض نقاط، b برابر می‌شوند. اگر $b < ۰$ باشد جای ماکزیمم و مینیمم عوض می‌شود.

با ضرب a در x، مقادیر xها (یعنی اعداد محور افقی) بر a تقسیم می‌شوند.

پس نمودار $y = b\sin ax$ به صورت مقابل است:

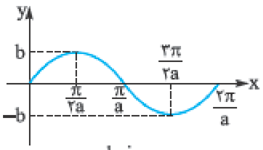
عرض ماکزیمم و مینیمم

$\uparrow$

$y = b\sin a\,x$

$\downarrow$

طول‌های نقاط



$y = b\sin ax$

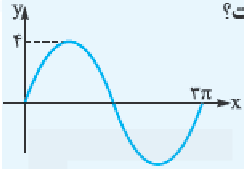
★ صفرهای تابع: $x = \dfrac{k\pi}{a}$

★ طول نقاط ماکزیمم: $x = \dfrac{۲k\pi + \frac{\pi}{۲}}{a}$

★ طول نقاط مینیمم: $x = \dfrac{۲k\pi + \frac{۳\pi}{۲}}{a}$

★ دورهٔ تناوب: $T = \dfrac{۲\pi}{|a|}$

؟ شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y = m\sin nx$ است. $m + n$ کدام است؟



۱) $\frac{۱۰}{۳}$ ۲) $\frac{۱۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱۳}{۳}$ ۴) $\frac{۱۴}{۳}$

گزینهٔ «۴» بیشترین مقدار تابع ۴ است؛ پس $m = ۴$. نقطهٔ ۳π (دورهٔ تناوب برابر ۳π است) در محل $\frac{۲\pi}{a}$ است؛ پس:

$$۳\pi = \frac{۲\pi}{a} \Rightarrow a = \frac{۲}{۳} = n$$

پس $n = \frac{۲}{۳}$ و داریم:

$$m + n = ۴ + \frac{۲}{۳} = \frac{۱۴}{۳}$$

اشاره گفتیم دورهٔ تناوب تابع‌های $y = \sin ax$ و $y = \cos ax$ برابر $\frac{۲\pi}{|a|}$ است.

بیایید با هم چند مثال حل کنیم:

؟ دورهٔ تناوب تابع $f(x) = ۲\sin\frac{۳x}{۲}$ کدام است؟

۱) $\frac{۳\pi}{۲}$ ۲) $\frac{۴\pi}{۳}$ ۳) $\frac{\pi}{۳}$ ۴) $\frac{\pi}{۶}$

گزینهٔ «۲»

$$T = \frac{۲\pi}{|a|} = \frac{۲\pi}{\frac{۳}{۲}} = \frac{۴\pi}{۳}$$

؟ دورهٔ تناوب تابع $f(x) = \cos ۳x - ۲\sin ۲x$ کدام است؟

۱) ۳π ۲) ۲π ۳) π ۴) $\frac{\pi}{۲}$

گزینهٔ «۲» در تابع‌های جمع و تفریق، باید از دوره‌های تناوب ک.م.م بگیریم:

$$\cos ۳x : T_۱ = \frac{۲\pi}{۳}$$

$$\sin ۲x : T_۲ = \frac{۲\pi}{۲} = \pi$$

$$\xrightarrow{\text{ک.م.م}} T = ۲\pi$$

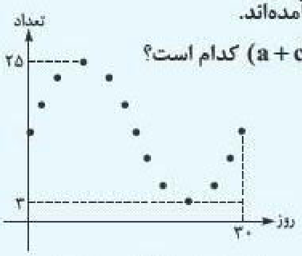
مسائل کاربردی توابع متناوب

تابع‌های متناوب برای پدیده‌های تکراری به کار می‌روند. اگر داده‌ها را در یک دورهٔ تناوب داشته باشیم، تابعی به شکل $f(t)=a\sin(bt)+c$ برای آن‌ها به دست می‌آوریم.

a را دامنهٔ موج می‌نامیم که نصف دامنهٔ تغییرات داده است. c مقدار اولیهٔ تابع و برابر معدل بیشترین و کم‌ترین داده است. برای b هم داریم: $T=\frac{۲\pi}{b} \Rightarrow b=\frac{۲\pi}{T}$

تعداد مشتریان یک مغازه در ۳۰ روز ماه در نمودار زیر آمده‌اند.

اگر $f(t)=a\sin bt+c$ تعداد مشتریان را نشان دهد. $(a+c)b$ کدام است؟



۱) $\frac{۵\pi}{۲}$ ۲) $\frac{۵\pi}{۳}$

۳) $\frac{\pi}{۲}$ ۴) $\frac{\pi}{۳}$

گزینهٔ «۲»

$$a=\frac{\max-\min}{۲}=\frac{۲۵-۳}{۲}=۱۱$$

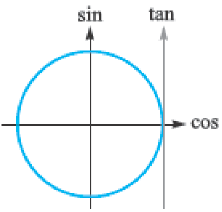
$$c=\frac{\max+\min}{۲}=\frac{۲۵+۳}{۲}=۱۴$$

$$b=\frac{۲\pi}{T}=\frac{۲\pi}{۳۰}=\frac{\pi}{۱۵}$$

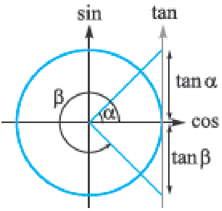
$$\Rightarrow (a+c)b=(۱۱+۱۴)\frac{\pi}{۱۵}=\frac{۲۵\pi}{۱۵}=\frac{۵\pi}{۳}$$

تابع تانژانت و محاسبهٔ تانژانت از دایرهٔ مثلثاتی

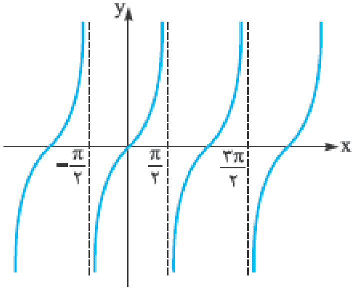
محور تانژانت، مماس بر دایرهٔ مثلثاتی و موازی محور sin است:



برای به دست آوردن $\tan\alpha$ باید شعاع را امتداد دهیم تا به محور تانژانت بخورد. دقت کنید که زاویهٔ β در ربع چهارم و تانژانت آن منفی است.



نمودار تابع $y=\tan x$ به شکل صفحهٔ بعد درمی‌آید:



در دامنهٔ آن نقاط $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ را نداریم (در این نقاط تانژانت وجود ندارد)، برد آن $\mathbb{R}$ است و دورهٔ تناوبش $T = \pi$ است.

صفرهای این تابع در محل صفرهای $y = \sin x$ هستند. پس طول نقاط تلاقی نمودار تابع با محور xها، $x = k\pi$ است.

اشاره دورهٔ تناوب $y = \tan ax$ به صورت $T = \frac{\pi}{|a|}$ و نقاط برخورد آن با محور افقی در $x = \frac{k\pi}{a}$ است.

؟ دورهٔ تناوب کدام تابع از بقیه کم‌تر است؟

۱) $y = \tan 3x$ ۲) $y = \sin 5x$ ۳) $y = \cos 4x$ ۴) $y = \sin \pi x$

گزینهٔ «۱» دوره‌های تناوب به ترتیب $T_1 = \frac{\pi}{3}$، $T_2 = \frac{2\pi}{5}$، $T_3 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ و $T_4 = \frac{2\pi}{\pi} = 2$ هستند که ۱ از همه کم‌تر است.

