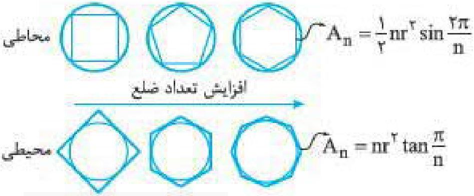
کتاب درسی درس حد را با این مقدمه شروع می‌کند که اگر چندضلعی‌های منتظم محیطی و محاطی دایره به شعاع r را رسم کنیم، با افزایش تعداد اضلاع، مساحت چندضلعی‌ها به مساحت دایره نزدیک می‌شود. دقت کنیم که مساحت چندضلعی‌های محاطی (یعنی درون دایره!) از دایره کم‌تر است و با افزایش تعداد اضلاع، زیاد شده و به مساحت دایره نزدیک می‌شود؛ اما مساحت چندضلعی‌های محیطی (یعنی بیرون دایره) از دایره بیشتر است و با افزایش تعداد اضلاع، کم می‌شود و به مساحت دایره میل می‌کند. اگر عشق فرمول دارید، مساحت nضلعی منتظم محاطی و محیطی (A_n) را برایتان نوشته‌ایم.



با توجه به جدول زیر در مورد تابع f چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

x	۲/۸	۲/۹	۲/۹۹	۳	۳/۰۱	۳/۱	۳/۲
f(x)	۶/۸۴	۷/۴۱	۷/۹۴		۸/۰۲	۸/۲	۸/۴

۱) اگر x برابر ۳ باشد، مقدار تابع f، ۸ است.

۲) اگر x برابر ۳ باشد، مقدار تابع f به ۸ نزدیک است.

۳) حد تابع f در $x = ۳$ از ۸ بیشتر است.

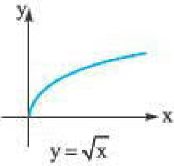
۴) اگر x به ۳ نزدیک شود، $f(x)$ به ۸ نزدیک می‌شود.

گزینهٔ «۴» کل ماجرای حد تابع از روی مقادیر و جدول را در این مثال بشنوید. اگر جدولی از مقادیر x و $f(x)$ رسم کنیم و با نزدیک‌شدن x به a، مقادیر $f(x)$ نیز به عددی مثل L نزدیک شوند، می‌نویسیم $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ و این یعنی حد تابع f در $x = a$ برابر L است. این موضوع هیچ ارتباطی با $f(a)$ ندارد، در واقع فقط به اطراف a نگاه می‌کنیم و نه به خود a.

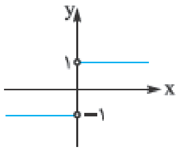
بررسی حد از روی نمودار تابع

اگر نمودار تابع f را داشته باشیم، با نگاه می‌توان فهمید که تابع در $x = a$ حد دارد یا نه. باید شاخه‌های سمت چپ و راست در $x = a$ موجود باشند و به هم برسند. پس هیچ وقت در نقطهٔ ابتدا و انتهای دامنه حد نداریم، چون شاخه از دو طرف وجود ندارد.

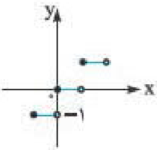
مثلاً $f(x)=\sqrt{x}$ در $x=0$ حد ندارد؛ یعنی $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}$ وجود ندارد چون حد چپ ندارد (تابع برای xهای منفی تعریف نمی‌شود). ببینید:



تابع‌های $\frac{|x|}{x}$ و $[x]$ هم در صفر حد ندارند، چون شاخه‌های چپ و راست به هم نمی‌رسند.

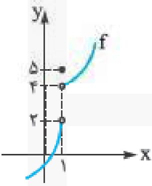


$y=\frac{|x|}{x}$ در $x=0$ حد ندارد، از راست به ۱ و از چپ به -1 می‌رسیم.



$y=[x]$ در $x=0$ حد ندارد، از راست به صفر و از چپ به -1 می‌رسیم.

پس حد در واقع عرض نقطهٔ انتهایی شاخه‌ها است و زمانی وجود دارد که، شاخه‌های چپ و راست به هم برسند. ببینید:



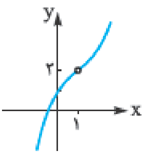
$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=2=$ عرض نقطهٔ انتهایی شاخهٔ سمت چپ = حد چپ

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=4=$ عرض نقطهٔ انتهایی شاخهٔ سمت راست = حد راست

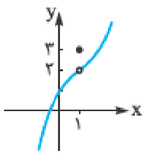
$\xrightarrow{\text{مساوی نیستند}}$ $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=$ موجود نیست

f در $x=1$ معین است. $\Rightarrow f(1)=5=$ عرض نقطهٔ توپر

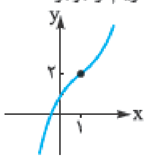
اشاره دقت می‌کنید که وجود یا عدم وجود نقطهٔ توپر هیچ اهمیتی در حد ندارد. مثلاً حد تابع‌های زیر در ۱ برابر ۳ است با این‌که در اولی $f(1)$ نداریم، در دومی داریم و برابر ۳ (یعنی برابر حد) نیست و در سومی داریم و برابر حد است.



شکل (۱)

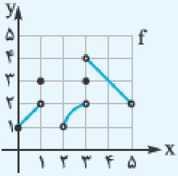


شکل (۲)



شکل (۳)

در تابع f به شکل روبه‌رو، کدام درست است؟



۱) حد چپ و راست f در $x=3$ دو واحد اختلاف دارند.

۲) در $x=2$ حد دارد.

۳) در $x=1$ تابع تعریف‌نشده است.

۴) $f(2)$ وجود دارد.

گزینهٔ «۱» باید به تک‌تک نقطه‌ها توجه کنیم.

الف) در $x = ۰$، شاخهٔ سمت چپ را نداریم، پس حد نداریم. حد راست برابر ۱ و مقدار هم $f(۰) = ۱$ است.

ب) در $x = ۱$ شاخهٔ سمت راست نداریم، پس حد نداریم. حد چپ $\lim_{x\to ۱^-} f(x) = ۲$ و مقدار $f(۱) = ۳$ است پس ۳ غلط است و تابع در $x = ۱$ تعریف‌شده است.

پ) در $x = ۲$ حد چپ و مقدار نداریم و حد هم نداریم. حد راست ۱ است، پس ۲ و ۴ اشتباه هستند.

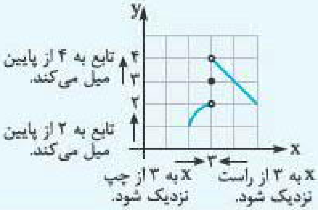
ت) در $x = ۳$ حد چپ می‌شود ۲ و حد راست می‌شود ۴، پس حد نداریم و همان‌طور که ۱ می‌گوید حدود چپ و راست ۲ واحد اختلاف دارند.

$f(۳)$ هم برابر ۳ است.

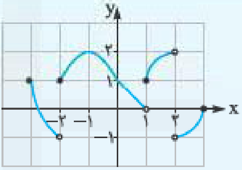
ث) در $x = ۴$ داریم $f(۴) = \lim_{x\to ۴} f(x) = ۳$

ج) در $x = ۵$، فقط حد چپ داریم: $\lim_{x\to ۵^-} f(x) = ۲$

یک بار این فلش‌ها را هم ببینید:



شکل روبه‌رو نمودار f است. کدام درست است؟



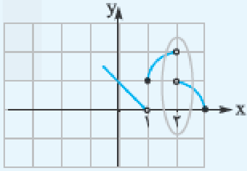
۱) $[f]$ در -۱ حد ندارد.

۲) $[f]$ در صفر حد دارد.

۳) $|f|$ در ۲ حد دارد.

۴) $f^۲$ در -۲ حد دارد.

گزینهٔ «۴» نمودار $|f|$ و $[f]$ را بلدیم؛ برای $|f|$ باید قسمت زیر را به بالا بیاوریم. در $x = ۲$ حد راست تابع f برابر -۱ و حد چپ آن ۲ است. اگر پایین را به بالا بیاوریم حد راست می‌شود $+۱$ و حد چپ ۲ می‌ماند، پس $|f|$ در ۲ حد ندارد. ببینید:

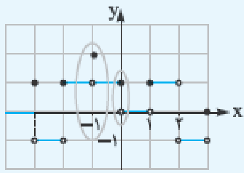


$|f|$

حالا نمودار $[f]$ را برای ۱ و ۲ بکشیم:

هم ۱ و هم ۲ اشتباه هستند.

$[f]$ در صفر حد ندارد اما در -۱ حد دارد.



$$\lim_{x\to ۰^+} [f(x)] = ۰ \quad , \quad \lim_{x\to ۰^-} [f(x)] = ۱ \quad , \quad \lim_{x\to -۱} [f(x)] = ۱$$

پس جواب ۴ است. در $x = -۲$ تابع f حد ندارد (حدهای چپ و راستش ± ۱ هستند) پس تابع $f^۲$ حد دارد (چون حدهای چپ و راستش $(-۱)^۲$ و $(+۱)^۲$ هستند، که با هم مساوی‌اند).

اشاره این‌جوری به ذهن بسپارید که اگر حدهای چپ و راست در یک نقطه دو عدد قرینهٔ هم باشند، آن‌وقت $|f|$ یا $f^۲$ در آن نقطه حد دارند.

در تابع $f(x)=\begin{cases} x+۱ & x\geq ۱ \\ x^۲ & |x|<۱ \\ \sqrt{|x|} & x<-۱ \end{cases}$ کدام درست است؟

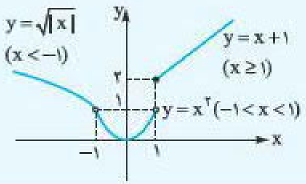
۱) f در تمام نقاط دامنه حد دارد.

۲) f فقط در $x=۱$ حد ندارد.

۳) f فقط در -۱ حد ندارد.

۴) f در دو نقطه حد ندارد.

گزینهٔ «۲» به نمودار تابع نگاه کنید:



خب با توجه به شکل موافقید که f در $x=۱$ حد ندارد، اما در $x=-۱$ حد دارد (شاخه‌ها به هم رسیده‌اند).

محاسبهٔ حد توابع

اگر ضابطهٔ تابع را داشته باشیم و بخواهیم $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ را حساب کنیم، باید این کارها انجام شود:

۱ قدرمطلق و براکت را باید برداریم. به جای $|u|$ باید u یا $-u$ را قرار دهیم و به جای براکت باید عددش را بگذاریم.

پس مثلاً در $\lim\limits_{x\to ۰^-}\dfrac{[x]}{|x|}$ می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to ۰^-}\dfrac{-۱}{-x}$ (چون در ۰^- حاصل $[x]$ برابر -۱ است و جواب $|x|$ هم می‌شود $-x$).

اشاره اگر در این مرحله، یعنی در تعیین وضع قدرمطلق و براکت، به مخرج صفر برسیم یا جلوی لگاریتم صفر شود حد وجود ندارد، (به این صفر، صفر مطلق می‌گویند) پس این حدها وجود ندارند:

$$\lim_{x\to ۳^-}\frac{۱}{[x]-۲} \quad , \quad \lim_{x\to ۰}\cot[x] \quad , \quad \lim_{x\to ۱^-}\log[x]$$

۲ حالا مقدار نهایی x یعنی a را در تابع قرار می‌دهیم.

اگر به $\frac{\text{عدد}}{۰}$ رسیدیم جواب حد $+\infty$ یا $-\infty$ است که بعداً به آن می‌پردازیم.

اگر به عدد رسیدیم جواب حد همان چیزی است که به دست آوردیم.

اگر به $\frac{۰}{۰}$ رسیدیم باید تابع را ساده کنیم و دوباره $x=a$ را قرار دهیم تا به جواب حد برسیم.

قضیه‌های حد

حد مجموع، تفاضل، حاصل‌ضرب و تقسیم دو تابع برابر جمع، تفاضل، ضرب و تقسیم حدهای آن‌ها است (مخرج صفر نباشد). پس اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L_۱$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=L_۲$ داریم:

$$\lim_{x\to a}(f\underset{\times}{\pm}g)(x)=L_۱\underset{\times}{\pm}L_۲ \quad , \quad \lim_{x\to a}\frac{f}{g}(x)=\frac{L_۱}{L_۲}(L_۲\neq ۰)$$

$$\lim_{x\to a} f^k(x)=L_۱^k \quad , \quad \lim_{x\to a}\sqrt{f(x)}=\sqrt{L_۱} \quad (L_۱>۰)$$

اشاره کتاب درسی در چند جا تأکید کرده است که $y=[x]$ در نقاط با طول‌های صحیح حد ندارد.

حالا با دقت بیشتری می‌گوییم: $n\in\mathbb{Z}:\ \lim\limits_{x\to n^+}[x]=n \quad , \quad \lim\limits_{x\to n^-}[x]=n-۱$

حاصل $\lim\limits_{x\to ۲^+}\dfrac{x^۲-x[x]}{|۲-x|}$ **کدام است؟**

۱) ۱ ۲) صفر ۳) ۲ ۴) وجود ندارد.

گزینهٔ «۳» خب سؤال مهمی داریم! دقت کنید. اول در ۲^+ یعنی مثلاً ۲/۱ باید قدرمطلق و براکت را بررسی کرد. حاصل $[x]$ می‌شود ۲ و چون $۲-x$ منفی است $(x>۲)$ حاصل $|۲-x|$ می‌شود $-(۲-x)$ یا $x-۲$. پس:

$$\lim_{x\to ۲^+}\frac{x^۲-x[x]}{|۲-x|}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{x^۲-۲x}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{x(x-۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^+}x=۲$$

اشاره دقت کردید که در مرحلهٔ قبل از ساده‌کردن کسر، $x=۲$ را قرار ندادیم، چون معلوم بود که حاصل حد به $\frac{۰}{۰}$ می‌رسد!

حاصل $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{x^۳+x-۱۰}{۳x^۲-x-۱۰}$ **کدام است؟**

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۱۳}{۱۱}$ ۴) ۲

گزینهٔ «۳» قدرمطلق و براکت که نداریم پس $x=۲$ را قرار می‌دهیم:

$$\lim_{x\to ۲}f(x)=\frac{۸+۲-۱۰}{۳(۴)-۲-۱۰}=\frac{۰}{۰}$$

کتاب درسی می‌گوید وقتی با قراردادن $x=۲$ در یک چندجمله‌ای به صفر می‌رسیم، باید نتیجه بگیریم آن چندجمله‌ای بر $x-۲$ بخش‌پذیر است. پس الان صورت و مخرج بر $x-۲$ بخش‌پذیرند و می‌توانیم از آن‌ها $x-۲$ را بیرون بکشیم.

ضرب$=-۱۰$

$$x^۳+x-۱۰=(x-۲)(x^۲+۲x+۵)\ ,\ ۳x^۲-x-۱۰=(x-۲)(۳x+۵)$$

ضرب$=x^۳$

پس داریم:

$$\lim_{x\to ۲}\frac{x^۳+x-۱۰}{۳x^۲-x-۱۰}=\lim_{x\to ۲}\frac{\cancel{(x-۲)}(x^۲+۲x+۵)}{\cancel{(x-۲)}(۳x+۵)}=\frac{۴+۴+۵}{۶+۵}=\frac{۱۳}{۱۱}$$

راه‌حل دوم قاعدهٔ هوپیتال می‌گوید اگر در حد به $\frac{۰}{۰}$ رسیدید، از صورت و مخرج مشتق بگیرید و حد جدید را حساب کنید:

$$\lim_{x\to ۲}\frac{x^۳+x-۱۰}{۳x^۲-x-۱۰}\xrightarrow{\text{Hop}}=\lim_{x\to ۲}\frac{۳x^۲+۱\leftarrow \text{مشتق صورت}}{۶x-۱\leftarrow \text{مشتق مخرج}}=\frac{۳\times۴+۱}{۶\times۲-۱}=\frac{۱۳}{۱۱}$$

حاصل $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{1-\sqrt{2x-5}}{\sqrt[3]{x+5}-[x]}$ کدام است؟

۱) -12 ۲) ۱۲ ۳) صفر ۴) بی‌نهایت

گزینهٔ «۱» اولاً وقتی x به سمت 3^- می‌رود [x] می‌شود ۲. حالا داریم:

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{1-\sqrt{2x-5}}{\sqrt[3]{x+5}-2} = \frac{1-\sqrt{6-5}}{\sqrt[3]{8}-2} = \frac{0}{0}$$

وقتی عبارات رادیکالی داریم، برای حذف $x-3$ و خروج از این وضعیت «مبهم»، باید گویا کنیم.

یادتان هست که: $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b} = \dfrac{a-b}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}$, $\sqrt{a}-\sqrt{b} = \dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3^-} \frac{1-\sqrt{2x-5}}{\sqrt[3]{x+5}-2} = \lim_{x\to 3^-} \frac{1-(2x-5)}{x+5-\underbrace{8}_{2^3}} \times \underbrace{\frac{\sqrt[3]{(x+5)^2}+2\sqrt[3]{x+5}+4}{1+\sqrt{2x-5}}}_{\text{از گویاکردن به جامانده‌اند}}$$

$$= \lim_{x\to 3^-} \frac{-2x+6}{x-3} \times \underbrace{\frac{4+4+4}{1+1}}_{\text{x=3 را در این‌ها قرار دادیم}} = \frac{-2(x-3)}{x-3} \times \frac{12}{2} = -2\times 6 = -12$$

راه‌حل دوم همیشه می‌شود هوپیتال زد، به شرطی که مشتق‌ها را بلد باشیم:

$$\lim_{x\to 3} \frac{1-\sqrt{2x-5}}{\sqrt[3]{x+5}-2} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 3^-} \frac{0-\dfrac{2}{2\sqrt{2x-5}}}{\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x+5)^2}}-0} = \frac{-\dfrac{2}{2\sqrt{1}}}{\dfrac{1}{3\sqrt[3]{8^2}}} = \frac{-1}{\dfrac{1}{12}} = -12$$

اگر حواسمان باشد، وقتی داریم حد را با ضرب‌کردن صورت و مخرج کسر در مزدوج یا عبارت چاق ریشهٔ سوم، به دست می‌آوریم، می‌توانیم از همان اول جای عبارت‌هایی که در صفرشدن صورت و مخرج مؤثر نیستند، عدد مساوی‌شان را بگذاریم. این کار باعث می‌شود هم خیلی کم‌تر بنویسیم و اشتباه‌های محاسباتی‌مان کم شود و هم سریع‌تر حل کنیم.

حاصل $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x^2+x-6}$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{1}{8}$ ۲) $\frac{1}{10}$ ۳) $\frac{1}{16}$ ۴) $\frac{1}{20}$

گزینهٔ «۴» صورت و مخرج کسر را در $\sqrt{x+2}+2$ ضرب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x^2+x-6} \times \frac{\sqrt{x+2}+2}{\underbrace{\sqrt{x+2}+2}_{4}} = \lim_{x\to 2} \frac{\cancel{(x+2-4)}}{4\cancel{(x-2)}(x+3)} = \frac{1}{4\times 5} = \frac{1}{20}$$

حاصل $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt[3]{x-1}-2}{\sqrt{x}-3}$ **برابر کدام است؟**

۱) $\dfrac{1}{3}$ ۲) $-\dfrac{1}{3}$ ۳) $\dfrac{1}{2}$ ۴) $-\dfrac{1}{2}$

گزینهٔ «۳» کسر را در مزدوج $\sqrt{x}-3$ یعنی $\sqrt{x}+3$ و در عبارت چاق $\sqrt[3]{x-1}-2$ یعنی $\sqrt[3]{(x-1)^2}+2\sqrt[3]{x-1}+4$ ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt[3]{x-1}-2}{\sqrt{x}-3}\times\frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}+2\sqrt[3]{x-1}+4}{\underbrace{\sqrt[3]{(x-1)^2}+2\sqrt[3]{x-1}+4}_{12}}\times\frac{\overbrace{\sqrt{x}+3}^{6}}{\sqrt{x}+3}$$

$$=\lim_{x\to 9}\frac{6(x-1-8)}{12(x-9)}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$

اگر در حد $\frac{0}{0}$ در صورت یا مخرج کسر چند عامل داشته باشیم که بینشان جمع و تفریق باشد و حد هر دو برابر صفر شود می‌توانیم به جای صورت یا مخرج، عامل دارای کوچک‌ترین توان عامل صفرشونده را بگذاریم.

به این می‌گوییم هم‌ارزی کوچک‌ترین توان، ببینید:

$$\underset{x\to 1}{(x-1)^3+2(x-1)^2-3(x-1)}\sim -3(x-1)$$

$$\underset{x\to 1^+}{\sqrt{x-1}+(x^2-1)-\sqrt[3]{x-1}}\sim -\sqrt[3]{x-1}$$

حل این مثال را هم با این روش ببینید:

حاصل $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x-1|+\sqrt[3]{x-1}}{x^2-1-\sqrt[3]{x^2-1}}$ **برابر کدام است؟**

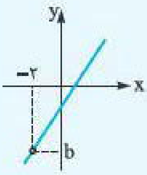
۱) صفر ۲) $-\sqrt[3]{2}$ ۳) $-\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ ۴) حد وجود ندارد.

گزینهٔ «۳» توان عامل صفرشونده در صورت و مخرج به صورت مقابل است:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\overbrace{|x-1|}^{\text{توان } 1}+\overbrace{\sqrt[3]{x-1}}^{\text{توان } \frac{1}{3}}}{\underbrace{x^2-1}_{\text{توان } 1}-\underbrace{\sqrt[3]{x^2-1}}_{\text{توان } \frac{1}{3}}}$$

پس با استفاده از هم‌ارزی بالا داریم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x-1}}{-\sqrt[3]{x^2-1}}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x-1}}{-\sqrt[3]{x-1}\,\sqrt[3]{x+1}}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{-\sqrt[3]{x+1}}=-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$



؟ شکل روبه‌رو، نمودار تابع $f(x)=\frac{x^۲+x+a}{x+۲}$ است. مقدار ab کدام است؟

۱) ۲   ۲) ۲−

۳) ۶   ۴) ۶−

= گزینهٔ «۳» شکل می‌گوید $\lim\limits_{x\to -۲} f(x)=b$.

در تابع قدرمطلق و براکت نداریم، پس $x=-۲$ را قرار می‌دهیم:

$$\lim_{x\to -۲} f(x)=\lim_{x\to -۲}\frac{x^۲+x+a}{x+۲}=\frac{۴-۲+a}{۰}=\frac{۲+a}{۰}$$

خب، $\frac{۲+a}{۰}$ باید بشود b؛ اما عدد تقسیم بر صفر می‌شود بی‌نهایت!

تنها راه این است که $۲+a$ هم صفر باشد: $۲+a=۰ \Rightarrow a=-۲$

حالا به $\frac{۰}{۰}$ می‌رسیم و کسر را ساده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to -۲}\frac{x^۲+x-۲}{x+۲}=\lim_{x\to -۲}\frac{(x-۱)(x+۲)}{x+۲}=\lim_{x\to -۲}(x-۱)=-۲-۱=-۳$$

پس جواب حد $b=-۳$ است و داریم: $ab=(-۲)(-۳)=۶$

اشاره همیشه در حدهایی که به صورت $\frac{۰}{۰}$ درمی‌آیند و سپس با رفع ابهام و ساده‌کردن حل می‌شوند، نمودار یک حفره دارد، طول حفره در $x=a$ و عرض آن برابر حاصل حد است.

؟ اگر $f(x)=[x]^۲+k[x]$ در $x=۲$ حد داشته باشد. مقدار $\lim\limits_{x\to(-۲)^-} f(x)$ کدام است؟

۱) ۳   ۲) ۶   ۳) ۹   ۴) ۱۸

= گزینهٔ «۴» باید حدهای چپ و راست f در $x=۲$ با هم برابر باشند. می‌دانیم:

$$\lim_{x\to ۲^+}[x]=۲ \quad , \quad \lim_{x\to ۲^-}[x]=۱$$

پس بر طبق قضایای حد داریم:

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=۲^۲+k(۲)=۴+۲k \quad , \quad \lim_{x\to ۲^-} f(x)=۱^۲+k(۱)=k+۱$$

$$\xrightarrow{\text{مساوی‌اند}} ۴+۲k=k+۱ \Rightarrow k=-۳$$

و بنابراین: $f(x)=[x]^۲-۳[x]$

حالا با توجه به این‌که حد $[x]$ در $(-۲)^-$ برابر ۳− است داریم:

$$\lim_{x\to(-۲)^-}[x]=-۳ \Rightarrow \lim_{x\to(-۲)^-} f(x)=(-۳)^۲-۳(-۳)=۹+۹=۱۸$$

قصهٔ تقسیم

باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-a$ برابر است با $R=P(a)$، یعنی ریشهٔ مقسوم‌علیه را در مقسوم قرار می‌دهیم و مقدار عبارت مقسوم را حساب می‌کنیم.

پس $P(x)=x^{۳}-x^{۲}-x-۲$ بر $x-۲$ بخش‌پذیر است، چون $P(۲)$ می‌شود صفر و باقی‌ماندهٔ آن بر $x-۱$ برابر $P(۱)=-۳$ است. انتظار داریم این چندجمله‌ای به صورت $(x-۲)(\ldots)$ تجزیه بشود. اگر دوست دارید پرانتز دوم را با تقسیم پیدا کنید.

رابطهٔ تقسیم می‌گوید $f(x)=(x-a)Q(x)+R$ و همان‌طور که در بالا گفتیم $R=f(a)$ است.

؟ به ازای مقداری از k چندجمله‌ای $P(x)=x^{۴}-۲x^{۳}+x^{۲}+x+k$ بر $x+۱$ بخش‌پذیر است. باقی‌ماندهٔ آن بر $x-۲$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) -۳ ۳) ۲ ۴) -۲

= گزینهٔ «۱» باقی‌مانده بر $x+۱$ می‌شود $P(-۱)$ که باید صفر شود:

$$P(-۱)=۱+۲+۱-۱+k=۳+k=۰ \Rightarrow k=-۳$$

حالا باقی‌مانده بر $x-۲$ را می‌خواهیم:

$$R=P(۲)=۱۶-۱۶+۴+۲+\underbrace{k}_{-۳}=۳$$

؟ اگر $f(x)=x^{۳}+ax^{۲}+۳x+b$ بر $x^{۲}-۳x+۲$ بخش‌پذیر باشد، ab کدام است؟

۱) $\frac{۱۰}{۳}$ ۲) $\frac{۱۰}{۹}$ ۳) $\frac{۲۰}{۳}$ ۴) $\frac{۲۰}{۹}$

= گزینهٔ «۴» $x^{۲}-۳x+۲$ همان $(x-۱)(x-۲)$، پس الان باید $f(x)$ بر $x-۱$ و بر $x-۲$ بخش‌پذیر باشد یعنی $f(۲)=f(۱)=۰$. پس:

$$f(x)=x^{۳}+ax^{۲}+۳x+b \Rightarrow \begin{cases} f(۱)=۱+a+۳+b=۰ \\ f(۲)=۸+۴a+۶+b=۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=-۴ \\ ۴a+b=-۱۴ \end{cases} \xrightarrow{\text{منها کنیم}} ۳a=-۱۰$$

$$\Rightarrow a=-\frac{۱۰}{۳} \Rightarrow b=-\frac{۲}{۳} \Rightarrow ab=\frac{۲۰}{۹}$$

؟ اگر $f(۳)=۱$ و $f(-۱)=۴$، آن‌گاه مقدار خارج قسمت تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $x-۳$، به ازای $x=-۱$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) $-۰/۷۵$ ۳) $-۰/۸$ ۴) $-۰/۵$

= گزینهٔ «۲» در تقسیم $f(x)$ بر $x-۳$ داریم:

$$f(x)=(x-۳)Q(x)+\underbrace{R}_{۱}$$

$$R=f(۳)=۱$$

حالا به ازای x در رابطهٔ تقسیم، -۱ می‌گذاریم:

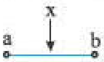
$$f(-۱)=(-۱-۳)Q(-۱)+۱ \xrightarrow{f(-۱)=۴} ۴=-۴Q(-۱)+۱$$

$$\Rightarrow Q(-۱)=-\frac{۳}{۴}=-۰/۷۵$$

حد نامتناهی

مفهوم همسایگی

اول تعریف همسایگی را مرور کنیم: (a,b) یک همسایگی x است، هرگاه $a<x<b$ باشد، پس همسایگی x یعنی بازهٔ بازی شامل x. اگر خود x را از همسایگی جدا کنیم مجموعهٔ $(a,b)-\{x\}$ یک همسایگی محذوف از x است. ببینید:


همسایگی
(یک بازه)


همسایگی محذوف
(اجتماع دو بازه)

همسایگی راست: بازه‌ای به شکل (a,b) یا $(a,a+r)$ یک همسایگی راست $x=a$ است.

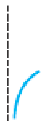
همسایگی چپ: بازه‌ای به شکل (a,b) یا $(b-r,b)$ یک همسایگی چپ $x=b$ است.

پس  یک همسایگی راست a و یک همسایگی چپ b است.

حالا این حدها را تعریف می‌کنیم:

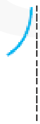
الف
$$\lim_{x\to a^+} f(x)=+\infty$$

$x=a$

ب
$$\lim_{x\to a^+} f(x)=-\infty$$

$x=a$

پ
$$\lim_{x\to a^-} f(x)=-\infty$$

$x=a$

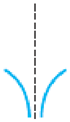
ت
$$\lim_{x\to a^-} f(x)=+\infty$$

$x=a$

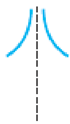
مثلاً تعریف الف این‌جوری است:

f در یک همسایگی راست $x=a$ تعریف شده است و اگر x به اندازهٔ کافی با مقادیر بیشتر از a به a نزدیک شود، f به هر اندازهٔ دلخواه، از هر عدد مثبت دلخواه بیشتر می‌شود.

این حدها می‌توانند دوطرفه هم باشند.

اگر f در همسایگی محذوف a تعریف شود، داریم:


$$\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$$


$$\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$$

محاسبهٔ حد نامتناهی با استفاده از ضابطه

این حدها وقتی اتفاق می‌افتند که به $\frac{\text{عدد}}{۰}$ برسیم. چهار حالت داریم:

$$\frac{+\text{عدد}}{۰^+}=+\infty \ ، \ \frac{-\text{عدد}}{۰^+}=-\infty \ ، \ \frac{+\text{عدد}}{۰^-}=-\infty \ ، \ \frac{-\text{عدد}}{۰^-}=+\infty$$

؟ حاصل کدام حد با بقیه فرق دارد؟

۱) $\lim\limits_{x\to ۳^+}\frac{۲-x}{x-۳}$

۲) $\lim\limits_{x\to (-۱)^-}\frac{x-۲}{x^۲-x-۲}$

۳) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۳}^+}\frac{\cos x-۱}{۲\cos x-۱}$

۴) $\lim\limits_{x\to ۱^+}\frac{[x]}{\frac{۱}{x}-\sqrt{x}}$

= گزینهٔ «۳»

۱ $\lim\limits_{x\to ۳^+}\frac{۲-x}{x-۳}=\frac{۲-۳^+}{۳^+-۳}=\frac{-۱}{۰^+}=-\infty$

در ۱ فهمیدن علامت صفر در مخرج کار سختی نیست، چون ۳^+ مثلاً می‌شود $۳/۱$ و $۳/۱-۳>۰$ است پس، صفر مثبت است.

۲ $\lim\limits_{x\to (-۱)^-}\frac{x-۲}{x^۲-x-۲}=\frac{(-۱)^- -۲}{(-۱)^۲-(-۱)-۲}=\frac{-۳}{۰}$

در ۲ کمی زحمت داریم! اگر به جای $(-۱)^-$، عدد $-۱/۱$ را قرار دهیم می‌بینیم حاصل مخرج ۰^+ است. می‌توانیم از تعیین علامت هم برویم:

$(-۱)^-$

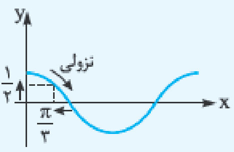
x		-۱		۲	
$x^۲-x-۲$	$+$	۰	$-$	۰	$+$

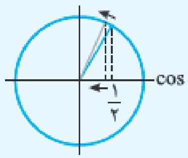
مثبت است

پس جواب می‌شود: $\frac{-۳}{۰^+}=-\infty$.

۳ $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۳}^+}\frac{\cos x-۱}{۲\cos x-۱}=\frac{\frac{۱}{۲}-۱}{۲(\frac{۱}{۲})-۱}=\frac{-\frac{۱}{۲}}{۰^-}=+\infty$

در ۳ باید دقت کنیم که در $\frac{\pi}{۳}^+$، مقدار کسینوس از $\frac{۱}{۲}$ کم‌تر است، پس مخرج ۰^- است. این را از روی دایرهٔ مثلثاتی یا نمودار $\cos x$ می‌شود فهمید:





خب، معلوم شد که ۳ با بقیه فرق دارد، اما ۴ را هم ببینید:

$$\lim_{x\to ۱^+} \frac{[x]}{\frac{۱}{x}-\sqrt{x}} = \lim_{x\to ۱^+} \frac{۱}{\frac{۱}{x}-\sqrt{x}} = \frac{۱}{۱-۱} = \frac{۱}{۰}$$

واضح است که برای $x > ۱$ مقدار $\sqrt{x}$ از $\frac{۱}{x}$ بیشتر است. پس مخرج ۰^- است و حاصل می‌شود:

$$\frac{۱}{۰^-} = -\infty$$

اشاره دیدید؟ چند راه برای تشخیص علامت صفر در مخرج داریم؟

مقایسهٔ اعداد و جای‌گذاری، تعیین علامت، استفاده از دایرهٔ مثلثاتی، صعودی و نزولی بودن و ...

در چندتا از تابع‌های زیر رابطهٔ $\lim_{x\to ۲} f(x) = +\infty$ برقرار است؟

$$\frac{[x]}{|x-۲|} \ , \ \frac{x+۳}{(x-۲)^۲} \ , \ \frac{(-۱)^{[x]}}{x-۲} \ , \ \frac{۱}{۱-\cos \pi x}$$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

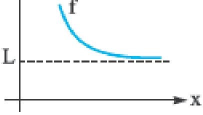
گزینهٔ «۴» باید در حد چپ و راست به $\frac{+\text{عدد}}{۰^+}$ یا $\frac{-\text{عدد}}{۰^-}$ برسیم، یعنی صورت عدد و مخرج صفر شده و هم‌علامت باشند. در $\frac{[x]}{|x-۲|}$ مقدار صورت در همسایگی ۲ برابر ۱ یا ۲ و مخرج همیشه ۰^+ است. (قدرمطلق دارد) پس این خوب است. در $\frac{x+۳}{(x-۲)^۲}$ نیز صورت ۵ و مخرج ۰^+ است (توان زوج دارد) پس این هم خوب است. برای $\frac{۱}{۱-\cos \pi x}$ هم صورت ۱ و مخرج همیشه مثبت است و در $x = ۲$ می‌شود صفر (حواستان هست که $۱-\cos\theta \geq ۰$؟) پس این هم خوب است. حالا برویم سراغ $\frac{(-۱)^{[x]}}{x-۲}$:

$$\lim_{x\to ۲^+} \frac{(-۱)^{[x]}}{x-۲} = \frac{(-۱)^۲}{۲^+-۲} = \frac{۱}{۰^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to ۲^-} \frac{(-۱)^{[x]}}{x-۲} = \frac{(-۱)^۱}{۲^--۲} = \frac{-۱}{۰^-} = +\infty$$

در کمال ناباوری، این هم درست است. پس ۴ تا از تابع‌ها.

حد در بی‌نهایت

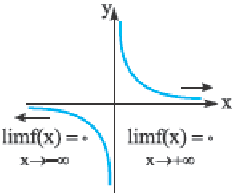


$\lim_{x\to +\infty} f(x) = L$ یعنی می‌توانیم با افزایش x به اندازهٔ کافی، $f(x)$ را به هر اندازهٔ دلخواه به L نزدیک کنیم. نمودار را ببینید:

در مورد توابع $\frac{۱}{x}$ و کلاً $\frac{۱}{x^n}$ $(n \in \mathbb{N})$، می‌توان به راحتی نشان داد که:

$$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{۱}{x^n} = ۰$$

مثلاً نمودار $y=\frac{1}{x}$ را به یاد بیاورید:



اما برای توابع ax^n با توجه به علامت a داریم: $(n\in\mathbb{N})$

$$\lim_{x\to+\infty} ax^n=\begin{cases}+\infty & a>0\\ -\infty & a<0\end{cases}\quad,\quad \lim_{x\to-\infty} ax^n=\begin{cases}+\infty\times(\text{علامت } a) & n:\text{زوج}\\ -\infty\times(\text{علامت } a) & n:\text{فرد}\end{cases}$$

مثلاً:

$$\lim_{x\to-\infty} 2x^3=-\infty\quad,\quad \lim_{x\to-\infty} -2x^4=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} -2x^3=+\infty\quad,\quad \lim_{x\to-\infty} 2x^4=+\infty$$

قانون جملهٔ پرتوان: برای محاسبهٔ حد هر چندجمله‌ای یا تابع گویا در $+\infty$ و $-\infty$، می‌توانیم به جای هر چندجمله‌ای، فقط جملهٔ دارای بیشترین توان را قرار دهیم. پس:

$$\lim_{x\to+\infty}(x^3-10x^2-7x+1)=\lim_{x\to+\infty}x^3=+\infty$$

و از آن مهم‌تر:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2-7x+1}{8x+2x^2-3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{2x^2}=\frac{-1}{2}$$

پس حد هر کسر در $+\infty$ و $-\infty$ برابر حد نسبت جملات پرتوان است:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^n+bx^{n-1}+\cdots}{a'x^m+b'x^{m-1}+\cdots}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^n}{a'x^m}$$

این را هم بشنوید: اگر درجهٔ صورت و مخرج برابر باشد، حد برابر نسبت ضرایب پرتوان است. اگر درجهٔ مخرج بیشتر باشد حد صفر است و اگر درجهٔ صورت بیشتر باشد ∞ است. پس:

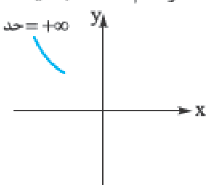
$$=\begin{cases}\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{a}{a'}x^{n-m}=\pm\infty & n>m\\[2mm] \frac{a}{a'} & n=m\\[2mm] \lim\frac{a}{a'}\frac{1}{x^{m-n}}=0 & n<m\end{cases}$$

الف $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^2-7x+1}{1-3x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{-3x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-2}{3}x=+\infty$

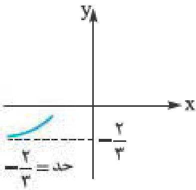
ب $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^2-7x+1}{1-3x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{-3x^2}=-\frac{2}{3}$

پ $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^2-7x+1}{1-3x^3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{-3x^3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-\frac{2}{3}}{x}=0$

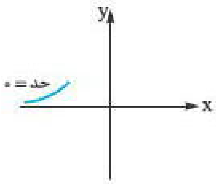
قیافه‌ها را هم داشته باشید:



الف



ب



پ

❓ حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{3x+1}$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(2x-1)^2+x^2}{3x^2-5x+1}$ چه‌قدر فرق دارند؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) ۱ ۴) صفر

گزینهٔ «۳» در اولی نسبت جملات پرتوان $\frac{2x}{3x}$ یعنی $\frac{2}{3}$ و در دومی $\frac{(2x)^2+x^2}{3x^2}$ یعنی $\frac{5x^2}{3x^2}$ است که نسبت می‌شود $\frac{5}{3}$ و اختلاف دو حد ۱ است.

❓ اگر حاصل $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{ax^n-2x+1}{2x^2-5x+1}$ برابر -1 باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^a+nx^2}{ax|x-2|}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -1 ۴) -2

گزینهٔ «۱» حد برابر -1 شده است پس صورت و مخرج هم‌درجه‌اند و نسبت ضرایبشان -1 است:

$$\frac{ax^n}{2x^2}=-1 \Rightarrow \begin{cases}a=-2\\ n=2\end{cases}$$

حالا حد جدید:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^{-2}+2x^2}{-2x|x-2|}\xrightarrow[\text{را برداریم}]{\text{پرتوان‌ها}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{-2x\underbrace{(-x)}_{\text{به جای قدرمطلق}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{2x^2}=1$$

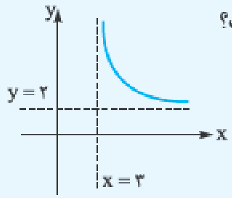
❓ حاصل $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+7x+1}}{ax+|x|}$ برابر ۴ است. مقدار a کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) -1 ۴) ۱

گزینهٔ «۲» جملهٔ پرتوان صورت $\sqrt{4x^2}=|2x|$ است که در $-\infty$ به صورت $-2x$ درمی‌آید. در مخرج هم $ax-x$ یا $(a-1)x$ داریم، پس نسبت این‌ها یعنی $\frac{-2}{a-1}$ باید ۴ باشد پس:

$$\frac{-2}{a-1}=4 \Rightarrow a-1=\frac{-1}{2} \Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

شکل روبه‌رو، نمودار $f(x)=\frac{ax+۱}{۲x+b}$ است. $a+b$ کدام است؟



۱) -۲

۲) -۴

۳) -۶

۴) -۸

گزینهٔ «۱» شکل می‌گوید حد تابع در $+\infty$ برابر ۲ است. پس:

$$\xrightarrow{\text{پرتوان}} \lim_{x\to+\infty}\frac{ax}{۲x}=\frac{a}{۲}=۲ \Rightarrow a=۴$$

هم‌چنین حد تابع در ۳ (از راست) نامتناهی است پس $x=۳$ مخرج را صفر می‌کند:

$$۲(۳)+b=۰ \Rightarrow b=-۶ \xrightarrow{a=۴} a+b=۴+(-۶)=-۲$$

این هم یک ترکیب رویایی:

در شکل روبه‌رو، از تابع $f(x)=\frac{d+x}{ax^۲+bx+c}$ بر بازهٔ $(-۱,+\infty)$، حاصل abcd کدام است؟

۱) -۱ ۲) -۲

۳) -۳ ۴) -۴

گزینهٔ «۴» سؤال می‌گوید نمودار در $(-۱,+\infty)$ رسم شده، پس حد نامتناهی که در اول تابع می‌بینیم مربوط به شروع بازه یعنی -۱ است. پس $x=-۱$ ریشهٔ مخرج است. حفره‌ای که در $x=۲$ می‌بینیم هم نشان می‌دهد در $x=۲$ تابع مقدار ندارد یعنی مخرج در ۲ نیز صفر است. این‌ها یعنی مخرج کسر باید $a(x-۲)(x+۱)=ax^۲\underbrace{-a}_{b=-a}x\underbrace{-۲a}_{c=-۲a}$ باشد. راستی در $x=۲$ صورت کسر هم صفر بوده (چرا؟ چون حفره شده و حد نامتناهی ندارد) پس داریم:

$$\text{صورت}=۰ \xrightarrow{x=۲} d+۲=۰ \Rightarrow d=-۲$$

$$f(۰)=۱ \Rightarrow \frac{d}{c}=۱ \xrightarrow{d=-۲} c=-۲ \xrightarrow{c=-۲a} -۲a=-۲$$

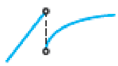
$$\Rightarrow a=۱ \Rightarrow b=-۱$$

پس $abcd=(۱)(-۱)(-۲)(-۲)$ یعنی: $abcd=-۴$

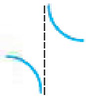
پیوستگی

اگر نمودار f بدون برداشتن قلم از روی کاغذ رسم شود می‌گوییم f پیوسته است. مثلاً این‌ها پیوسته‌اند:

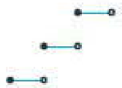
حالا این‌ها را ببینید که پیوسته نیستند:



$y=\begin{cases}\sqrt{x} & x\geq 0\\ x+2 & x<0\end{cases}$



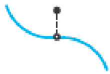
$y=\frac{1}{x}$



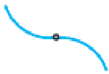
$y=[x]$

شرط پیوستگی تابع در نقطهٔ $x=c$ این است که $\lim\limits_{x\to c} f(x)=f(c)$

یعنی برای پیوستگی باید حد و مقدار مساوی باشند. یعنی شاخه‌های سمت چپ و راست به هم برسند و نقطهٔ توپر نیز همان‌جا باشد:



حد دارد اما مقدار با حد مساوی نیست.



حد دارد اما مقدار ندارد.

حد ندارد، پیوسته نیست.

حد ندارد، پیوسته نیست.

؟ $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & x>1\\ k & x=1\\ 3x+b & x<1\end{cases}$ **در $x=1$ پیوسته است. $b.k$ کدام است؟**

۱) -1 ۲) -2 ۳) -3 ۴) -4

گزینهٔ «۲» حد راست از ضابطهٔ بالا می‌شود $1^2+1=2$؛ مقدار از ضابطهٔ وسطی می‌شود $f(1)=k$ و حد چپ از ضابطهٔ پایین می‌شود $3(1)+b=3+b$ و باید این‌ها با هم مساوی باشند:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=f(1)=\lim_{x\to 1^-} f(x)\Rightarrow 2=k=3+b\Rightarrow\begin{cases}b=-1\\ k=2\end{cases}\Rightarrow bk=-2$$

؟ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\sin x} & x<0\\ b & x=0\\ \dfrac{ax}{1-\sqrt{1+x}} & x>0\end{cases}$ **در $x=0$ پیوسته است. ab کدام است؟**

۱) -1 ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) -2 ۴) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

گزینهٔ «۱» این دفعه کمی سخت‌تر است. حدهای چپ و راست به $\frac{0}{0}$ می‌رسند:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2\sin^2 x}}{\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2}\,|\sin x|}{\sin x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-\sqrt{2}\sin x}{\sin x}=-\sqrt{2}$$

اشاره 0^- در ربع چهارم است پس $\sin x$ منفی است و با منفی از قدرمطلق درمی‌آید.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{ax}{1-\sqrt{1+x}}=\frac{0}{0}$$

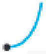
$$\xrightarrow{\text{گویا کنیم}}\lim_{x\to 0^+}\frac{ax(1+\sqrt{1+x})}{1-(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{ax\overbrace{(1+1)}^{x=0\ \text{قرار دادیم}}}{-x}=-2a$$

از ضابطهٔ وسطی $f(0)$ می‌شود b. پس داریم:

$$\text{شرط پیوستگی}\Rightarrow -\sqrt{2}=b=-2a\Rightarrow\begin{cases}b=-\sqrt{2}\\ a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}\Rightarrow ab=-\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-1$$

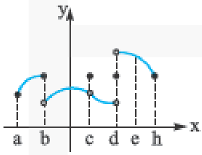
پیوستگی چپ و راست

اگر حد راست و مقدار تابع مساوی باشند (نقطهٔ توپر به انتهای شاخهٔ راست متصل است)، می‌گوییم f از راست پیوسته است: $\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a)$



اگر حد چپ و مقدار تابع مساوی باشند (نقطهٔ توپر به انتهای شاخهٔ چپ متصل است)، می‌گوییم f از چپ پیوسته است: $\lim_{x\to a^-} f(x)=f(a)$

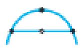
نمودار روبه‌رو را ببینید. f در نقاط b و h فقط از چپ و در a از راست و در e از دو طرف پیوسته است و در c و d از هیچ طرفی پیوسته نیست.



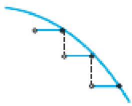
اشاره تابع f زمانی در یک نقطه پیوسته است که در آن نقطه هم از چپ و هم از راست پیوسته باشد.

اشاره اگر $f(x)$ اکیداً صعودی باشد آن‌گاه تابع $[f(x)]$ در نقاطی که f صحیح می‌شود از راست پیوسته است. برای تابع اکیداً نزولی f، برعکس است.

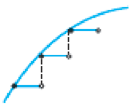
اگر f مینیمم با مقدار صحیح بدهد، $[f]$ پیوسته است.



اگر f ماکزیمم با مقدار صحیح بدهد، $[f]$ حد دارد اما پیوسته نیست.



f نزولی اکید است، $[f]$ در نقاط با عرض صحیح از چپ پیوسته است.



f صعودی اکید است، $[f]$ در نقاطی که f صحیح شود از راست پیوسته است.

؟ کدام تابع در $x=1$ فقط از چپ پیوسته است؟

۱) $[\log x]$ ۲) $[x^2-2x]$ ۳) $[-x^3]$ ۴) $[(\frac{1}{2})x]$

= گزینهٔ «۳» باید درون براکت صحیح شود (۴ نیست) و نزولی باشد (۱ صعودی است و ۲ مینیمم دارد).

پیوستگی تابع در یک بازه

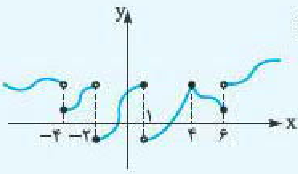
۱ برای پیوستگی f در (a,b) باید f در هر نقطه از این بازه پیوسته باشد. این‌طوری: 

۲ برای $[a,b)$ علاوه بر شرط پیوستگی در (a,b)، باید در a پیوستگی راست داشته باشد، یعنی در شروع نقطهٔ توپر به شاخه متصل باشد، این‌جوری: 

۳ برای پیوستگی در $(a,b]$ باید در $x=b$ پیوسته از چپ باشد و در (a,b) هم پیوسته باشد. این شکلی: 

۴ حتماً خودتان حدس زدید که برای پیوستگی در $[a,b]$ باید در (a,b) پیوسته و در $x=a$ از راست و در $x=b$ از چپ پیوسته باشد. با این قیافه: 

؟ f به شکل روبه‌رو، در چند تا از بازه‌های زیر پیوسته است؟



$$(-\infty,-۴],[-۴,-۲],[-۲,۱),(۱,۴),[۶,+\infty)$$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) هیچ

= گزینهٔ «۲» در $(-\infty,-۴]$ پیوسته نیست چون در -۴ پیوستگی از چپ نداریم.

در $[-۴,-۲]$ هم همین‌طور؛ در -۲ از چپ پیوسته نیست.

در $[-۲,۱)$ پیوسته است.

در $(۱,۴)$ نیز پیوسته است.

در $[۶,+\infty)$ پیوسته نیست چون در $x=۶$ از راست پیوسته نیست. پس دوتا از بازه‌ها شد.

؟ تابع $f(x)=\begin{cases} x^۲ & -۴<x\leq -۱ \\ x+b & -۱<x<۲ \\ x^۳-a & ۲\leq x \end{cases}$ **در $[-۱,۲]$ پیوسته است. ab کدام است؟**

۱) -۲ ۲) -۸ ۳) ۲ ۴) ۸

= گزینهٔ «۴» نگران $(-۱,۲)$ نیستیم، چون ضابطهٔ تابع به صورت $y=x+b$ (یک خط پیوسته) است. فقط باید در $x=-۱$ حد راست و مقدار مساوی شود:

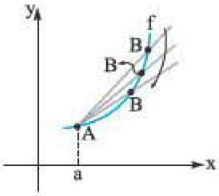
$$f(-۱)=\lim_{x\to(-۱)^+} f(x) \Rightarrow (-۱)^۲=-۱+b \Rightarrow b=۲$$

و در ۲ باید حد چپ با مقدار برابر شود:

$$\underbrace{f(۲)}_{\text{از ضابطهٔ پایین}}=\underbrace{\lim_{x\to ۲^-} f(x)}_{\text{از ضابطهٔ وسط}} \Rightarrow ۲^۳-a=۲+b$$

$$\Rightarrow ۸-a=۲+\underbrace{b}_{۲} \Rightarrow a=۴$$

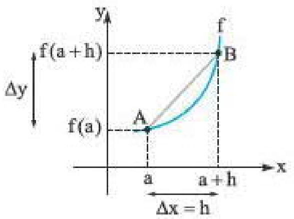
پس: $ab=۴(۲)=۸$



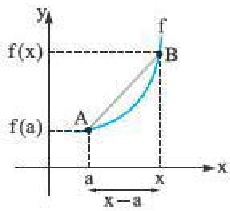
برای پیداکردن شیب مماس بر منحنی در $x=a$ چه کار باید کرد؟

خط قاطع AB را ببینید. با نزدیک‌شدن نقطهٔ B به A این خط به مماس نزدیک می‌شود. پس می‌توانیم شیب مماس در $x=a$ را از روی شیب وتر AB پیدا کنیم.

دو جور فرمول‌بندی داریم:

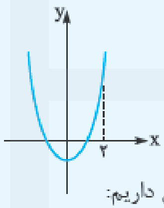


$$m_{AB}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$



$$m_{AB}=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

? در شکل روبه‌رو $f(x)=x^{۲}-۱$ رسم شده است. برای تخمین شیب مماس در $x=۲$ از بازهٔ $[۲,۲/۴]$ استفاده می‌شود. شیب قاطع کدام است؟



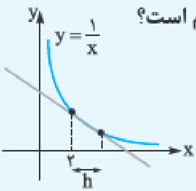
۱) ۴/۲ ۲) ۴/۱

۳) ۴/۳ ۴) ۴/۴

= گزینهٔ «۴» نقطه‌ها $A(۲,۳)$ و $B(۲/۴,(۲/۴)^{۲}-۱)$ هستند. پس داریم:

$$m_{AB}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(۲/۴)^{۲}-۱-(۲^{۲}-۱)}{۲/۴-۲}=\frac{(۲/۴)^{۲}-۲^{۲}}{۲/۴-۲}=۲/۴+۲=۴/۴$$

? در شکل روبه‌رو شیب مماس در $x=۲$. با استفاده از خط قاطع کدام است؟



۱) $\frac{-۱}{۲+h}$ ۲) $\frac{-۱}{۲h+h^{۲}}$

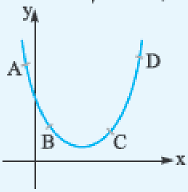
۳) $\frac{-۱}{۴+۲h}$ ۴) $\frac{-۱}{۴+h}$

= گزینهٔ «۳»

$$\text{شیب قاطع}:\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(۲+h)-f(۲)}{h}=\frac{\frac{۱}{۲+h}-\frac{۱}{۲}}{h}=\frac{۲-(۲+h)}{h(۲+h)(۲)}$$

$$=\frac{-h}{۲h(۲+h)}=\frac{-۱}{۲(۲+h)}=\frac{-۱}{۴+۲h}$$

در نمودار تابع f به شکل مقابل، ترتیب شیب مماس در نقاط D,C,B,A کدام است؟



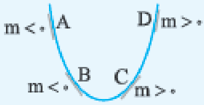
۱) $m_A < m_B < m_C < m_D$

۲) $m_A < m_B < m_D < m_C$

۳) $m_B < m_A < m_C < m_D$

۴) $m_B < m_A < m_D < m_C$

گزینهٔ «۱» شیب مماس در C و D مثبت است و در D از C بیشتر است. شیب مماس در A و B منفی است و در A منفی‌تر است. پس:



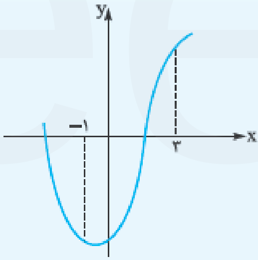
$$m_A < m_B < m_C < m_D$$

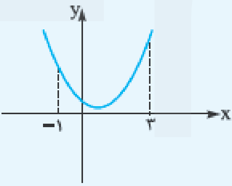
می‌توانیم شیب مماس بر منحنی در نقطهٔ $x=a$ را به صورت‌های زیر تعریف کنیم:

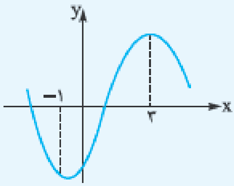
$$x=a \text{ شیب مماس بر منحنی در}: f'(a) = \lim_{h \to ۰} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

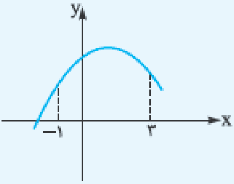
$f'(a)$ را مقدار مشتق تابع f در $x=a$ می‌نامیم.

اگر $\lim_{h \to ۰} \frac{f(۳+h)-f(۳)}{h} = ۱$ و $\lim_{x \to -۱} \frac{f(x)-۲}{x+۱} = -۲$. کدام شکل برای f مناسب است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


گزینهٔ «۳» از $\lim_{h \to ۰} \frac{f(۳+h)-f(۳)}{h} = ۱$ می‌فهمیم که شیب مماس در نمودار f در $x=۳$ برابر ۱ است. اما در ۳ شیب مماس در $x=۳$ صفر است و در ۴ شیب مماس در $x=۳$ منفی است، پس این‌ها نیستند. از $\lim_{x \to -۱} \frac{f(x)-۲}{x+۱} = -۲$ هم می‌فهمیم که $f(-۱)=۲$ و شیب مماس بر f در $x=-۱$ برابر -۲ است؛ اما در ۱، مقدار $f(-۱)$ منفی است! پس جواب می‌شود ۲.

از $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2+h)+8}{3h}=-\frac{1}{6}$ نتیجه می‌شود که .... و شیب قائم بر نمودار f در $x=2$ برابر .... است.

۱) $6, f(2)=8$ ۲) $6, f(2)=-8$ ۳) $-2, f(2)=-8$ ۴) $2, f(2)=-8$

گزینهٔ «۴» حد را با تعریف مقایسه کنید: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}, \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2+h)+8}{3h}$

پس $f(2)=-8$ و شیب مماس ۳ برابر حد داده‌شده است: $f'(2)=3\times(-\frac{1}{6})=-\frac{1}{2}$

بنابراین شیب مماس در $x=2$ برابر $-\frac{1}{2}$ و در نتیجه شیب قائم $+2$ است.

شیب مماس و قائم، عکس و قرینهٔ هم هستند.

اگر قیافهٔ حد به شکلی که دیدیم نبود، خودمان باید آن را شبیه تعریف مشتق کنیم. در مورد حدهای hدار، می‌توانیم این فرمول را حفظ کنیم که:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+mh)-f(a+nh)}{kh}=\frac{m-n}{k}f'(a)$$

مثلاً: $$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+3h)-f(2-h)}{5h}\xrightarrow[k=5]{m=3\,,\,n=-1}=\frac{3-(-1)}{5}f'(2)=\frac{4}{5}f'(2)$$

حاصل $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x^2-4}$ چند برابر $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2-h)-f(2+3h)}{h^2-6h}$ است؟

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{3}{8}$ ۴) $\frac{1}{12}$

گزینهٔ «۳» باید $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x^2-4}$ را به $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ شبیه کنیم. پس در مخرج، مزدوج می‌زنیم و داریم:

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2}=f'(2)\times\frac{1}{4}$$

یه‌جوردیگه می‌توانستیم از قاعدهٔ هوپیتال هم برویم!

برای دومی از فرمول $\frac{m-n}{k}$ داریم:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2-h)-f(2+3h)}{h(h-6)}=\frac{-1-3}{-6}f'(2)=\frac{-4}{-6}f'(2)=\frac{2}{3}f'(2)$$

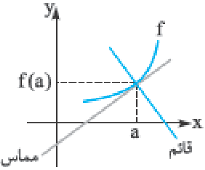
پس نسبت دو حد می‌شود: $$\frac{\frac{1}{4}f'(2)}{\frac{2}{3}f'(2)}=\frac{3}{8}$$

اشاره در مورد مخرج دومی، می‌توانیم از جملهٔ کم‌توان هم استفاده کنیم.

نوشتن معادلهٔ خط مماس و قائم

برای نوشتن معادلهٔ خط مماس به نقطه و شیب آن احتیاج داریم. مختصات نقطه $A(a,f(a))$ و شیب مماس برابر $f'(a)$ است، پس معادلهٔ مماس به صورت زیر است:

$$y-y_۰=m(x-x_۰) \Rightarrow y-f(a)=f'(a)(x-a)$$



در مورد معادلهٔ خط قائم، باید شیب را عکس و قرینه کرد:

$$y-f(a)=\frac{-۱}{f'(a)}(x-a)$$

چندتا معادلهٔ مماس و قائم ببینید:

۱ $A(۲,۳)$

$m=f'(۲)=۴$

مماس: $y-۳=۴(x-۲)$

قائم: $y-۳=-\frac{۱}{۴}(x-۲)$

۲ $f(۱)=۳$

$f'(۱)=\frac{۲}{۳}$

مماس: $y-۳=\frac{۲}{۳}(x-۱)$

قائم: $y-۳=-\frac{۳}{۲}(x-۱)$

۳ $\lim\limits_{x\to -۲}\frac{f(x)+۴}{x+۲}=-۲$

از حد نتیجه می‌گیریم که

$f(-۲)=-۴, f'(-۲)=-۲$

پس:

مماس: $y+۴=-۲(x+۲)$

قائم: $y+۴=+\frac{۱}{۲}(x+۲)$

؟ **عرض از مبدأ خط مماس بر منحنی $y=x^۲+x$ در نقطه با طول ۱ کدام است؟**

۱) ۱   ۲) -۱ ۳) ۲   ۴) -۲

= **گزینهٔ «۲»** در $x=۱$ عرض نقطه $y=۱^۲+۱=۲$ است. شیب مماس را از دو راه پیدا می‌کنیم:

$$f'(۱)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۱+h)-f(۱)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{(۱+h)^۲+(۱+h)-۲}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{۱+h^۲+۲h+۱+h-۲}{h}=\lim_{h\to ۰}(h+۳)=۳$$

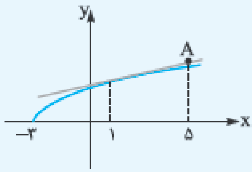
$$f'(۱)=\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{x^۲+x-۲}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}(x+۲)=۳$$

پس داریم:

$$\xrightarrow[m=۳]{A(۱,۲)} y-۲=۳(x-۱) \Rightarrow y=۳x-۱$$

و عرض از مبدأ مماس می‌شود -۱.

؟ **در نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x+۳}$ خط مماس در $x=۱$ رسم شده است. عرض نقطهٔ A کدام است؟**



۱) ۵   ۲) ۲

۳) ۳   ۴) ۴

«۳» گزینهٔ عرض نقطهٔ به طول ۱ برابر است با:

$$f(۱) = \sqrt{۱+۳} = ۲$$

شیب مماس هم برابر است با:

$$f'(۱) = \lim_{x\to ۱} \frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}$$

$$= \lim_{x\to ۱} \frac{\sqrt{x+۳}-۲}{x-۱} = \lim_{x\to ۱} \frac{\frac{x+۳-۴}{\sqrt{x+۳}+۲}}{x-۱} = \lim_{x\to ۱} \frac{۱}{\sqrt{x+۳}+۲} = \frac{۱}{۴}$$

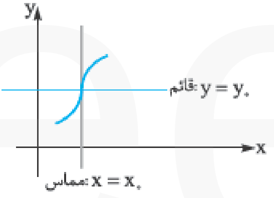
پس داریم: $y - ۲ = \frac{۱}{۴}(x-۱)$:معادلهٔ مماس

و عرض نقطهٔ A با طول ۵ (روی خط مماس) برابر است با:

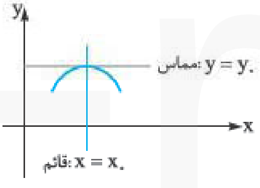
$$\xrightarrow{x=۵} y-۲ = \frac{۱}{۴}(۵-۱) \Rightarrow y = ۳$$

اشاره اگر شیب مماس صفر شود، معادلهٔ مماس به صورت $y = f(a)$ و معادلهٔ قائم به صورت $x = a$ است. اگر شیب مماس $\pm\infty$ شود، مماس $x = a$ و قائم $y = f(a)$ است. ببینید:

وقتی مشتق بی‌نهایت است.



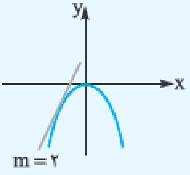
وقتی مشتق صفر است.



؟ **چند خط با شیب ۲ بر سهمی $y = -x^۲$ مماس می‌شوند؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) بی‌شمار

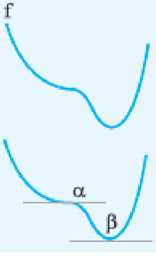
«۱» گزینهٔ شکل را ببینید:



خطی با شیب ۲ فقط در یک نقطه بر سهمی مماس می‌شود.

اشاره کلاً با هر شیب، فقط یک مماس بر سهمی داریم!

؟ **در تابع f به شکل روبه‌رو، چند خط مماس افقی داریم؟**



۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) هیچ

«۲» گزینهٔ مماس در نقاط α و β افقی است.

محاسبهٔ مشتق برخی توابع

به جای استفاده از فرمول‌های $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ و $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ می‌توانیم از فرمول‌ها و قواعد مشتق‌گیری استفاده کنیم.

تابع	$f(x)=c$	$f(x)=x$	$f(x)=\frac{۱}{x}$	$f(x)=x^n$
مشتق	$f'(x)=۰$	$f'(x)=۱$	$f'(x)=-\frac{۱}{x^۲}$	$f'(x)=nx^{n-۱}$
تابع	$\sqrt{x}$	$\sqrt{ax+b}$	$\sqrt[۳]{x}$	
مشتق	$\frac{۱}{۲\sqrt{x}}$	$\frac{a}{۲\sqrt{ax+b}}$	$\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}$	

برای اعمال جبری هم می‌توانیم کاری کنیم!

ضریب را کنار می‌گذاریم و از بقیه مشتق می‌گیریم: $y=af(x) \Rightarrow y'=af'(x)$

در جمع و تفریق از تک‌تک توابع مشتق می‌گیریم: $y=f(x)\pm g(x) \Rightarrow y'=f'(x)\pm g'(x)$

در ضرب، هر بار فقط از یک تابع مشتق می‌گیریم:

$$y=f(x)g(x) \Rightarrow y'=f'(x)g(x)+g'(x)f(x)$$

و در تقسیم داریم:

$$y=\frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow y'=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{(g(x))^۲}$$

این‌طوری می‌گویند: مشتق صورت × خود مخرج، منهای مشتق مخرج × خود صورت، تقسیم بر مربع مخرج.

? اگر $f(۲)=۵$، $f'(۲)=-۳$ و $g(x)=\frac{x^۲}{۲}-x+۱$، آن‌گاه مقدار مشتق تابع $y=\frac{۲g(x)}{f(x)}-f(x)g(x)$ در $x=۲$ کدام است؟

۱) $-۲/۶۴$ ۲) $-۱/۹۲$ ۳) $-۱/۶۴$ ۴) $-۱/۳۶$

= گزینهٔ «۴»

$$y=\frac{۲g(x)}{f(x)}-f(x)g(x)$$

$$\Rightarrow y'=۲\frac{g'(x)f(x)-f'(x)g(x)}{f^۲(x)}-(f'(x)g(x)+g'(x)f(x))$$

پس در $x=۲$ داریم: $y'(۲)=۲\frac{g'(۲)f(۲)-f'(۲)g(۲)}{(f(۲))^۲}-(f'(۲)g(۲)+g'(۲)f(۲))$

حالا سؤال گفته $f(۲)=۵$ و $f'(۲)=-۳$، مقدار و مشتق g را هم به دست می‌آوریم:

$$g(x)=\frac{x^۲}{۲}-x+۱ \Rightarrow g'(x)=\frac{۱}{۲}(۲x)-۱ \Rightarrow g(۲)=\frac{۴}{۲}-۲+۱=۱\,,\ g'(۲)=۲-۱=۱$$

جواب می‌شود:

$$۲\frac{(۱)(۵)-(-۳)(۱)}{۵^۲}-(-۳(۱)+(۱)(۵))$$

$$=۲\times\frac{۸}{۲۵}-۲=\frac{۱۶}{۲۵}-۲=\frac{۱۶-۵۰}{۲۵}=-\frac{۳۴}{۲۵}\xrightarrow[\times ۴]{\times ۴}=-۱/۳۶$$

اگر $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}+۱}{\sqrt[۳]{x}+۲}$. مقدار $f'(۶۴)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲۱۶}$ ۲) $\frac{۱}{۱۹۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲۸۸}$ ۴) $\frac{۱}{۱۴۴}$

گزینهٔ «۲» از مشتق تقسیم استفاده کنیم:

$$f'(x)=\frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(\sqrt[۳]{x}+۲)-\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}(\sqrt{x}+۱)}{(\sqrt[۳]{x}+۲)^۲}$$

$$\xrightarrow[\sqrt{x}=۸,\ \sqrt[۳]{x}=۴]{x=۶۴} f'(۶۴)=\frac{\frac{۱}{۲\times ۸}(۴+۲)-\frac{۱}{۳(۴)^۲}(۸+۱)}{(۴+۲)^۲}$$

$$=\frac{\frac{۶}{۱۶}-\frac{۹}{۴۸}}{۳۶}=\frac{\frac{۳}{۱۶}}{۳۶}=\frac{۳}{۳۶\times ۱۶}=\frac{۱}{۱۲\times ۱۶}=\frac{۱}{۱۹۲}$$

اشاره پس شیب خط مماس بر f در این نقطه $\frac{۱}{۱۹۲}$ و شیب خط قائم -۱۹۲ است.

مشتق تابع مرکب

مشتق تابع $fog(x)$ یا $f(g(x))$ به صورت مقابل است: $y=f(g(x)) \Rightarrow y'=\underbrace{g'(x)}_{\text{مشتق تابع درونی}}\underbrace{f'(g(x))}_{\text{مشتق تابع بیرونی}}$

برای ساده‌تر شدن، اگر به جای $g(x)$، u قرار بدهیم داریم: $y=f(u) \Rightarrow y'=u'f'(u)$

این فرمول را برای تمام روابط قبلی استفاده می‌کنیم:

تابع	u^n	$\sqrt{u}$	$\sqrt[۳]{u}$
مشتق	$nu'u^{n-۱}$	$\frac{u'}{۲\sqrt{u}}$	$\frac{u'}{۳\sqrt[۳]{u^۲}}$

مشتق تابع $f(x)=(\frac{x-۴}{۲x-۱})^{\frac{۳}{۲}}$ در $x=۰$ کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۴۲ ۳) ۲۱ ۴) ۱۰/۵

گزینهٔ «۳» تابع از نوع u^n است پس مشتق آن می‌شود:

$$y'=nu'u^{n-۱}= \text{توان} \times \text{مشتق پایه} \times \text{پایه با یک توان کم‌تر}$$

$$=\frac{۳}{۲}\times(\frac{x-۴}{۲x-۱})'\times(\frac{x-۴}{۲x-۱})^{\frac{۳}{۲}-۱}$$

برای محاسبهٔ مشتق پایه هم از الگوی کسری می‌رویم:

$$(\frac{x-۴}{۲x-۱})'=\frac{۱(۲x-۱)-۲(x-۴)}{(۲x-۱)^۲}=\frac{۷}{(۲x-۱)^۲}$$

در $x=۰$ داریم:

$$y'(۰)=\frac{۳}{۲}\times\frac{۷}{(۲\times۰-۱)^۲}\times(\frac{-۴}{-۱})^{\frac{۱}{۲}}=\frac{۳}{۲}\times\frac{۷}{۱}\times۲=۲۱$$

اشاره بعضی‌ها به خاطر می‌سپارند که مشتق تابع هموگرافیک این‌جوری حساب می‌شود:

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}\Rightarrow y'=\frac{ad-bc}{(cx+d)^۲}$$

و برحسب u:

$$y=\frac{au+b}{cu+d}\Rightarrow y'=\frac{ad-bc}{(cu+d)^۲}u'$$

اگر $y=g(f(x))+g(x^۲-۱), g'(۳)=\frac{۳}{۲}$ و بدانیم که $\lim_{x\to۲}\frac{f(x)-۳}{x-۲}=-۲$، مقدار $y'(۲)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

گزینهٔ «۳» y از دو قسمت ساخته شده که هر دو تابع مرکب هستند. طبق فرمول داریم:

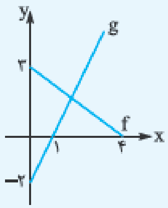
$$y'=f'(x)g'(f(x))+۲xg'(x^۲-۱)$$

$$\xrightarrow{x=۲} y'(۲)=f'(۲)g'(f(۲))+۴g'(۳)$$

حدی که در صورت سؤال آمده به ما می‌گوید $f(۲)=۳$ و $f'(۲)=-۲$، پس داریم:

$$y'(۲)=-۲g'(۳)+۴g'(۳)=۲g'(۳)=۲\times\frac{۳}{۲}=۳$$

نمودار تابع‌های خطی f و g را در شکل می‌بینید:



مقدار $(\frac{۲f}{g})'(۲)$ کدام است؟

۱) $-۱/۷۵$ ۲) $-۲/۲۵$

۳) $-۲/۷۵$ ۴) $-۳/۲۵$

گزینهٔ «۲» ضابطهٔ f و g را بلدیم!

$$f(x)=-\frac{۳}{۴}x+۳$$

$$g(x)=۲x-۲$$

پس:

$$\frac{۲f}{g}=\frac{۲(-\frac{۳}{۴}x+۳)}{۲x-۲}=-\frac{۳}{۴}\frac{(x-۴)}{x-۱}$$

و مشتق آن می‌شود:

$$y=-\frac{۳}{۴}\frac{x-۴}{x-۱}\Rightarrow y'=-\frac{۳}{۴}\frac{(-۱+۴)}{(x-۱)^۲}$$

در $x=۲$ داریم:

$$y'(۲)=-\frac{۳}{۴}\frac{۳}{(۲-۱)^۲}=-\frac{۹}{۴}=-۲/۲۵$$

؟ **شیب قائم بر منحنی نمودار تابع $f(x)=\sqrt{۳-\sqrt[۳]{x+۲}}$ در نقطه با طول ۳− کدام است؟**

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۲۴ ۴) ۱۸

گزینهٔ «۲» تابع به شکل $\sqrt{u}$ است پس مشتق آن می‌شود:

$$f'(u)=\frac{u'}{۲\sqrt{u}}=\frac{\text{مشتق زیر رادیکال}}{\text{دو برابر رادیکال}}=\frac{(۳-\sqrt[۳]{x+۲})'}{۲\sqrt{۳-\sqrt[۳]{x+۲}}}=\frac{۰-\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{(x+۲)^۲}}}{۲\sqrt{۳-\sqrt[۳]{x+۲}}}$$

و در $x=-۳$ داریم:

$$y'=\frac{-\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{(-۱)^۲}}}{۲\sqrt{۳-\sqrt[۳]{-۱}}}=\frac{-\frac{۱}{۳}}{۲\sqrt{۴}}=-\frac{۱}{۱۲}$$

پس شیب خط قائم برابر است با:

$$-\frac{۱}{m}=۱۲$$

چند نکته در محاسبهٔ مشتق توابع

بعضی اوقات مشتق‌گرفتن از تابع‌ها سخت و وقت‌گیر است. این‌ها را امتحان کنید.