نسبت‌های مثلثاتی 2α

می‌توان ثابت کرد که:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

در رابطهٔ $\cos 2\alpha$، صورت‌های دیگری هم هست:

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

؟ اگر $\sin\alpha = \frac{1}{3}$، آن‌گاه مقدار $\cos 2\alpha$ کدام است؟

۱) ۰/۷۸ ۲) ۰/۸۸ ۳) ۰/۲۲ ۴) ۰/۳۳

گزینهٔ «۱» چون $\sin\alpha$ را داریم، سراغ فرمول $\cos 2\alpha$ برحسب $\sin\alpha$ می‌رویم:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 1 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9} \simeq 0/78$$

؟ اگر $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{2}$، آن‌گاه مقدار $\sin 2\alpha$ کدام است؟

۱) $\frac{-1}{4}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $-\frac{3}{4}$ ۴) -1

گزینهٔ «۳» فرمول $\sin 2\alpha$ به حاصل‌ضرب سینوس و کسینوس نیاز دارد. رابطهٔ $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{2}$ را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}_{\text{این ۱ است}} + \underbrace{2\sin\alpha\cos\alpha}_{\text{این } \sin 2\alpha \text{ است}} = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{1}{4} - 1 = \frac{-3}{4}$$

اگر $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = \frac{3}{5}$. آن‌گاه مقدار $\sin 4\alpha$ کدام است؟ (α در ربع اول است.)

۱) ۰/۴۸ ۲) ۰/۷۲ ۳) ۰/۳۶ ۴) ۰/۹۶

گزینهٔ «۴» شما هم با دیدن $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha$ یاد اتحاد مزدوج افتادید؟

$$\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = \underbrace{(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)}_{\text{این } \cos 2\alpha \text{ است}}\underbrace{(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)}_{\text{این ۱ است}} = \cos 2\alpha = \frac{3}{5}$$

از رابطهٔ $\cos 2\alpha = \frac{3}{5}$ هم نتیجه می‌شود $\sin 2\alpha = \frac{4}{5}$ (دقت کنید که α در ربع اول و $\sin 2\alpha$ مثبت است).

پس داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\cos 2\alpha = \frac{3}{5}\\[2ex] \sin 2\alpha = \frac{4}{5}\end{array}\right\} \Rightarrow \sin 4\alpha = 2\sin 2\alpha\cos 2\alpha = 2\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{24}{25} \xrightarrow[\times 4]{\times 4} = 0/96$$

اشاره دقت کردید برای $\sin 4\alpha$ چه کار کردیم؟

4α را به صورت $2(2\alpha)$ در نظر گرفتیم و فرمول $\sin 2(\alpha)$ را استفاده کردیم.

این‌ها را ببینید:

$$\sin x = \sin 2\left(\frac{x}{2}\right) = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$$

$$1 - \sin^2\pi x = \cos^2(\pi x)$$

$$\cos^2\frac{x}{3} - \sin^2\frac{x}{3} = \cos\left(\frac{2x}{3}\right)$$

اشاره از تقسیم $\sin 2\alpha$ بر $\cos 2\alpha$ می‌توان نشان داد که $\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$.

اگر $\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = \frac{-1}{2}$. آن‌گاه مقدار $\tan 4\alpha$ کدام است؟

۱) $-\frac{24}{7}$ ۲) $\frac{24}{7}$ ۳) $\frac{25}{7}$ ۴) $-\frac{25}{7}$

گزینهٔ «۲» اول عبارت $\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$ را ساده کنیم تا بعد سراغ $\tan 4\alpha$ برویم:

$$\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{1+2\cos^2\alpha - 1} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha} = \tan\alpha = \frac{-1}{2}$$

آمان! پس $\tan\alpha = \frac{-1}{2}$ و داریم:

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{2\left(\frac{-1}{2}\right)}{1-\left(\frac{-1}{2}\right)^2} = \frac{-1}{1-\frac{1}{4}} = -\frac{4}{3}$$

$$\tan 4\alpha = \tan 2(2\alpha) = \frac{2\tan 2\alpha}{1-\tan^2 2\alpha} = \frac{2\left(\frac{-4}{3}\right)}{1-\left(\frac{-4}{3}\right)^2} = \frac{\frac{-8}{3}}{1-\frac{16}{9}} = \frac{\frac{-8}{3}}{\frac{-7}{9}} = \frac{24}{7}$$

اشاره در مثال قبل دیدیم که $1+\cos 2\alpha$ به صورت $2\cos^2\alpha$ ساده می‌شود.

این دو رابطه را فرمول‌های طلایی می‌نامیم:

$$2\sin^2\alpha = 1-\cos 2\alpha$$

$$2\cos^2\alpha = 1+\cos 2\alpha$$

با کمک این فرمول‌ها می‌توانیم کسرها را ساده کرده و با داشتن کسینوس یک کمان، سینوس و کسینوس نصف آن را حساب کنیم. ببینید:

$$\alpha = 22/5^\circ \Rightarrow 2\sin^2 22/5^\circ = 1-\cos \underbrace{2\times 22/5^\circ}_{45^\circ} = 1-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\xrightarrow[\div 2]{} \sin^2 22/5^\circ = \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\Rightarrow \sin 22/5^\circ = \sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$\alpha = 15^\circ \Rightarrow 2\cos^2 15^\circ = 1+\cos 2\times 15^\circ = 1+\cos 30^\circ = 1+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\xrightarrow{\div 2} \cos^2 15^\circ = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \cos 15^\circ = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

و با کمی محاسبهٔ رادیکالی می‌شود به $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ هم رسید.

این فرمول‌ها را در ذهن نگه دارید:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1-2\sin^2\alpha = \cos^2\alpha-\sin^2\alpha = \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$$

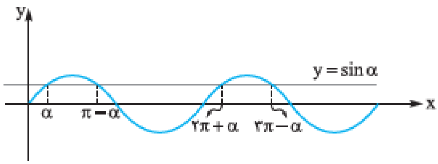
$$(\sin\alpha \pm \cos\alpha)^2 = 1\pm\sin 2\alpha$$

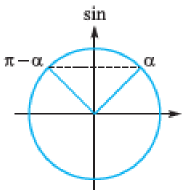
$$\tan\alpha+\cot\alpha = \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{2}{\sin 2\alpha}$$

$$\cot\alpha - \tan\alpha = 2\cot 2\alpha$$

معادلهٔ مثلثاتی

۱- جواب معادلهٔ $\sin x = \sin\alpha$ را با استفاده از دایره یا نمودار می‌توان به دست آورد:





$$\sin x = \sin\alpha$$

در این شکل‌ها می‌بینید در هر دورهٔ تناوب مقدار سینوس ۲ بار به $\sin\alpha$ می‌رسد، مثلاً از صفر تا 2π یک بار وقتی $x=\alpha$ است و بار دیگر وقتی $x=\pi-\alpha$ است.

با این دیدگاه جواب کلی معادلهٔ سینوسی را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sin x = \sin\alpha \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \alpha \\ x = ۲k\pi + \pi - \alpha \end{cases}$$

کتاب درسی جواب دوم را به صورت $x = (۲k+۱)\pi - \alpha$ نوشته است.

؟ از معادلهٔ $\sin x = \frac{-۱}{۲}$ جواب کلی x به کدام صورت است؟

۱) $\begin{cases} x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۶} \\ x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} \end{cases}$

۲) $\begin{cases} x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۶} \\ x = (۲k+۱)\pi - \frac{۵\pi}{۶} \end{cases}$

۳) $\begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} \\ x = ۲k\pi + \frac{۷\pi}{۶} \end{cases}$

۴) $\begin{cases} x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۶} \\ x = (۲k+۱)\pi + \frac{\pi}{۶} \end{cases}$

= گزینهٔ «۴» $\frac{-۱}{۲}$، سینوس زاویهٔ $-\frac{\pi}{۶}$ است. پس معادله به صورت $\sin x = \sin(-\frac{\pi}{۶})$ است و جواب کلی آن را داریم:

$$x = ۲k\pi + (-\frac{\pi}{۶}) = ۲k\pi - \frac{\pi}{۶}$$

$$x = ۲k\pi + \pi - (\frac{-\pi}{۶}) = ۲k\pi + \frac{۷\pi}{۶} = (۲k+۱)\pi + \frac{\pi}{۶}$$

سؤال می‌تواند جواب‌ها را در فاصلهٔ $[۰, ۲\pi]$ بخواهد:

$$x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۶} \xrightarrow[k=۱]{\text{بین ۰ و } ۲\pi} x = ۲\pi - \frac{\pi}{۶} = \frac{۱۱\pi}{۶}$$

$$x = ۲k\pi + \frac{۷\pi}{۶} \xrightarrow[k=۰]{\text{بین ۰ و } ۲\pi} x = \frac{۷\pi}{۶}$$

در این فاصله دو جواب داریم که جمع آن‌ها $۳\pi = \frac{۱۱\pi}{۶} + \frac{۷\pi}{۶}$ است.

اشاره به جای x و α ممکن است هر چیز دیگری هم باشد. اشکالی ندارد! ببینید:

(به جای x، ۲x است.)

$$\sin ۲x = \sin\frac{\pi}{۴} \Rightarrow \begin{cases} ۲x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۴} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۸} \\ ۲x = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۴} \Rightarrow x = k\pi + \frac{۳\pi}{۸} \end{cases}$$

(در دو طرف x است.)

$$\sin ۳x = \sin x \Rightarrow \begin{cases} ۳x = ۲k\pi + x \Rightarrow ۲x = ۲k\pi \Rightarrow x = k\pi \\ ۳x = ۲k\pi + \pi - x \Rightarrow ۴x = ۲k\pi + \pi \Rightarrow x = \frac{(۲k+۱)\pi}{۴} \end{cases}$$

? از معادلهٔ $\frac{۱}{۲}\sin ۳x = \sin x \cos x$. چند جواب برای x در بازهٔ $(۰,\pi)$ وجود دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

= گزینهٔ «۲» اول دو طرف را در ۲ ضرب کنیم:

$$\sin ۳x = ۲\sin x\cos x = \sin ۲x$$

حالا جواب کلی معادلهٔ $\sin ۳x = \sin ۲x$ را بلدیم:

$$\begin{cases} ۳x = ۲k\pi + ۲x \\ ۳x = ۲k\pi + \pi - ۲x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi \xrightarrow{\text{بین ۰ و } \pi} \text{ندارد} \\ ۵x = ۲k\pi + \pi \Rightarrow x = \dfrac{(۲k+۱)\pi}{۵} \xrightarrow[k=۰,۱]{\text{بین ۰ و } \pi} x = \dfrac{\pi}{۵}, \dfrac{۳\pi}{۵} \Rightarrow \text{۲ جواب} \end{cases}$$

اشاره بعضی وقت‌ها باید معادله را به صورت درجه‌دوم حل کنیم.

? از معادلهٔ $\cos ۲x = \sin x$. جمع جواب‌ها در $(۰,۲\pi)$ کدام است؟

۱) π ۲) $\frac{۳\pi}{۲}$ ۳) ۲π ۴) $\frac{۵\pi}{۲}$

= گزینهٔ «۴» چون در طرف راست $\sin x$ داریم، به جای $\cos ۲x$ فرمولش را می‌نویسیم.
(فرمولی که $\sin$ دارد!)

$$\cos ۲x = ۱ - ۲\sin^۲ x = \sin x \Rightarrow ۲\sin^۲ x + \sin x - ۱ = ۰$$

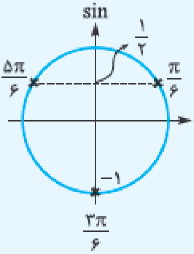
حالا $\sin x$ را t می‌گیریم تا معادلهٔ درجه‌دوم را ببینیم:

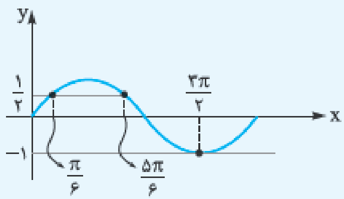
$$۲t^۲ + t - ۱ = ۰ \xrightarrow[b=a+c]{} t = -۱ \ , \ t = +\frac{۱}{۲}$$

پس دوتا معادله داریم:

$$\sin x = -۱ \ , \ \sin x = \frac{۱}{۲}$$

حل این معادله‌ها را در دایره و دستگاه مختصات ببینید:





پس جواب‌ها در فاصلهٔ $(۰,۲\pi)$ عبارت‌اند از: $\frac{۳\pi}{۲}, \frac{۵\pi}{۶}, \frac{\pi}{۶}$ و جمع آن‌ها می‌شود $\frac{۵\pi}{۲}$.

اشاره البته می‌توانستیم معادله‌ها را با فرمول جواب کلی هم حل کنیم:

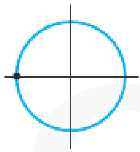
$$\sin x = -۱ = \sin(-\frac{\pi}{۲}) \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{-\pi}{۲} = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲} \\ x = ۲k\pi + \pi - \frac{-\pi}{۲} = ۲k\pi + \frac{۳\pi}{۲} \end{cases}$$

$$\sin x = \frac{۱}{۲} = \sin\frac{\pi}{۶} \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} \\ x = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۶} = ۲k\pi + \frac{۵\pi}{۶} \end{cases}$$

معادلات مثلثاتی در حالت خاص

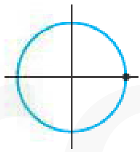
جواب کلی ۶ تا معادلهٔ مثلثاتی را حفظ می‌کنیم:

$\cos x = -۱ \Downarrow x = ۲k\pi + \pi$



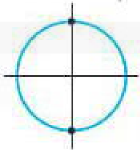
ریشهٔ مضاعف دارد

$\cos x = ۱ \Downarrow x = ۲k\pi$

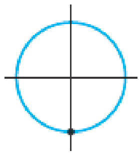


ریشهٔ مضاعف دارد

$\cos x = ۰ \Downarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۲}$

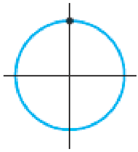


$\sin x = -۱ \Downarrow x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲}$



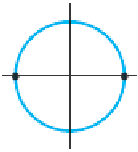
ریشهٔ مضاعف دارد

$\sin x = ۱ \Downarrow x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲}$



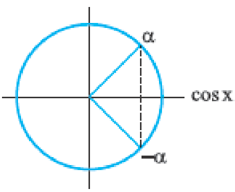
ریشهٔ مضاعف دارد

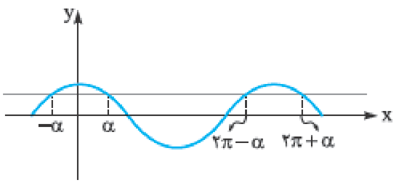
$\sin x = ۰ \Downarrow x = k\pi$



۲- جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\cos x = \cos\alpha$ را نیز باید بلد باشیم:

$$\cos x = \cos\alpha \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \alpha \\ x = ۲k\pi - \alpha \end{cases}$$





تمام حرف‌هایی که در مورد معادلهٔ سینوسی داشتیم در این‌جا هم هست.

چند مثال سریع ببینید:

★ $\cos x = \frac{۱}{۲} = \cos\frac{\pi}{۳} \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$

★ $\cos ۲x = \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \cos\frac{\pi}{۴} \Rightarrow ۲x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۴} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{۸}$

★ $\cos\frac{x}{۲} = \frac{-۱}{۲} = \cos\frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow \frac{x}{۲} = ۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow x = ۴k\pi \pm \frac{۴\pi}{۳}$

★ $\cos ۳x = \cos ۲x \Rightarrow \begin{cases} ۳x = ۲k\pi + ۲x \\ ۳x = ۲k\pi - ۲x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi \\ x = \frac{۲k\pi}{۵} \end{cases}$

دقت می‌کنید که جواب کلی معادلهٔ $\cos x = \cos\alpha$ را به صورت $x = ۲k\pi \pm \alpha$ هم می‌آوریم!