۱ تابع را قبل از مشتق‌گیری ساده کنید. استفاده از اتحادها، تجزیه، توان‌های کسری و ... مفید است. ببینید:

$$y=\frac{x^۳-x\sqrt{x}}{x^۲+x\sqrt{x}+x}\Rightarrow y'(\frac{۱}{۴})=?$$

الان که سخت است! بیایید تابع را ساده‌تر کنیم:

$$y=\frac{x^۳-(\sqrt{x})^۳}{x^۲+x\sqrt{x}+(\sqrt{x})^۲}=x-\sqrt{x}$$

$\frac{a^۳-b^۳}{a^۲+ab+b^۲}$ یادتان هست؟ می‌شد $a-b$.

$$\Rightarrow y'=۱-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\Rightarrow y'(\frac{۱}{۴})=۱-\frac{۱}{۲\sqrt{\frac{۱}{۴}}}=۱-\frac{۱}{\frac{۲}{۲}}=۱-۱=۰$$

؟ مشتق تابع $f(x)=\frac{\sqrt{x\sqrt[۳]{x\sqrt{x}}}}{x}$ در $x=۱$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۴}$ ۲) $-\frac{۵}{۴}$ ۳) $-\frac{۱}{۶}$ ۴) $-\frac{۷}{۶}$

گزینهٔ «۱» اول تابع را با توان منفی و کسری ساده کنیم:

$$f(x)=\frac{(x(xx^{\frac{۱}{۲}})^{\frac{۱}{۳}})^{\frac{۱}{۲}}}{x}$$

$$=\frac{(x(x^{\frac{۳}{۲}})^{\frac{۱}{۳}})^{\frac{۱}{۲}}}{x}=\frac{(x^{۱+\frac{۱}{۲}})^{\frac{۱}{۲}}}{x}=x^{\frac{۳}{۲}\times\frac{۱}{۲}-۱}=x^{-\frac{۱}{۴}}$$

پس مشتق آن در $x=۱$ می‌شود:

$$y'=-\frac{۱}{۴}x^{-\frac{۱}{۴}-۱}\xrightarrow{x=۱}y'(۱)=-\frac{۱}{۴}$$

۲ قبل از مشتق‌گیری باید قدرمطلق و براکت را بردارید.

مثلاً برای محاسبهٔ مشتق $f(x)=x|x-۱|\left[\frac{x}{۲}\right]$ در $x=-۳$، اول باید به جای $|x-۱|$ بنویسیم $-(x-۱)$ و به جای $[\frac{x}{۲}]$ هم -۲ قرار دهیم، بعد مشتق:

$$f(x)=x(-(x-۱))(-۲)=۲x(x-۱)=۲(x^۲-x)$$

پس:

$$f'(x)=۲(۲x-۱)$$

و به ازای $x=-۳$ مشتق می‌شود:

$$f'(-۳)=۲(-۶-۱)=-۱۴$$

؟ اگر $f(x)=[x]\sqrt{-۲x+|x-۱|}$ مقدار مشتق راست f در $x=-۵$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱۵}{۱۶}$ ۲) $-\frac{۱۵}{۸}$ ۳) $\frac{۱۵}{۱۶}$ ۴) $\frac{۱۵}{۸}$

گزینهٔ «۴» در سمت راست -۵، داخل قدرمطلق منفی و حاصل براکت -۵ است، پس:

$$f(x)=-۵\sqrt{-۲x+(-(x-۱))}=-۵\sqrt{-۳x+۱}$$

$$f'(x)=-۵\frac{-۳}{۲\sqrt{-۳x+۱}}\xrightarrow{x=-۵}f'_+(-۵)=\frac{۱۵}{۲\times۴}=\frac{۱۵}{۸}$$

۳ در ضرب عوامل مختلف، فقط می‌توانیم از عامل صفرشونده مشتق بگیریم و بقیه را دست‌نخورده بنویسیم.

مثلاً می‌خواهیم مشتق $\frac{x(x-۱)(x-۲)(x-۳)}{(x-۴)}$ را در $x=۱$ به دست آوریم. در $x=۱$ عامل $x-۱$ صفرشونده است، از آن مشتق می‌گیریم و به بقیه دست نمی‌زنیم:

$$f'(۱)=\frac{x\,\overset{\text{مشتق}=۱}{\cancel{(x-۱)}}(x-۲)(x-۳)}{x-۴}=\frac{۱(۱)(۱-۲)(۱-۳)}{۱-۴}=\frac{۲}{-۳}$$

Free

اشاره دقت کنید که بقیه ممکن است تابع‌های ناشناخته باشند!

؟ اگر $f(x)=\dfrac{x(\sqrt{x}-۲)\cos(\pi x)h(\sqrt{x})}{(x-۱)^{x-۲}h(\frac{x}{۲})}$، مقدار $f'(۴)$ کدام است؟ $h(x)\neq ۰$

۱) $\dfrac{۲}{۹}$ ۲) $\dfrac{۱}{۹}$ ۳) $\dfrac{۱}{۱۸}$ ۴) $\dfrac{۱}{۶}$

گزینهٔ «۲» نترسید! در $x=۴$ عامل $\sqrt{x}-۲$ می‌شود صفر، پس فقط از آن مشتق می‌گیریم:

$$f'(۴)=\dfrac{x(\frac{۱}{۲\sqrt{x}})\cos(\pi x)h(\sqrt{x})}{(x-۱)^{x-۲}h(\frac{x}{۲})}\xrightarrow{x=۴}f'(۴)=\dfrac{۴\frac{۱}{۲\times ۲}\cos(۴\pi)h(۲)}{۳^{۲}h(۲)}=\dfrac{۱}{۹}$$

۴ قیافهٔ فرمول‌های مشتق ضرب، تقسیم و ترکیب یادتان باشد.

الف به جای حساب‌کردن $f'g+g'f$، اول $f\times g$ را حساب کنید و بعد از آن مشتق بگیرید.

ب به جای محاسبهٔ $f'g-g'f$، اول $\dfrac{f}{g}$ را به دست آورید و ساده کنید، بعد مشتق بگیرید و این چیزی که می‌خواهد صورت فرمول مشتق $\dfrac{f}{g}$ است.

پ اگر سؤال $۲ff'$ را خواست به مشتق $f^{۲}$ فکر کنید.

ت برای محاسبهٔ $f'(x)g'(f(x))$ کار عاقلانه این است که به مشتق gof نگاه کنید.

؟ اگر $f(x)=\dfrac{۲x}{\sqrt{۱-x^{۲}}}$ و $g(x)=\dfrac{x}{\sqrt{۱+x^{۲}}}$، مقدار $g'(۳)f'(g(۳))$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۶

گزینهٔ «۱» خب این مشتق fog بود! اول fog را بسازیم:

$$y=fog(x)=f(g(x))=\dfrac{۲g(x)}{\sqrt{۱-g^{۲}(x)}}=\dfrac{۲\frac{x}{\sqrt{۱+x^{۲}}}}{\sqrt{۱-(\frac{x}{\sqrt{۱+x^{۲}}})^{۲}}}$$

$$=\dfrac{\frac{۲x}{\sqrt{۱+x^{۲}}}}{\sqrt{۱-\frac{x^{۲}}{۱+x^{۲}}}}=\dfrac{\frac{۲x}{\sqrt{۱+x^{۲}}}}{\sqrt{\frac{۱}{۱+x^{۲}}}}=۲x$$

پس $y'=۲$ و داریم: $g'(۳)f'(g(۳))=۲$

اشاره مشتق دوم تابع f یعنی مشتق f' را با f'' (بخوانید اِف زگوند) نشان می‌دهیم.

؟ اگر $f(x)=x^{۳}-x^{۲}-۱$ و $g(x)=x^{۲}(x-۱)+۲$. حاصل $f'(۱)g(۱)-g'(۱)f(۱)$ چند برابر مجذور $g(۱)$ است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

گزینهٔ «۲» سؤال از ما چه خواسته؟ $\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{(g(x))^{۲}}$

خب این مشتق $\frac{f}{g}$ است: $\frac{f}{g}(x)=\frac{x^{۳}-x^{۲}-۱}{x^{۳}-x^{۲}+۲}=\frac{۱(x^{۳}-x^{۲})-۱}{۱(x^{۳}-x^{۲})+۲}$

فرض می‌کنیم $x^{۳}-x^{۲}=u$ و از مشتق تابع هموگرافیک می‌رویم:

$$y'=\frac{۱\times۲-۱\times(-۱)}{(x^{۳}-x^{۲}+۲)^{۲}}\underbrace{(۳x^{۲}-۲x)}_{u'}$$

در $x=۱$ داریم: $y'=\frac{۳}{(۱-۱+۲)^{۲}}(۳-۲)=\frac{۳}{۴}$

مشتق‌پذیری

گفتیم مشتق، شیب خط مماس است. حالا اگر تابع در نقطه‌ای مماس نداشته باشد یا شیب مماس تعریف نشود، مشتق‌پذیر نیست.

به زبان ریاضی، مشتق یک حد است و حد زمانی وجود دارد که حدهای چپ و راست موجود و متناهی و با هم برابر باشند.

$$\text{مشتق راست}=f'_{+}(a)=\lim_{h\to ۰^{+}}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a^{+}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$\text{مشتق چپ}=f'_{-}(a)=\lim_{h\to ۰^{-}}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a^{-}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

سه دسته تابع مشتق‌ناپذیر داریم:

دستهٔ اول: تابع f پیوسته نیست پس مشتق ندارد.

این اتفاق در تابع‌های قطعه‌ای (در مرز دامنه) و در توابع جزءصحیح رخ می‌دهد.

؟ چندتا از توابع زیر در $x=۲$ مشتق‌پذیر نیستند؟

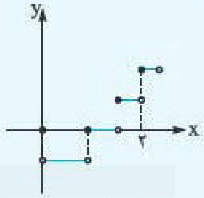
$$\begin{cases}\frac{x^{۲}-۴}{x-۲} & x\neq ۲\\ ۳ & x=۲\end{cases},\ \begin{cases}۲x+۱ & x>۲\\ x+۱ & x\leq ۲\end{cases},\ [x^{۲}-x],\ [\frac{۱}{x}],\ [\sqrt{x}],\ [x]$$

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۳

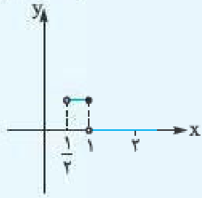
گزینهٔ «۱» در تابع‌های $[x]$ و $[x^۲-x]$ در نقطهٔ $x=۲$ درون براکت صحیح می‌شود پس تابع پیوسته نیست و مشتق هم ندارد.

در تابع $f(x)=\begin{cases}۲x+۱ & x>۲\\ x+۱ & x\leq ۲\end{cases}$ حدهای چپ و راست در $x=۲$ برابر نیستند پس پیوسته نیست و مشتق ندارد. در $\begin{cases}\dfrac{x^۲-۴}{x-۲} & x\neq ۲\\ ۳ & x=۲\end{cases}$ حد تابع در $x=۲$ از ضابطهٔ بالا برابر ۴ است اما مقدار تابع ۳ شده پس این هم پیوسته نیست و مشتق ندارد.

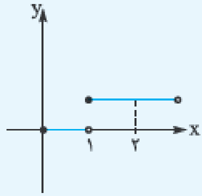
پس ۴ تا از تابع‌ها در $x=۲$ مشتق نداشتند. شکل‌ها را هم ببینید:



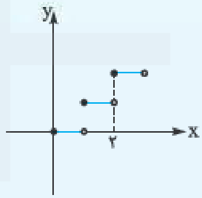
$y=[x^۲-x]$



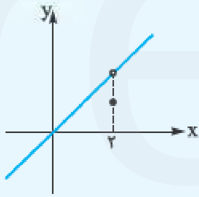
$y=[\frac{۱}{x}]$



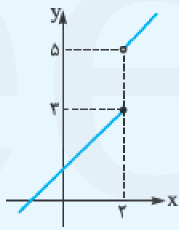
$y=[\sqrt{x}]$



$y=[x]$



$y=\begin{cases}\dfrac{x^۲-۴}{x-۲} & x\neq ۲\\ ۳ & x=۲\end{cases}$



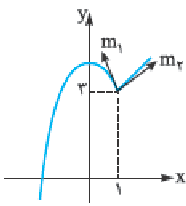
$y=\begin{cases}۲x+۱ & x>۲\\ x+۱ & x\leq ۲\end{cases}$

دستهٔ دوم: تابع f در $x=a$ پیوسته است اما مشتق چپ و راست با هم مساوی نیستند. این در تابع‌های چندضابطه‌ای (در مرز دامنه) و نیز در قدرمطلق‌ها رخ می‌دهد. نمودار تابع دوتا نیم‌مماس دارد (یکی از چپ و یکی از راست) که شیب آن‌ها برابر نیست. ببینید:

$$f(x)=\begin{cases}۴-x^۲ & x<۱\\ x+۲ & x\geq ۱\end{cases}$$

$$m_۱=f'_-(۱)\xrightarrow{\text{از ضابطهٔ بالا}}=-۲$$

$$m_۲=f'_+(۱)\xrightarrow{\text{از ضابطهٔ پایین}}=۱$$

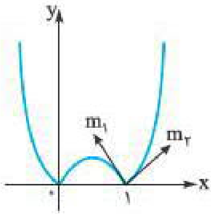


اشاره این نقطه را «گوشه‌ای» می‌نامیم.

$f(x)=|x^۲-x|$

$m_۱=$ شیب نیم‌مماس چپ $=f'_-(۱)=-۱$

$m_۲=$ شیب نیم‌مماس راست $=f'_+(۱)=۱$



در توابع قدرمطلقی، هر جا که داخل قدرمطلق صفر شود و ریشه ساده باشد (مضاعف نباشد) مشتق چپ و راست دو عدد قرینهٔ هم به دست می‌آیند و تابع مشتق‌پذیر نیست. مثلاً $|x-۲|$، $|x^۳-۸|$، $|\sin\pi x|$ و $|x^۳-۲x^۲|$ در $x=۲$ مشتق‌پذیر نیستند و گوشه دارند اما $|x^۲(x-۲)|$ در $x=۰$ مشتق‌پذیر است، چون $x=۰$ ریشهٔ ساده نیست!

اشاره معمولاً در تست، تابع‌های چندضابطه‌ای داریم که در نقطهٔ مرز دامنه، باید شرط مشتق‌پذیری را کنترل کنیم.

در تابع $f(x)=\begin{cases}f_۱(x) & x\geq a\\ f_۲(x) & x<a\end{cases}$ باید اولاً $f_۱(a)=f_۲(a)$ باشد و سپس $f'_۱(a)=f'_۲(a)$ باشد.

اگر $f(x)=\begin{cases}a\sqrt{x}+۲ & x\geq ۴\\ bx+۱ & x<۴\end{cases}$ **مشتق‌پذیر باشد، $a-b$ کدام است؟**

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $-\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۵}{۴}$ ۴) $\frac{۷}{۴}$

گزینهٔ «۲» سراغ نقطهٔ $x=۴$ می‌رویم. اولاً:

$$a\sqrt{۴}+۲=b(۴)+۱ \Rightarrow ۲a-۴b=-۱$$

و ثانیاً مشتق‌ها باید مساوی باشند:

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{a}{۲\sqrt{x}} & x>۴\\ b & x<۴\end{cases}$$

$$f'_-(۴)=b\ ,\ f'_+(۴)=\frac{a}{۲\sqrt{۴}}=\frac{a}{۴} \Rightarrow \frac{a}{۴}=b \text{ یا } a=۴b$$

بنابراین:

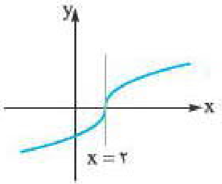
$$\begin{cases}۲a-۴b=-۱\\ a=۴b\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix}a=-۱\\ b=\frac{-۱}{۴}\end{matrix}$$

و در نتیجه:

$$a-b=-۱+\frac{۱}{۴}=\frac{-۳}{۴}$$

دستهٔ سوم: در تابع‌های رادیکالی هر جا زیر رادیکال صفر شود خط مماس عمودی داریم یعنی خط مماس موازی محور yها است، و معادلهٔ آن $x=a$ خواهد بود.

تابع در این حالت مشتق‌پذیر نیست.



$$y=\sqrt[۳]{x-۲}$$

? **تابع $f(x)=\sqrt[۳]{x^۳-x^۲}$ در چند نقطه مشتق‌پذیر نیست؟**

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

= گزینهٔ «۳» قرار شد هر جا زیر رادیکال صفر شود بگوییم مماس عمودی است و مشتق نداریم.

$$x^۳-x^۲=x^۲(x-۱)=۰ \Rightarrow x=۰,۱$$

یعنی در ۲ نقطه مشتق نداریم.

? **اگر $f(x)=\sqrt[۳]{x^۲+ax+b}$ در $\mathbb{R}-\{-۲,۱\}$ مشتق‌پذیر باشد. $f(-۱)$ کدام است؟**

۱) $\sqrt[۳]{۲}$ ۲) $-\sqrt[۳]{۲}$ ۳) ۱ ۴) -۱

= گزینهٔ «۲» حتماً زیر رادیکال در ۲− و ۱ صفر است پس:

$$x^۲+ax+b=۰$$

$$S=\frac{-a}{۱}=-۲+۱=-۱ \Rightarrow a=۱ \quad , \quad P=\frac{b}{۱}=-۲\times ۱=-۲ \Rightarrow b=-۲$$

پس $f(-۱)$ برابر است با:

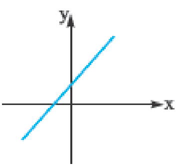
$$f(-۱)=\sqrt[۳]{(-۱)^۲+a(-۱)+b}=\sqrt[۳]{۱-۱-۲}=-\sqrt[۳]{۲}$$

اشاره شرط‌های مشتق‌پذیری در یک بازه دقیقاً مثل پیوستگی هستند. یعنی برای مشتق‌پذیری در (a,b) باید f در هر نقطه از بازه مشتق‌پذیر باشد. برای مشتق‌پذیری در $[a,b)$ باید علاوه بر مشتق‌پذیری در (a,b)، در a مشتق راست داشته باشد. برای مشتق‌پذیری در $[a,b]$ باید در (a,b) مشتق‌پذیر و در a مشتق راست داشته و در b مشتق چپ داشته باشد.

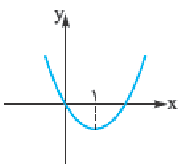
تابع مشتق

$f'(x)=\lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ را تابع مشتق f می‌نامیم. قسمتی از دامنهٔ f که تابع در آن مشتق دارد را $D_{f'}$ می‌نامیم.

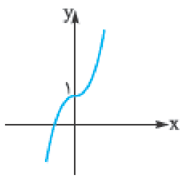
چند تابع را به همراه مشتقشان ببینید:



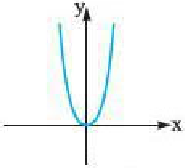
$f(x)=x+۱$



$f(x)=x^۲-۲x$

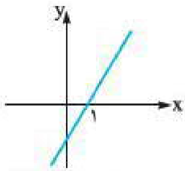


$f(x)=x^۳+۱$



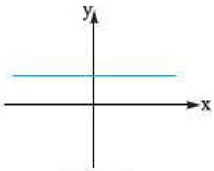
$f'(x)=3x^2$

مشتق تابع درجه‌سوم، درجه ۲ است.



$f'(x)=2x-2$

مشتق تابع درجه‌دوم، خطی است.



$f'(x)=1$

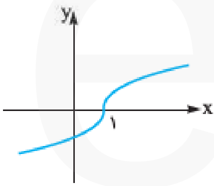
مشتق تابع خطی، تابعی ثابت است.

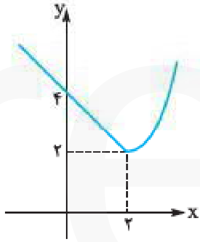
اما نکتهٔ مهم‌تر، نمودار تابع‌ها در نقاط مشتق‌ناپذیری است.

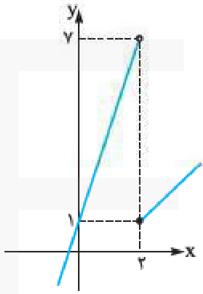
$$f(x)=\sqrt[3]{x-1}$$

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2 & x\geq 2 \\ -x+4 & x<2 \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & x\geq 2 \\ 3x+1 & x<2 \end{cases}$$



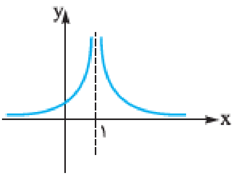




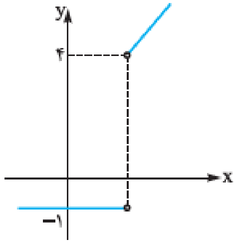
$$f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}$$

$$f'(x)=\begin{cases} 2x & x>2 \\ -1 & x<2 \end{cases}$$

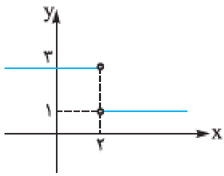
$$f'(x)=\begin{cases} 1 & x>2 \\ 3 & x<2 \end{cases}$$



وقتی خط مماس عمودی داریم، مشتق به سمت $+\infty, -\infty$ می‌رود.



وقتی f گوشه دارد، f' پیوسته نیست.

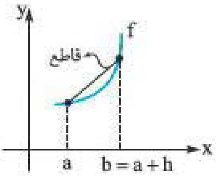


وقتی f در نقطه‌ای پیوسته نیست، در آن نقطه f' هم نداریم.

آهنگ تغییر

دو نوع آهنگ تغییر داریم: آهنگ متوسط و آهنگ لحظه‌ای

آن‌ها را مقایسه می‌کنیم:



آهنگ متوسط

در یک بازه تعریف می‌شود.

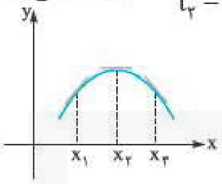
همان شیب قاطع است.

در فیزیک، سرعت متوسط نام دارد.

h را نموّ متغیر x هم می‌نامیم.

$[a,a+h]$ آهنگ متوسط در فاصلهٔ $= \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

در معادلهٔ مکان ـ زمان به شکل $d=h(t)$، سرعت متوسط به صورت $\frac{h(t_۲)-h(t_۱)}{t_۲-t_۱}$ به دست می‌آید.



آهنگ لحظه‌ای

در یک نقطه تعریف می‌شود.

همان شیب مماس است.

در فیزیک، سرعت لحظه‌ای نام دارد.

در $x_۳, x_۲, x_۱$ به ترتیب مثبت، صفر و منفی است.

$x=a$ آهنگ لحظه‌ای در: $f'(a)=\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

در معادلهٔ مکان ـ زمان به صورت $d=h(t)$، سرعت لحظه‌ای $v=h'(t)$ است.

در تابع $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x}$ آهنگ متوسط روی بازهٔ $[۱,۴]$ با آهنگ لحظه‌ای تغییر در $x=\frac{۹}{۴}$ چه‌قدر اختلاف دارد؟

۱) $\frac{۱}{۲۷}$ ۲) $\frac{۱}{۵۴}$ ۳) $\frac{۱}{۱۸}$ ۴) $\frac{۱}{۳۶}$

گزینهٔ «۲»

$[۱,۴]$ آهنگ متوسط در: $\frac{f(۴)-f(۱)}{۴-۱}=\frac{\frac{۲}{۴}-۱}{۳}=\frac{-\frac{۱}{۲}}{۳}=-\frac{۱}{۶}$

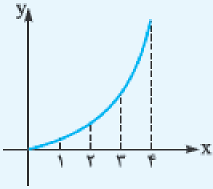
$\frac{۹}{۴}$ آهنگ لحظه‌ای در: $f'(\frac{۹}{۴})$

$$f(x)=x^{-\frac{۱}{۲}} \Rightarrow f'(x)=-\frac{۱}{۲}x^{-\frac{۳}{۲}} \Rightarrow f'(\frac{۹}{۴})=-\frac{۱}{۲}(\frac{۹}{۴})^{-\frac{۳}{۲}}$$

$$=-\frac{۱}{۲}(\frac{۳}{۲})^{۲\times -\frac{۳}{۲}}=-\frac{۱}{۲}(\frac{۳}{۲})^{-۳}=-\frac{۱}{۲}\times\frac{۸}{۲۷}=-\frac{۴}{۲۷}$$

و اختلاف این‌ها می‌شود:

$$(-\frac{۴}{۲۷})-(-\frac{۱}{۶})=\frac{-۸+۹}{۵۴}=\frac{۱}{۵۴}$$



در تابع به شکل روبه‌رو، چندتا از گزاره‌ها درست هستند؟

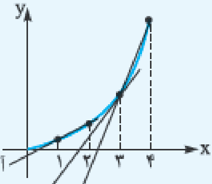
الف) آهنگ تغییر وقتی x از ۱ به ۲ تغییر کند مثبت است.

ب) آهنگ تغییر متوسط در [۳,۴] از [۱,۲] بیشتر است.

پ) آهنگ لحظه‌ای تغییر در $x=۳$ از آهنگ متوسط در [۳,۴] بیشتر است.

۱) صفر　　۲) ۱　　۳) ۲　　۴) ۳

گزینهٔ «۳» با توجه به شکل و صعودی‌بودن تابع آهنگ تغییرها همگی مثبت‌اند و داریم:



متوسط در [۳,۴] > لحظه‌ای در ۳ > متوسط در [۱,۲]

پس الف و ب درست‌اند.

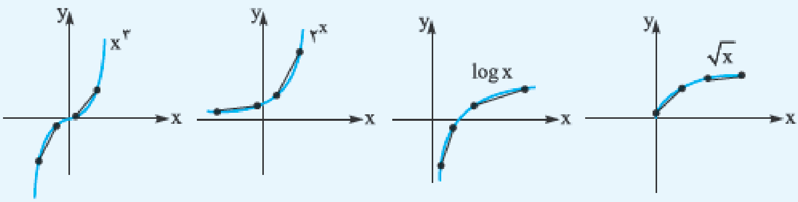
اشاره در تابع‌های درجه‌دوم، آهنگ متوسط در هر بازه با آهنگ لحظه‌ای در وسط بازه برابر است؛ یعنی:

$$f: \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} = f'(\frac{\alpha+\beta}{۲})$$ درجه‌دوم است.

در کدام تابع صعودی، آهنگ تغییر متوسط همواره صعودی است؟

۱) $\sqrt{x}$　　۲) $\log x$　　۳) ۲^x　　۴) $x^۳$

گزینهٔ «۳» نمودارها را ببینید:



آهنگ متوسط از صفر به بعد در حال کاهش است.　　آهنگ متوسط همواره نزولی است.　　آهنگ متوسط صعودی است.　　آهنگ متوسط ابتدا کم و سپس زیاد می‌شود.

اگر قانون دوست دارید، در توابع صعودی آهنگ تغییر وقتی صعودی است که گودی نمودار رو به بالا باشد. (شکل کاسه باشد نه کلاه) یعنی این‌جوری:  گودی رو به بالا است.

یک مثال هم با بیان فیزیک ببینید:

معادلهٔ حرکت متحرکی $d=f(t)=-5t^2+20t+25$ است. کدام نادرست است؟

۱) پس از ۲ ثانیه به اوج می‌رسد.

۲) در بازهٔ زمانی $[3,4]$، ۱۵ متر سقوط می‌کند.

۳) اندازهٔ سرعت جسم دو بار به ۱۰ می‌رسد.

۴) سرعت متوسط آن از لحظهٔ شروع تا برخورد به زمین برابر صفر است.

گزینهٔ «۴» سرعت لحظه‌ای از مشتق $f(t)$ به دست می‌آید:

$$v=f'(t)=-10t+20$$

۱ پس در $t=2$ به سرعت صفر (ارتفاع اوج) می‌رسد.

	۰		۲	
v		+	۰	−
		اوج (روبه بالا)		سقوط (رو به پایین)

۲ در فاصلهٔ $[3,4]$، تغییر موقعیت متحرک برابر است با:

$$f(4)-f(3)=(-5(16)+20(4)+25)-(-5\times 9+20\times 3+25)=-15$$

یعنی ۱۵ متر سقوط کرده

۳ اگر اندازهٔ سرعت ۱۰ باشد داریم:

$$|v|=10 \Rightarrow v=\pm 10$$

$$\Rightarrow -10t+20=\pm 10 \Rightarrow t=1 \text{ یا } 3$$

پس دو بار (به فاصلهٔ ۲ ثانیه از هم) اندازهٔ سرعت ۱۰ می‌شود.

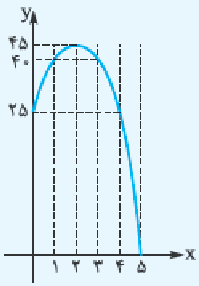
۴ برای برخورد با زمین، $d=0$ است و داریم:

$$-5t^2+20t+25=-5(t^2-4t-5)=0 \xrightarrow{t>0} t=5$$

یعنی در $t=5$ به زمین می‌رسد. سرعت متوسط برابر است با:

$$\bar{v}=\frac{f(5)-f(0)}{5-0}=\frac{0-25}{5}=-5$$

پس ۴ نادرست است، این را هم ببینید:



ارتفاع اوج برابر است با:

$$f(2)=-5(4)+20(2)+25=-20+40+25=45$$

سرعت در برخورد با زمین برابر است با:

$$v(5)=-10(5)+20=-30$$

اشاره دوباره این‌ها را به خاطر بسپاریم:

$v=0$: اوج یا توقف

$v>0$: حرکت رو به بالا (هم‌جهت محور مکان)

$v<0$: حرکت رو به پایین

$d=0$ برخورد با زمین (عبور از مبدأ مکان)

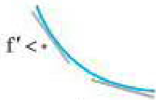
ارتباط یکنوایی تابع و مشتق

با استفاده از علامت مشتق، می‌توانیم بفهمیم که تابع صعودی است یا نزولی.

اگر در یک بازه علامت مشتق مثبت باشد، یعنی $f' > 0$، تابع در آن بازه اکیداً صعودی است.

صعودی

اگر در یک بازه علامت مشتق منفی باشد، یعنی $f' < 0$، تابع در آن بازه اکیداً نزولی است.

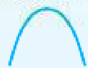


نزولی

اگر در یک بازه مشتق صفر باشد، تابع در آن بازه ثابت است.

علامت مشتق تابعی به شکل مقابل است. نمودار این تابع کدام می‌تواند باشد؟

x		-1		2	
f'	$-$	0	$+$	0	$-$

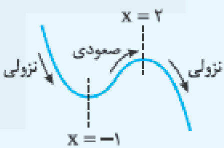
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

گزینهٔ «۴» تابع در $(-\infty, -1)$ نزولی است، سپس در $(-1, 2)$ صعودی و در $(2, +\infty)$ نزولی است؛ پس باید این شکلی باشد:



$f(x) = 2x - \sqrt{x}$ در کدام بازه نزولی است؟

۱) $[0, 4)$ ۲) $[0, \frac{1}{4})$ ۳) $[0, 16)$ ۴) $[0, \frac{1}{16})$

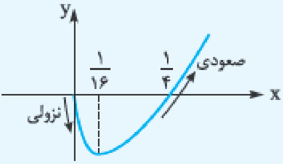
گزینهٔ «۴» باید ببینیم در کدام بازه $f'(x) < 0$ است:

$$f'(x) = 2 - \frac{1}{2\sqrt{x}} < 0$$

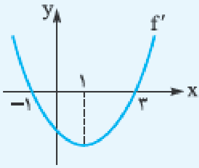
$$2 < \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow 4\sqrt{x} < 1 \Rightarrow \sqrt{x} < \frac{1}{4} \Rightarrow x < \frac{1}{16}$$

البته به خاطر دامنهٔ تابع، x منفی نیست؛ پس جواب درست $0 \le x < \frac{1}{16}$ یا $[0, \frac{1}{16})$ است.

اشاره نمودار را هم ببینید:



? شکل روبه‌رو نمودار تابع f' است. در مورد f کدام درست است؟



۱) در $(-\infty, 1)$ نزولی است.

۲) در $(-1, 3)$ نزولی است.

۳) در $(1, 3)$ صعودی است.

۴) در $(-1, 1)$ صعودی است.

= گزینهٔ «۲» سعی می‌کنیم از روی نمودار f'، جدول تعیین علامت آن را بکشیم پس در فاصلهٔ $(-1, 3)$ که f' منفی است، f نزولی می‌شود.

x		-1		3	
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
	بالای محور x		پایین محور x		بالای محور x

? در کدام بازه هر دو تابع $y = x^3 - 6x^2 + 5$ و $y = \frac{x}{x^2+4}$ صعودی‌اند؟

۱) $(0, 2)$ ۲) $(2, 4)$ ۳) $(-2, 0)$ ۴) $(-\infty, -2)$

= گزینهٔ «۳» خب باید مشتق هر دوی این‌ها مثبت باشد.