از معادلهٔ $۲\cos^۲ x = ۱ + \cos x$ چند جواب برای x در فاصلهٔ $(۰,۲\pi)$ داریم؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

گزینهٔ «۲» اگر ۱− را به طرف چپ ببریم عبارت $۲\cos^۲ x - ۱$ همان فرمول $\cos ۲x$ است. پس:

$$\cos ۲x = \cos x \Rightarrow \begin{cases} ۲x = ۲k\pi + x \Rightarrow x = ۲k\pi \xrightarrow{\text{از ۰ تا } ۲\pi} \text{نداریم} \\ ۲x = ۲k\pi - x \Rightarrow x = \frac{۲k\pi}{۳} \xrightarrow[k=۱,۲]{\text{از ۰ تا } ۲\pi} x = \frac{۲\pi}{۳}, \frac{۴\pi}{۳} \end{cases}$$

پس ۲ جواب داریم.

اشاره اگر به k عدد بدهیم می‌بینیم مقادیر $x = ۲k\pi$ در بین اعداد $x = \frac{۲k\pi}{۳}$ ظاهر می‌شوند:

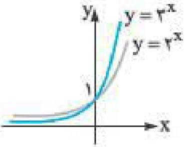
$۲k\pi : ۰, \pm ۲\pi, \pm ۴\pi, \ldots$

$\frac{۲k\pi}{۳} : ۰, \pm\frac{۲\pi}{۳}, \pm\frac{۴\pi}{۳}, \pm ۲\pi, \pm\frac{۸\pi}{۳}, \pm\frac{۱۰\pi}{۳}, \pm ۴\pi, \ldots$

پس جواب $x = \frac{۲k\pi}{۳}$ کافی است. (جواب‌های بالایی را در خودش دارد.)

یعنی جواب این معادله فقط $x = \frac{۲k\pi}{۳}$ است.

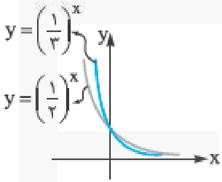
به هر تابع با ضابطهٔ $f(x)=a^x$ (با شرط $a>۰$ و $a\neq ۱$) تابع نمایی می‌گوییم. در این تابع a را پایه می‌نامیم.



پس مثلاً $y=۲^x$، $y=\sqrt{۳}^x$، $y=(\frac{۱}{۲})^x$ و $y=۰/۳^x$ تابع نمایی هستند اما $y=x^۲$، $y=\frac{۱}{x}$ و $y=\sqrt{x}$ تابع نمایی نیستند. با استفاده از نقاط $(b,۲^b)$، می‌توانیم نمودار تقریبی $y=۲^x$ را رسم کنیم. نمودار را ببینید:

دامنهٔ تابع نمایی $y=a^x$ برابر $\mathbb{R}$ و برد آن $(۰,+\infty)$ است. محور yها را در $(۰,۱)$ قطع می‌کند ولی محور xها را قطع نمی‌کند. در حالت $a>۱$، تابع صعودی است و در نواحی اول و دوم قرار دارد. به موقعیت نسبی ۳^x و ۲^x دقت کنید. برای $x>۰$، مقدار ۳^x بیشتر است اما برای $x<۰$ مقدار ۲^x بیشتر می‌شود. راستی هر دو نمودار از $(۰,۱)$ گذشته‌اند!

اشاره تابع‌های $y=a^x$ برای $a>۱$ صعودی‌اند؛ پس اگر $m>n>r$ باشد داریم $۲^m>۲^n>۲^r$.



مثلاً $۲^{۲/۷}>۲^{\sqrt{۷}}>۲^{۲/۵}$ (چون $\sqrt{۷}$ بین ۲/۵ و ۲/۷ است).

برای $۰<a<۱$ تابع نمایی نزولی است. نمودارهای $y=(\frac{۱}{۲})^x$ و $y=(\frac{۱}{۳})^x$ را ببینید:

در این تابع‌ها نیز دامنه $\mathbb{R}$ و برد $(۰,+\infty)$ است و در $(۰,۱)$ به محور yها می‌خورند. برای $x>۰$، هر چه پایه بیشتر باشد، y بزرگ‌تر است و برای $x<۰$ برعکس می‌شود.

? **می‌دانیم $y=(۳m-۱)^x$ صعودی و $y=(۲m-۱)^x$ نزولی است. بازهٔ مقادیر m کدام است؟**

۱) $(\frac{۱}{۲},\frac{۲}{۳})$ ۲) $(\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۲})$ ۳) $(\frac{۲}{۳},۱)$ ۴) $(\frac{۱}{۲},۱)$

= گزینهٔ «۳» باید $۳m-۱>۱$ و $۰<۲m-۱<۱$ باشد؛ پس:

$$\left.\begin{array}{l} ۳m-۱>۱ \Rightarrow ۳m>۲ \Rightarrow m>\frac{۲}{۳} \\ ۰<۲m-۱<۱ \Rightarrow ۱<۲m<۲ \Rightarrow \frac{۱}{۲}<m<۱ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} \frac{۲}{۳}<m<۱$$

اشاره نمودار توابع $y=۲^x$ و $y=(\frac{۱}{۲})^x$ نسبت به محور yها قرینه‌اند. دقت کنید که $۲^{-x}=(\frac{۱}{۲})^x$.

پس اگر نمودار $y=a^x$ را نسبت به محور yها قرینه کنیم به نمودار $y=a^{-x}$ یا $y=(\frac{۱}{a})^x$ می‌رسیم.

؟ نمودار تابع $f(x)=a(\frac{۲}{۳})^{bx-۱}+۲$ از دو نقطهٔ (۱,۵) و (۲,۴) می‌گذرد. $f(۰)$ کدام است؟

۱) ۴/۵ ۲) ۶/۵ ۳) ۵/۵ ۴) ۷/۵

گزینهٔ «۲» مثل هر تابع دیگر، در توابع نمایی هم می‌گوییم مختصات نقاط باید در ضابطهٔ تابع صدق کند:

$$A(۱,۵) \Rightarrow f(۱)=۵ \Rightarrow a(\frac{۲}{۳})^{b-۱}+۲=۵ \Rightarrow a(\frac{۲}{۳})^{b-۱}=۳$$

$$B(۲,۴) \Rightarrow f(۲)=۴ \Rightarrow a(\frac{۲}{۳})^{۲b-۱}+۲=۴ \Rightarrow a(\frac{۲}{۳})^{۲b-۱}=۲$$

حالا عبارت پایینی را بر بالایی تقسیم می‌کنیم:

$$\xrightarrow{\div} (\frac{۲}{۳})^{۲b-۱-(b-۱)}=\frac{۲}{۳}$$

دقت کردید؟ پایه‌ها مساوی است و توان‌ها را منها کردیم!

$$\Rightarrow (\frac{۲}{۳})^{b}=\frac{۲}{۳} \Rightarrow b=۱$$

حالا که $b=۱$ به دست آمد، توی معادلهٔ اولی قرار می‌دهیم تا a پیدا شود:

$$\xrightarrow{b=۱} a(\frac{۲}{۳})^{۱-۱}=۳ \Rightarrow a(\frac{۲}{۳})^{۰}=a=۳ \Rightarrow a=۳$$

و مقدار $f(۰)$ می‌شود:

$$f(۰)=a(\frac{۲}{۳})^{-۱}+۲=۳\times\frac{۳}{۲}+۲=\frac{۹}{۲}+۲=۴/۵+۲=۶/۵$$

اشاره از درس توابع صعودی و نزولی به یاد داریم که اگر f صعودی باشد، برد آن روی دامنهٔ $[a,b]$ به صورت $[f(a),f(b)]$ است. در تابع نزولی هم برد به صورت $[f(b),f(a)]$ درمی‌آید.