الف $y = x^3 - 6x^2 + 5 \xrightarrow{\text{مشتق}} y' = 3x^2 - 12x \xrightarrow{\text{صعودی}} 3x^2 - 12x > 0$

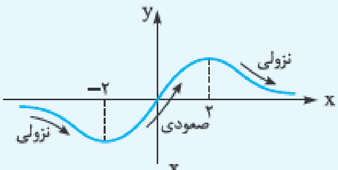
$\Rightarrow 3x(x-4) > 0 \xrightarrow{\text{خارج دو ریشه}} x < 0$ یا $x > 4$

ب $y = \frac{x}{x^2+4} \xrightarrow{\text{مشتق}} y' = \frac{1(x^2+4) - 2x(x)}{(x^2+4)^2} = \frac{4 - x^2}{(x^2+4)^2} > 0$

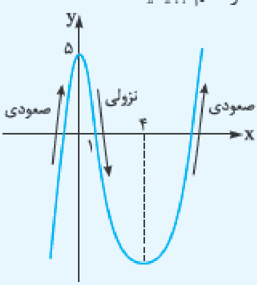
$\xrightarrow{\text{مخرج مثبت است}} 4 - x^2 > 0 \xrightarrow{\text{بین دو ریشه}} -2 < x < 2 \xrightarrow[\text{(الف)}]{\text{اشتراک با جواب}} (-2, 0)$

اشاره دقت می‌کنید که در مشتق تابع کسری، مخرج به توان ۲ می‌رسد که روی علامت y' اثری ندارد.

نمودارها را هم ببینید:

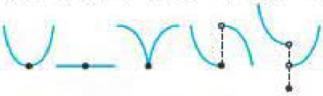
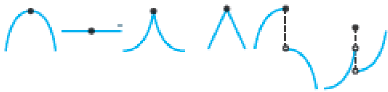


$y = \frac{x}{x^2+4}$

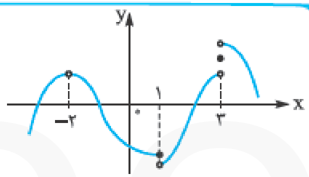
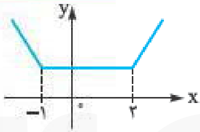
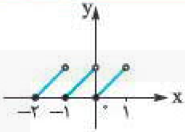


$y = x^3 - 6x^2 + 5$

اکسترمم نسبی

مینیمم نسبی	ماکزیمم نسبی
وقتی تابع در $x = c$ مینیمم نسبی دارد، در یک همسایگی c داریم $f(x) \geq f(c)$. یعنی عرض این نقطه کوچک‌تر یا مساوی عرض نقاط اطرافش است. به $f(c)$ می‌گوییم مقدار مینیمم نسبی تابع. این شکلی: 	وقتی تابع در $x = c$ ماکزیمم نسبی دارد، در یک همسایگی c، داریم $f(x) \leq f(c)$. یعنی عرض این نقطه بزرگ‌تر یا مساوی عرض نقاط اطرافش است. به $f(c)$ می‌گوییم مقدار ماکزیمم نسبی تابع. این شکلی: 

اگر نمودار تابع را بدهند یا بلد باشیم نمودار را بکشیم، با نگاه به نمودار می‌توان اکسترمم‌های نسبی (یعنی ماکزیمم و مینیمم نسبی) را پیدا کرد. چندتا ببینید:

		
در $x = -2$ که مقدار نداریم. در $x = 1$، نقطهٔ توپر از نقاط سمت چپ خودش پایین‌تر و از نقاط سمت راست خودش بالاتر است پس اکسترمم نیست. در $x = 3$ هم همین وضعیت را داریم. یعنی $f(3)$ نه مقدار ماکزیمم و نه مقدار مینیمم است. پس این تابع اکسترمم نسبی ندارد!	تمام نقاط بازهٔ $(-1, 2)$ هم ماکزیمم و هم مینیمم نسبی‌اند. خود $x = -1$ و $x = 2$ نقطهٔ مینیمم نسبی‌اند.	در $x = 1$ نقطه‌ای نداریم و تابع نامعین است. $x = 0$ و $x = -1$ مینیمم نسبی‌اند. $x = -2$ فقط همسایگی راست دارد پس اکسترمم نسبی نیست.

اگر بتوانیم مشتق تابع را بگیریم و تعیین علامت کنیم، اکسترمم‌های نسبی را می‌شود بدون رسم نمودار هم پیدا کرد.

دقت کنید که وقتی تابع در حال صعود یا در حال نزول است (مشتق آن مثبت یا منفی است) ماکزیمم یا مینیمم ندارد. پس ماکزیمم یا مینیمم کجاست؟ خب فقط جاهایی که مشتق، صفر یا تعریف‌نشده بشود امکان وجود ماکزیمم یا مینیمم هست!

به این می‌گوییم قضیهٔ **فرما**: اگر تابع در نقطه‌ای ماکزیمم یا مینیمم نسبی داشته و مشتق هم داشته باشد، حتماً مشتق در آن نقطه صفر است.

اشاره پی‌یر فرما اسم ریاضی‌دان (و وکیل) فرانسوی است.

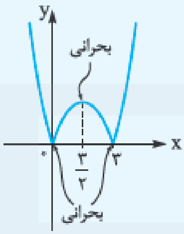
حالا به شکل‌های قبل نگاه کنید. بعضی اوقات ماکزیمم یا مینیمم داریم اما تابع اصلاً مشتق‌پذیر نیست. پس ماکزیمم یا مینیمم‌ها کجا هستند؟ هر جا مشتق صفر است و هر جا مشتق وجود ندارد. به این نقاط می‌گوییم نقطهٔ **بحرانی**. یعنی نقطهٔ بحرانی $(x = c)$، نقطه‌ای است که تابع در همسایگی آن تعریف‌شده باشد، $f'(c)$ یا مساوی صفر باشد و یا وجود نداشته باشد.

اول چندتا مثال از نقطهٔ بحرانی ببینیم:

؟ مجموع طول‌های نقاط بحرانی $f(x) = |x^۲ - ۳x|$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۴/۵ ۴) ۱/۵

= گزینهٔ «۳» گفتیم هر جا مشتق صفر است یا مشتق نداریم، نقطهٔ بحرانی ایجاد می‌شود. در این تابع به خاطر قدرمطلق، در $x = ۰$ و $x = ۳$ مشتق نداریم (توی قدرمطلق صفر می‌شود و نقطهٔ گوشه داریم).



مشتق داخل قدرمطلق هم $f'(x) = ۲x - ۳$ است که در $x = \frac{۳}{۲}$ صفر می‌شود.

پس طول نقاط بحرانی $۰, ۳, \frac{۳}{۲}$ و جمع آن‌ها ۴/۵ است.

اشاره شکل می‌گوید $x = ۰$ و $x = ۳$ مینیمم و $x = \frac{۳}{۲}$ ماکزیمم نسبی‌اند.

؟ در $f(x) = \sqrt[۳]{x^۳ - ۳x^۲}$ چند نقطهٔ بحرانی وجود دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

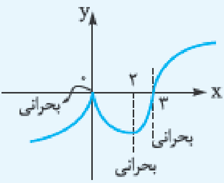
= گزینهٔ «۳» می‌دانیم هر جا زیر $\sqrt[۳]{\ }$ صفر شود، مشتق نداریم. پس الان f در $x = ۳$ و $x = ۰$ مشتق ندارد:

$$x^۳ - ۳x^۲ = ۰ \Rightarrow x^۲(x - ۳) = ۰ \Rightarrow x = ۰, ۳$$

راستی در $x = ۲$ مشتق صفر است:

$$f'(x) = \frac{۳x^۲ - ۶x}{۳\sqrt[۳]{(x^۳ - ۳x^۲)^۲}} = ۰$$

$$\Rightarrow ۳x(x - ۲) = ۰ \Rightarrow x = ۰ \text{ یا } ۲$$



اشاره با توجه به صورت مشتق، آیا در $x = ۰$ مشتق صفر است یا وجود ندارد؟ خب حساس نباشید. در هر حال بحرانی هست! اما اگر دوست دارید با کمی دقت و ساده‌کردن معلوم می‌شود که مشتق وجود ندارد.

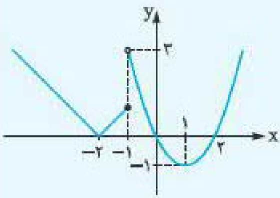
پس ۳ نقطهٔ بحرانی در ۰, ۲, ۳ داریم. ببینید:

$x = ۰$ بحرانی و ماکزیمم نسبی، $x = ۲$ بحرانی و مینیمم نسبی و $x = ۳$ فقط بحرانی است و اکسترمم نیست.

در نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x^2-2x & x>-1 \\ |x+2| & x\le -1 \end{cases}$ چند نقطهٔ بحرانی داریم که اکسترمم باشند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

گزینهٔ «۲» نمودار سهمی $y=x^2-2x$ را بلدیم.



رأس آن در $(1,-1)$ است و قسمت سمت راست $x=-1$ را باید نگه داریم و سمت چپ را حذف کنیم.

برای $y=|x+2|$ هم کافی است نمودار $y=|x|$ را ۲ واحد به چپ ببریم:

پس $x=1$ مینیمم نسبی و $x=-2$ نیز مینیمم نسبی‌اند اما $x=-1$ (تابع پیوسته نیست و مشتق ندارد) فقط بحرانی است و اکسترمم نیست. پس ۲ تا از نقاط بحرانی، اکسترمم هم هستند.

اشاره چندتا از تابع‌هایی که نقطهٔ بحرانی ندارند (اکسترمم هم ندارند) را ببینیم:

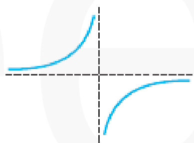
$y=\log_a x$

تابع لگاریتمی

تعداد محدودی نقطه

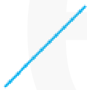
$y=a^x$

تابع نمایی



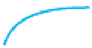
$y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$

تابع هموگرافیک



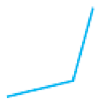
$y=ax+b$

تابع خطی غیرثابت



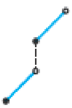
$y=\sqrt{x}$

اشاره نقاط بحرانی که اکسترمم نیستند می‌توانند به این شکل‌ها باشند:



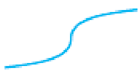
$y=2x+|x|$

در $x=0$ مشتق‌های راست و چپ متفاوت‌اند اما این نقطهٔ بحرانی اکسترمم نیست.



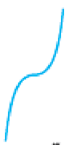
$y=x+[x]$

در نقاط صحیح بحرانی است (پیوسته نیست) اما اکسترمم نیست.



$y=\sqrt[3]{x}$

در $x=0$ مشتق ندارد (مماس عمودی دارد) بحرانی است، اما اکسترمم نیست.



$y=x^3$

در $x=0$ مشتق صفر است بحرانی است، اما اکسترمم نیست.

اشاره در تابع‌های ثابت و $y=[f(x)]$ تمام نقاط دامنه که یک همسایگی آن‌ها نیز در دامنه باشد، (یعنی نقطهٔ مرزی دامنه نباشند) بحرانی هستند.

آزمون مشتق اول

اگر f در $x=c$ نقطهٔ بحرانی داشته باشد و در همسایگی محذوف c مشتق‌پذیر باشد، می‌توانیم از روی تغییر علامت f' تشخیص بدهیم که $x=c$ ماکزیمم است یا مینیمم یا هیچی؟!

چهار حالت داریم:

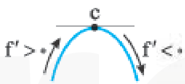
x		c	
f'	+	∘	+

x		c	
f'	−	∘	−

مشتق در $x=c$ تغییر علامت نمی‌دهد $x=c$ بحرانی است اما اکسترمم نیست.

x		c	
f'	+	∘	−

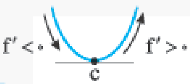
مشتق در $x=c$ از مثبت به منفی تغییر علامت می‌دهد؛ c طول ماکزیمم نسبی است.



x		c	
f'	−	∘	+

مشتق قبل از c منفی و بعد از آن مثبت است.

⇐ مینیمم نسبی



? در تابع $f(x)=\frac{x^۴}{۴}-\frac{x^۳}{۳}$ چه نوع اکسترمم‌هایی وجود دارد؟

۱) فقط یک مینیمم
۲) فقط یک ماکزیمم
۳) یک مینیمم و یک ماکزیمم
۴) فاقد اکسترمم

= گزینهٔ «۱» ببینیم مشتق چه می‌گوید:

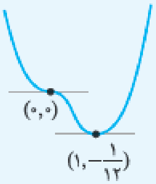
$$y'=\frac{۴x^۳}{۴}-\frac{۳x^۲}{۳}=x^۳-x^۲=x^۲(x-۱)$$

		۰		۱	
y'	− ↘ نزولی	∘	− ↘ نزولی	∘	+ ↗ صعودی

پس $x=۱$ مینیمم نسبی است:  و $x=۰$ اکسترمم نیست: 

نمودار باید تقریباً این شکلی باشد:

دو بحرانی دارد که فقط یکی اکسترمم است.



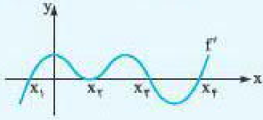
اشاره مقدار مینیمم نسبی تابع $f(۱)=\frac{-۱}{۱۲}$ است.

? شکل روبه‌رو نمودار f' است. f چند ماکزیمم نسبی و چند مینیمم نسبی دارد؟

۱) ۲,۲ ۲) ۱,۲

۳) ۲,۱ ۴) ۱,۱

= گزینهٔ «۳» به علامت f' دقت می‌کنیم:



علامت f' در $x_۱$ از ⊖ (زیر محور) به ⊕ تغییر می‌کند پس $x_۱$ مینیمم نسبی است. در $x_۲$ تغییر نمی‌کند.

در $x_۳$ از ⊕ (بالای محور) به ⊖ تغییر می‌کند، پس $x_۳$ طول ماکزیمم نسبی f است. در $x_۴$ هم مثل $x_۱$، مینیمم نسبی داریم. پس شد ۲ مینیمم و یک ماکزیمم.

? اگر $A(۱,-۲)$ اکسترمم تابع $f(x)=ax^۲+\frac{b}{x}$ باشد. $a-b$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $-\frac{۱}{۳}$ ۴) $-\frac{۲}{۳}$

= گزینهٔ «۲» اولاً $(۱,-۲)$ در ضابطهٔ تابع صدق می‌کند؛ یعنی $f(۱)=-۲$ و داریم:

$$f(۱)=a(۱)^۲+\frac{b}{۱}=a+b=-۲$$

ثانیاً در $x=۱$ نقطهٔ بحرانی داریم پس مشتق صفر است: $f'(۱)=۰$

$$f'(x)=a(۲x)+b(-\frac{۱}{x^۲}) \Rightarrow f'(۱)=۲a-b=۰ \Rightarrow b=۲a$$

قبلاً هم دیدیم $a+b=-۲$ و از این دو معادله $a=-\frac{۲}{۳}$ و $b=-\frac{۴}{۳}$. پس:

$$a-b=-\frac{۲}{۳}-(-\frac{۴}{۳})=\frac{۲}{۳}$$

اشاره با قراردادن مقادیر a و b در f' داریم:

$$f'(x)=-\frac{۴}{۳}x+\frac{\frac{۴}{۳}}{x^۲}=\frac{۴}{۳x^۲}(۱-x^۳)$$

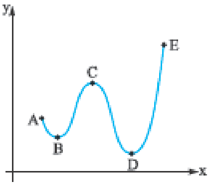
پس در $x=۱$ علامت مشتق از ⊕ به ⊖ تغییر می‌کند یعنی $A(۱,-۲)$ ماکزیمم نسبی است.

اکسترمم‌های مطلق

برای تعریف اکسترمم مطلق، باید یک دامنه داشته باشیم. (حالا یا دامنهٔ خود تابع یا بازه‌ای که سؤال به ما می‌دهد.)

ماکزیمم مطلق: نقطهٔ $(c,f(c))$ وقتی ماکزیمم مطلق است که عرض آن نقطه از تمام نقاط در دامنه بالاتر یا مساوی باشد؛ یعنی در کل دامنه داشته باشیم: $f(c)\geq f(x)$

مینیمم مطلق: نقطهٔ $(c, f(c))$ وقتی مینیمم مطلق است که $f(c)$ کم‌ترین مقدار تابع در بازه یا دامنه باشد. یعنی در تمام دامنه رابطه $f(c) \le f(x)$ برقرار شود.



A: نقطهٔ شروع بازه، بحرانی نیست.

B: نقطهٔ مینیمم نسبی، بحرانی است.

C: نقطهٔ ماکزیمم نسبی، بحرانی است.

D: نقطهٔ مینیمم نسبی و مطلق، بحرانی است.

E: نقطهٔ ماکزیمم مطلق، بحرانی نیست.

اشاره عرض نقطه را مقدار اکسترمم مطلق می‌نامیم.

اشاره به فرق ماکزیمم و مینیمم مطلق و نسبی دقت کنید: اکسترمم نسبی قطعاً در سر و ته بازه نیست و قطعاً بحرانی است و فقط با اطرافیانش در یک همسایگی مقایسه می‌شود.

اکسترمم مطلق در سر و ته بازه هم می‌تواند باشد و اگر در سر و ته بود، بحرانی نیست و نسبت به کل سنجیده می‌شود نه فقط با اطرافیانش.

چندتا از توابع زیر ماکزیمم مطلق دارند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) هیچ

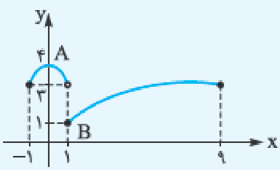
گزینهٔ «۴» در هیچ‌یک از توابع بالاترین نقطه را نداریم. در f_1 و f_3 بیشترین عرض $+\infty$ است و در f_2 بیشترین عرض برابر حد در $+\infty$ است. در f_4 هم بالاترین نقطه توخالی است و وجود ندارد. پس چه تابع‌هایی ماکزیمم و مینیمم مطلق دارند؟ خب اگر تابع روی بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ تعریف شود و پیوسته باشد، خیالمان راحت است! در این صورت با اطمینان می‌گوییم f در این بازه اکسترمم مطلق دارد.

مثلاً این شکلی:

جمع مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & -1 \le x < 1 \\ \sqrt{x} & 1 \le x \le 9 \end{cases}$ **کدام است؟**

۱) ۷ ۲) ۵ ۳) ۳ ۴) ۲

گزینهٔ «۲» نمودار را ببینید:



بیشترین عرض در $A(0, 4)$ است؛ پس $y_{max} = 4$

کم‌ترین عرض در $B(1, 1)$ است؛ پس $y_{min} = 1$ و در نتیجه: $y_{max} + y_{min} = 5$

اشاره هر دو نقطهٔ A و B اکسترمم نسبی هم هستند؛ چون در سر و ته بازه قرار ندارند.

تعیین مقادیر اکسترمم مطلق

اگر نمودار تابع را نداشته باشیم، برای تعیین مقادیر اکسترمم مطلق باید تمام نقاط بحرانی را پیدا کنیم سپس مقدار تابع را در نقطه‌های بحرانی و سر و ته بازه حساب کنیم و از بین yها، ماکزیمم و مینیمم مطلق را برداریم.

اگر $f(x)=\sqrt{۴x-x^۲}$، آن‌گاه مقدار ماکزیمم مطلق f چه قدر است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $۲\sqrt{۲}$

گزینهٔ «۱» **راه‌حل اول** قرار شد نقاط بحرانی را پیدا کنیم:

$$f'(x)=\frac{۴-۲x}{۲\sqrt{۴x-x^۲}}=\frac{۲-x}{\sqrt{۴x-x^۲}}=۰$$

$$\Rightarrow x=۲ \xrightarrow{\text{در تابع قرار دهیم}} y=f(۲)=\sqrt{۸-۴}=۲ \Rightarrow A(۲,۲)$$

سر و ته بازه یعنی سر و ته دامنه را هم می‌خواهیم:

$$۴x-x^۲\geq ۰ \Rightarrow x(۴-x)\geq ۰ \xrightarrow{\text{بین دو ریشه}} D=[۰,۴]$$

و داریم: $f(۰)=f(۴)=۰$

این جدول را هم ببینید:

	بحرانی	سر و ته	
x	۲	۰	۴
y	۲	۰	۰

پس: $y_{max}=۲$

راه‌حل دوم در مورد این تابع به طور خاص، می‌توانیم بیشترین مقدار y را پیدا کنیم:

$$y=\sqrt{۴x-x^۲}=\sqrt{۴-(x-۲)^۲}$$

می‌بینید که در زیر رادیکال، ۴ منهای یک مربع کامل داریم. پس بیشترین مقدار زیر رادیکال ۴ است و بیشترین مقدار y می‌شود $\sqrt{۴}$ یعنی ۲.

ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع $f(x)=x^۳-x^۲-x$ روی بازهٔ $[۰,۲]$ چه‌قدر اختلاف دارند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

گزینهٔ «۳»

اول بحرانی: $f'(x)=۳x^۲-۲x-۱=۰ \xrightarrow{a+b+c=۰} x_۱=۱, x_۲=\frac{-۱}{۳}$

حالا سر و ته: $x=۰, x=۲$

این‌ها را در تابع قرار دهیم:

	بحرانی		سر و ته	
x	۱	$\frac{-۱}{۳}$	۰	۲
y	-۱	$\frac{-۱}{۲۷}-\frac{۱}{۹}+\frac{۱}{۳}=+\frac{۵}{۲۷}$	۰	۲

پس $y_{max}=۲$ و $y_{min}=-۱$ و اختلاف آن‌ها می‌شود ۳.

اختلاف بیشترین و کم‌ترین مقدار $f(x)=\left|\frac{x-1}{x+3}\right|$ در بازهٔ $[-2,2]$ کدام است؟

۱) ۳　　۲) ۶　　۳) ۸　　۴) ۲

گزینهٔ «۱» در $x=1$ نقطهٔ بحرانی داریم چون داخل قدرمطلق صفر می‌شود و f مشتق ندارد:

$x=1 \Rightarrow y=0$

اما نقطهٔ بحرانی دیگری نداریم چون مشتق $\frac{x-1}{x+3}$ می‌شود $\frac{4}{(x+3)^2}$ که هرگز صفر نیست.

سر و ته بازه را هم قرار می‌دهیم:

x	1	-2	2
y	0	$\left\|\frac{-3}{1}\right\|=3$	$\left\|\frac{1}{5}\right\|=\frac{1}{5}$

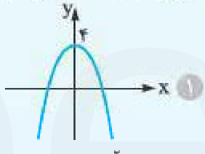
پس داریم:

$y_{max}-y_{min}=3-0=3$

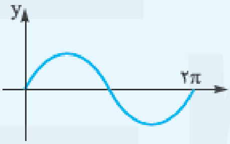
در کدام تابع نقطهٔ اکسترمم نسبی، اکسترمم مطلق **نیست**؟

۱) $y=4-x^2$　　۲) $y=\sin x$　　۳) $y=|\sin x|$　　۴) $y=||x|-1|$

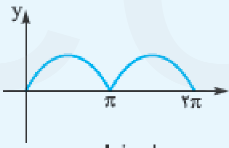
گزینهٔ «۴» نمودارها را ببینید:

۱ 

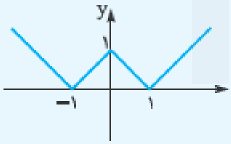
$y=4-x^2$

۲ 

$y=\sin x$

۳ 

$y=|\sin x|$

۴ 

$y=||x|-1|$

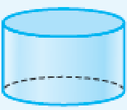
$(0,1)$ اکسترمم نسبی است و مطلق نیست.

در ۱، ۲ و ۳ اکسترمم‌های نسبی، مطلق هم هستند.

بهینه‌سازی

در یک مسئلهٔ بهینه‌سازی می‌خواهیم یک تابع را ماکزیمم یا مینیمم کنیم. معمولاً این تابع مساحت، حجم، هزینه و... را حساب می‌کند و ما به دنبال بهترین حالت هستیم. مثل همیشه باید نقطهٔ بحرانی و سر و ته بازه را در نظر بگیریم تا به ماکزیمم و مینیمم مطلق برسیم.

یک قوطی استوانه‌ای به حجم 24π سانتی‌متر مکعب می‌خواهیم. اگر بخواهیم کم‌ترین مقدار فلز مصرف شود. ارتفاع قوطی چند برابر قطر آن است؟



۱) ۱　　۲) ۲

۳) $\frac{3}{2}$　　۴) $\frac{4}{3}$

گزینهٔ «۱» اگر ارتفاع قوطی h و شعاع قاعدهٔ آن r باشد داریم: $V = \pi r^۲ h = ۲۴\pi$

پس: $r^۲ h = ۲۴$

فلز مورد استفاده، مساحت کل قوطی است. پس: $A = ۲\pi r^۲ + ۲\pi r h$

اما این تابعِ A، دوتا متغیر r و h دارد. برای تبدیل A به تابع یک‌متغیری، از شرط حجم قوطی، $\frac{۲۴}{r^۲}$ به جای h می‌گذاریم و داریم:

$$A = ۲\pi r^۲ + ۲\pi r \frac{۲۴}{r^۲} = ۲\pi r^۲ + \frac{۴۸\pi}{r} = ۲\pi (r^۲ + \frac{۲۴}{r})$$

حالا دنبال مینیمم مطلق A هستیم:

$$A' = ۲\pi (۲r - \frac{۲۴}{r^۲}) = ۰$$

$$\Rightarrow ۲r = \frac{۲۴}{r^۲} \Rightarrow r^۳ = ۱۲ \Rightarrow r = \sqrt[۳]{۱۲}$$

مقدار h هم می‌شود:

$$h = \frac{۲۴}{r^۲} = \frac{۲۴}{\sqrt[۳]{۱۲^۲}} = \frac{۲۴}{\sqrt[۳]{۱۴۴}}$$

سؤال نسبت $\frac{h}{۲r}$ را می‌خواهد:

$$\frac{\text{ارتفاع}}{\text{قطر}} = \frac{h}{۲r} = \frac{\frac{۲۴}{\sqrt[۳]{۱۴۴}}}{۲\sqrt[۳]{۱۲}} = \frac{۲۴}{۲ \times ۱۲} = ۱$$

یعنی ارتفاع قوطی و قطر آن برابرند.

اگر x و y مثبت و $x + y = ۱۵$ باشد، بیشترین مقدار $x^۲y^۳$ کدام است؟

۱) ۲×۳^۸ ۲) ۴×۳^۸ ۳) ۲×۳^۶ ۴) ۴×۳^۶

گزینهٔ «۲» به جای y باید $۱۵ - x$ قرار دهیم و داریم: $f(x) = x^۲ (۱۵ - x)^۳$

برای رسیدن به بیشترین مقدار $f(x)$، نقاط بحرانی و سر و ته را قرار می‌دهیم. موافقید که $۰ < x < ۱۵$؟

$$f'(x) = ۲x(۱۵ - x)^۳ + ۳(-۱)(۱۵ - x)^۲ \times x^۲ = x(۱۵ - x)^۲ (۲(۱۵ - x) - ۳x)$$

$$= x(۱۵ - x)^۲ (۳۰ - ۵x) = ۰ \Rightarrow x = ۶$$

پس نقطهٔ بحرانی f در $x = ۶$ است:

x	۰	۶	۱۵
$f(x)$	۰	$۶^۲ \times ۹^۳$	۰

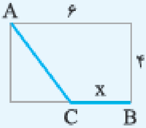
و ماکزیمم f برابر است با: $۶^۲ \times ۹^۳ = ۴ \times ۳^۲ \times ۳^۶ = ۴ \times ۳^۸$

اشاره بعضی‌ها حفظ می‌کنند که اگر جمع دو عدد ثابت باشد و بخواهیم ضرب آن‌ها ماکزیمم شود باید دو عدد برابر باشند. مثلاً بین تمام مستطیل‌ها با محیط ثابت، مربع دارای بیشترین مساحت است.

هم‌چنین اگر $x + y$ ثابت باشد و بخواهیم $x^m y^n$ ماکزیمم شود باید $\frac{x}{m} = \frac{y}{n}$ باشد.

مثلاً در سؤال بالا: $x^۲ y^۳ \Rightarrow \frac{x}{۲} = \frac{y}{۳} \xrightarrow{x+y=۱۵} x = ۶, y = ۹$

برای رسیدن از نقطهٔ A به B، تا نقطهٔ C را از درون جنگل می‌رویم و سپس در فاصله C تا B می‌دویم. اگر سرعت دویدن $\frac{۴}{۳}$ برابر سرعت حرکت در جنگل باشد، برای رسیدن به B در کوتاه‌ترین زمان، فاصلهٔ CB چه‌قدر است؟



۱) $۶-\frac{۶}{\sqrt{۷}}$ ۲) $۶-\frac{۱۲}{\sqrt{۷}}$ ۳) $۳-\frac{۶}{\sqrt{۷}}$ ۴) $۳-\frac{۱۲}{\sqrt{۷}}$

گزینهٔ «۲» فاصلهٔ CB را x می‌گیریم. پس داریم:

$$AC=\sqrt{۴^۲+(۶-x)^۲}$$
$$BC=x$$

از فیزیک بلدیم که زمان برابر است با مسافت تقسیم بر سرعت:

$$t=t_۱+t_۲=\frac{AC}{v}+\frac{BC}{\frac{۴}{۳}v}=\frac{\sqrt{۱۶+(۶-x)^۲}}{v}+\frac{x}{\frac{۴}{۳}v}$$

موافقید که $۰ \le x \le ۶$؟ حالا مینیمم مطلق t را می‌خواهیم:

$$t'=\frac{۱}{v}\left(\frac{۰+۲(-۱)(۶-x)}{۲\sqrt{۱۶+(۱۶-x)^۲}}+\frac{۳}{۴}\right)=۰$$

$$\Rightarrow \frac{۶-x}{\sqrt{۱۶+(۶-x)^۲}}=\frac{۳}{۴}\xrightarrow{\text{به توان ۲}}\frac{(۶-x)^۲}{۱۶+(۶-x)^۲}=\frac{۹}{۱۶}$$

$$\xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}}\frac{(۶-x)^۲}{۱۶}=\frac{۹}{۷}\Rightarrow\frac{۶-x}{۴}=\frac{۳}{\sqrt{۷}}\Rightarrow ۶-x=\frac{۱۲}{\sqrt{۷}}$$

$$\Rightarrow x=۶-\frac{۱۲}{\sqrt{۷}}$$

چگونه بدون شمردن بشماریم

دوتا مفهوم اولیه که باید خوب یاد بگیرید!

۱ **اصل ضرب:** وقتی کاری در چند مرحله انجام می‌شود، تعداد حالت‌های هر قسمت را می‌نویسیم و در هم ضرب می‌کنیم. این قسمت‌ها باید **همه با هم** انجام بشوند تا کل آن کار انجام شود.

۲ **اصل جمع:** وقتی کاری از چند راه مختلف قابل انجام است، تعداد حالت‌های هر راه را می‌نویسیم و با هم جمع می‌کنیم. قرار نیست تمام این راه‌ها با هم انجام شوند بلکه فقط باید **یکی از آن‌ها انتخاب** شود، در واقع این راه‌ها **به جای هم** هستند.

پس این‌طوری شد: «و»، «هر دو»، «با هم»، قسمت‌های مختلف ⇐ ضرب

«یا»، «یکی از آن‌ها»، «به جای هم»، حالت‌های مختلف ⇐ جمع

مثال‌هایی از عددشماری، کلمه‌شماری و... ببینید:

? **در سلف دانشگاه ۴ نوع غذا و ۳ نوع نوشیدنی و سالاد و ماست داده می‌شود. دانشجو باید یک نوع غذا و از بین نوشیدنی‌ها و سالاد و ماست یکی را انتخاب کند. چند حالت دارد؟**

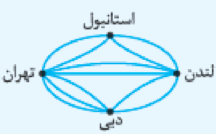
۱) ۲۴ ۲) ۱۴ ۳) ۲۰ ۴) ۱۸

= **گزینهٔ «۳»** برای انتخاب قسمت غذا، ۴ حالت داریم. برای نوشیدنی و سالاد و ماست چون باید فقط یکی را انتخاب کند، $۳+۲=۵$ حالت داریم. پس طبق اصل ضرب:

آب نوشابه دوغ غذا۱ غذا۲
سالاد ماست غذا۳ غذا۴

$$۴\times۵=۲۰$$

? **در مسیرهای پروازی مقابل، چند راه از تهران به لندن هست؟**



۱) ۴۸ ۲) ۲۴

۳) ۳۶ ۴) ۱۲

= **گزینهٔ «۴»** سه راه داریم:

الف پرواز مستقیم: ۲ راه دارد.

ب از طریق دبی: ۲×۳ راه دارد.

پ از طریق استانبول: ۲×۲ راه دارد.

مسافر باید یکی از این راه‌ها را انتخاب کند، پس حالت‌های الف و ب و پ جمع می‌شوند:

$$۲+۶+۴=۱۲$$

با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ و ۷ چند عدد سه‌رقمی می‌توان نوشت که یکان آن ۳ نبوده و دهگانش زوج باشد؟

۱) ۳۰ ۲) ۴۰ ۳) ۱۲۰ ۴) ۶۰

گزینهٔ «۲» ساختن عدد سه‌رقمی از ۳ قسمت تشکیل شده است:

$$\underset{\text{صدگان}}{\underline{\quad}} \times \underset{\text{دهگان}}{\underline{\quad}} \times \underset{\text{یکان}}{\underline{\quad}}$$

برای یکان قرار است ۳ را بر نداریم، پس ۱، ۲، ۴ و ۷ یعنی ۴ حالت داریم.

برای دهگان قرار است عدد زوج برداریم، یعنی ۲ و ۴ قابل انتخاب است و ۲ حالت داریم.

در مورد صدگان حرفی نزده است، پس همهٔ پنج رقم را می‌توانیم برداریم و ۵ حالت داریم:

جواب می‌شود:
$$\underset{\text{صدگان}}{\underline{5}} \times \underset{\text{دهگان (زوج)}}{\underline{2}} \times \underset{\text{یکان (به‌جز۳)}}{\underline{4}} = 40$$

اشاره اگر در مسئله بگوید ارقام «متمایز» یا «غیرتکراری»، آن‌وقت در هر قسمت یک رقم استفاده می‌شود و تعداد رقم‌های قابل انتخاب، یکی‌یکی کاهش می‌یابد.

مثلاً می‌خواهیم با ارقام غیرتکراری ۱، ۲، ۳، ۴ و ۷ عدد سه‌رقمی بسازیم:

یک رقم مصرف شد. یک رقم دیگر مصرف شد.

$$\underset{\text{صدگان}}{\underline{5}} \times \underset{\text{دهگان}}{\underline{4}} \times \underset{\text{یکان}}{\underline{3}} = 60$$

چند مثال زیباتر:

با حروف کلمهٔ «STORY» چند کلمهٔ سه یا ۴ حرفی می‌توان ساخت؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۸۰ ۳) ۲۴۰ ۴) ۶۰

گزینهٔ «۲» وقتی به حروف یک **کلمه** در صورت سؤال اشاره می‌شود، تکرار مجاز نیست.

۳ یا ۴ حرفی یعنی ۳ حرفی‌ها را باید با ۴ حرفی‌ها جمع کنیم. «STORY» پنج حرف دارد و در هر مرحله یکی مصرف می‌شود:

$$\underbrace{\underline{5} \times \underline{4} \times \underline{3}}_{\text{سه حرفی}} + \underbrace{\underline{5} \times \underline{4} \times \underline{3} \times \underline{2}}_{\text{چهار حرفی}}$$

$$60 + 120 = 180$$

یک مثال جدی‌تر ببینید:

با ارقام متمایز ۱، ۲، ۳، ۴ و ۷ چند عدد ۳رقمی زوج می‌توان ساخت که دهگان آن ۳ نباشد و از ۵۰۰ کم‌تر باشد؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۶ ۳) ۱۸ ۴) ۲۰

گزینهٔ «۱» خب، اوضاع این‌جوری است: $\frac{}{\text{صدگان ۷ نباشد}} \times \frac{}{\text{دهگان به‌جز ۳}} \times \frac{۲}{\text{یکان ۲ یا ۴}}$.