؟ در تابع‌های $f(x)=۲^{x}-۱$ و $g(x)=(\frac{۱}{۲})^{x}+۱$، دامنه را به صورت $(-۱,۱]$ در نظر می‌گیریم. بردها به ترتیب شامل چند عدد صحیح هستند؟

۱) ۲,۲ ۲) ۳,۲ ۳) ۲,۳ ۴) ۳,۳

گزینهٔ «۱»

f صعودی است. $\Rightarrow R=(f(-۱),f(۱)]=(۲^{-۱}-۱,۲^{۱}-۱]=(-\frac{۱}{۲},۱]$

$\xrightarrow{y\in\mathbb{Z}} y=۰,۱ \Rightarrow$ دو مقدار صحیح

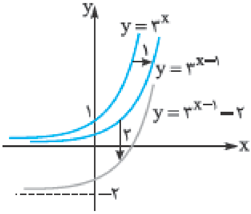
g نزولی است. $\Rightarrow R=[g(۱),g(-۱))=[(\frac{۱}{۲})^{۱}+۱,(\frac{۱}{۲})^{-۱}+۱)=[\frac{۳}{۲},۳)$

$\xrightarrow{y\in\mathbb{Z}} y=۲,۳ \Rightarrow$ دو مقدار صحیح

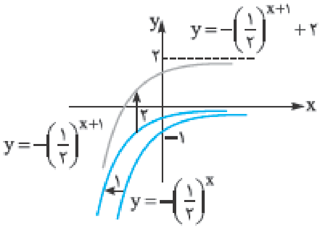
نمودارهای انتقالی توابع نمایی

از روی نمودار $y=f(x)$ می‌توانیم نمودار توابع $y=f(-x)$، $y=-f(x)$، $y=f(x-a)$، $y=f(x)+b$ و $y=|f(x)|$ را بکشیم. چندتا ببینید:

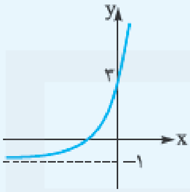
برای رسم تابع $y = ۳^{x-۱} - ۲$ باید $y = ۳^x$ را ۱ واحد به راست و ۲ واحد به پایین ببریم. پس برد آن $(-۲, +\infty)$ است.



برای رسم $y = ۲ - (\frac{۱}{۲})^{x+۱}$ باید $y = (\frac{۱}{۲})^x$ را ۱ واحد به چپ و نسبت به محور x قرینه کنیم و سپس ۲ واحد به بالا بیاوریم. برد تابع حاصل $(-\infty, ۲)$ است.



شکل روبه‌رو، نمودار $f(x) = a + ۲^{x-b}$ است. ab کدام است؟



۱) ۱

۲) ۲

۳) -۱

۴) -۲

گزینهٔ «۲» نمودار نسبت به $y = ۲^x$ باید a واحد به بالا و b واحد به راست رفته باشد. با توجه به خط‌چین در $y = -۱$، جابه‌جایی عمودی نمودار برابر ۱- بوده، پس $a = -۱$؛ با دقت به $f(۰) = ۳$ هم داریم:

$$f(۰) = a + ۲^{۰-b} \xrightarrow{a=-۱} ۳ = -۱ + ۲^{-b} \Rightarrow ۲^{-b} = ۴ \Rightarrow b = -۲$$

$$\Rightarrow ab = (-۱)(-۲) = ۲$$

نمودارهای $y_۱ = |۲^x - ۲|$ و $y_۲ = ۴ - x^۲$ در چند نقطه متقاطع‌اند؟

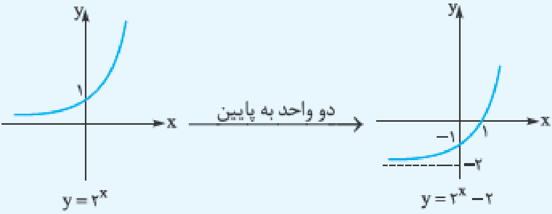
۱) دو نقطه سمت راست مبدأ

۲) دو نقطه سمت چپ مبدأ

۳) فقط یک نقطه

۴) دو نقطه در طرفین مبدأ

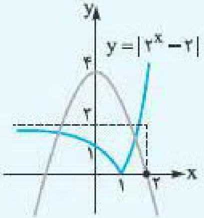
گزینهٔ «۴» نمودارها را می‌کشیم:



$y = |۲^x - ۲|$

نمودار $y = ۴ - x^۲$ را هم بلدیم، سهمی $y = x^۲$ نسبت به محور x قرینه و سپس ۴ واحد به بالا می‌آید.

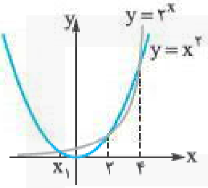
با توجه به شکل، ۲ نقطهٔ تلاقی در دو طرف مبدأ داریم. (یکی در $x > ۰$ و دیگری در $x < ۰$)



اشاره کتاب درسی وضع $y = ۲^x$ و $y = x^۲$ را مورد توجه قرار داده است:

دو نمودار در $x = x_۱$ (عددی منفی حدود $-\frac{۳}{۴}$) و $x_۲ = ۲$ و $x_۳ = ۴$ متقاطع‌اند.

دقت کنید که حتماً نمودار ۲^x با افزایش مقادیر x، بالای نمودار $y = x^۲$ خواهد بود!



معادلات نمایی

نمودار تابع نمایی $y = a^x$ را دیدیم. این تابع‌ها یک‌به‌یک هستند. پس همیشه از معادلهٔ $a^u = a^v$ می‌توانیم نتیجه بگیریم $u = v$ و این منطق اصلی حل معادلات نمایی است! یعنی باید در دو طرف، پایه‌های مساوی بسازیم و سپس توان‌ها را برابر هم قرار دهیم. ببینید: $(۰/۲۵)^{x-۲} = (\sqrt{۲})^{۳x+۱}$

$۰/۲۵$ همان $\frac{۱}{۴}$ یا $۲^{-۲}$ است. به جای $\sqrt{۲}$ هم $۲^{\frac{۱}{۲}}$ می‌نویسیم تا به پایه‌های مساوی برسیم:

$$(۲^{-۲})^{x-۲} = (۲^{\frac{۱}{۲}})^{۳x+۱} \Rightarrow ۲^{-۲x+۴} = ۲^{\frac{۳}{۲}x+\frac{۱}{۲}}$$

$$\xrightarrow{\text{حذف پایه‌ها}} -۲x + ۴ = \frac{۳}{۲}x + \frac{۱}{۲} \Rightarrow ۴ - \frac{۱}{۲} = \frac{۳}{۲}x + ۲x$$

$$\Rightarrow \frac{۷}{۲} = \frac{۷}{۲}x \Rightarrow x = ۱$$

؟ در معادلهٔ $(\frac{۱۶}{۹})^{x^۲-۱} = (۰/۷۵)^x$، مقدار مثبت x کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۱۰}-۱}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۵}-۱}{۴}$ ۳) $\frac{\sqrt{۱۷}-۱}{۴}$ ۴) $\frac{\sqrt{۱۳}-۱}{۴}$

گزینهٔ «۳» $0/75$ همان $\frac{3}{4}$ یا $(\frac{4}{3})^{-1}$ است؛ $\frac{16}{9}$ هم $(\frac{4}{3})^2$ است، پس:

$$((\frac{4}{3})^2)^{x^2-1} = ((\frac{4}{3})^{-1})^x \Rightarrow 2(x^2-1) = -x \Rightarrow 2x^2+x-2=0$$

$$\xrightarrow{\text{روش دلتا}} x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+16}}{4} \xrightarrow{x>0} x = \frac{-1+\sqrt{17}}{4}$$

پس جواب مثبت معادله $\frac{\sqrt{17}-1}{4}$ است.

نمودارهای $y = 2^x - 4$ و $y = \sqrt{2}^{x+1}$ در نقطهٔ $A(\alpha,\beta)$ متقاطع‌اند. $\alpha\beta$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۶

گزینهٔ «۳» yها را مساوی هم قرار دهیم:

$$\xrightarrow{y_1=y_2} 2^x - 4 = \sqrt{2}^{x+1}$$

$$\Rightarrow 2^x - 4 = \sqrt{2}^x \times \sqrt{2} \Rightarrow 2^x - \sqrt{2}(\sqrt{2}^x) - 4 = 0$$

حالا یک کار جدید را می‌بینیم. اگر 2^x را به صورت $((\sqrt{2})^2)^x$ بنویسیم و $\sqrt{2}^x$ را t بگیریم، داریم:

$$\xrightarrow{\sqrt{2}^x=t} t^2 - \sqrt{2}t - 4 = 0 \Rightarrow (t-2\sqrt{2})(t+\sqrt{2}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 2\sqrt{2} = \sqrt{2}^x \\ t = -\sqrt{2} = \sqrt{2}^x \end{cases}$$

دومی که امکان ندارد، چون $\sqrt{2}^x$ هیچ وقت منفی نیست. در مورد اولی داریم:

$$2\sqrt{2} = \sqrt{2}^x \Rightarrow 2^{1+\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}x} \xrightarrow{\text{حذف پایه‌ها}} \frac{3}{2} = \frac{1}{2}x \Rightarrow x = 3$$

پس به ازای $x = 3$، مقادیر دو تابع مساوی‌اند:

$$y_1 = 2^3 - 4 = 8 - 4 = 4$$

$$y_2 = \sqrt{2}^{3+1} = \sqrt{2}^4 = 4$$

یعنی محل تلاقی دو منحنی $A(3,4)$ است و داریم:

$$\alpha\beta = 3(4) = 12$$

از معادلهٔ $18^x - 12^x - 8^x = 0$. مقدار تقریبی $1/5^x$ کدام است؟

۱) ۱/۴۲ ۲) ۱/۶۲ ۳) ۱/۸۲ ۴) ۱/۷۲

گزینهٔ «۲» گاهی اوقات برای ایجاد پایه‌های مساوی باید زحمت کشید! معادله را بر 8^x تقسیم کنید:

$$\xrightarrow{\div 8^x} \frac{18^x}{8^x} - \frac{12^x}{8^x} - \frac{8^x}{8^x} = 0 \Rightarrow (\frac{9}{4})^x - (\frac{3}{2})^x - 1 = 0$$

$$\longrightarrow ((\frac{3}{2})^x)^2 - (\frac{3}{2})^x - 1 = 0 \xrightarrow{(\frac{3}{2})^x=t} t^2 - t - 1 = 0$$

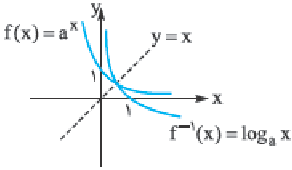
از این معادله، جواب مثبت t را می‌خواهیم که همان عدد طلایی است:

$$t = (\frac{3}{2})^x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

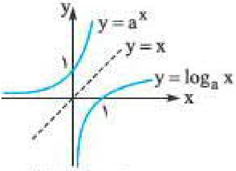
پس جواب $1/5^x$ تقریباً $1/618$ است.

تابع لگاریتم

دیدیم که تابع نمایی $f(x)=a^x$ یک‌به‌یک است. وارون آن را $f^{-1}(x)=\log_a x$ می‌نامیم:



وقتی $0<a<1$ باشد.



وقتی $a>1$ باشد.

دامنه و برد تابع‌های لگاریتمی برعکس تابع نمایی است. پس:

$$g(x)=\log_a x \Rightarrow \begin{cases} \text{دامنه} = \text{برد تابع نمایی} = (0,+\infty) \\ \text{برد} = \text{دامنهٔ تابع نمایی} = \mathbb{R} \end{cases}$$

محل برخورد با محور xها همیشه $(1,0)$ است و محور yها را قطع نمی‌کند.

معنای لگاریتم: $\log_a b$ یعنی a به چه توانی برسد تا b شود؟

مثلاً $\log_3 9$، یعنی ۳ به چه توانی می‌شود ۹؟ خب ۲. پس می‌نویسیم $\log_3 9 = 2$؛ به بیان دیگر:

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$$

پس داریم:

$$2^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \log_2 2\sqrt{2} = \frac{3}{2} \quad , \quad 4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \log_4 \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

؟ نمودار $f(x)=1+2\log_a x$ از نقطهٔ $(\frac{1}{2},-3)$ می‌گذرد. مقدار a کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

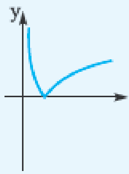
گزینهٔ «۳» خب، مختصات نقطه در ضابطهٔ تابع صدق می‌کند؛ پس داریم: $f(\frac{1}{2})=-3$

$$\Rightarrow -3 = 1+2\log_a \frac{1}{2} \Rightarrow 2\log_a \frac{1}{2} = -4 \Rightarrow \log_a \frac{1}{2} = -2$$

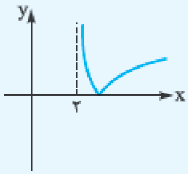
$$\xrightarrow{\text{مفهوم لگاریتم}} a^{-2} = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{معکوس}} a^2 = 2 \xrightarrow{a>0} a = \sqrt{2}$$

؟ نمودار $f(x)=|1+\log_2(x-2)|$ به کدام صورت است؟

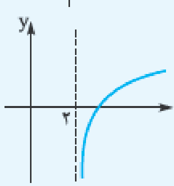
۱)



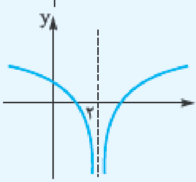
۲)



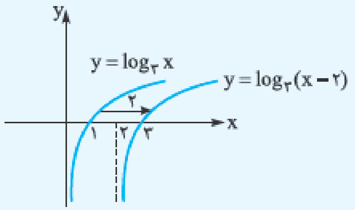
۳)

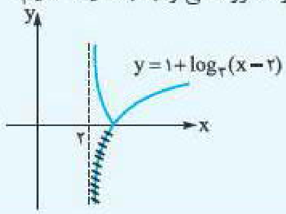


۴)



گزینهٔ «۲» باید $y=\log_2 x$ را ۲ واحد به راست و ۱ واحد به بالا ببریم و سپس قسمت زیر محور افقی را به بالا آینه کنیم:





اشاره لگاریتم با پایهٔ ۱۰ را لگاریتم اعشاری می‌نامیم و پایهٔ ۱۰ را گاهی نمی‌نویسیم. پس $\log_{10} x$ همان $\log x$ است و داریم:

$$\log x = a \Rightarrow x = 10^a$$

و این‌ها را داریم:

$$\log 1 = 0\,,\ \log 10 = 1\,,\ \log 10^k = k$$

بد نیست مقادیر تقریبی $\log 2$ و $\log 3$ را بلد باشیم:

$$\log 2 \simeq 0/3\,,\ \log 3 \simeq 0/48$$

اشاره دیدیم که دامنهٔ تابع لگاریتمی به صورت $y=\log_a x$، بازهٔ $(0,+\infty)$ است. در حالت کلی‌تر، دامنهٔ تابع $y=\log_{B(x)} A(x)$ از اشتراک شرط‌های $A(x)>0$، $B(x)>0$ و $B(x)\neq 1$ به دست می‌آید؛ یعنی عدد جلوی لگاریتم و مبنا باید مثبت بوده و B یک نباشد. چندتا مثال آسان ببینید:

۱ $y=\log_5(4-x^2)$

الف $5>0$

ب $5\neq 1$

پ $4-x^2>0$

$\Rightarrow x^2<4$

$\Rightarrow -2<x<2$

$\Rightarrow D=(-2,2)$

۲ $y=\log_{(5-x)}(x-2)$

الف $x-2>0 \Rightarrow x>2$

ب $5-x>0 \Rightarrow x<5$

پ $5-x\neq 1 \Rightarrow x\neq 4$

$\Rightarrow D=(2,5)-\{4\}$

۳ $y=\log_{(x-2)}(x^2-x)$

الف $x-2>0 \Rightarrow x>2$

ب $x-2\neq 1 \Rightarrow x\neq 3$

پ $x^2-x>0$

$\xrightarrow{\text{خارج دوریشه}} x>1$ یا $x<0$

$\Rightarrow D=(2,+\infty)-\{3\}$

؟ دامنهٔ تابع $f(x)=2+3\log_{(5-x^2)}(11-x^2)$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

گزینهٔ «۳» باید شرط‌های $5-x^2>0$، $5-x^2\neq 1$ و $11-x^2>0$ برقرار شوند.