رقم یکان از بین ۲ یا ۴ دو حالت دارد. حالا ۲ یا ۴ استفاده شده‌اند و باید در صدگان ۷ قرار نگیرد. پس از بین ۵ رقم دوتای آن‌ها را در دسترس نداریم و برای صدگان ۳ حالت وجود دارد. برویم سراغ دهگان، ۲ یا ۴ در یکان و یک رقم در صدگان مصرف شده‌اند و ما می‌خواهیم ۳ نگذاریم. این‌جا گیر می‌کنیم! چون نمی‌دانیم ۳ در صدگان قرار گرفته است یا نه؟! مجبوریم ۲ راه مختلف را از هم جدا بنویسیم و بعد طبق اصل جمع، با هم جمع می‌کنیم:

$$\underbrace{\frac{۱}{\text{فقط ۳}} \times \frac{۳}{} \times \frac{۲}{\text{۲ یا ۴}}}_{\text{حالت اول: در صدگان ۳ باشد.}} \quad \text{یا} \quad + \quad \underbrace{\frac{۲}{\text{۷ و ۳ نیست.}} \times \frac{۲}{} \times \frac{۲}{\text{۲ یا ۴}}}_{\text{حالت دوم: صدگان ۳ نیست.}} \Rightarrow ۶ + ۸ = ۱۴$$

دلیل عددها را هم ببینید:

الف اگر در صدگان ۳ بگذاریم، در یکان هم یکی از ارقام ۲ یا ۴ مصرف شده پس تا این‌جا ۲ رقم را مصرف کرده‌ایم (مثلاً ۲ و ۳ مصرف شده‌اند و ۱، ۴ و ۷ مانده) و می‌توانیم در دهگان هر ۳ رقم مانده را قرار دهیم؛ پس نوشتیم:

$$\frac{۱}{\text{فقط ۳}} \times \frac{۳}{} \times \frac{۲}{\text{۲ یا ۴}} = ۶$$

ب اگر در صدگان ۳ نگذاریم، با توجه به مصرف‌شدن یک رقم زوج در یکان، می‌توانیم در صدگان به‌جز ۷ و آن رقم و ۳، دوتای دیگر بگذاریم (مثلاً در یکان ۲ را مصرف کرده‌ایم و در صدگان می‌توانیم ۱ یا ۴ را قرار دهیم). حالا در دهگان به‌جز رقم‌های ۳ و یکان و صدگان، دوتا انتخاب دیگر داریم؛ پس:

$$\frac{۲}{\text{به‌جز ۳ و یکان و ۷}} \times \frac{۲}{\text{به‌جز یکان و صدگان و ۳}} \times \frac{۲}{\text{۲ یا ۴}} = ۸$$

پس جواب می‌شود $۶ + ۸ = ۱۴$.

مثال‌های دیگری از کاربرد اصل ضرب ببینید:

؟ مجموعهٔ ۶عضوی $\{a, b, c, d, e, f\}$، چند زیرمجموعه شامل e و f و فاقد a دارد؟

۱) ۸ ۲) ۱۶ ۳) ۳۲ ۴) ۲۴

گزینهٔ «۱» شش‌تا کار باید انجام شود. باید معلوم کنیم هر یک از اعضا در زیرمجموعه هستند یا نه. سؤال گفته عضو a نباید باشد، پس ۱ حالت دارد (خاموش است)؛ اعضای e و f باید باشند پس این‌ها هم ۱ حالت دارد (روشن هستند) اما در مورد اعضای b، c و d آزاد هستیم و هر کدام ۲ حالت (روشن یا خاموش) دارند. طبق اصل ضرب $۲ \times ۲ \times ۲$ زیرمجموعه داریم.

؟ در یک امتحان ۴ سؤال، هر سؤال ۳ گزینه دارد. چند پاسخ‌نامهٔ مختلف وجود دارد که حداقل یک تست در آن‌ها نزده باشد؟

۱) ۱۹۲   ۲) ۱۸۸   ۳) ۱۷۵   ۴) ۲۵۵

گزینهٔ «۳» هر وقت «حداقل یکی» را می‌شنوید یعنی یکی یا دوتا یا سه‌تا یا ۴تا یا... .
خب، شمردن این حالت‌ها و جمع‌زدن همهٔ آن‌ها می‌تواند سخت باشد.

در چنین مواردی به فکر استفاده از مکمل می‌افتیم. یعنی می‌نویسیم: هیچی − کل = حداقل یکی

در این سؤال می‌شود: اصلاً نزده نداشته باشد − کل = حداقل یک نزده باشد.

در کل برای هر تست ۳ گزینه و یک انتخاب «نزده» داریم، پس هر تست ۴ حالت دارد:

$$\frac{۴}{\text{سؤال ۱}}\times\frac{۴}{\text{سؤال ۲}}\times\frac{۴}{\text{سؤال ۳}}\times\frac{۴}{\text{سؤال ۴}}=۴^{۴}=۲۵۶$$

اگر اصلاً نزده نداشته باشد، هر تست فقط ۳ گزینه دارد:

$$\frac{۳}{\text{سؤال ۱}}\times\frac{۳}{\text{سؤال ۲}}\times\frac{۳}{\text{سؤال ۳}}\times\frac{۳}{\text{سؤال ۴}}=۳^{۴}=۸۱$$

پس تعداد حالت‌هایی که حداقل یک تست نزده داریم، می‌شود: $۲۵۶-۸۱=۱۷۵$

؟ گروه خونی افراد می‌تواند A، B، AB یا O باشد. در بین ۳ نفر چند حالت وجود دارد که گروه خونی حداقل ۲تا از آن‌ها یکسان باشد؟

۱) ۳۷   ۲) ۶۳   ۳) ۴۰   ۴) ۴۸

گزینهٔ «۳» باز هم به فکر مکمل می‌افتیم:

همه با هم متفاوت باشند − کل = حداقل ۲ نفر یکسان باشد.

$$=\frac{۴}{\text{نفر اول}}\times\frac{۴}{\text{نفر دوم}}\times\frac{۴}{\text{نفر سوم}}-\frac{۴}{\text{نفر اول}}\times\frac{۳}{\substack{\text{نفر دوم}\\\text{متفاوت}}}\times\frac{۲}{\substack{\text{نفر سوم}\\\text{متفاوت}\\\text{با بقیه}}}=۶۴-۲۴=۴۰$$

؟ در پلاک خودرو ارقام غیرصفر و حروف A، B، C، D و H می‌آیند. چند پلاک مختلف وجود دارد که رقم ۴ حداقل یک بار ظاهر شود؟

31 B 367

۱) $۹^{۵}-۸^{۵}$ ۲) $۵(۹^{۵}-۸^{۵})$ ۳) $۹^{۵}-۹^{۴}$ ۴) $۵(۹^{۵}-۹^{۴})$

گزینهٔ «۲» ارقام غیرصفر ۹ حالت دارند. (از ۱ تا ۹) پس تعداد کل پلاک‌ها می‌شود:

$$\frac{۹}{\text{رقم}}\times\frac{۹}{\text{رقم}}\times\frac{۵}{\text{حرف}}\times\frac{۹}{\text{رقم}}\times\frac{۹}{\text{رقم}}\times\frac{۹}{\text{رقم}}=۵\times۹^{۵}$$

تعداد پلاک‌هایی که اصلاً ۴ ندارند برابر است با: (با حذف رقم ۴، هر رقم ۸ حالت دارد)

$$\frac{۸}{\text{رقم}}\times\frac{۸}{\text{رقم}}\times\frac{۵}{\text{حرف}}\times\frac{۸}{\text{رقم}}\times\frac{۸}{\text{رقم}}\times\frac{۸}{\text{رقم}}=۵\times۸^{۵}$$

پس تعداد پلاک‌هایی که در آن‌ها حداقل یک رقم ۴ باشد برابر است با:

$$\text{کل}-\text{۴ ندارند}=۵\times۹^{۵}-۵\times۸^{۵}=۵\times(۹^{۵}-۸^{۵})$$

یک ساختمان می‌تواند ۴ تا ۶ طبقه داشته باشد و در هر طبقهٔ آن بین ۲ تا ۴ واحد احداث شود. اگر هر واحد بین ۲ تا ۳ سرویس داشته باشد. حداقل و حداکثر چند سرویس در واحدهای این ساختمان وجود دارد؟

۱) ۱۶، ۷۲ ۲) ۱۶، ۳۶ ۳) ۱۲، ۷۲ ۴) ۱۲، ۳۶

گزینهٔ «۱» حداقل ۴ طبقه و هر طبقه ۲ واحد و هر واحد ۲ سرویس دارد:

$۴ \times ۲ \times ۲ = ۱۶$

حداکثر ۶ طبقه و هر طبقه ۴ واحد و هر واحد ۳ سرویس دارد:

$۶ \times ۴ \times ۳ = ۷۲$

جایگشت

بعضی اوقات می‌خواهیم اشیای متمایز را کنار هم قرار دهیم. به هر حالت کنار هم چیدن این اشیا، یک جایگشت می‌گوییم. مثلاً a، b و c شش‌تا جایگشت دارند:

۱ abc ۲ acb ۳ bac
۴ bca ۵ cab ۶ cba

اما بدون نوشتن، طبق اصل ضرب و با دقت به این‌که تکرار مجاز نیست، تعداد جایگشت‌ها را می‌توانیم بشماریم:

$$\underset{\text{حرف اول}}{\underline{۳}} \times \underset{\text{حرف دوم}}{\underline{۲}} \times \underset{\text{حرف سوم}}{\underline{۱}}$$

حالا فرض کنید از بین حروف a, b, c, d, e, f, g می‌خواهیم تعداد جایگشت‌های سه‌تایی را حساب کنیم:

$$\underset{\text{حرف اول}}{\underline{۷}} \times \underset{\text{حرف دوم}}{\underline{۶}} \times \underset{\text{حرف سوم}}{\underline{۵}}$$

پس این‌جوری شد: تعداد جایگشت‌های r تا از n شیء متمایز همیشه برابر است با:

$$\underbrace{n(n-۱)(n-۲)\cdots(n-r+۱)}_{\text{تعداد} = r \text{ تا}}$$

مثلاً وقتی از بین ۵ نفر ۳تا را در عکس کنار هم می‌آوریم: $۵ \times ۴ \times ۳$

با حروف متمایز انگلیسی کلمهٔ ۴ حرفی می‌سازیم: $۲۶ \times ۲۵ \times ۲۴ \times ۲۳$

۴ کتاب مختلف را در قفسه می‌چینیم: $۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱$

برای ساختن فرمول، باید اول نماد فاکتوریل را بشناسیم: $n! = n(n-۱)(n-۲)\cdots(۲)(۱)$

$n!$ یعنی از n تا ۱ را در هم ضرب کنیم (این کار وقتی لازم می‌شود که بخواهیم همهٔ اشیا را کنار هم قرار دهیم)، می‌گوییم تعداد جایگشت‌های n شیء در کنار هم می‌شود $n!$.

بد نیست عددهای فاکتوریل را حفظ باشید:

$۱! = ۱$ $۲! = ۲$ $۳! = ۶$ $۴! = ۲۴$ $۵! = ۱۲۰$ $۶! = ۷۲۰$

و قرارداد می‌کنیم که: $۰! = ۱$

؟ چندتا از روابط مقابل درست است؟ $\frac{۶!}{۳!}=۵!$ ، $۳!+۴!=۷!$ ، $۴۲\times۵!=۷!$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) هیچ

= گزینهٔ «۲» اولی درست است: $۴۲\times۵!=۷\times۶\times(۵\times۴\times۳\times۲\times۱)=۷!$

دومی غلط است: $۳!+۴!=۳\times۲\times۱+۴\times۳\times۲\times۱=۳۰\neq۷\times۶\times۵\times۴\times۳\times۲\times۱$

سومی هم درست است: $\frac{۶!}{۳!}=\frac{\cancel{۶}\times۵\times۴\times۳\times۲\times۱}{\cancel{۶}}=۵\times۴\times۳\times۲\times۱=۵!$

پس ۲تا از روابط درست است.

اشاره همیشه می‌توانیم فاکتوریل را باز کنیم و ببندیم. مثلاً:

$$۶!=۶\times۵!=۶\times۵\times۴!=۶\times۵\times۴\times۳!=۶\times۵\times۴\times۳\times۲\times۱$$

معرفی P(n,r)

تعداد جایگشت‌های rتایی از n شیء برابر است با:

$$P(\overset{\text{تعداد کل}}{n},\underset{\text{تعدادی که می‌چینیم}}{r})=\frac{n!}{(n-r)!}$$

مثلاً می‌خواهیم ۳تا از ۷ نفر را در صف قرار دهیم: $P(۷,۳)=\frac{۷!}{(۷-۳)!}=\frac{۷!}{۴!}=۷\times۶\times۵=۲۱۰$

خب، این را از قبل هم بلد بودیم:

$$\underset{\text{نفر اول}}{۷}\times\underset{\text{نفر دوم}}{۶}\times\underset{\text{نفر سوم}}{۵}$$

پس P حرف جدیدی نمی‌زند، فقط فرمول ایجاد می‌کند وگرنه خودمان از قبل بلدیم با اصل ضرب اشیا را کنار هم قرار می‌دهیم.

؟ در چند کلمهٔ ۴حرفی با حروف «computers» حرف c در اول است و حرف t وجود ندارد؟

۱) ۲۸۰ ۲) ۳۲۰ ۳) ۳۳۶ ۴) ۲۱۰

= گزینهٔ «۴» این کلمه ۴ حرفی باید به شکل $\underset{\text{فقط c}}{۱}\times\_\_\times\_\_\times\_\_$ باشد، سه حرف دیگر باید از بین o، m، p، u، e، r و s چیده شوند.

راه‌حل اول استفاده از P: $P(۷,۳)=\frac{۷!}{(۷-۳)!}=\frac{۷!}{۴!}=۷\times۶\times۵=۲۱۰$

راه‌حل دوم اصل ضرب: $۱\times۷\times۶\times۵=۲۱۰$

اشاره اگر سؤال بخواهد در جایگشت، اشیای خاصی کنار هم باشند آن اشیا را توی جعبه می‌گذاریم و یک جسم می‌گیریم. این یک جسم در کنار بقیه جایگشت دارد و ممکن است درون خودش هم جایگشت داشته باشد. ببینید:

با حروف کلمهٔ «دسته بازی» تعداد جایگشت‌ها با کدام شرط از همه کم‌تر است؟

۱) حروف کلمهٔ «دست» کنار هم باشند. ۲) حروف س، ا، ز به صورت «ساز» باشند.

۳) به «ه ز ی» ختم شود. ۴) حروف نقطه‌دار در شروع و «ه» در پایان باشد.

گزینهٔ «۳» خب، با صبر و حوصله چهار گزینه را دنبال کنید:

۱ اگر بخواهیم حروف «دست» کنار هم باشند، آن‌ها را توی جعبه می‌گذاریم. پس جایگشت از ۶ شیء $\boxed{\text{دست}}$، ه، ب، ا، ز، ی داریم که !۶ حالت دارد. درون جعبه هم سه شیء داریم که !۳ حالت دارند. پس طبق اصل ضرب تعداد جایگشت‌ها می‌شود: $6! \times 3!$

در ۲ باید $\boxed{\text{ساز}}$ ببینیم. پس این جعبه را در کنار د، ت، ه، ب، ی قرار می‌دهیم که !۶ حالت داریم؛ اما دیگر درون دسته جایگشت نداریم، چون سه حرف توی جعبه باید به شکل «ساز» قرار گیرند و با هم جابه‌جا نشوند.

در ۳ قرار است «ه ز ی» در آخر کلمه باشد. پس کل کلمه به شکل ـ ـ ـ ـ ـ ه ز ی است و جای این ۳ حرف معلوم شده و ما جایگشت ۵ حرف «د، س، ت، ب، ا» را داریم که می‌شود !۵ .

در ۴ باید تـ ، بـ ، ز یا یـ ، در اول باشند و ه در آخر. پس این شکلی است:

$$\underset{\text{تـ، بـ، یـ، ز}}{4} \times - \times - \times - \times - \times - \times - \times \underset{\text{ه}}{1}$$

برای ۶ حرف دیگر هم !۶ حالت داریم، پس جواب می‌شود $6! \times 4 \times 1$ و حاصل ۳ از همه کم‌تر شد.

حروف کلمهٔ «PEPPER» را به چند طریق می‌توان کنار هم چید که حرف‌های یکسان همواره مجاور باشند؟

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۳۶ ۴) ۷۲

گزینهٔ «۱» Eها را در یک جعبه قرار می‌دهیم و Pها را هم در یک جعبهٔ دیگر می‌گذاریم:

$\boxed{EE}\ \boxed{PPP}\ R$

تعداد جایگشت این ۳ شیء می‌شود !۳ یعنی ۶ دقت کنید که درون جعبه‌ها جایگشت نداریم چون اجسام یکسان با هم جابه‌جا نمی‌شوند.

۳ کتاب تست ریاضی و ۴ کتاب تست فیزیک مختلف داریم. به چند طریق می‌توان آن‌ها را کنار هم در قفسه قرار داد که کتاب‌ها برحسب درس یک‌درمیان باشند؟

۱) ۷۲ ۲) ۱۴۴ ۳) ۲۸۸ ۴) ۳۶

گزینهٔ «۲» الگوی قرارگرفتن کتاب‌ها فقط می‌تواند این‌جوری باشد:

(«ف» یعنی فیزیک و «ر» یعنی ریاضی) ف ر ف ر ف ر ف

اشاره وقتی nتا شیء از یک نوع با $n+1$ تا شیء از نوع دیگر در یک ردیف به صورت یک‌درمیان قرار گیرند، حتماً گروه بزرگ‌تر در اول و آخر صف است.

کتاب‌های فیزیک به ترتیب $۴!=۴\times۳\times۲\times۱$ و کتاب‌های ریاضی به ترتیب $۳!=۳\times۲\times۱$ حالت دارند. پس تعداد کل جایگشت‌ها با شرط یک‌درمیان می‌شود: $۴!۳!=۲۴\times۶=۱۴۴$

؟ حروف کلمهٔ «BAHAMA» را به چند طریق می‌توان چید که Aها یک‌درمیان باشند؟

۱) ۷۲ ۲) ۳۶ ۳) ۲۴ ۴) ۱۲

گزینهٔ «۴» سه‌تا حرف A و سه‌تا حرف دیگر داریم. وقتی تعداد دو گروه مساوی است، دو جور حالت یک‌درمیان وجود دارد:

الف) A * A * A *

ب) * A * A * A

یعنی در شروع صف از هر یک از گروه‌ها می‌شود قرار داد.

تعداد حالت‌ها برابر است با: $\underbrace{۱}_{\text{جایگشت Aها}} \times \underbrace{۳!}_{\text{جایگشت B,H,M}} \times \underbrace{۲}_{\text{انتخاب صف}}$ که می‌شود $۲\times۶=۱۲$.

دقت کردید؟ سه حرف A یکسان‌اند و جایگشت ندارند.

اشاره اگر در بین اشیایی که کنار هم قرار می‌دهیم تکراری هم باشد، تعداد حالت‌ها می‌شود:

$$\frac{\text{کل}\,!}{\text{تعداد تکرار}\,!}$$

مثلاً حروف A B C D E دارای $۵!$ حالت هستند.

اما برای A B C C C می‌شود $\frac{۵!}{۳!}$ و برای A B C D D می‌شود $\frac{۵!}{۲!}$.

؟ با کنار هم قرارگرفتن ارقام ۲, ۲, ۲, ۴, ۴, ۷ چند عدد شش‌رقمی می‌توان ساخت؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۲۴۰ ۳) ۳۶۰ ۴) ۶۰

گزینهٔ «۴» ۶ رقم در کنار هم $۶!$ حالت دارند. حالا چون ۳تا رقم ۲ داریم باید بر $۳!$ تقسیم کنیم و نیز به خاطر ۲تا رقم ۴، باید در مخرج $۲!$ هم بگذاریم.

تعداد جایگشت‌ها می‌شود:

$$\frac{۶!}{\underbrace{۳!}_{\text{سه‌تا رقم ۲ داریم.}}\;\underbrace{۲!}_{\text{دوتا ۴ داریم.}}}=\frac{۶\times۵\times۴\times۳\times۲\times۱}{۲\times۱\times۳\times۲\times۱}=۶۰$$

حالا بیایید با هم چند سؤال ترکیبی حل کنیم:

؟ با حروف A A A B B C C C D E E چند جایگشت می‌توان ساخت که حروف صدادار و بی‌صدا یک‌درمیان باشند؟

۱) ۱۲۰۰ ۲) ۳۶۰۰ ۳) ۴۰۰ ۴) ۶۰۰

گزینهٔ «۴» شش حرف بی‌صدا (BB CCC D) و پنج حرف صدادار (AAA EE) داریم و تعداد حالت‌های یک‌درمیان می‌شود: $۶!۵!$

حالا به خاطر تکرارها باید بنویسیم:

$$\underbrace{\frac{۶!}{\underset{\text{Bها}}{۳!}\times \underset{\text{Cها}}{۲!}}}\times \frac{۵!}{\underset{\text{Eها}}{۲!}\ \underset{\text{Aها}}{۳!}}$$

و جواب می‌شود $۱۰\times ۶۰=۶۰۰$.

اشاره اگر سؤال بالا می‌گفت حروف صدادار کنار هم باشند، چه‌طور می‌شد؟

$$\boxed{AAA\ EE}\ BBCCCD \Rightarrow \frac{۷!}{\underset{\text{Cها}}{۳!}\times \underset{\text{Bها}}{۲!}}\times \overbrace{\boxed{\frac{۵!}{۳!۲!}}}^{\text{درون جعبه}}$$

با جواب ۴۲۰۰ موافقید؟

آخرین مدل از این مسئله‌ها، سؤالاتی است که ترتیب خاصی برای اشیا می‌گویند. مثلاً می‌خواهند در جایگشت، A قبل از B باشد (معنی‌اش این است که A زودتر از B وارد یا خارج شده ولی نیازی نیست A و B کنار هم باشند).

مثلاً از بین ۶ جایگشت a, b, c، در ۳تا از آن‌ها a قبل از b است:

$\underline{\underline{abc}}, \underline{\underline{acb}}, bac, \underline{\underline{cab}}, cba, bca$

با یک تناسب ساده می‌توانیم نشان دهیم تعداد حالت‌هایی که r تا از اشیا به ترتیب مشخص باشند، برابر است با: $\frac{n!}{r!}$

؟ علی، رضا، سعید و سه نفر دیگر در صف ورود به قطار هستند. تعداد جایگشت‌های این شش نفر در کدام حالت از بقیه بیشتر است؟

۱) علی قبل از رضا باشد.
۲) علی قبل از رضا و بعد از سعید باشد.
۳) سعید نفر سوم باشد.
۴) علی نفر آخر نباشد.

گزینهٔ «۴» برای ۱ چون بین علی و رضا ترتیب خاص گفته، می‌شود $\frac{۶!}{۲!}$.

در ۲ بین سه نفر ترتیب را مشخص کرده، پس می‌شود $\frac{۶!}{۳!}$.

در ۳ جای سعید معلوم است و ۵ نفر دیگر جایگشت دارند: $۵!$.

در ۴ علی می‌تواند در ۵ جا قرار گیرد (به‌جز آخر) و سپس ۵ نفر دیگر $۵!$ حالت دارند، پس جواب می‌شود $۵\times ۵!$.

حاصل این‌ها به ترتیب ۳۶۰، ۱۲۰، ۱۲۰ و ۶۰۰ است و بنابراین ۴ از بقیه بیشتر است.

یک مثال سخت هم ببینید:

? با ارقام ۱، ۱، ۳، ۴ و ۵ چند عدد ۳رقمی می‌توان نوشت؟

۱) ۲۴ ۲) ۲۷ ۳) ۳۰ ۴) ۳۳

= گزینهٔ «۴» اگر گفته بود عدد ۵رقمی، به راحتی می‌گفتیم $\frac{5!}{\underset{\text{۱ها}}{\underset{\downarrow}{2!}}}$.

در مورد عدد ۴رقمی هم همین درست است. کلاً تعداد جایگشت‌های nتایی و $n-1$ تایی از n شیء با هم برابرند؛ اما الان عدد سه‌رقمی می‌خواهیم و مطمئن نیستیم که دوتا رقم ۱ در آن هست یا نه، پس مجبوریم دو حالت کنیم.

الف عدد سه‌رقمی بدون رقم تکراری: این عدد با ارقام ۱، ۳، ۴ و ۵ تولید می‌شود:

$$P(4,3)=\underline{4}\times\underline{3}\times\underline{2}=24$$

ب عدد سه‌رقمی شامل دوتا رقم ۱: این عدد حتماً با ارقام ۱، ۱ و ۳ یا ۱، ۱ و ۴ یا ۱، ۱ و ۵ ساخته شده که در هر حالت $\frac{3!}{2!}$ جایگشت دارد. پس تعداد اعداد سه‌رقمی از این نوع می‌شود:

$$3\times\frac{3!}{2!}=9$$

و روی هم $24+9=33$ تا عدد سه‌رقمی داریم.

یک مثال فانتزی هم ببینید:

? هشت شکلات یکسان را به چند طریق می‌توان بین سه نفر تقسیم کرد؟

۱) ۲۸ ۲) ۳۶ ۳) ۴۵ ۴) ۲۴

= گزینهٔ «۳» باید دوتا دیوار بین این ۸ شکلات قرار دهیم تا سهم هر کس معلوم شود.

مثلاً:

$\underbrace{\circ}_{\text{سهم نفر سوم}} \,|\, \underbrace{\circ\circ\circ\circ}_{\text{سهم نفر دوم}} \,|\, \underbrace{\circ\circ\circ}_{\text{سهم نفر اول}}$

پس ۸ شکلات و ۲ دیوار را کنار هم می‌چینیم. کلاً ۱۰ جسم داریم و تعداد جایگشت‌ها برابر است با:

$$\frac{10!}{2!\,8!}=\frac{10\times 9}{2}=45$$

ترکیب

اگر بخواهیم r تا از n شیء انتخاب کنیم و ترتیب مهم نباشد (جابه‌جا نشوند) می‌گوییم یک ترکیب rتایی از n شیء داریم، تعداد حالت‌های این انتخاب برابر است با:

$$C(\overset{\overset{\text{تعداد کل}}{\uparrow}}{n},\underset{\underset{\text{تعداد انتخابی}}{\downarrow}}{r})=\binom{n}{r}=\frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

اشاره $C(n,r)=\dfrac{P(n,r)}{r!}$

★ مثلاً ۳تا از ۷ نفر برمی‌داریم: $\binom{۷}{۳}$

★ ۴ کتاب از ۶ کتاب متمایز انتخاب می‌کنیم: $\binom{۶}{۴}$

★ دوتا از ارقام طبیعی کم‌تر از ۸ برمی‌داریم: $\binom{۷}{۲}$

برای حساب‌کردن جواب ترکیب‌ها، بهتر است فاکتوریل ننویسیم. این‌جوری عمل کنید:

$$\binom{۱۰}{۴}\xrightarrow[\text{و عدد پایینی را باز کنید.}]{\text{عددبالایی رابه تعداد پایینی باز کنید}}\frac{\overbrace{۱۰\times۹\times۸\times۷}^{\text{۴تا}}}{۴\times۳\times۲\times۱}\xrightarrow{\text{ساده‌کنید}}=۱۰\times۳\times۷=۲۱۰$$

$$\binom{۹}{۳}\xrightarrow[\text{۳ را باز کنید}]{\text{۹ را ۳ تا باز کنید}}\frac{\overset{۳}{\cancel{۹}}\times\overset{۴}{\cancel{۸}}\times۷}{\cancel{۳}\times\cancel{۲}\times۱}=۳\times۴\times۷=۸۴$$

? **از معادلهٔ $P(n-۱,۳)=۴\binom{n}{۴}$ مقدار n کدام است؟**

۱) ۶   ۲) ۸   ۳) ۱۰   ۴) ۱۲

گزینهٔ «۱» فرمول P و C را بنویسیم:

$$P(n-۱,۳)=\frac{(n-۱)!}{(n-۱-۳)!}=۴\times\frac{n!}{(n-۴)!۴!}$$

$$\xrightarrow{\text{(n-۴)! را بزنیم}}(n-۱)!=\frac{۴\times n!}{۴!}\xrightarrow[\text{(n-۱)! بزنیم}]{\text{n! را با}}۱=\frac{۴}{۴!}n\Rightarrow n=۳!=۶$$

⇦ خاصیت‌های ترکیب

این‌ها را حفظ باشید:

۱) $\binom{n}{۰}=\binom{n}{n}=۱$

۲) $\binom{n}{۱}=\binom{n}{n-۱}=n$

۳) $\binom{n}{۲}=\binom{n}{n-۲}=\dfrac{n(n-۱)}{۲}$

۴) $\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$

۵) $\binom{n}{r}+\binom{n}{r-۱}=\binom{n+۱}{r}$

۶) $\binom{n}{۰}+\binom{n}{۱}+\binom{n}{۲}+\cdots+\binom{n}{n-۱}+\binom{n}{n}=۲^n$

پس مثلاً:

$\binom{۴}{۰}=۱$ ، $\binom{۶}{۶}=۱$ ، $\binom{۷}{۱}=۷$

$\binom{۱۰}{۳}=\binom{۱۰}{۱۰-۳}=\binom{۱۰}{۷}$ ، $\binom{۱۰}{۲}=\dfrac{۱۰\times۹}{۲}=۴۵$ ، $\binom{۱۶}{۱۵}=۱۶$

$\binom{۱۰}{۰}+\binom{۱۰}{۱}+\binom{۱۰}{۲}+\cdots+\binom{۱۰}{۱۰}=۲^{۱۰}$ ، $\binom{۱۵}{۳}+\binom{۱۵}{۴}=\binom{۱۶}{۴}$

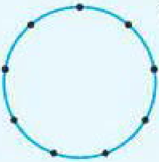
؟ حاصل $\binom{11}{2}+\binom{11}{3}+\binom{11}{4}+\cdots+\binom{11}{10}$ کدام است؟

۱) ۲۰۴۷ ۲) ۲۰۳۷ ۳) ۲۰۳۶ ۴) ۲۰۳۵

گزینهٔ «۴» اگر $\binom{11}{0}$ و $\binom{11}{1}$ و $\binom{11}{11}$ هم بودند طبق خاصیت ۶ جواب می‌شد 2^{11}.
الان باید این‌ها را کم کرد:

$$2^{11}-\binom{11}{0}-\binom{11}{1}-\binom{11}{11}=2^{11}-1-11-1=2048-13=2035$$

؟ با ۹ نقطه روی محیط دایره، چند ۴ضلعی یا ۵ضلعی می‌توان ساخت؟



۱) $\binom{9}{6}$ ۲) $\binom{10}{5}$

۳) $\binom{10}{6}$ ۴) $\binom{9}{5}$

گزینهٔ «۲» باید ۴تا از ۹ نقطه یا ۵تا از ۹ نقطه برداریم:

$$\binom{9}{4}+\binom{9}{5}\xrightarrow{\text{خاصیت (۵)}}=\binom{10}{5}$$

اشاره تعداد زیرمجموعه‌های rعضوی از مجموعهٔ nعضوی برابر $\binom{n}{r}$ است.

پس مجموعهٔ ۱۰عضوی دارای $\binom{10}{3}$ زیرمجموعهٔ ۳ عضوی است.

؟ تعداد زیرمجموعه‌های ۴عضوی و ۵عضوی از مجموعهٔ A با هم برابر است. این مجموعه چند زیرمجموعهٔ زوج‌عضوی دارد؟

۱) ۵۱۲ ۲) ۲۵۶ ۳) ۳۳۶ ۴) ۱۲۸

گزینهٔ «۲» سؤال می‌گوید $\binom{n}{5}=\binom{n}{4}$ پس طبق خاصیت ۴ داریم:

$$n-4=5 \Rightarrow n=9$$

اشاره گاهی اوقات این‌طوری می‌گویند که از شرط $\binom{n}{b}=\binom{n}{a}$ نتیجه می‌شود $a=b$ یا $a+b=n$.

پس مجموعهٔ ۹ عضوی داریم و تعداد زیرمجموعه‌های زوج‌عضوی آن برابر است با:

$$\binom{9}{0}+\binom{9}{2}+\binom{9}{4}+\binom{9}{6}+\binom{9}{8}=1+36+126+84+9=256$$

اشاره تعداد زیرمجموعه‌های زوج‌عضوی و نیز فردعضوی از مجموعهٔ nعضوی با هم برابرند و جواب هر دو 2^{n-1} است؛ مثلاً:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots=2^{n-1}$$

$$\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\cdots=2^{n-1}$$

از بین ۵ داور و ۴ مربی و ۳ کشتی‌گیر به چند طریق می‌توان سه نفر انتخاب کرد که حداقل یکی داور باشد اما هر سه داور نباشند؟

۱) ۲۱۵ ۲) ۱۷۵ ۳) ۷۰ ۴) ۱۰۵

گزینهٔ «۲» سؤال می‌گوید ۱ یا ۲ داور برداریم، پس برای تکمیل سه نفر انتخابی باید ۲ یا ۱ نفر از بقیه برداریم:

$$\underbrace{\binom{5}{1}}_{\text{یک داور}} \overset{\text{و}}{\times} \underbrace{\binom{7}{2}}_{\text{دوتا از بقیه}} \overset{\text{یا}}{+} \underbrace{\binom{5}{2}}_{\text{دو داور}} \overset{\text{و}}{\times} \underbrace{\binom{7}{1}}_{\text{یکی از بقیه}} = (5\times\frac{7\times6}{2})+(\frac{5\times4}{2}\times7)$$

$$=(5\times21)+(10\times7)=175$$

از رشته‌های شنا، کشتی، تکواندو، کاراته و تیراندازی هر کدام ۵ نفر به مسابقه‌های آسیایی اعزام شده‌اند. به چند طریق می‌توان ۴ نفر از بین آن‌ها انتخاب کرد که فقط دوتا هم‌رشته در بین افراد انتخابی باشد؟

۱) ۷۵۰۰ ۲) ۱۲۵۰۰ ۳) ۲۵۰۰ ۴) ۶۲۵۰

گزینهٔ «۱» این ۴ نفر باید از ۳ رشتهٔ مختلف باشند (چرا؟).

اول یک رشته برمی‌داریم: $\binom{5}{1}$

و ۲ نفر از ۵ نفر آن رشته را انتخاب می‌کنیم: $\binom{5}{2}$

سپس از ۴ رشتهٔ مانده، دو رشته را انتخاب می‌کنیم: $\binom{4}{2}$

و از هر کدام یکی از ۵ نفر را می‌آوریم: $\binom{5}{1}\binom{5}{1}$

پس جواب می‌شود: $\underbrace{\binom{5}{1}}_{\text{رشتهٔ اول}} \times \underbrace{\binom{5}{2}}_{\text{دو نفر آن رشته}} \times \underbrace{\binom{4}{2}}_{\text{دو رشتهٔ بعدی}} \times \underbrace{\binom{5}{1}\times\binom{5}{1}}_{\text{دو نفر بعدی}} = 5\times10\times6\times5\times5=7500$

از میان ۴ مهرهٔ آبی، ۳ مهرهٔ قرمز، ۵ مهرهٔ سفید و ۲ مهرهٔ سبز به چند طریق می‌توان ۴ مهره برداشت که حداقل ۲تا قرمز و حداکثر یکی آبی باشد؟

۱) ۶۳ ۲) ۸۴ ۳) ۹۶ ۴) ۱۵۱

گزینهٔ «۴» ۲ قرمز و هیچ آبی خوب است و باید از بین سفید و سبزها هم ۲تا برداریم:

$$\overbrace{\binom{3}{2}}^{\text{قرمز}}\overbrace{\binom{4}{0}}^{\text{آبی}}\overbrace{\binom{7}{2}}^{\text{بقیه}}=3\times1\times21=63$$

۲ قرمز و یک آبی هم خوب است و به یک مهره از بین سفید و سبز هم نیاز دارد:

$$\overbrace{\binom{3}{2}}^{\text{قرمز}}\overbrace{\binom{4}{1}}^{\text{آبی}}\overbrace{\binom{7}{1}}^{\text{بقیه}}=3\times 4\times 7=84$$

۳ قرمز و یک آبی هم خوب است و نیازی به مهرهٔ سفید و سبز نیست.

$$\overbrace{\binom{3}{3}}^{\text{قرمز}}\overbrace{\binom{4}{1}}^{\text{آبی}}\overbrace{\binom{7}{0}}^{\text{بقیه}}=1\times 4\times 1=4$$

پس روی هم $63+84+4=151$ حالت مورد قبول‌اند.