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2<11 \\ x^2<5 \\ x^2\neq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\sqrt{5}<x<\sqrt{5} \\ x\neq \pm 2 \end{cases} \xrightarrow{x\in\mathbb{Z}} x=0,1,-1$$

یعنی ۳ عدد صحیح در دامنه هست.

در تابع $f(x)=\log_3(ax+b)$ دامنه $(-\frac{1}{2},+\infty)$ است. اگر $f(1)=-2$ باشد، $f(4)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) ۲ ۴) -2

گزینهٔ «۲» شرط دامنه $ax+b>0$ است، پس داریم $x>-\frac{b}{a}$ که در صورت سؤال $x>-\frac{1}{2}$ است. پس $\frac{b}{a}=\frac{1}{2}$ یا $a=2b$. از طرفی $f(1)=-2$ یعنی $a(1)+b=3^{-2}$ یا $a+b=\frac{1}{9}$. از این‌جا $b=\frac{1}{27}$ و $a=\frac{2}{27}$ و داریم:

$$f(4)=\log_3\frac{9}{27}=-1$$

ویژگی‌های لگاریتم

گفتیم که $\log_a b=c$ یعنی $a^c=b$. پس لگاریتم دنبال توانی می‌گردد که این تساوی را برقرار کند. حالا این خاصیت‌ها را داریم:

۱ لگاریتم ۱ در هر مبنایی صفر است: $\log_a 1=0$ (چون همیشه a^0 می‌شود ۱)

۲ لگاریتم هر عددی در مبنای خودش ۱ است: $\log_a a=1$ (چون a^1 می‌شود a)

۳ لگاریتم $\frac{1}{a}$ در مبنای a می‌شود -1: $\log_a\frac{1}{a}=-1$ (چون a^{-1} می‌شود $\frac{1}{a}$)

۴ لگاریتم، توان‌ها را به پشت خود می‌اندازد: $\log_a b^n=n\log_a b\,,\ \log_{a^m} b=\frac{1}{m}\log_a b$

و در حالت کلی‌تر: $\log_{a^m} b^n=\frac{n}{m}\log_a b$

۵ لگاریتم حاصل‌ضرب می‌شود، جمع لگاریتم‌ها: $\log_a xy=\log_a x+\log_a y$

۶ لگاریتم خارج قسمت می‌شود، تفاضل لگاریتم‌ها: $\log_a\frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$

۷ از تعریف تابع وارون به یاد دارید که ترکیب f و f^{-1} می‌شود تابع همانی. پس: $a^{\log_a x}=x$

و در حالت خاص: $10^{\log x}=x$

۸ با استفاده از رابطهٔ بالا می‌توانیم ثابت کنیم: $a^{\log_c b}=b^{\log_c a}$

۹ قاعدهٔ تعویض مبنا: اگر در عبارت $\log_a b$ از مبنای a راضی نیستیم، می‌توانیم آن را به صورت تقسیم دوتا لگاریتم با مبنای دلخواه بنویسیم. این جوری:

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$$

مثلاً برای $c=10$ داریم:

$$\log_a b=\frac{\log b}{\log a}$$

از قاعدهٔ تعویض مبنا نتیجه می‌شود:

$$\log_b a=\frac{1}{\log_a b}$$

کدام درست است؟

۱) $\log ۲ + \log ۳ = \log ۵$ ۲) $\log ۳ - \log ۲ = \log \frac{۳}{۲}$

۳) $\log_{۹} ۴ = ۲\log_{۳} ۲$ ۴) $\frac{\log ۴}{\log ۳} = \log \frac{۴}{۳}$

گزینهٔ «۲»

۱ غلط است؛ چون $\log ۲ + \log ۳$ می‌شود $\log ۲\times ۳$؛ یعنی $\log ۶$، نه $\log ۵$.

۳ غلط است؛ چون $\log_{۹} ۴$ می‌شود $\frac{۲}{۲}\log_{۳} ۲$، نه $۲\log_{۳} ۲$.

۴ هم غلط است؛ چون $\frac{\log ۴}{\log ۳}$ می‌شود $\log_{۳} ۴$، نه $\log \frac{۴}{۳}$.

اگر $\log ۲ = ۰/۳$ و $\log ۳ = ۰/۴۸$، کدام نادرست است؟

۱) $\log_{۴} ۱۰ = -۰/۶$ ۲) $\log ۲\sqrt{۳} = ۰/۵۴$

۳) $\log \sqrt{۵} = ۰/۳۵$ ۴) $\log_{\frac{۱}{۴}} ۹ = -۱/۶$

گزینهٔ «۱» ببینید:

۴ $\log_{\frac{۱}{۴}} ۹ = \log_{۲^{-۲}} ۳^{۲} \xrightarrow[\text{پشت‌برونند}]{\text{توان‌ها به}} = \frac{۲}{-۲}\log_{۲} ۳$

$\xrightarrow{\text{تعویض مبنا}} = -\frac{\log ۳}{\log ۲} = -\frac{۰/۴۸}{۰/۳} = -۱/۶$

۳ $\log \sqrt{۵} = \log ۵^{\frac{۱}{۲}} = \frac{۱}{۲}\log \frac{۱۰}{۲} = \frac{۱}{۲}(\log ۱۰ - \log ۲) = \frac{۱}{۲}(۱ - ۰/۳)$

$= \frac{۱}{۲}(۰/۷۰) = ۰/۳۵$

اشاره این نتیجه را به خاطر می‌سپارند که: $\log ۵ = ۱ - \log ۲ \simeq ۰/۷$

۲ $\log ۲\sqrt{۳} = \log ۲\times ۳^{\frac{۱}{۲}} = \log ۲ + \frac{۱}{۲}\log ۳ = ۰/۳ + \underbrace{\frac{۱}{۲}(۰/۴۸)}_{۰/۲۴} = ۰/۵۴$

اما ۱ درست نیست؛ ببینید:

$\log_{۴} ۱۰ \xrightarrow{\text{نتیجهٔ تعویض مبنا}} = \frac{۱}{\log_{۱۰} ۴} = \frac{۱}{۲\log ۲} = \frac{۱}{۲\times ۰/۳} = \frac{۱}{۰/۶} = \frac{۱۰}{۶} = \frac{۵}{۳}$

نمودار تابع $f(x) = \log_{۲}(ax + ۴) + b$ از نقاط $(-۱,۱)$ و $(۲,۳)$ می‌گذرد. مقدار $a + b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

گزینهٔ «۲» مختصات را در ضابطهٔ تابع قرار می‌دهیم:

$\xrightarrow{(-۱,۱)} f(-۱) = \log_{۲}(-a + ۴) + b = ۱$

$\xrightarrow{(۲,۳)} f(۲) = \log_{۲}(۲a + ۴) + b = ۳$

حالا اگر پایینی را منهای بالایی کنیم، داریم:

$$۲ = \log_۲(۲a+۴) - \log_۲(-a+۴) \xrightarrow[\text{می‌شود، لگاریتم تقسیم}]{\text{تفریق لگاریتم‌ها}} ۲ = \log_۲ \frac{۲a+۴}{-a+۴}$$

$$\xrightarrow{\text{تعریف لگاریتم}} ۲^۲ = \frac{۲a+۴}{-a+۴} = ۴ \Rightarrow -۴a+۱۶ = ۲a+۴ \Rightarrow ۶a = ۱۲ \Rightarrow a = ۲$$

و حالا با قراردادن a توی یکی از معادله‌ها، b هم درمی‌آید:

$$\log_۲(-۲+۴) + b = ۱ \Rightarrow \log_۲ ۲ + b = ۱ \Rightarrow b = ۰$$

پس: $a + b = ۲ + ۰ = ۲$

حاصل $۹^{۱+۲\log_{\sqrt{۳}} ۰/۵}$**. مربع کدام عدد است؟**

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۲}{۵}$

گزینهٔ «۳» وقتی لگاریتم در توان قرار می‌گیرد به فکر رابطهٔ $a^{\log_a x} = x$ می‌افتیم.

پس سعی می‌کنیم پایه‌ها را به ۳ برسانیم:

$$۹^{۱+۲\log_{\sqrt{۳}} ۰/۵} = (۳^۲)^{۱+۲\log_{۳^{\frac{۱}{۲}}} \frac{۱}{۲}} = ۳^{۲(۱+\frac{۲}{\frac{۱}{۲}}\log_۳ \frac{۱}{۲})} = ۳^{۲+۴\log_۳ \frac{۱}{۲}} = ۳^۲ \times ۳^{۴\log_۳ \frac{۱}{۲}}$$

$$= ۹ \times (۳^{\log_۳ \frac{۱}{۲}})^۴ = ۹ \times (\frac{۱}{۲})^۴ = \frac{۹}{۱۶}$$

که مربع $\frac{۳}{۴}$ است.

اگر $\log ۲ = ۰/۳$، حاصل $۱۰^{-۲/۶}$ چه‌قدر است؟

۱) ۰/۰۰۰۴ ۲) ۰/۰۲۵ ۳) ۰/۰۰۲۵ ۴) ۰/۰۰۴

گزینهٔ «۳» سعی می‌کنیم به $۱۰^{۰/۳}$ برسیم:

$$۱۰^{-۲/۶} = ۱۰^{-۲} \times ۱۰^{-۰/۶} = \frac{۱}{۱۰۰} \times (۱۰^{۰/۳})^{-۲} = \frac{۱}{۱۰۰}(\underbrace{۱۰^{\log ۲}}_{\text{این‌می‌شود۲}})^{-۲} = \frac{۱}{۱۰۰} \times ۲^{-۲}$$

$$= \frac{۱}{۱۰۰} \times \frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۱۰۰} \times \frac{۲۵}{۱۰۰} = ۰/۰۰۲۵$$

معادلات لگاریتمی

مثال برای معادلهٔ $\log_a P(x) = c$ کافی است تعریف لگاریتم را بنویسیم: $P(x) = a^c$

برای سایر معادله‌ها، باید با استفاده از ویژگی‌های لگاریتم در دو طرف، لگاریتم با مبنای یکسان بسازیم و سپس logها را بزنیم. یعنی از معادلهٔ $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ به $f(x) = g(x)$ می‌رسیم. فقط حواستان باشد که جواب‌های آخر باید جلوی لگاریتم‌ها را مثبت کنند!

جواب‌های معادلهٔ $\log_{۲}(x^{۲}-۳)=۱+\log_{۲}x$ چگونه‌اند؟

۱) دو جواب مثبت
۲) یک جواب مثبت و یک جواب منفی
۳) فقط یک جواب مثبت
۴) فاقد جواب

گزینهٔ «۳» در طرف راست می‌نویسیم:

$$۱+\log_{۲}x=\log_{۲}۲+\log_{۲}x=\log_{۲}۲x$$

پس داریم:

$$\log_{۲}(x^{۲}-۳)=\log_{۲}۲x$$

و در نتیجه:

$$x^{۲}-۳=۲x$$

$$\Rightarrow x^{۲}-۲x-۳=۰ \xrightarrow{b=a+c} \begin{cases} x_{۱}=-۱ \\ x_{۲}=۳ \end{cases}$$

اما $x=-۱$ قبول نیست، چون جلوی لگاریتم را منفی می‌کند. پس تنها جواب قابل قبول $x=۳$ است.

از معادلهٔ $\log_{۲}(۳x-۱)=\log_{۴}(x^{۲})-۱$. حاصل $\log_{۴}(۵x+۶)$ کدام است؟

۱) ۰/۵
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۱/۵

گزینهٔ «۴» در طرف راست هم باید $\log_{۲}$ بسازیم:

$$\log_{۴}x^{۲}-۱=\frac{۲}{۲}\log_{۲}x-\log_{۲}۲=\log_{۲}\frac{x}{۲}$$

پس:

$$\log_{۲}(۳x-۱)=\log_{۲}\frac{x}{۲}$$

$$\Rightarrow ۳x-۱=\frac{x}{۲} \Rightarrow ۳x-\frac{x}{۲}=۱ \Rightarrow \frac{۵}{۲}x=۱ \Rightarrow x=\frac{۲}{۵}$$

حالا سؤال مقدار $\log_{۴}۵x+۶$ را خواسته:

$$\log_{۴}(۵x+۶)=\log_{۴}۵(\frac{۲}{۵})+۶=\log_{۴}۸=\frac{۳}{۲}\underbrace{\log_{۲}۲}_{\text{این می‌شود ۱}}=۱/۵$$

کاربرد تابع نمایی و لگاریتمی

۱ تابع $f(x)=ka^{x}$ با شرط‌های $a>۰$ و $a\neq۱$ (همان تابع نمایی خودمان) در بسیاری از مسائل اقتصادی و طبیعی ظاهر می‌شود. مثلاً وقتی نرخ رشد سالانهٔ جمعیت ۱/۷ درصد باشد، تابع $P(x)=A(۱/۰۱۷)^{x}$ جمعیت را در x سال بعد نشان می‌دهد.

یا وقتی یک قایق بادی در هر ساعت ۱۰ درصد بادش را از دست می‌دهد $P(t)=A(۰/۹)^{t}$ مقدار باد آن را در t ساعت بعد به دست می‌آورد. در هر دو تابع A مقدار اولیه است و مقدار پایه در تابع نمایی برابر (ضریب تغییر $۱\pm$) است.

۲ میزان انرژی آزادشده در زلزله‌ای با شدت M ریشتر برابر است با: $E = ۱۰^{۱۱/۸+۱/۵M}$

به بیان دیگر $\log E = ۱۱/۸ + ۱/۵M$. واحد این انرژی Erg (ارگ) است.

از این رابطه نتیجه می‌شود:

الف اگر یک واحد به شدت زلزله اضافه شود، مقدار انرژی $۱۰^{۱/۵}$ یعنی $۱۰\sqrt{۱۰}$ یا ۳۱/۶ برابر می‌شود.

ب نسبت میزان انرژی دو زلزله با شدت‌های $M_۱$ و $M_۲$ برابر است با $\frac{E_۲}{E_۱} = ۱۰^{۱/۵(M_۲-M_۱)}$.

؟ اگر زلزله‌ای به اندازهٔ $۱۰^{۲۲}$ ارگ آزاد کرده باشد. شدت زلزله چه‌قدر بوده؟

۱) ۶/۶ ریشتر
۲) ۶/۷ ریشتر
۳) ۶/۸ ریشتر
۴) ۶/۹ ریشتر

= گزینهٔ «۳» رابطه را برحسب M می‌نویسیم:

$$\log E = ۱۱/۸ + ۱/۵M \Rightarrow M = \frac{۲}{۳}(\log E - ۱۱/۸)$$

پس داریم:

$$M = \frac{۲}{۳}(\log ۱۰^{۲۲} - ۱۱/۸) = \frac{۲}{۳}(۲۲ - ۱۱/۸) = \frac{۲}{۳}(۱۰/۲) = ۲ \times ۳/۴ = ۶/۸$$