؟ در یک مغازهٔ بستنی‌فروشی بعد از انتخاب بستنی می‌توانیم از بین ۱۰ نوع افزودنی ۳تا را روی بستنی اضافه کنیم. در کدام شرط انتخاب‌های کم‌تری داریم؟

۱) پودر پسته، گردو و خامه، هر سه با هم انتخاب نشوند.

۲) از بین ۵ نوع ژله، فقط یکی را برداریم.

۳) از بین پودر پسته و گردو و نارگیل دقیقاً ۲تا را برداریم.

۴) اسمارتیز و پسته فقط با هم انتخاب شوند.

= گزینهٔ «۳» کل انتخاب‌ها، $\binom{10}{3}=\frac{10\times 9\times 8}{3\times 2\times 1}=120$ حالت دارد.

در ۱ فقط یک انتخاب (پسته، گردو، خامه) را نداریم و ۱۱۹ حالت موجود است.

در ۲ یکی از ۵ نوع ژله و دوتا از بین سایر اقلام برمی‌داریم:

$$\binom{5}{1}\times\binom{5}{2}=5\times 10=50$$

در ۳ از بین آن‌ها ۲تا و از بین ۷ چیز دیگر باید یکی برداریم:

$$\binom{3}{2}\times\binom{7}{1}=21$$

در ۴ دو حالت داریم: اسمارتیز و پسته و یکی از ۸ چیز دیگر را برمی‌داریم یا اصلاً اسمارتیز و پسته را بر نداریم و هر سه را از ۸ چیز دیگر انتخاب کنیم:

$$\binom{2}{2}\binom{8}{1}+\binom{2}{0}\binom{8}{3}=1\times 8+1\times 56=64$$

پس شرط ۳ از همه، انتخاب کم‌تری دارد.

تعریف‌های اولیه را با هم مرور کنیم.

۱ پدیده‌هایی که از نتیجهٔ آن‌ها (تا قبل از انجام کار) اطلاع نداریم، آزمایش یا پدیدهٔ تصادفی نام دارند.

۲ فضای نمونه‌ای، مجموعهٔ تمام نتایج ممکن در یک پدیدهٔ تصادفی است.

۳ برآمد، هر یک از عضوهای فضای نمونه‌ای یعنی هر یک از نتیجه‌های ممکن آزمایش است.

مثلاً در آزمایش تصادفی پرتاب یک تاس، فضای نمونه‌ای $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ است که شش برآمد دارد.

۴ به هر زیرمجموعه از فضای نمونه‌ای یک پیشامد گفته می‌شود. مثلاً چون در پرتاب یک تاس فضای نمونه‌ای ۶ عضوی است به تعداد زیرمجموعه‌های آن یعنی $۶۴ = ۲^۶$ پیشامد داریم. چندتا از آن‌ها را ببینید:

$$A_۱=\{۲\}\ ,\ A_۲=\{۴,۶\}\ ,\ A_۳=\{۱,۳,۵\}\ ,\ A_۴=\{۳,۴,۵,۶\}$$

البته خود S و نیز $\varnothing$ هم جزء پیشامدها هستند.

۵ رخ‌دادن یک پیشامد یعنی نتیجهٔ آزمایش، عضوی از آن باشد. مثلاً اگر تاس را پرتاب کنیم و ۳ بیاید پیشامدهای $A_۱,A_۳,A_۴$ که در بالا معرفی کردیم، رخ داده‌اند اما $A_۲$ رخ نداده است.

؟ در پرتاب ۲ سکه با هم چند پیشامد ۲ عضوی داریم؟

۱) ۲   ۲) ۴   ۳) ۶   ۴) ۸

= گزینهٔ «۳» در پرتاب دو سکه فضای نمونه‌ای ۴ عضو دارد: $S=\{\text{رر},\text{رپ},\text{پر},\text{پپ}\}$

تعداد زیرمجموعه‌های (یعنی همان پیشامدهای) دوعضوی برابر است با: $\binom{۴}{۲}=\frac{۴\times ۳}{۲}=۶$

اشاره تعداد اعضای فضای نمونه‌ای را در آزمایش‌های زیر به خاطر بسپاریم.

آزمایش	پرتاب k سکه	پرتاب k تاس	انتخاب k تا از m شیء	چیدن m شیء کنار هم
تعداد اعضای فضا	$n(S)=۲^k$	$n(S)=۶^k$	$n(S)=\binom{m}{k}$	$n(S)=m!$
مثال	در پرتاب سه سکه $n(S)=۲^۳$ یعنی ۸ است.	در پرتاب دو تاس $n(S)=۶^۲$ یعنی ۳۶ است.	وقتی از کیسه‌ای شامل ۸ مهره ۲ تا را انتخاب می‌کنیم. $n(S)=\binom{۸}{۲}=۲۸$	اگر ۵ نفر کنار هم در صف بایستند. $n(S)=۵!=۱۲۰$

❓ **تاسی را می‌اندازیم. اگر زوج آمد ۲ سکه و اگر فرد آمد یک سکه پرتاب می‌کنیم. فضای نمونه‌ای این آزمایش چند عضو دارد؟**

۱) ۵ ۲) ۱۸ ۳) ۳۰ ۴) ۱۲

✅ **گزینهٔ «۲»** ببینید:

$$n(S) = ۳\times۲+۳\times۴=۱۸$$

قیافهٔ فضای نمونه‌ای را هم ببینید:

S={(۲,پپ),(۲,رپ),(۲,پر),(۲,رر),(۵,ر),(۵,پ),(۳,ر),(۳,پ),(۱,ر),(۱,پ),
(۶,پپ),(۶,رپ),(۶,پر),(۶,رر),(۴,پپ),(۴,رپ),(۴,پر),(۴,رر)}

❓ **در کدام آزمایش، فضای نمونه‌ای تعداد بیشتری عضو دارد؟**

۱) بررسی فصل تولد ۳ نفر ۲) بررسی جنسیت و حرف اول انگلیسی نام یک نفر

۳) بررسی روز تولد ۲ نفر در هفته ۴) پرتاب ۳ سکه و یک تاس با هم

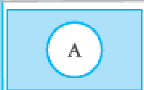
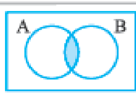
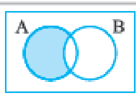
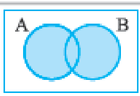
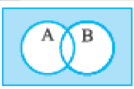
✅ **گزینهٔ «۱»** در ۱ فصل تولد هر نفر ۴ حالت و در نتیجه فصل تولد ۳ نفر $n(S)=۴\times۴\times۴=۶۴$ حالت دارد.

در ۲ جنسیت ۲ حالت و حرف اول انگلیسی نام، ۲۶ حالت دارد. پس: $n(S)=۲\times۲۶=۵۲$

در ۳ روز تولد هر نفر در هفته ۷ حالت دارد و برای دو نفر داریم: $n(S)=۷\times۷=۴۹$

در ۴ برای سکه‌ها $۲^۳$ و برای تاس ۶ داریم، پس $n(S)=۲^۳\times۶=۴۸$ و ۱ از همه بیشتر است.

اعمال روی پیشامدها

پیشامد	A'	$A\cap B$	$A-B$ $(A\cap B')$	$A\cup B$	$A'\cap B'$ $(A\cup B)'$
تعریف	A رخ ندهد.	A و B هر دو با هم رخ دهند.	فقط A رخ دهد، A رخ دهد و B رخ ندهد.	A یا B یا هر دو رخ دهند. (حداقل یکی از آن‌ها)	نه A و نه B هیچ‌کدام رخ ندهند.
نمودار ون					
چه کار کنیم	اعضای S که در A نیستند را می‌نویسیم.	فقط اعضای مشترک A و B را می‌نویسیم.	از عضوهای A مشترک‌ها با B را خط می‌زنیم.	اعضای A و B را در یک مجموعه کنار هم می‌آوریم و تکراری‌ها را یک بار می‌نویسیم.	از کل S، اعضای A و اعضای B را خط می‌زنیم.

اشاره خواص متمم را به یاد دارید که $A \cup A' = S$ و $A \cap A' = \varnothing$.

اشاره اگر A و B اشتراک نداشته باشند، آن‌ها را جدا از هم یا ناسازگار می‌نامیم. (همیشه A و A' ناسازگارند.) برای ۳ پیشامد ناسازگار باید اشتراک هر دوتای آن‌ها $\varnothing$ شود.

؟ در پرتاب دو تاس A پیشامد رو شدن دو عدد با مجموع ۹ و B پیشامد رو شدن دو عدد با اختلاف ۴ و C پیشامد رو شدن ۵ در تاس اول است. کدام درست است؟

۱) A و B ناسازگارند. ۲) A و C ناسازگارند. ۳) B و C ناسازگارند. ۴) $n(B) > n(A)$

گزینهٔ «۱» معمولاً پیشامدهای دو تاس را در صفحهٔ شطرنجی می‌آوریم.

A پیشامدی ۴عضوی به صورت زیر است:

$$A = \{(۳,۶),(۶,۳),(۵,۴),(۴,۵)\}$$

پیشامد B به شکل زیر است:

$$B = \{(۱,۵),(۲,۶),(۵,۱),(۶,۲)\}$$

تاس اول ←

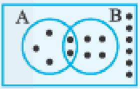
تاس دوم \ تاس اول	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱					BC	
۲					C	B
۳					C	A
۴					AC	
۵	B			A	C	
۶		B	A		C	

حالت‌هایی که مجموع ۹ است.

تاس دوم — حالت‌هایی که اختلاف ۴ است. — حالت‌هایی که تاس اول ۵ است.

(مثل A چهار عضو دارد) و در پیشامد C اعضای $\left\{\begin{matrix}(۵,۱)(۵,۳)(۵,۵)\\(۵,۲)(۵,۴)(۵,۶)\end{matrix}\right\}$ را داریم که هم با A و هم با B در یک عضو مشترک است (سازگار است). موافقید که A و B ناسازگارند و اشتراکی ندارد؟

؟ در فضای نمونه‌ای مقابل هر نقطه نمایانگر عضوی از S است. پیشامد .... دارای .... عضو است.



۱) رخ‌دادن حداکثر یکی از A و B، ۷ ۲) رخ‌دادن فقط یکی از A و B، ۸

۳) رخ‌دادن A یا B'، ۱۰ ۴) رخ‌دادن هیچ‌یک از آن‌ها، ۶

گزینهٔ «۴» در ۱ حداکثر یکی از A و B یعنی $A \cap B$ قبول نیست؛ پس:

$$\underbrace{n(A' \cup B')}_{\text{حداکثر یکی از A و B}} = n(S) - n(A \cap B) = ۱۵ - ۲ = ۱۳ \quad ✗$$

در ۲ فقط یکی از A و B یعنی $(A - B) \cup (B - A)$ که در شکل $۳ + ۴ = ۷$ عضو دارد. ✗

در ۳ A یا B' یعنی $A \cup B'$، یعنی نقاطی که در A هست یا در B نیست را می‌خواهیم، پس فقط ۴ عضو مربوط به B قبول نیستند و $۱۵ - ۴ = ۱۱$ عضو دارد. ✗

در ۴ هیچ‌یک از آن‌ها، یعنی ناحیهٔ خارج A و B که ۶ عضو دارد. ✓

؟ در پرتاب تاس چند پیشامد ۳ عضوی با پیشامد رو شدن عدد مضرب ۳ ناسازگارند؟

۱) ۴ ۲) ۱۲ ۳) ۶ ۴) ۳

گزینهٔ «۱» صورت سؤال یعنی $\underbrace{S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}}_{\text{فضای نمونه‌ای تاس}}$ چند $\underbrace{\text{زیرمجموعهٔ}}_{\text{پیشامد}}$ ۳ عضوی دارد

که با $\{۳,۶\}$ $\underbrace{\text{اشتراک ندارند}}_{\text{ناسازگارند}}$، خب باید ۳ تا عضو از ۱,۲,۴,۵ برداریم که تعداد حالت‌های آن

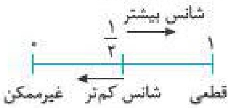
می‌شود: $\binom{۴}{۳}=۴$

فرمول احتمال ساده

احتمال پیشامد A از فضای نمونه‌ای S برابر است با: $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}$

واضح است که $A\subseteq S$ و داریم:

$P(\varnothing)=۰ \quad , \; P(S)=۱ \;, \; ۰\le P(A)\le ۱$



سؤالات در این قسمت ممکن است مربوط به عددسازی، کلمه‌سازی، انتخاب مهره‌ها، تاس، فرزندان، سکه یا جایگشت اشیا باشد.

سایر فرمول‌های احتمال

۱ احتمال متمم A برابر است با $P(A')=۱-P(A)$.

۲ اگر $A\subseteq B$ باشد $P(A)\le P(B)$.

۳ اگر A و B دو پیشامد باشند $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ که در حالت ناسازگار به $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$ تبدیل می‌شود.

۴ در حالت کلی $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$ و در حالت ناسازگار $P(A-B)=P(A)$.

۵ احتمال این‌که نه A و نه B رخ دهند برابر است با: $P(A'\cap B')=P(A\cup B)'=۱-P(A\cup B)$

۶ احتمال این‌که فقط یکی از آن‌ها رخ دهد برابر است با: $P(A-B)+P(B-A)$

؟ از اعداد دورقمی که با ارقام متمایز ۱,۲,۳,۶ می‌توان نوشت، عددی برمی‌داریم. اگر A پیشامد «انتخاب عدد بیشتر از ۴۰» و B پیشامد «انتخاب عدد مضرب ۳» باشند. شانس A' چه‌قدر بیشتر از B است؟

۱) صفر   ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

گزینهٔ «۴» اول فضای نمونه‌ای:

$S=\{۱۲,۱۳,۱۶,۲۱,۲۳,۲۶,۳۱,۳۲,۳۶,۶۱,۶۲,۶۳\}$

$n(S)=\frac{۴}{\;}\times\frac{۳}{\;}=۱۲$

حالا پیشامدها:

$$A=\{۶۱,۶۲,۶۶\}\Rightarrow n(A)=۳$$
$$B=\{۱۲,۲۱,۳۶\}\Rightarrow n(B)=۳$$

پس $P(A)=P(B)=\frac{۳}{۱۲}=\frac{۱}{۴}$. شانس A' می‌شود $P(A')=۱-P(A)=\frac{۳}{۴}$ و در نتیجه:

$$P(A')-P(B)=\frac{۳}{۴}-\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۲}$$

در خانواده‌ای با ۳ فرزند با کدام احتمال سومی پسر است یا تعداد دخترها بیشتر است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۵}{۸}$ ۳) $\frac{۷}{۸}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

گزینهٔ «۳» اول فضای نمونه‌ای:

$$S=\left\{\begin{matrix} \text{ددد} & \text{پپپ} \\ \text{پدد} & \text{دپپ} \\ \text{دپد} & \text{پدپ} \\ \text{ددپ} & \text{دپپ} \end{matrix}\right\} \qquad n(S)=۲^۳=۸$$

حالا سومی پسر است یا تعداد دخترها بیشتر است:

$$A=\{\text{حالت‌هایی که سومی پسر است.}\}=\{\text{پدد, پپد, پدپ, پپپ}\}$$

$$B=\{\text{حالت‌هایی که تعداد دخترها بیشتر است.}\}=\{\text{ددپ, دپد, پدد, ددد}\}$$

می‌بینید که A و B هر دو ۴ عضوی‌اند (پس هم‌شانس‌اند) و عضو «پ د د» مشترک است. پس:

$$P(A\cup B)=\frac{n(A\cup B)}{n(S)}=\frac{۴+۴-۱}{۸}=\frac{۷}{۸}$$

از کیسه‌ای شامل ۴ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه و ۲ مهرهٔ قرمز. سه‌تا مهره با هم خارج می‌کنیم. با کدام احتمال حداقل یکی سفید است اما هر سه سفید نیست؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۵}{۶}$ ۴) $\frac{۱۳}{۱۴}$

گزینهٔ «۳» اول فضای نمونه‌ای:

$$n(S)=\text{تعداد انتخاب‌های ۳تا از مهره‌ها}=\binom{۹}{۳}=\frac{۹\times۸\times۷}{۳\times۲\times۱}=۸۴$$

راه‌حل اول حالت‌هایی که حداقل یکی سفید است اما هر سه سفید نیستند:

$$n(A)=\underbrace{\binom{۴}{۱}}_{\text{یک سفید}}\times\underbrace{\binom{۵}{۲}}_{\text{دوتا قرمز یا سیاه}}+\underbrace{\binom{۴}{۲}}_{\text{دو سفید}}\times\underbrace{\binom{۵}{۱}}_{\text{یک مهره سیاه یا قرمز}}=۴\times۱۰+۶\times۵=۴۰+۳۰=۷۰$$

پس:

$$P(A)=\frac{۷۰}{۸۴}=\frac{۵}{۶}$$

راه‌حل دوم حالت‌های صفر سفید و ۳ سفید را از کل برداریم:

$$n(A)=\underbrace{\binom{۹}{۳}}_{\text{کل حالات}}-\underbrace{\binom{۴}{۳}}_{\text{هر سه سفید}}-\underbrace{\binom{۴}{۰}\binom{۵}{۳}}_{\text{هیچ سفید}}=۸۴-۴-۱۰=۷۰$$

و احتمال همان $\frac{۵}{۶}=\frac{۷۰}{۸۴}$ است.

؟ در پرتاب دو تاس با کدام احتمال مجموع ارقام روشده مضرب ۵ یا ۶ است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱۱}{۳۶}$ ۴) $\frac{۱۳}{۳۶}$

= گزینهٔ «۴» تعداد اعضای فضای نمونه‌ای $n(S)=۶^۲=۳۶$ است. ما مجموع‌های ۵,۶,۱۰,۱۲ را می‌خواهیم.

اشاره بعضی‌ها این جدول را حفظ کردند:

جمع دو تاس	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
تعداد حالت	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۵	۴	۳	۲	۱

پس مجموع‌های ۵,۶,۱۰,۱۲ با هم دارای $۴+۵+۳+۱=۱۳$ حالت هستند و داریم:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۳}{۳۶}$$

؟ پدر، مادر و سه فرزند در یک ردیف می‌ایستند. با کدام احتمال پدر و مادر کنار هم نیستند و در ابتدای ردیف حتماً یک فرزند است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۵}{۶}$

= گزینهٔ «۱» تعداد اعضای فضای نمونه‌ای $n(S)=۵!=۱۲۰$ است. حالا باید یک فرزند اول باشد و پدر و مادر مجاور نباشند.

$n(A)=$ تعداد کل حالات - تعداد حالاتی که پ و م کنار هم هستند

$$=\underbrace{۵}_{\text{فرزند اول}}\times\underbrace{۴!}_{\text{۴ نفر دیگر}}-\underbrace{۵}_{\text{فرزند اول}}\times\underbrace{۳!}_{\text{ففمپ}}\times\underbrace{۲!}_{\text{درون دسته}}=۵\times۲۴-۵\times۶\times۲=۶۰$$

پس:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱}{۲}$$

؟ اگر $P(A)=\frac{۱}{۲}$، $P(B)=\frac{۱}{۳}$ و $P(A\cap B)=\frac{۱}{۱۲}$ احتمال رخ‌دادن حداقل یکی از آن‌ها چند برابر احتمال این است که فقط A رخ دهد؟

۱) ۱/۶ ۲) ۱/۷ ۳) ۱/۸ ۴) ۱/۹

گزینهٔ «۳»

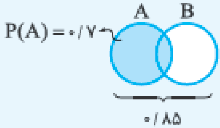
$$\frac{P(A\cup B)}{P(A-B)}=\frac{P(A)+P(B)-P(A\cap B)}{P(A)-P(A\cap B)}=\frac{\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۱۲}}{\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۱۲}}$$

$$=\frac{\frac{۶+۴-۱}{۱۲}}{\frac{۶-۱}{۱۲}}=\frac{۹}{۵}=۱/۸$$

اگر $P(A')=۰/۳$ و $P(A\cup B)=۰/۸۵$ ، مقدار $P(B\cap A')$ کدام است؟

۱) $۰/۵۵$ ۲) $۰/۱۵$ ۳) $۰/۳$ ۴) $۰/۴۵$

گزینهٔ «۲» نمودار را ببینید:



از $P(A')=۰/۳$ نتیجه می‌شود $P(A)=۰/۷$.

نمودار ون می‌گوید:

$$P(B\cap A')=P(B-A)=۰/۸۵-۰/۷=۰/۱۵$$

پیشامدهای مستقل و احتمال شرطی

در مسائل احتمال شرطی، پیش‌فرض داریم، یعنی از نتیجهٔ آزمایش یک خبر کوچک داریم! مثلاً در پرتاب تاس سؤال می‌گوید: «می‌دانیم عدد روشده مضرب ۳ نیست.»

خب، این خبر یعنی فضای نمونه‌ای دیگر $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ نیست؛ چون می‌دانیم عدد روشده مضرب ۳ نیست (۳ یا ۶ نیست)، فضای نمونه‌ای می‌شود: $S=\{۱,۲,۴,۵\}$، حالا سؤال می‌پرسد: «با کدام احتمال عدد بیشتر از ۴ آمده؟» پس پیشامد موردنظر می‌شود $A=\{۵\}$ و داریم: $P=\frac{۱}{۴}$

یک بار دیگر مقایسه کنید:

حالت شرطی		حالت عادی
$S=\{۱,۲,۴,۵\}$	$\xleftarrow[\text{عدد مضرب ۳ نیست.}]{\text{پیش‌فرض:}}$	$S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$
$A=\{۵\}$		$A=\{۵,۶\}$

این‌جوری یاد بگیرید که وجود پیش‌فرض، فضای نمونه‌ای و پیشامد را محدود می‌کنند. اگر پیش‌فرض B باشد، فرمول این‌جوری می‌شود:

$$P(A\underset{\text{به شرط}}{|}\underset{\text{پیش‌فرض}}{B})=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

حالا دو نوع تست داریم:

الف تست‌هایی که آزمایش را مشخص می‌کنند؛ ما فضای نمونه‌ای را محدود کرده و از فرمول $\frac{n(A\cap B)}{n(B)}$ استفاده می‌کنیم.

ب تست‌هایی که مقادیر احتمال را می‌دهند؛ از فرمول $\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ می‌رویم.

در پرتاب ۳ سکه، اگر همهٔ پرتاب‌ها مثل هم نباشند، با کدام احتمال سکهٔ دوم و سوم یکسان‌اند؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۸}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

گزینهٔ «۱» فضای نمونه‌ای پرتاب ۳ سکه در حالت عادی، $۸ = ۲^۳$ عضو دارد:

$$S = \{پپپ، پپر، پرپ، رپپ، ررپ، رپر، پرر، ررر\}$$

سؤال گفته همهٔ پرتاب‌ها مثل هم نیستند! این شرط، دوتا از اعضای S را کم می‌کند:

$$\text{فضای نمونه‌ای جدید} = B = \{پپر، پرپ، رپپ، ررپ، رپر، پرر\}$$

دور حالت‌هایی که دومی و سومی مثل هم باشند، خط کشیده‌ایم. پس:

$$P(\text{دومی و سومی مثل هم} \mid \text{همه مثل هم نباشند}) = \frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۳}$$

اشاره در فضای نمونه‌ای اولیه (غیرشرطی) احتمال این‌که دومی و سومی مثل هم باشند $\frac{۴}{۸} = \frac{۱}{۲}$ است. می‌بینید که پیش‌فرض مسئله یعنی «همهٔ پرتاب‌ها مثل هم نیستند» احتمال را از $\frac{۱}{۲}$ به $\frac{۱}{۳}$ کاهش داد (احتمال به اندازهٔ $\frac{۱}{۶}$ کم‌تر شد).

در ظرفی ۶ گوی با شماره‌های ۱ تا ۶ داریم. دو گوی از بین آن‌ها برمی‌داریم و می‌بینیم هیچ‌کدام مضرب ۳ نیست. با کدام احتمال شماره‌های انتخابی متوالی‌اند؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

گزینهٔ «۲» شرط سؤال می‌گوید دو گوی را از بین ۱،۲،۴،۵ برداشته‌ایم، پس فضای نمونه‌ای محدودشده دارای $\binom{۴}{۲} = ۶$ عضو است. این ۶ عضو را ببینید:

$$B = \{\underline{\underline{۱۲}}, ۱۴, ۱۵, ۲۴, ۲۵, \underline{\underline{۴۵}}\}$$

در بین این‌ها ۱۲ و ۴۵ متوالی‌اند؛ پس:

$$P(\text{متوالی} \mid \text{هیچ‌کدام مضرب ۳ نیست}) = \frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۳}$$

اشاره در فضای نمونه‌ای غیرشرطی، $\binom{۶}{۲} = ۱۵$ عضو داریم و حالت‌های ۱۲، ۲۳، ۳۴، ۴۵ و ۵۶ متوالی‌اند. پس احتمال متوالی‌بودن در حالت غیرشرطی هم می‌شود $\frac{۵}{۱۵} = \frac{۱}{۳}$. دیدید؟! پیش‌فرض مسئله، احتمال متوالی‌بودن را عوض نکرد.

کارمندان یک شرکت دارویی در جدول زیر دسته‌بندی شده‌اند. اگر کارمندی زن باشد، با کدام احتمال مدرک او لیسانس است؟

مدرک / جنس	لیسانس	ارشد	دکترا
مرد	۲۰	۱۰	۵
زن	۶	۵	۴

۱) ۰/۱

۲) ۰/۴

۳) ۰/۳

۴) ۰/۵۲

گزینهٔ «۲» فضای نمونه‌ای به کارمندان زن محدود شده است:

مدرک / جنس	لیسانس	ارشد	دکترا
زن	۶	۵	۴

پس $n(B)=۱۵$ و می‌خواهیم لیسانس باشد.

$$P(\text{لیسانس} \mid \text{زن}) = \frac{n(\text{لیسانس و زن})}{n(\text{زن})} = \frac{۶}{۱۵} = \frac{۲}{۵} = ۰/۴$$

اشاره احتمال لیسانس‌بودن در کل فضا $\frac{۲۶}{۵۰}$ یعنی ۰/۵۲ است و شرط زن‌بودن این احتمال را ۰/۱۲ کاهش داد و به ۰/۴۰ رساند.

اگر فرد B قبول شود، احتمال قبولی فرد A برابر $\frac{۱}{۳}$ خواهد بود. حاصل $P(A'|B)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

گزینهٔ «۳» ببینید:

$$P(A'|B) = \frac{P(A'\cap B)}{P(B)} = \frac{P(B-A)}{P(B)} = \frac{P(B)-P(A\cap B)}{P(B)}$$

$$= ۱ - \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = ۱ - P(A|B)$$

پس ثابت کردیم که: $P(A'|B) = ۱ - P(A|B)$

و جواب می‌شود: $۱ - \frac{۱}{۳} = \frac{۲}{۳}$

در پرتاب دو تاس با هم مجموع ارقام روشده حداقل ۵ است. با کدام احتمال هر دو رقم روشده زوج هستند؟

۱) $\frac{۲}{۹}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۱۰}$ ۴) $\frac{۴}{۱۵}$

گزینهٔ «۴» فضای نمونه‌ای شامل برآمدهایی است که جمع رقم‌ها ۵ یا بیشتر شود. پس حالت‌های ۱۱، ۱۲، ۲۱، ۳۱، ۲۲، ۱۳ قبول نیستند.

یه‌جوردیگه این را به یاد دارید:

جمع دو تاس	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
حالت	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۵	۴	۳	۲	۱

$\underbrace{۲ \quad ۳ \quad ۴}_{\text{این‌ها را نمی‌خواهیم.}}$ $\underbrace{۵ \quad \dots \quad ۱۲}_{\text{جمع حداقل ۵ است.}}$

پس فضای نمونه‌ای محدود شده $۳۶ - ۶ = ۳۰$ عضو دارد. می‌خواهیم هر دو رقم روشده زوج باشند. مجموعه حالت‌های موردنظر $\{۲۴, ۴۲, ۲۶, ۶۲, ۴۶, ۶۴, ۴۴, ۶۶\}$ است که هشت عضو دارد.

پس: $P(\text{هر دو زوج} \mid \text{مجموع حداقل ۵}) = \frac{۸}{۳۰} = \frac{۴}{۱۵}$

اشاره در حالت عادی (غیرشرطی) احتمال زوج‌بودن هر دو تاس $\frac{۹}{۳۶} = \frac{۱}{۴}$ است. با فرض جمع بیشتر از ۴، این احتمال به $\frac{۴}{۱۵}$ رسید. پس پیش‌فرض مسئله احتمال را به اندازهٔ $\frac{۴}{۱۵} - \frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۶۰}$ افزایش داد.

؟ اگر $P(A) = \frac{۱}{۲}$، $P(B) = \frac{۱}{۳}$ و $P(A \cap B) = \frac{۱}{۵}$، مقدار $P(B \mid A)$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $۰/۶$ ۳) $۰/۴$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

گزینهٔ «۳» فرق صورت این سؤال با سؤالات قبلی را متوجه شدید؟ آزمایش را نداریم و مقادیر احتمال داده شده است. فرمولش این بود:

$$P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

احتمال شرطی برابر است با احتمال اشتراک، تقسیم بر احتمال دومی.

پس:

$$P(B \mid A) = \frac{\frac{۱}{۵}}{\frac{۱}{۲}} = \frac{۲}{۵} = ۰/۴$$

؟ اگر $P(A) = \frac{۱}{۴}$، $P(B - A) = \frac{۱}{۵}$ و $P(B \mid A) = \frac{۲}{۳}$، مقدار $P(A \mid B')$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۱}{۳۰}$ ۲) $\frac{۱۹}{۳۰}$ ۳) $\frac{۵}{۱۹}$ ۴) $\frac{۵}{۳۸}$

گزینهٔ «۴» اول فرمول‌ها را بنویسیم:

$$P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)=\frac{۱}{۵}$$

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)} \Rightarrow \frac{۲}{۳}=\frac{P(A\cap B)}{\frac{۱}{۴}}$$

پس مقدار $P(A\cap B)$ برابر است با:

$$P(A\cap B)=\frac{۱}{۴}\times\frac{۲}{۳}=\frac{۱}{۶}$$

و با قراردادن در معادلهٔ اولی داریم:

$$P(B)-\frac{۱}{۶}=\frac{۱}{۵} \Rightarrow P(B)=\frac{۱۱}{۳۰}$$

حالا سؤال $P(A|B')$ را می‌خواهد:

$$P(A|B')=\frac{P(A\cap B')}{P(B')}=\frac{P(A-B)}{P(B')}=\frac{P(A)-P(A\cap B)}{۱-P(B)}$$

$$=\frac{\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۶}}{۱-\frac{۱۱}{۳۰}}=\frac{\frac{۱}{\cancel{۱۲}\,۲}}{\frac{۱۹}{\cancel{۳۰}\,۵}}=\frac{۵}{۳۸}$$

احتمال این‌که علی تا سال بعد اتومبیل بخرد $\frac{۱}{۴}$ و احتمال این‌که تا سال بعد ازدواج کند $\frac{۱}{۳}$ است. اگر ازدواج کند، احتمال خریدن اتومبیل $\frac{۴}{۵}$ خواهد شد. با کدام احتمال تا سال بعد حداقل یکی از این ۲ کار را انجام می‌دهد؟

۱) $\frac{۴}{۱۵}$ ۲) $\frac{۱۷}{۶۰}$ ۳) $\frac{۱۹}{۶۰}$ ۴) $\frac{۲۳}{۶۰}$

گزینهٔ «۳» A: خریدن اتومبیل، B :ازدواج‌کردن

سؤال گفته: $P(A)=\frac{۱}{۴}$، $P(B)=\frac{۱}{۳}$، $P(A|B)=\frac{۴}{۵}$ و از ما $P(A\cup B)$ را می‌خواهد.

خب، باید از فرمول شرطی، مقدار $P(A\cap B)$ را پیدا کنیم.

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

$$\Rightarrow P(A\cap B)=P(B)P(A|B)=\frac{۱}{۳}\times\frac{۴}{۵}=\frac{۴}{۱۵}$$

و داریم:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$=\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۳}-\frac{۴}{۱۵}=\frac{۱۵+۲۰-۱۶}{۶۰}=\frac{۱۹}{۶۰}$$

اشاره در سؤال قبل از رابطهٔ $P(A\cap B)=P(B)P(A|B)$ استفاده کردیم. این رابطه را قانون ضرب احتمال می‌نامیم.

شانس قبولی علی در کنکور سراسری ۶۰ درصد است. اگر در آزمون آزمایشی پایانی رتبهٔ خوب بیاورد، شانس قبولی‌اش در کنکور ۱۲ درصد زیاد می‌شود. فرض کنیم احتمال این‌که در آزمون آخر رتبهٔ خوب بیاورد $\frac{۲}{۳}$ باشد. با کدام احتمال هم در آزمون آخر رتبهٔ خوبی می‌آورد و هم در کنکور قبول می‌شود؟

۱) ۴۰ درصد ۲) ۴۸ درصد ۳) ۶۸ درصد ۴) ۷۲ درصد

گزینهٔ «۲» سؤال می‌گوید با فرض رتبهٔ خوب آزمایشی، احتمال قبولی کنکورش ۷۲ = ۱۲ + ۶۰ درصد است. پس داریم:

$$\underbrace{P(A\cap B)}_{\text{هم کنکور هم آزمون}}=P\underbrace{(A)}_{\text{آزمون آخر}}P(B|A)=\frac{۲}{۳}\times\frac{۷۲}{۱۰۰}=\frac{۴۸}{۱۰۰}$$

دیدیم که احتمال رخ‌دادن پیشامد A، با فرض رخ‌دادن B ممکن است کم یا زیاد شود یا تغییر نکند. مثلاً در پرتاب سه سکه احتمال روآمدن سکهٔ اول $\frac{۱}{۲}=\frac{۴}{۸}$ است. حالا اگر بدانیم فقط یک سکه رو آمده، احتمال روآمدن اولی می‌شود $\frac{۱}{۳}$؛ اما با خبر این‌که سه سکه مثل هم هستند، احتمال روآمدن سکهٔ اول همان $\frac{۱}{۲}$ باقی می‌ماند.

اگر پیش‌فرض رخ‌دادن B، احتمال A را تغییر ندهد، می‌گوییم A و B مستقل هستند. پس داریم:

A و B مستقل هستند. $\Leftrightarrow$ رخ دادن یا ندادن A اثری بر احتمال A ندارد. $\Leftrightarrow$ $P(A|B)=P(A)$, $P(A|B')=P(A)$

یعنی وقتی دو پیشامد مستقل هستند، احتمال شرطی برابر احتمال اولی است. با نوشتن فرمول شرطی نتیجه می‌شود که دو حالت مستقل داریم: $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

حالا وقتی دو پیشامد مستقل داریم، فرمول‌های $P(A\cup B)$ و $P(A-B)$ این شکلی می‌شوند:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-\underbrace{P(A)P(B)}_{P(A\cap B)\text{به‌جای}}\ ,P(A-B)=P(A)-\underbrace{P(A)P(B)}_{P(A\cap B)\text{به‌جای}}$$

در پرتاب یک تاس، پیشامد «عدد روشده مضرب ۳ باشد» از کدام پیشامد مستقل است؟

۱) عدد روشده اول باشد. ۲) عدد روشده بیشتر از ۲ باشد.

۳) عدد روشده ۵ نباشد. ۴) عدد روشده مقسوم‌علیه ۵ باشد.

گزینهٔ «۱» پیشامدها به ترتیب $A_۱=\{۲,۳,۵\}$، $A_۲=\{۳,۴,۵,۶\}$، $A_۳=\{۱,۲,۳,۴,۶\}$ و $A_۴=\{۱,۵\}$ هستند. پیشامد ما $B=\{۳,۶\}$ است و می‌خواهیم ببینیم شرط $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$ برای کدام برقرار است؟ دقت کنید که $A_۴$ اصلاً با B اشتراک ندارد و $A_۴$ و B ناسازگارند.

۱ $P(A_۱ \cap B) = P(\{۳\}) = \frac{۱}{۶} = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۳}$ ✓

۲ $P(A_۲ \cap B) = P(\{۳,۶\}) = \frac{۲}{۶} \neq \frac{۴}{۶} \times \frac{۱}{۳}$ ✗

۳ $P(A_۳ \cap B) = P(\{۳,۶\}) = \frac{۲}{۶} \neq \frac{۵}{۶} \times \frac{۱}{۳}$ ✗

گفتیم در پیشامدهای مستقل، احتمال اشتراک می‌شود ضرب احتمال‌ها.

دقت کنید که سکه‌های مختلف، تاس‌های مختلف، دفعه‌های مختلف یک آزمایش و... از هم مستقل‌اند.

حواسمان هست که وقتی A و B مستقل‌اند، متمم‌های آن‌ها نیز مستقل‌اند.

احتمال قبولی علی و سارا در امتحان رانندگی به ترتیب ۰/۷ و ۰/۶ است. احتمال این‌که .... قبول شود، برابر .... است.

۱) فقط علی، ۰/۷　　۲) هیچ‌کدام، ۰/۰۳　　۳) هر دو، ۰/۱۴　　۴) حداقل یکی، ۰/۸۸

گزینهٔ «۴»

۱ $P(\text{فقط علی}) = P(A \cap B') = P(A) \times P(B') = \underbrace{۰/۷}_{\text{علی شود.}} \times \underbrace{(۱-۰/۶)}_{\text{سارا نشود.}} = ۰/۷ \times ۰/۴ = ۰/۲۸$

۲ $P(\text{هیچ‌کدام}) = P(A' \cap B') = P(A') \times P(B')$
$= (۱-۰/۷)(۱-۰/۶) = ۰/۳ \times ۰/۴ = ۰/۱۲$

۳ $P(\text{هر دو}) = P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = ۰/۷ \times ۰/۶ = ۰/۴۲$

این‌ها که غلط بودند، پس حتماً ۴ درست است.

۴ $P(\text{حداقل یکی}) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)$
$= ۰/۷ + ۰/۶ - \underbrace{۰/۷ \times ۰/۶}_{۰/۴۲} = ۰/۸۸$

یه‌جوردیگه در پیشامدهای مستقل برای $P(A \cup B)$ می‌توان گفت:

$$\underbrace{P(A \cup B)}_{\text{حداقل یکی}} = ۱ - \underbrace{P(A' \cap B')}_{\text{هیچ‌کدام}} = ۱ - P(A')P(B')$$
$$= ۱ - ۰/۳ \times ۰/۴ = ۱ - ۰/۱۲ = ۰/۸۸$$

پس ۴ درست بود.

قانون احتمال کل

قانون جمع احتمال یا فرمول کلی احتمال برای مسائلی به کار می‌رود که فضای نمونه‌ای از چند قسمت جدا از هم ساخته شده است؛ در مسئله چند کیسه، چند کارخانه، چند حالت یا وضعیت مختلف، زنان و مردان و... را می‌بینیم. در اصطلاح می‌گوییم فضای نمونه‌ای به چند قسمت **افراز** شده است. این افراز یعنی تفکیک به قسمت‌هایی که تهی نیستند، اشتراک ندارند و اجتماعشان کل S را می‌پوشانند.

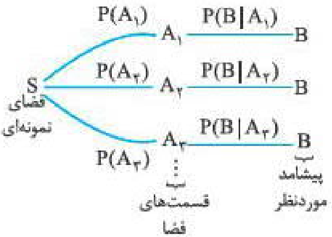
به زبان ریاضی، اگر S به چند قسمت A_1، A_2، ... افراز شود و احتمال پیشامد B را بخواهیم، داریم:

$$P(B)=\underbrace{P(A_1)}_{\text{احتمال قسمت اول}}\underbrace{P(B|A_1)}_{\text{احتمال B در قسمت اول}}+\underbrace{P(A_2)}_{\text{احتمال قسمت دوم}}\underbrace{P(B|A_2)}_{\text{احتمال B در قسمت دوم}}+\cdots$$

یا:

$$P(B)=\sum P(A_i)P(B|A_i)$$

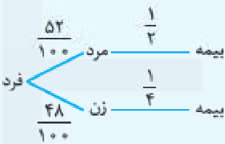
البته ما معمولاً از نمودار درختی استفاده می‌کنیم: و این‌طوری حساب می‌کنیم، عدد احتمال روی شاخه‌ها را در هم ضرب و جواب‌ها را با هم جمع می‌کنیم.



۵۲ درصد جامعه‌ای مرد هستند. نصف مردان و یک چهارم زنان بیمه دارند. یک نفر با کدام احتمال بیمه دارد؟

۱) ۰/۳۷۵ ۲) ۰/۳۸ ۳) ۰/۳۶۵ ۴) ۰/۳۷

گزینهٔ «۲»

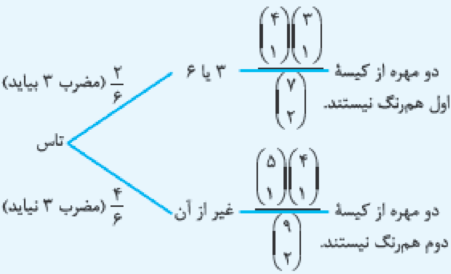


$$\underbrace{\frac{1}{2}\times\frac{52}{100}}_{\text{ضرب شاخهٔ بالا}}+\underbrace{\frac{1}{4}\times\frac{48}{100}}_{\text{ضرب شاخهٔ پایین}}=\frac{26+12}{100}=\frac{38}{100}$$

در کیسهٔ اول ۴ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه و در کیسهٔ دوم ۵ مهرهٔ سفید و ۴ مهرهٔ سیاه داریم. تاسی را می‌اندازیم؛ اگر مضرب ۳ آمد، از کیسهٔ اول و در غیر این صورت از کیسهٔ دوم دو مهره برمی‌داریم. با کدام احتمال این دو مهره هم‌رنگ نیستند؟

۱) $\frac{76}{189}$ ۲) $\frac{86}{189}$ ۳) $\frac{106}{189}$ ۴) $\frac{116}{189}$

گزینهٔ «۳»

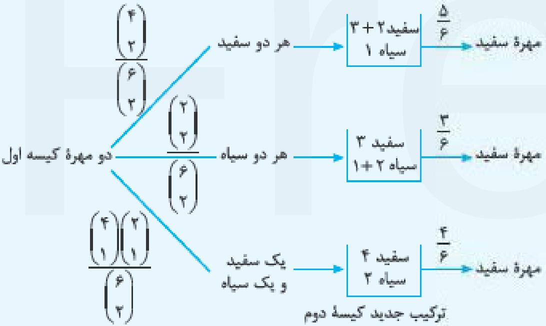


$$\frac{1}{3}\times\frac{4\times3}{21}+\frac{2}{3}\times\frac{5\times\cancel{4}}{\cancel{36}\,9}=\frac{4}{21}+\frac{10}{27}=\frac{4\times9+10\times7}{189}=\frac{106}{189}$$

از کیسه‌ای شامل ۴ مهرهٔ سفید و ۲ مهرهٔ سیاه، دو مهره بیرون می‌آوریم و درون کیسهٔ دیگر که ۳ مهرهٔ سفید و ۱ مهرهٔ سیاه دارد، می‌اندازیم. حال مهره‌ای از کیسهٔ دوم برمی‌داریم. با کدام احتمال، سفید است؟

۱) $\frac{۱۱}{۱۸}$ ۲) $\frac{۱۳}{۱۸}$ ۳) $\frac{۵}{۹}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

گزینهٔ «۲» سه حالت داریم:

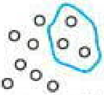


$$\frac{۶}{۱۵}\times\frac{۵}{۶}+\frac{۱}{۱۵}\times\frac{۳}{۶}+\frac{۸}{۱۵}\times\frac{۴}{۶}=\frac{۳۰+۳+۳۲}{۱۵\times۶}=\frac{۶۵}{۱۵\times۶}=\frac{۱۳}{۱۸}$$

آمار، علم اعداد و ارقام است. اطلاعات را جمع‌آوری و سازماندهی می‌کند، نمایش می‌دهد، تفسیر و تحلیل می‌کند و سپس نتیجه‌گیری و پیش‌بینی انجام می‌دهد.

جامعه، مجموعه تمام افراد یا اشیائی است که می‌خواهیم بررسی کنیم. اگر همهٔ آن‌ها را بررسی کنیم می‌شود «**سرشماری**» ولی معمولاً فقط زیرمجموعه‌ای از جامعه به نام **نمونه** را بررسی می‌کنیم.

در شکل روبه‌رو از جامعهٔ ۱۰ نفری، نمونه‌ای ۳ نفری برداشته شده است.



در مورد این افراد یا اشیاء می‌خواهیم ویژگی خاصی را بررسی کنیم. این صفت مورد مطالعه، متغیر است و برای هر فرد جامعه، یک **مقدار** دارد.

اولین چیزی که بررسی می‌کنیم انواع متغیر است:

متغیر	کمّی: با عدد بیان می‌شود. اعداد قابل مقایسه و چهار عمل اصلی هستند. مثلاً طول، جرم، زمان، میزان روشنایی، هزینه و ...
	کیفی: با کلمه یا حرف بیان می‌شود. نوع و حالت آن‌ها معلوم می‌شود و اندازه‌گیری و شمارشی در کار نیست. مثلاً رنگ چشم، گروه خون، تحصیلات و ...

خود متغیرهای کمّی می‌توانند پیوسته یا گسسته باشند.

کمّی پیوسته	کمّی گسسته
اندازه‌گیری می‌شود. مقادیر آن در بازهٔ $[\min, \max]$ هستند و اگر دو مقدار a و b را بگیرد، هر عدد بین آن‌ها را هم می‌گیرد. قد، وزن، زمان، هزینه، میزان مصرف سوخت و... .	شمرده می‌شود. مقادیر آن هر عددی نمی‌تواند باشد و معمولاً از جنس تعداد است. تعداد تماس‌ها، فرزندان، درصد هر درس کنکور و... .

خود متغیرهای کیفی نیز می‌توانند کیفی اسمی یا ترتیبی باشند.

کیفی اسمی	کیفی ترتیبی
نوع و حالت هستند. مثلاً رنگ چشم، گروه خون، جنسیت، نوع شغل، نوع هواپیما، نوع آلایندهٔ هوا و... .	نوعی ترتیب طبیعی دارند. یا رتبه‌بندی دارند یا در گذر زمان به ترتیب خاصی به دست می‌آیند. مثلاً مراحل رشد، تحصیل، زندگی یا میزان لذت از آشپزی و مقام ورزشکار در مسابقه و... .

در کدام گزینه همهٔ انواع «کیفی اسمی، کیفی ترتیبی، کمّی پیوسته و کمّی گسسته» وجود دارد؟

۱) حجم موتور اتومبیل، تعداد فرزندان، سطح تحصیلات، جنسیت

۲) رنگ چشم، نوع هواپیما، مراحل تحصیل، تعداد سیلندرها

۳) گروه خون، تعداد طبقات، وزن اتومبیل، تعداد تماس‌ها

۴) میزان مهارت در آشپزی، تعداد مراجعات به اورژانس، فصل‌های سال، شغل

گزینهٔ «۱» ① کمّی پیوسته، کمّی گسسته، کیفی ترتیبی، کیفی اسمی

② کیفی اسمی، کیفی اسمی، کیفی ترتیبی، کمّی گسسته

③ کیفی اسمی، کمّی گسسته، کمّی پیوسته، کمّی گسسته

④ کیفی ترتیبی، کمّی گسسته، کیفی ترتیبی، کیفی اسمی

اشاره گاهی اوقات نوع یک متغیر برحسب مقادیر و اعلام آن، فرق دارد.

مثلاً اگر میزان آلودگی هوا را **۶۲** اعلام کنیم ← کمّی پیوسته است.

اگر آلایندهٔ هوا را **مونوکسیدکربن** اعلام کنیم ← کیفی اسمی است.

اگر سطح آلودگی را **ناسالم** دسته‌بندی کنیم ← کیفی ترتیبی است. مقادیر: پاک، سالم، ناسالم، خطرناک

یا مثلاً تخم‌مرغ می‌تواند براساس متغیر کمّی گسسته (تعداد) یا کمّی پیوسته (جرم) برحسب کیلوگرم خریداری شود.

معیارهای گرایش به مرکز (شاخص‌های مرکزی)

میانه

اول باید داده‌ها را مرتب کنیم، سپس عددی که در وسط قرار دارد (تعداد داده‌های قبل و بعد از آن برابرند) میانه نام دارد. اگر تعداد داده‌ها فرد باشد، شمارهٔ میانه $\frac{n+۱}{۲}$ است. اگر تعداد داده‌ها زوج باشد میانه، معدل داده‌های شمارهٔ $\frac{n}{۲}$ و $\frac{n}{۲}+۱$ است.

مثلاً در ۱۵ دادهٔ مرتب‌شده، میانهٔ دادهٔ $۸=\frac{۱۵+۱}{۲}$ یعنی دادهٔ هشتم است؛ اما در ۱۶ دادهٔ مرتب‌شده، معدل دو دادهٔ $۸=\frac{۱۶}{۲}$ و $\frac{۱۶}{۲}+۱=۹$ یعنی معدل هشتمی و نهمی میانه است. راستی میانه را با $Q_۲$ نشان می‌دهیم.

میانهٔ دو گروه $A: ۱۷,۱۴,۱۵,۱۶,۱۸,۱۲,۱۹$ و $B: ۱۱,۱۴,۱۵,۱۷,۱۲,۱۳,۱۵,۱۶$ چه‌قدر اختلاف دارند؟

۱) صفر　　۲) ۱　　۳) ۱/۵　　۴) ۰/۵

گزینهٔ «۳» در گروه A هفت داده داریم و اگر آن‌ها را مرتب کنیم، چهارمی در وسط است:

$$A: ۱۲,۱۴,۱۵,\underline{۱۶},۱۷,۱۸,۱۹ \Rightarrow Q_۲=۱۶$$

در گروه B هشت داده داریم و معدل چهارمی و پنجمی میانه است:

$$B: ۱۱,۱۲,۱۳,\underline{۱۴},\underline{۱۵},۱۵,۱۶,۱۷ \Rightarrow Q_۲ = \frac{۱۴+۱۵}{۲} = ۱۴/۵$$

پس میانهٔ دو گروه ۱/۵ $(۱۶-۱۴/۵=۱/۵)$ واحد اختلاف دارند.

میانگین

متوسط یا مرکز ثقل داده‌ها است، از تقسیم مجموع داده‌ها بر تعداد آن‌ها به دست می‌آید.

$$\text{میانگین} = \overline{X} = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{\text{جمع}}{\text{تعداد}}$$

پس مثلاً میانگین ۱,۲,۴,۷,۱۰۰ می‌شود:

$$\overline{X} = \frac{۱+۲+۴+۷+۱۰۰}{۵} = \frac{۱۱۴}{۵} = ۲۲/۸$$

اشاره واقعاً ۲۲/۸ متوسط این داده‌ها است؟ ۴ تا از آن‌ها یک‌رقمی‌اند و در واقع وجود یک عدد ۱۰۰ باعث شده میانگین این‌قدر بالا باشد. کتاب درسی‌تان می‌گوید وقتی داده‌های دورافتاده (مثل همین ۱۰۰) را دارید بهتر است از میانه بروید. (میانهٔ این ۵ داده، $Q_۲=۴$ است.)

اشاره اگر داده‌ها اعشار هم داشتند، بهتر است اعشارها را با هم و اعداد صحیح را با هم جمع کنید.

؟ میانگین داده‌های ۳/۱,۶/۱,۶/۲,۴/۸,۴/۹,۴/۱,۳/۳,۲/۲,۱ چه‌قدر بیشتر از میانهٔ آن‌ها است؟

۱) ۰/۴۲۲۵ ۲) ۰/۴۱۱۲۵ ۳) ۰/۳۸۷۵ ۴) ۰/۳۶۲۵

= گزینهٔ «۳» یادتان نرود که اول داده‌ها را مرتب کنید:

۱/۲,۲/۳,۳/۱,۴/۲,۴/۸,۴/۹,۶/۱,۶/۳

در هشت داده، میانه، معدل چهارمی و پنجمی است:

$$Q_۲ = \frac{۴/۲+۴/۸}{۲} = \frac{۹}{۲} = ۴/۵$$

حالا میانگین:

$$\overline{X} = \frac{\overbrace{۱+۲+۳+۴+۴+۴+۶+۶}^{\text{جمع صحیح‌ها}=۳۰}+\overbrace{۰/۲+۰/۳+۰/۱+۰/۲+۰/۸+۰/۹+۰/۱+۰/۳}^{\text{جمع اعشارها}=۲/۹}}{۸}$$

$$\overline{X} = \frac{۳۲/۹}{۸} = ۴+\frac{۰/۹}{۸} = ۴+۰/۱۱۲۵ = ۴/۱۱۲۵$$

پس اختلاف میانه و میانگین می‌شود:

$$۴/۵-۴/۱۱۲۵ = ۰/۳۸۷۵$$

اشاره اگر داده‌های آماری دنبالهٔ حسابی بسازند، میانه و میانگین برابرند و هر دو، معدل اولی و آخری‌اند.

$$۱/۳,۱/۹,۲/۵,۳/۱,۳/۷,۴/۳ \xrightarrow[d=۰/۶]{\text{دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت}} \overline{X} = Q_۲ = \frac{\min+\max}{۲}$$

$$= \frac{۱/۳+۴/۳}{۲} = \frac{۵/۶}{۲} = ۲/۸$$

اشاره از فرمول میانگین نتیجه می‌شود: میانگین × تعداد = جمع داده‌ها

در مسائلی که داده‌ها تغییر کرده‌اند یا داده‌ای اضافه و کم می‌شود، از این رابطه استفاده می‌کنیم. ببینید:

؟ میانگین نمرات یک کلاس ۱۸ نفری ۱۵ است. دو نفر با نمرات ۱۱ و ۱۷ به کلاس اضافه شده و نمرهٔ یکی از دانش‌آموزان از ۱۴ به ۲۰ می‌رسد. میانگین کلاس جدید کدام است؟

۱) ۱۵/۰۵ ۲) ۱۵/۱ ۳) ۱۵/۲ ۴) ۱۵/۲۵

گزینهٔ «۳» جمع نمرات ۱۸ نفر برابر است با: $۱۸ \times ۱۵ = ۲۷۰$

حالا نمرات ۱۱ و ۱۷ اضافه شدند و به نمرهٔ یک نفر هم ۶ نمره اضافه شده (چرا؟!)

پس جمع نمرات جدید می‌شود: $۲۷۰ + ۱۷ + ۱۱ + ۶ = ۳۰۴$

و میانگین ۲۰ نفر می‌شود: $\frac{۳۰۴}{۲۰} = ۱۵/۲$

چارک‌ها

بعد از پیداکردن میانه، داده‌ها به دو قسمت تقسیم می‌شوند. می‌توانیم برای داده‌های قبل از میانه و برای داده‌های بعد از میانه، هر کدام یک میانه پیدا کنیم.

میانهٔ نیمهٔ اول را **چارک اول** می‌نامیم. میانهٔ نیمهٔ دوم هم **چارک سوم** نام دارد. ببینید:

$$\underbrace{۱۱, ۱۲, \underline{۱۳}, ۱۵, ۱۵}_{\text{در نیمهٔ اول ۵ داده داریم}}, \underline{۱۷}, \underbrace{۱۸, ۱۹, \underline{۲۰}, ۲۲, ۲۲}_{\text{در نیمهٔ دوم ۵ داده داریم}}$$

میانهٔ نیمهٔ اول: $Q_۱ = ۱۳$ = چارک اول

میانه، دادهٔ ششم است: $Q_۲ = ۱۷$

میانهٔ نیمهٔ دوم: $Q_۳ = ۲۰$ = چارک سوم

میانه، داده‌ها را نصف می‌کرد. پس با قرارگرفتن چارک‌ها، داده‌ها به ۴ قسمت تقسیم می‌شوند.

قبل از چارک اول حدود ۲۵ درصد داده‌ها — $Q_۱$ — بین چارک اول و سوم تقریباً ۵۰ درصد داده‌ها — $Q_۲$ — $Q_۳$ — بعد از چارک سوم حدود ۲۵ درصد داده‌ها

معیارهای پراکندگی

۱- دامنهٔ تغییرات $R = \max - \min$

البته R ساده‌ترین معیار پراکندگی است و چیزی در مورد پراکندگی داده‌ها در اطراف میانگین نمی‌گوید.

۲- واریانس

اول باید اختلاف داده‌ها و میانگین را تعریف کنیم. اگر هر داده را منهای میانگین کنیم، $x_i - \bar{X}$ را اختلاف از میانگین می‌نامیم.

این $x_i - \bar{X}$ ها می‌توانند مثبت یا منفی یا صفر باشند اما همیشه مجموع آن‌ها صفر است:

$$\sum (x_i - \bar{X}) = ۰$$

؟ پنج دادهٔ آماری را منهای میانگین آن‌ها کرده‌ایم و اعداد $k, ۰, -۱, ۲, ۳$ به دست آمده است. مقدار k کدام است؟

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) -۳ ۴) -۴

گزینهٔ «۴» گفتیم جمع مقادیر انحراف از میانگین همیشه صفر است. پس:

$$k + ۰ + (-۱) + ۲ + ۳ = ۰ \Rightarrow k = -۴$$

اشاره دامنهٔ تغییرات این ۵ داده می‌شود: $R = \max - \min = ۳ - (-۴) = ۷$

Free

برای بررسی پراکندگی، این مقادیر $x_i - \bar{X}$ را به توان ۲ می‌رسانیم، با هم جمع و بر تعداد تقسیم می‌کنیم تا به «واریانس» برسیم. پس:

$$\text{واریانس} = \frac{\text{جمع مقادیر } (x_i - \bar{X})^2}{\text{تعداد}}$$

یا به زبان ریاضی:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{X})^2}{N}$$

فقط یک اشکال کوچک هست. واحد واریانس، مجذور داده‌ها است. مثلاً اگر داده‌ها برحسب متر باشند، واریانس برحسب متر مربع است. برای رفع این اشکال، جذر واریانس را می‌گیریم و آن را **انحراف معیار** می‌نامیم.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{X})^2}{N}}$$

واریانس داده‌های ۱,۶,۷,۱۰ کدام است؟

۱) ۴/۲ ۲) ۳/۵ ۳) ۱۰/۵ ۴) ۲۱

گزینهٔ «۳»

اول باید میانگین را حساب کنیم: $\bar{X} = \frac{1+6+7+10}{4} = \frac{24}{4} = 6$

حالا مقادیر اختلاف از میانگین: $(1-6)\ ,\ (6-6)\ ,\ (7-6)\ ,\ (10-6)$

این‌ها را به توان ۲ می‌رسانیم: $(-5)^2, 0^2, 1^2, 4^2$

و جمع آن‌ها را بر ۴ تقسیم می‌کنیم: $\sigma^2 = \frac{25+0+1+16}{4} = \frac{42}{4} = 10/5$

اشاره واریانس، ۱۰/۵ شد پس انحراف معیار می‌شود $\sqrt{10/5} \simeq 3/25$.

اشاره اگر داده‌ها دنبالهٔ حسابی بسازند، واریانس می‌شود $\sigma^2 = \frac{N^2 - 1}{12} d^2$، d قدرنسبت دنباله است.

پس مثلاً واریانس ۱,۴,۷,۱۰,۱۳,۱۶ می‌شود:

$$\sigma^2 = \frac{6^2 - 1}{12}(3)^2 = \frac{35}{12} \times 9 = \frac{35 \times 3}{4} = \frac{105}{4} = 26/25$$

(تعدادشان $N = 6$ و قدرنسبت $d = 3$ بود.)

یک سؤال جدی‌تر ببینید:

در ۸ دادهٔ آماری واریانس ۶ و میانگین ۱۳ است. اگر داده‌های ۱۱,۱۲,۱۶ به آن‌ها اضافه شوند. واریانس کل ۱۱ داده تقریبا کدام است؟

۱) ۵/۷۱ ۲) ۵/۶۴ ۳) ۵/۵۶ ۴) ۵/۴۵

گزینهٔ «۲» اضافه‌شدن ۱۱,۱۲,۱۶، میانگین را عوض نمی‌کند. چرا؟ چون میانگین ۱۶,۱۲,۱۱ نیز ۱۳ است. این‌جوری به ذهن بسپارید: اگر میانگین داده‌های اضافه یا کم شده با میانگین اولیه برابر باشد، $\bar{X}$ عوض نمی‌شود.

حالا به واریانس نگاه کنید:

$$\text{۸ دادهٔ اولیه}: \sigma^2 = \frac{\overbrace{(x_1-13)^2+\cdots+(x_8-13)^2}^{\text{جواب این ۴۸ است}}}{8} = 6$$

$$\text{۱۱ دادهٔ فعلی}: \sigma^2 = \frac{\overbrace{(x_1-13)^2+\cdots+(x_8-13)^2}^{\text{این ۴۸ بود}} + (11-13)^2 + (12-13)^2 + (16-13)^2}{8+3}$$

$$= \frac{48+(-2)^2+(-1)^2+3^2}{11} = \frac{48+4+1+9}{11} = \frac{62}{11} \simeq 5/64$$

اشاره اگر انحراف معیار یا واریانس یا دامنهٔ تغییرات صفر شوند، نتیجه می‌گیریم، تمام داده‌ها با هم مساوی‌اند.

ضریب تغییرات

برای مقایسهٔ پراکندگی دو گروه از داده‌ها از ضریب تغییرات استفاده می‌شود. ضریب تغییرات به صورت $CV = \frac{\sigma}{\overline{X}}$ تعریف می‌شود. واحد ندارد و معمولاً به صورت درصد بیان می‌شود. هر چه ضریب تغییرات کم‌تر باشد، پراکندگی کم‌تر و دقت بیشتر است.

ضریب تغییرات داده‌های ۱۶,۱۱,۱۱,۱۱,۱۱ کدام است؟

۱) ۱۲ درصد ۲) ۱۶/۷ درصد ۳) ۲۲ درصد ۴) ۳۳/۳ درصد

گزینهٔ «۲»

اول میانگین:

$$\overline{X} = \frac{16+11+11+11+11}{5} = \frac{60}{5} = 12$$

حالا واریانس:

$$\sigma^2 = \frac{(16-12)^2 + (11-12)^2 \overset{\text{چهارتا}}{\times 4}}{5} = \frac{16+4}{5} = 4$$

انحراف معیار هم می‌شود:

$$\sigma = 2$$

پس داریم:

$$CV = \frac{\sigma}{\overline{X}} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6} \simeq \%16/7$$

یعنی ضریب تغییرات حدوداً ۱۶/۷ درصد است.

اشاره اگر تمام داده‌ها را a برابر کرده و با b جمع کنیم، میانگین و میانه و چارک‌ها نیز a برابر شده و با b جمع می‌شوند؛ اما دامنهٔ تغییرات و انحراف معیار فقط $|a|$ برابر می‌شوند و واریانس a^2 برابر می‌شود. این‌ها را ببینید:

$$R_{ax+b} = |a| R_x \ ، \ \sigma^2_{ax+b} = a^2\sigma^2_x \ ، \ \sigma_{ax+b} = |a|\sigma_x \ ، \ CV_{ax+b} = \frac{|a|\sigma_x}{a\overline{X}+b}$$

داده‌های آماری با میانگین ۱۲ و واریانس ۴۹ را ۳ برابر کرده و به آن ۴ واحد اضافه می‌کنیم. ضریب تغییرات داده‌های جدید کدام است؟

۱) ۵۰ درصد ۲) ۵۵ درصد ۳) ۵۲/۵ درصد ۴) ۵۷/۵ درصد

گزینهٔ «۳» داده‌ها را از x به $3x+4$ تبدیل کرده‌ایم. پس میانگین از ۱۲ به $3\times12+4=40$ می‌رسد. انحراف معیار هم از $\sigma=7$ به $\sigma=3\times7=21$ می‌رسد و داریم:

$$CV=\frac{\sigma}{\overline{X}}=\frac{21}{40}=0/525=\%52/5$$

اشاره فرمول واریانس را به صورت $\sigma^2=\frac{1}{N}\sum x_i^2-\overline{X}^2$ هم می‌توانیم بیان کنیم، در این فرمول باید هر داده را به توان ۲ برسانیم (x_i^2) و سپس این مقادیر را جمع کنیم $(\sum x_i^2)$ و بر تعداد داده‌ها تقسیم کنیم $(\frac{1}{N}\sum x_i^2)$ و سپس منهای مجذور میانگین کنیم. در صورت سؤال $\sum x_i^2$ را مجموع مجذور داده‌ها یا مجموع مساحت مربع‌ها می‌نامیم. $\frac{1}{N}\sum x_i^2$ هم میانگین مساحت مربع‌ها نام دارد.

(این مطلب در کتاب درسی نیست اما بد نیست که بدانید!)

؟ در ۲۰ دادهٔ آماری مجموع مجذورات داده‌ها ۲۳۴۰ و مجموع خود داده‌ها ۱۸۰ است. ضریب تغییرات داده‌ها کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{6}$

گزینهٔ «۲»

$$\text{میانگین}=\frac{\text{جمع}}{\text{تعداد}}\Rightarrow\overline{X}=\frac{180}{20}=9$$

حالا که مجموع مجذورات را داریم از فرمول جدید واریانس می‌رویم:

$$\sigma^2=\frac{1}{N}\sum x_i^2-\overline{X}^2=\frac{1}{20}(2340)-81=117-81=36\Rightarrow\sigma=6$$

پس:

$$CV=\frac{\sigma}{\overline{X}}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$$

؟ ضریب تغییرات داده‌های ۳,۷,۱۱,۱۵,۱۹ تقریبا کدام است؟

۱) ۰/۲ ۲) ۰/۳ ۳) ۰/۴ ۴) ۰/۵

گزینهٔ «۴» گفتیم در دنبالهٔ حسابی:

$$\overline{X}=\frac{\max+\min}{2}=Q_2=11$$

$$\sigma^2=\frac{N^2-1}{12}d^2=\frac{5^2-1}{12}(4)^2=32$$

پس:

$$CV=\frac{\sigma}{\overline{X}}=\frac{\sqrt{32}}{11}=\frac{4\sqrt{2}}{11}\simeq\frac{4\times1/4}{11}=\frac{5/6}{11}=0/509$$

؟ میانگین نمرات علی ۱۸ با انحراف معیار ۶ است. اگر میانگین نمرات دوستش ۱۶ و دقت دوستش از علی بیشتر باشد. واریانس دوستش کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۲۸ ۲) ۲۹ ۳) ۳۰ ۴) ۳۱

گزینهٔ «۱» دوستش : $CV=\frac{\sigma}{16}$ علی : $CV=\frac{6}{18}=\frac{1}{3}$

دقت دوستش بیشتر است یعنی CV دوستش کمتر است:

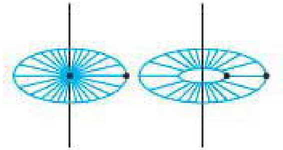
$$\frac{\sigma}{16}<\frac{1}{3}\Rightarrow\sigma<\frac{16}{3}\Rightarrow\sigma^2<\frac{256}{9}\simeq28/4$$

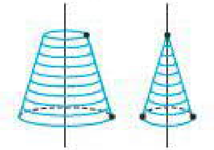
پس واریانس دوستش فقط می‌تواند ۲۸ باشد.

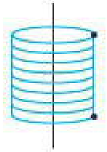
تفکر تجسمی

دوران

از دوران یک پاره‌خط حول یک محور، یک سطح ایجاد می‌شود.







از دوران پاره‌خط حول محوری که بر آن عمود است، یک سطح دایره‌ای ایجاد می‌شود. اگر محور و پاره‌خط نقطهٔ مشترکی داشته باشند، دایره کامل است.

از دوران یک پاره‌خط مایل با محور حول آن یک سطح مخروطی ایجاد می‌شود.

از دوران پاره‌خط موازی با محور حول آن، یک سطح استوانه‌ای ایجاد می‌شود.

امتداد پاره‌خط AB بر خط ℓ عمود است. اگر دو نقطهٔ A و B از ℓ به فاصله ۳ و ۵ باشند، از دوران AB حول ℓ چه مساحتی ایجاد می‌شود؟

۱) ۱۶π ۲) ۴π ۳) ۱۲π ۴) ۸π

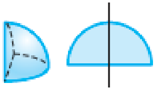
گزینهٔ «۱» شکل را ببینید.

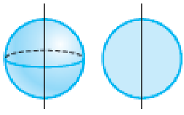
سطح موردنظر بین دو دایره به شعاع‌های ۵ و ۳ قرار دارد.

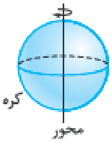
$$S = \pi(r_1^2 - r_2^2) = \pi(5^2 - 3^2) = 16\pi$$

از دوران یک سطح حول یک محور حجم ایجاد می‌شود:

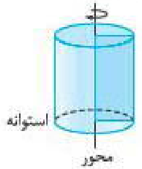
۱ از دوران دایره حول قطر آن کره ایجاد می‌شود. حجم کره $\frac{4}{3}\pi R^3$ و سطح آن $4\pi R^2$ است. اگر نیم‌دایره حول قطرش به اندازهٔ زاویهٔ θ برحسب رادیان دوران کند، حجم ایجادشده $\frac{\theta}{2\pi}(\frac{4}{3}\pi R^3)$ است.

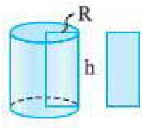




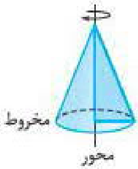


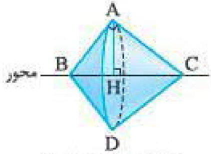
۲ از دوران مستطیل یا مربع حول یک ضلع، استوانه ایجاد می‌شود. حجم استوانه‌ای به ارتفاع h و شعاع قاعدهٔ R برابر $\pi R^{۲}h$ است. سطح جانبی آن نیز $۲\pi Rh$ است.





۳ از دوران مثلث قائم‌الزاویه حول یک ضلع قائم، مخروط ایجاد می‌شود. حجم مخروط به ارتفاع h و شعاع قاعدهٔ R برابر است با $\frac{۱}{۳}\pi R^{۲}h$.





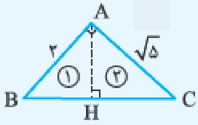
$AH =$ شعاع قاعده

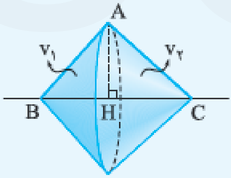
$BH + CH = BC =$ ارتفاع کل

؟ مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع قائم ۲ و $\sqrt{۵}$ را حول وتر دوران می‌دهیم. حجم حاصل چند واحد مکعب است؟

۱) $\frac{۲۰\pi}{۹}$ ۲) $\frac{۲۰\pi}{۳}$ ۳) $\frac{۱۰\pi}{۹}$ ۴) $\frac{۱۰\pi}{۳}$

= گزینهٔ «۱»





فیثاغورس می‌گوید طول وتر مثلث $\sqrt{۲^{۲}+\sqrt{۵}^{۲}} = \sqrt{۹} = ۳$ و می‌دانیم ارتفاع وارد بر وتر $AH = \frac{AB.AC}{BC} = \frac{۲\sqrt{۵}}{۳}$ است.

$$V = V_۱ + V_۲ = \frac{۱}{۳}\pi AH^{۲}\cdot BH + \frac{۱}{۳}\pi AH^{۲}\cdot CH$$

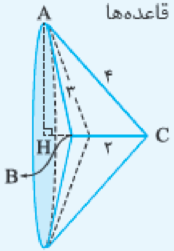
$$= \frac{۱}{۳}\pi(AH^{۲})BC = \frac{۱}{۳}\pi(\frac{۲\sqrt{۵}}{۳})^{۲}\times ۳ = \frac{۲۰\pi}{۹}$$

اشاره عشق نکته‌ها حفظ کنند که حجم حاصل از دوران مثلث قائم‌الزاویه (با وتر a) حول وتر می‌شود:

$$V = \frac{۱}{۳}\pi h^{۲}a = \frac{۱}{۳}\pi(\frac{bc}{a})^{۲}a = \frac{۱}{۳}\pi\frac{b^{۲}c^{۲}}{a}$$

؟ از دوران مثلثی به اضلاع ۲، ۳ و ۴ حول ضلع کوچک‌تر، اندازهٔ حجم حاصل کدام است؟

۱) $\frac{۱۵\pi}{۲}$ ۲) $\frac{۱۵\pi}{۴}$ ۳) $\frac{۴۵\pi}{۸}$ ۴) $\frac{۴۵\pi}{۴}$



گزینهٔ «۳» باز هم دو مخروط با قاعدهٔ مشترک داریم اما شعاع قاعده‌ها یعنی ارتفاع وارد بر ضلع ۲ (همان AH) را جور متفاوتی حساب می‌کنیم:

$$AH = h_a = \frac{۲S}{a}$$

$$V = \frac{۱}{۳}\pi AH^{۲}(BH+CH) = \frac{۱}{۳}\pi\left(\frac{۲S}{a}\right)^{۲} a = \frac{۴\pi s^{۲}}{۳a}$$

حالا باید مساحت مثلث را بیابیم. S را هم از فرمول هرون جای‌گذاری می‌کنیم:

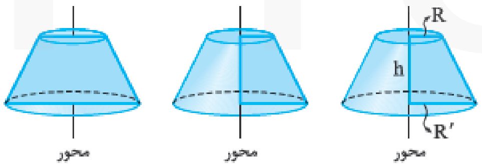
$$= \frac{۴\pi}{۳a}\left(\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\right)^{۲} \qquad p = \frac{۴+۳+۲}{۲} = ۴/۵$$

$$= \frac{۴\pi}{۳a}p(p-a)(p-b)(p-c) = \frac{۴\pi}{۳(۲)}(۴/۵)(۴/۵-۲)(۴/۵-۳)(۴/۵-۴)$$

$$= \frac{۲\pi}{۳}(۴/۵)(۲/۵)(۱/۵)(۰/۵)$$

$$= \frac{\cancel{۲}\pi}{\cancel{۳}}\,\frac{۹}{\cancel{۲}}\,\frac{۵}{۲}\,\frac{\cancel{۳}}{۲}\,\frac{۱}{۲} = \frac{۴۵\pi}{۸}$$

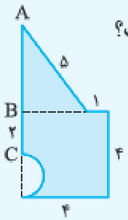
اشاره از دوران ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه حول ساق قائم یا دوران ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین حول محور تقارن آن، مخروط ناقص ساخته می‌شود.



حجم مخروط ناقص دوار را بلد باشید: $V = \frac{۱}{۳}\pi(R^{۲}+R'^{۲}+RR')h$

اشاره از دوران مثلث قائم‌الزاویه حول وتر، مربع حول قطر یا مثلث متساوی‌الاضلاع حول ضلع، دوتا مخروط به دست می‌آید که به هم چسبیده‌اند. (شعاع قاعدهٔ آن‌ها برابر است.)

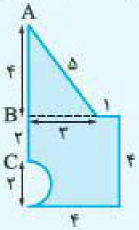
؟ از دوران شکل روبه‌رو حول امتداد ضلع AC، حجم حاصل چند برابر π است؟



۱) $۷۵\frac{۱}{۳}$ ۲) $۷۵\frac{۲}{۳}$

۳) $۷۴\frac{۱}{۳}$ ۴) $۷۴\frac{۲}{۳}$

گزینهٔ «۴» از دوران مثلث حول AC مخروط (V_2) داریم (شعاع قاعده ۳ و ارتفاع ۴ است). از دوران مربع حول AC استوانه (V_1) داریم (شعاع قاعده و ارتفاعش ۴ هستند). از دوران نیم‌دایره حول امتداد AC، کره (V_3) داریم (شعاعش ۱ است).



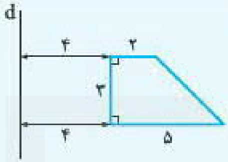
$$V_1 = \frac{1}{3}\pi(3)^2 \times 4 = 12\pi$$

$$V_2 = \pi(4^2) \times 4 = 64\pi$$

$$V_3 = \frac{4}{3}\pi(1)^3 = \frac{4}{3}\pi$$

پس:
$$V = V_1 + V_2 \underbrace{- V_3}_{\text{سوراخ است}} = 12\pi + 64\pi - \frac{4}{3}\pi = 76\pi - \frac{4}{3}\pi = 74\frac{2}{3}\pi$$

از دوران شکل مقابل حول محور d چه حجمی ایجاد می‌شود؟



۱) 113π

۲) 117π

۳) 121π

۴) 123π

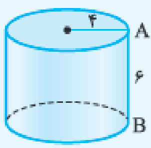
گزینهٔ «۴» یک مخروط ناقص (V_1) با شعاع‌های ۶ و ۹ و ارتفاع ۳ داریم که یک سوراخ استوانه‌ای (V_2) به شعاع قاعده ۴ و ارتفاع ۳ دارد:

$$V = V_1 - V_2 = \frac{\pi}{3}(6^2 + 9^2 + 6 \times 9) \times 3 - \pi(4^2) \times 3 = 171\pi - 48\pi = 123\pi$$

برش‌ها

وقتی شکل‌های فضایی (کره، استوانه، مخروط، مکعب و...) را با صفحه برش می‌زنیم، شکلی به نام سطح مقطع ایجاد می‌شود.

سطح مقطع استوانهٔ روبه‌رو با صفحه‌ای موازی AB حداکثر چه مساحتی دارد؟



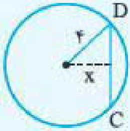
۱) ۳۶

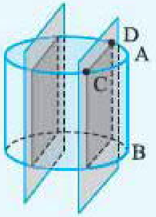
۲) ۶۴

۳) ۴۸

۴) ۲۴

گزینهٔ «۳» صفحه‌های موازی AB، استوانه را قطع می‌کنند و در سطح مقطع یک مستطیل می‌سازند. هر چه فاصلهٔ این صفحه‌ها از محور استوانه کم‌تر شود، مستطیل بزرگ‌تری جدا می‌کنند. ضلع عمودی مستطیل همواره ۶ است و ضلع افقی آن با توجه به شکل صفحهٔ بعد $CD = 2\sqrt{16 - x^2}$ است.





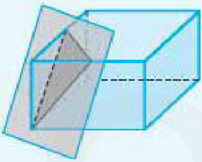
پس حداکثر مساحت مقطع زمانی است که صفحه شامل محور استوانه باشد و CD به ۸ (قطر استوانه) برسد. پس:

$$S_{\max} = ۸ \times ۶ = ۴۸$$

سطح مقطع یک صفحه با مکعب‌مستطیل به ابعاد ۳، ۴ و ۵ حداکثر چه‌قدر است؟

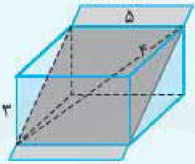
۱) ۲۰ ۲) ۲۵ ۳) ۳۰ ۴) ۱۵

گزینهٔ «۲» مقطع‌های مختلف را ببینید:



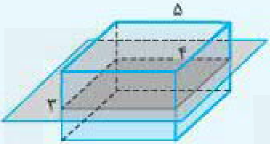
(۳)

صفحه قاطع مایل است. مساحت به شکل مثلث است.



(۲)

صفحهٔ قاطع شامل قطر مکعب‌مستطیل است. مساحت مقطع می‌شود: یال ضرب در قطر وجه



(۱)

صفحهٔ قاطع موازی وجه بزرگ‌تر است. مساحت مقطع می‌شود مساحت وجه بزرگ‌تر

مساحت مقطع (۱) برابر $S_۱ = ۵ \times ۴ = ۲۰$ و مساحت مقطع (۲) برابر $S_۲ = ۵ \times \sqrt{۳^۲ + ۴^۲}$ یعنی ۲۵ است. پس بیشترین مساحت مقطع می‌شود ۲۵.

کره‌ای به قطر ۴ را در فاصلهٔ یک سانتی‌متری از مرکزش برش می‌زنیم. سطح مقطع حاصل چه‌قدر است؟

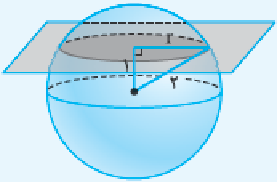
۱) ۹π ۲) ۳π ۳) ۱۵π ۴) ۴π

گزینهٔ «۲»

شکل را ببینید. سطح مقطع کره و صفحه همیشه دایره است. با توجه به شکل شعاع دایرهٔ مقطع می‌شود:

$$r = \sqrt{۲^۲ - ۱^۲} = \sqrt{۳}$$

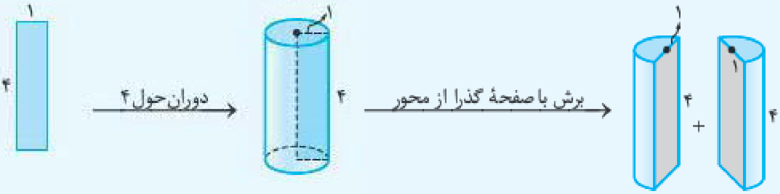
و مساحت آن $S = \pi r^۲ = ۳\pi$ است.



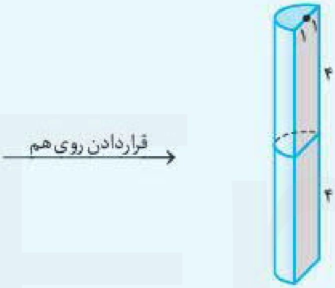
؟ از دوران مستطیلی به اضلاع ۴ و ۱ حول ضلع بزرگ‌تر، استوانه‌ای به دست می‌آید. این استوانه را با صفحه‌ای گذرا از محور می‌بریم. از قراردادن دو قسمت روی هم نیم استوانهٔ قائمی ساخته می‌شود. مساحت کل آن کدام است؟

۱) $9\pi + 16$　　۲) $9\pi + 24$　　۳) $8\pi + 16$　　۴) $8\pi + 24$

= گزینهٔ «۱» اول سناریوی صورت سؤال را بازخوانی کنیم!



خب پس این جسم حاصل است:



یک نیم‌استوانه است و مساحت کل آن می‌شود:

$S =$ سطح جانبی استوانه + مستطیل‌هایی که از برش ایجاد شد + دو نیم‌دایره بالا و پایین

$= \pi r^2 + 2r \times 2h + 2\pi rh = \pi \times 1 + 4 \times 1 \times 4 + 2\pi \times 1 \times 4 = 16 + 9\pi$

اشاره دوتا دیدگاه ببینید:

۱ با بُرش حجم تغییر نمی‌کند اما مساحت به اندازهٔ دو برابر سطح برش زیاد می‌شود.

۲ با چسباندن، حجم تغییر نمی‌کند اما مساحت به اندازهٔ دو برابر سطح چسباندن کم می‌شود.

$$S_1 = S_2 = \underbrace{\frac{1}{2}(4\pi R^2)}_{\text{نصف سطح قدیم}} + \underbrace{\pi R^2}_{\text{سطح برش}}$$

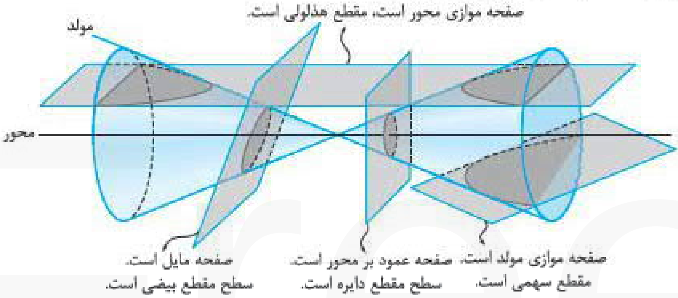
$S_1 = S_2 = 6a^2$

$S_{\text{کل}} = 12a^2$

$S_{\text{کل}} = 10a^2$

مقاطع مخروطی

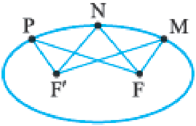
اگر یک خط را حول خطی که با آن متقاطع است دوران بدهیم، یک رویهٔ مخروطی ایجاد می‌شود، یعنی دوتا مخروط هم محور که در رأس مشترک‌اند. حالا این رویهٔ مخروطی را با صفحه‌های مختلف برش می‌زنیم تا **مقاطع مخروطی** را ببینیم.



بیضی

دیدیم که بیضی چه‌طور ایجاد می‌شود؟ رویهٔ مخروطی با صفحهٔ مایل تلاقی می‌کند و یک شکل بسته به نام بیضی خواهیم داشت.

برای رسم بیضی، یک نخ را در دو نقطه محکم می‌کنیم، سپس قلم را طوری می‌گذاریم که نخ همواره کشیده بشود و قلم را می‌چرخانیم. دو نقطه‌ای که نخ را محکم کردیم F و F' می‌نامیم. فاصلهٔ نقاط بیضی (M و N و P و...) از F و F'، برابر یا ثابت نیست؛ اما جمع این فاصله‌ها یعنی $MF' + MF$ یا $NF + NF'$ یا $PF' + PF$ همیشه ثابت و برابر طول نخ است. این مقدار ثابت را با $2a$ نشان می‌دهند. پس این طوری به خاطر بسپارید:

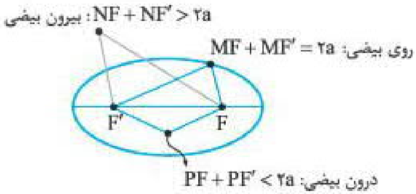


بیضی مکان هندسی نقاطی است که مجموع فاصله‌های آن‌ها از دو نقطهٔ F و F' مقدار ثابتی باشد.

نقطه‌های N و M روی یک بیضی است که برای رسم آن باید نخ را در نقاط F و F' ببندیم. اگر $MF = 6$، $MF' = 4$ و فاصلهٔ نقطهٔ N از F' برابر ۳ باشد، NF چه‌قدر است؟

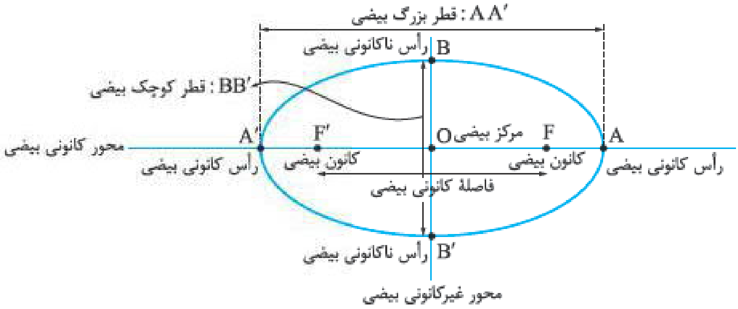
۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

گزینهٔ «۴» قرار شد $MF + MF'$ و $NF + NF'$ و... همگی ثابت و با هم برابر باشند. پس $6 + 4 = 3 + NF$ و در نتیجه $NF = 7$.

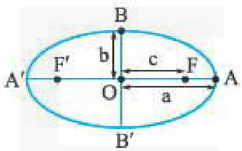


اشاره در بیضی سؤال قبل اگر جمع فاصله‌های نقطه‌ای از F و F' بیشتر از ۱۰ باشد، این نقطه بیرون بیضی است و اگر کم‌تر از ۱۰ باشد، درون بیضی است.

اجزای بیضی



حالا فاصله‌ها را یاد بگیرید:



$OF = OF' = c \Rightarrow$ فاصلهٔ کانونی $= FF' = 2c$

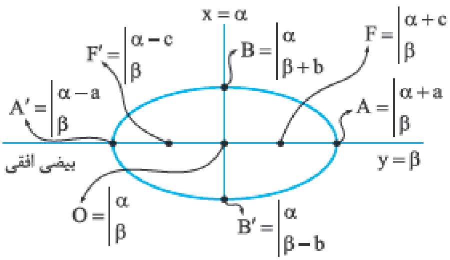
نصف قطر بزرگ: $OA = OA' = a \Rightarrow$ قطر بزرگ $= AA' = 2a$

نصف قطر کوچک: $OB = OB' = b \Rightarrow$ قطر کوچک $= BB' = 2b$

رابطهٔ بین a، b و c هم مهم است: $a^2 = b^2 + c^2$. بنابراین طول BF برابر a است: $BF = OA = a$.

موقعیت نقاط بستگی به قرارگرفتن قطر بزرگ دارد. اگر AA' یعنی قطر بزرگ، افقی باشد، بیضی افقی است و اگر AA' عمودی باشد بیضی قائم است.

در بیضی افقی کانون‌ها و رئوس کانونی روی خط افقی $y = \beta$ قرار دارند. یعنی عرض تمام آن‌ها با هم برابر است.

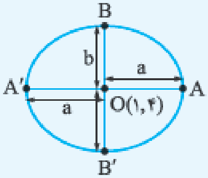


معادلهٔ محور کانونی $y = \beta$ و معادلهٔ محور ناکانونی $x = \alpha$ است.

در بیضی افقی با مرکز (۱,۴) و طول قطرهای ۸ و ۱۰. بیشترین مقدار طول و کم‌ترین مقدار عرض نقاط، چه‌قدر اختلاف دارند؟

۱) ۸ ۲) ۶ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

گزینهٔ «۲» سؤال گفته $2a = 10$ و $2b = 8$، پس $a = 5$ و $b = 4$ و داریم:



$$y_{max} = y_B = y_O + b = 4 + 4 = 8$$
$$y_{min} = y_{B'} = y_O - b = 4 - 4 = 0$$

اشاره موافقید که این بیضی بر محور xها مماس است (چون $y_{B'} = 0$)

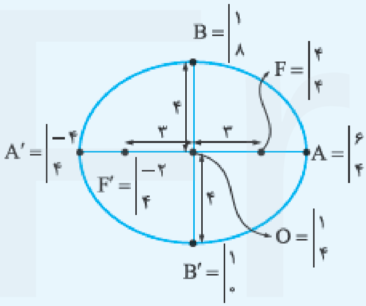
$$x_{min} = x_{A'} = x_O - a = 1 - 5 = -4 \qquad x_{max} = x_A = x_O + a = 1 + 5 = 6$$

پس $x_{max} - y_{min} = 6$.

حالا مختصات نقاط این بیضی را ببینید:

راستی با توجه به فیثاغورس، c می‌شود ۳.

با این گزاره‌ها موافقید؟



الف $-4 \le x \le 6$

ب $0 \le y \le 8$

پ $BF = a = 5$

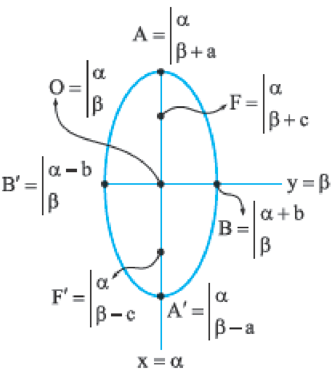
ت یک کانون (F) روی نیمساز ربع اول است.

ث یک رأس کانونی روی نیمساز ربع دوم (A') است.

ج خطوط $x = 6$، $x = -4$، $y = 8$ و $y = 0$ بر بیضی مماس‌اند.

چ معادلهٔ محور تقارن افقی، $y = 4$ و معادلهٔ محور تقارن عمودی، $x = 1$ است.

در بیضی قائم کانون‌ها و رئوس روی خط قائم $x = \alpha$ هستند. طول تمام نقاط A و A′، F و F′ و O با هم برابر است.



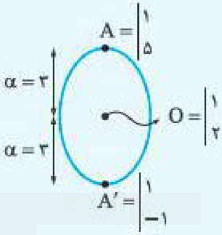
در یک بیضی کانون‌ها $F(1,2+\sqrt{5})$ و $F'(1,2-\sqrt{5})$ هستند. اگر قطر کوچک به طول ۴ باشد، مجموع طول و عرض رأس کانونی بیضی کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۵　　۲) ۶　　۳) ۷　　۴) ۸

گزینهٔ «۲» F و F' طول مساوی و عرض متفاوت دارند پس بیضی قائم است. مرکز بیضی در وسط F و F' یعنی $O(1,2)$ است و فاصلهٔ OF برابر $c=\sqrt{5}$ است. سؤال گفته قطر کوچک $2b=4$ است. پس $b=2$:

$$a^2=b^2+c^2=2^2+\sqrt{5}^2=4+5=9 \Rightarrow a=3$$

حالا مختصات رأس‌های کانونی:



و مجموع طول و عرض آن ۶ یا صفر است.

خروج از مرکز: در بیضی نسبت $\frac{c}{a}$ یعنی $\frac{FF'}{AA'}$ را خروج از مرکز می‌نامیم و با e نشان می‌دهیم. با توجه به رابطهٔ فیثاغورس می‌توان گفت $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$. حاصل این e عددی بین ۰ و ۱ است و هر چه به ۱ نزدیک‌تر باشد، بیضی کشیده‌تر است.

$e=0$ دایره　　$e=0/3$　　$e=0/7$　　$e=1$ پاره‌خط

خروج از مرکز کدام بیضی بیشتر است؟

۱) فاصلهٔ کانونی ۶ و قطر بزرگ ۱۰ باشد.

۲) نسبت طول قطرها $\frac{\sqrt{3}}{2}$ باشد.

۳) برای رسم آن نخی به طول ۵ که در دو نقطه به فاصلهٔ ۴ محکم شود لازم است.

۴) a، b و c دنباله حسابی بسازند.

گزینهٔ «۴» در ۱ فاصلهٔ FF' برابر ۶ و فاصلهٔ AA' برابر ۱۰ است پس:

$$e=\frac{c}{a}=\frac{FF'}{AA'}=\frac{6}{10}$$

در ۲ نسبت طول قطرها $\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{b}{a}=\frac{2b}{2a}$ است. پس:

$$e=\sqrt{1-(\frac{b}{a})^2}=\sqrt{1-(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}=\sqrt{1-\frac{3}{4}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$$

در ۳ طول نخ $2a=5$ و فاصلهٔ کانونی $2c=4$ است. پس:

$$e=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}$$

در ۴ می‌دانیم a، b و c فیثاغورسی‌اند و دنبالهٔ حسابی هم می‌سازند. پس همان‌طور که در فصل الگو و دنباله دیدیم به نسبت ۳,۴,۵ هستند. پس داریم:

$$e=\frac{c}{a}=\frac{3k}{5k}=\frac{3}{5}$$

و در بین این‌ها ۳ از همه بیشتر بود.

؟ دو سر قطر بزرگ یک بیضی $(1,6)$ و $(1,-2)$ و خروج از مرکز آن $\frac{\sqrt{7}}{4}$ است. طول قطر کوچک این بیضی کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۷ ۴) ۱۰

= گزینهٔ «۱» این بیضی قائم است (yها متفاوت‌اند) و داریم:

$$AA'=2a=6-(-2)=8 \Rightarrow a=4$$

حالا e را داریم:

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{7}}{4} \xrightarrow{a=4} c=\sqrt{7}$$

پس:

$$b^2=a^2-c^2=4^2-\sqrt{7}^2=16-7=9 \Rightarrow b=3$$

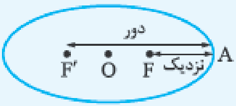
و طول قطر کوچک می‌شود:

$$BB'=2b=6$$

؟ در یک بیضی فاصلهٔ رأس A از کانون دورتر ۳ برابر فاصلهٔ آن از کانون نزدیک‌تر است. خروج از مرکز کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{6}$

= گزینهٔ «۳» فاصله‌ها را ببینید:



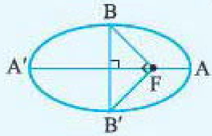
$$AF=a-c$$
$$AF'=a+c$$

سؤال گفته:

$$a+c=3(a-c)$$

پس $4c=2a$ و در نتیجه: $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$.

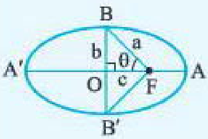
؟ در یک بیضی زاویهٔ $B\hat{F}B'$ قائمه است. خروج از مرکز کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

گزینهٔ «۲» شکل را ببینید:

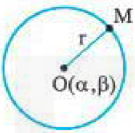


$$B\hat{F}B' = ۹۰^\circ$$

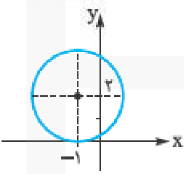
$$\Rightarrow B\hat{F}O = ۴۵^\circ$$

$$e = \cos\theta = \frac{OF}{BF} = \frac{c}{a} = \cos ۴۵^\circ = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

دایره



نقاطی از صفحه که به فاصلهٔ ثابتی از یک نقطهٔ ثابت (مرکز) قرار دارند، یک دایره می‌سازند. می‌گوییم $C(O,r)$ یعنی اسم دایره C است، مرکزش O و شعاعش r است. پس مثلاً $C((-۱,۲),۲)$ یعنی دایره به مرکز $(-۱,۲)$ و شعاع ۲. این شکلی:

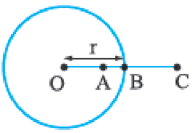


همین‌طور که دیدید دایره را می‌کشیم! یعنی از مرکز به اندازهٔ r به ۴ طرف می‌رویم و نقاط را به هم وصل می‌کنیم. الان معلوم است که سطح این دایره در نواحی ۱ و ۲ قرار دارد. بر محور x مماس است و محور y را در ۲ نقطه قطع می‌کند. عرض نقاط بین ۰ تا ۴ و طول نقاط در بازهٔ $[-۳,۱]$ قرار دارد.

اشاره در حالت کلی برای دایره به مرکز $O(\alpha,\beta)$ و شعاع r داریم:

$$\alpha - r \leq x \leq \alpha + r$$
$$\beta - r \leq y \leq \beta + r$$

اشاره اگر فاصلهٔ نقطه‌ای تا مرکز دایره، بیشتر از شعاع باشد، آن نقطه بیرون دایره است. برعکس، اگر فاصلهٔ نقطه تا مرکز دایره، کم‌تر از شعاع باشد، آن نقطه توی دایره است.



C بیرون دایره است. $OC > r \Leftrightarrow$

B روی دایره است. $OB = r \Leftrightarrow$

A درون دایره است. $OA < r \Leftrightarrow$

معادلهٔ دایره

برای نوشتن معادلهٔ دایره باید مختصات مرکز و اندازهٔ شعاع آن را داشته باشیم. اگر مرکز دایره $O(\alpha,\beta)$ و شعاع دایره r باشد، داریم:

$$(x-\alpha)^۲ + (y-\beta)^۲ = r^۲$$

پس معادلهٔ دایره به مرکز $(۳,۲)$ و شعاع ۵ می‌شود:

$$(x-۳)^۲ + (y-۲)^۲ = ۵^۲$$

از آن طرف $(x-۱)^۲ + (y+۲)^۲ = ۹$ معادلهٔ دایره‌ای به مرکز $O(۱,-۲)$ و شعاع $r = ۳$ است.

حالا اگر در معادلهٔ دایره، اتحادها را باز کنیم این شکلی می‌شود: $x^{2}+y^{2}+ax+by+c=0$

به معادلهٔ اولیه می‌گوییم **استاندارد** و به این فرم از معادله می‌گوییم **گسترده**.

حواستان هست که در معادلهٔ گسترده ضریب‌های x^{2} و y^{2} با هم برابر هستند و ما همیشه باید هر دو ضریب را اگر ۱ نیستند، برابر ۱ کنیم. می‌توانیم مرکز و شعاع دایره را از روی معادلهٔ گسترده به دست بیاوریم:

$$x^{2}+y^{2}+ax+by+c=0 \Rightarrow \begin{cases} O(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2})=(-\frac{\text{ضریب } x}{2},-\frac{\text{ضریب } y}{2}) \\ r=\frac{1}{2}\sqrt{a^{2}+b^{2}-4c}=\frac{1}{2}\sqrt{x_O^{2}+y_O^{2}-c} \end{cases}$$

پس در معادلهٔ $x^{2}+y^{2}+6x-4y-1=0$ داریم: $\xrightarrow[c=-1]{a=6\,,\,b=-4}$

$$\begin{cases} O(-\frac{6}{2},-\frac{-4}{2})=(-3,2) \\ r=\frac{1}{2}\sqrt{a^{2}+b^{2}-4c}=\frac{1}{2}\sqrt{6^{2}+(-4)^{2}-4(-1)}=\frac{1}{2}\sqrt{36+16+4}=\frac{1}{2}\sqrt{56}=\sqrt{14} \end{cases}$$

اشاره در معادلهٔ گسترده باید $a^{2}+b^{2}-4c$ مثبت باشد (وگرنه زیر رادیکالِ شعاع، منفی می‌شود).

؟ به ازای کدام مقادیر k معادلهٔ $2x^{2}+2y^{2}+4x-2y=k$ مربوط به یک دایره است؟

۱) $k>-4$ ۲) $k>-5$ ۳) $k>-2/5$ ۴) $k>-3$

= گزینهٔ «۳» قرار شد اول بر ۲ تقسیم کنیم تا ضرایب x^{2} و y^{2} یک شوند. (راستی، تمام جملات باید در طرف چپ باشند.)

$$x^{2}+y^{2}+2x-y-\frac{k}{2}=0 \xrightarrow[c=\frac{-k}{2}]{a=2,b=-1} r=\frac{1}{2}\sqrt{a^{2}+b^{2}-4c}=\frac{1}{2}\sqrt{4+1+2k}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{5+2k} \xrightarrow[\text{زیر رادیکال مثبت باشد.}]{\text{دایرهٔ حقیقی}} 5+2k>0 \Rightarrow k>-2/5$$

اشاره معادلهٔ گستردهٔ دایره‌ای که از مبدأ مختصات بگذرد $x^{2}+y^{2}+ax+by=0$ است یعنی در این دایره حتماً $c=0$ می‌شود. این را هم یک گوشهٔ ذهنتان بگذارید که اگر در دایره $c\leq 0$ باشد، حتماً شرط $a^{2}+b^{2}-4c>0$ برقرار است و نیازی به کنترل نداریم. یعنی به ازای $c\leq 0$ دایره همواره حقیقی است. اگر حوصله دارید بشنوید که: دایره با شرط $c<0$، حتماً از ۴ ناحیه می‌گذرد و محورها را در ۴ نقطه قطع می‌کند (هر محور ۲ بار).

؟ دو قطر از دایره‌ای خطوط $y=2x-1$ و $x+y=-4$ هستند. این دایره از $A(2,1)$ می‌گذرد. این دایره روی محور x وتری با کدام طول جدا می‌کند؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۰ ۳) ۶ ۴) ۸

گزینهٔ «۴» **راه‌حل اول** اول مرکز دایره را در محل برخورد قطرها پیدا کنید:

$$\begin{cases} y=۲x-۱ \\ x+y=-۴ \end{cases} \Rightarrow x+۲x-۱=-۴ \Rightarrow ۳x=-۳ \Rightarrow x=-۱ \Rightarrow y=-۳ \Rightarrow O(-۱,-۳)$$

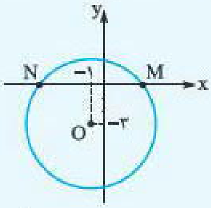
حالا با داشتن نقطهٔ $A(۲,۱)$ شعاع دایره برابر است با:

$$\xrightarrow[O(-۱,-۳)]{A(۲,۱)} r=OA=\sqrt{(۲-(-۱))^۲+(۱-(-۳))^۲}=\sqrt{۹+۱۶}=۵$$

و معادلهٔ دایره را می‌نویسیم:
$$\xrightarrow[r=۵]{O(-۱,-۳)} (x+۱)^۲+(y+۳)^۲=۵^۲$$

$$\Rightarrow x^۲+y^۲+۲x+۶y-۱۵=۰$$

شکل را هم ببینید:

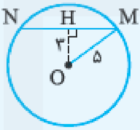


برای برخورد با محور xها، $y=۰$ قرار می‌دهیم و داریم:
$$x^۲+۰+۲x+۰-۱۵=۰$$

$$\Rightarrow x^۲+۲x-۱۵=(x+۵)(x-۳)=۰ \Rightarrow x=-۵ \text{ یا } ۳$$

$$\Rightarrow \text{طول وتر}=MN=۳-(-۵)=۸$$

راه‌حل دوم شعاع دایره ۵ و مرکز دایره از محور x به فاصلهٔ ۳ است. شکل را ببینید:



فیثاغورس می‌گوید $HM=۴$ و بنابراین $MN=۲\,HM=۸$

اشاره چیزهای دیگری حساب کنیم:

الف در این دایره $-۱-۵\leq x\leq -۱+۵$ و $-۳-۵\leq y\leq -۳+۵$ است.

ب دو سر وتری که روی محور yها می‌سازد از معادلهٔ $y^۲+۶y-۱۵=۰$ به دست می‌آید که طول آن $|y_۲-y_۱|=\sqrt{S^۲-۴P}=\sqrt{۳۶+۴(۱۵)}=\sqrt{۹۶}$ است.

پ معادلهٔ کلی قطرهای این دایره $y-(-۳)=m(x-(-۱))$ است (تمام قطرها از مرکز می‌گذرند و شیب آن‌ها را نمی‌دانیم).

وضع نسبی نقطه و دایره از روی معادله

قبلاً گفتیم که با توجه به فاصلهٔ نقطه از مرکز دایره و مقایسهٔ آن با اندازهٔ شعاع، می‌شود فهمید که نقطه کجای دایره است. (روی آن، درون آن یا بیرون آن)

حالا اگر معادلهٔ دایره را داشته باشیم، مختصات نقطه را به جای x و y در آن می‌گذاریم. اگر تساوی برقرار شد، نقطه روی دایره است؛ اگر طرف چپ بیشتر شد، نقطه بیرون دایره است و اگر طرف راست بیشتر شد، نقطه درون دایره است.

$$(x-۱)^۲+(y+۲)^۲=۶ \xrightarrow{\text{نقطه}:O(۰,۰)} \underbrace{(۰-۱)^۲+(۰+۲)^۲}_{\text{این می‌شود ۵}}<۶$$

پس $O(۰,۰)$ درون این دایره است.

نقطهٔ $(۱,۱)$ بیرون دایرهٔ $x^۲+y^۲-۳x+۴y-m=۰$ قرار دارد. چند مقدار صحیح برای m وجود دارد؟

۱) ۱۰ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

گزینهٔ «۴» اولاً باید با قراردادن $(۱,۱)$ طرف چپ بیشتر شود: $۱+۱-۳+۴-m>۰$

پس: $۳>m$

ثانیاً قرار شد زیر رادیکال شعاع مثبت باشد پس:

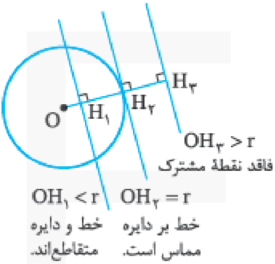
$$a^۲+b^۲-۴c=(-۳)^۲+۴^۲-۴(-m)>۰ \Rightarrow ۲۵+۴m>۰ \Rightarrow m>\frac{-۲۵}{۴}$$

پس مقادیر m بین $-\frac{۲۵}{۴}$ و ۳ قرار دارد:

$$-\frac{۲۵}{۴}<m<۳ \xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m=-۶,-۵,-۴,-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲$$

نُه مقدار صحیح برای m داریم.

وضع نسبی خط و دایره: برای تشخیص وضع نسبی خط و دایره، فاصلهٔ مرکز دایره از خط را حساب می‌کنیم.



فاصلهٔ نقطهٔ $O(\alpha,\beta)$ از خط $ax+by+c=۰$ برابر است با: $OH=\frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$

خط $۳x+۴y=۷$ و دایرهٔ $(x-۱)^۲+(y+۱)^۲=۱$ نسبت به هم چگونه‌اند؟

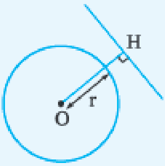
۱) خط امتداد قطر دایره است. ۲) خط مماس بر دایره است.

۳) در دو نقطه متقاطع‌اند. ۴) نقطهٔ مشترکی ندارند.

گزینهٔ «۴» مرکز دایره $O(۱,-۱)$ است و فاصلهٔ آن از خط برابر است با:

$$\xrightarrow{O(۱,-۱)} OH=\frac{|۳(۱)+۴(-۱)-۷|}{\sqrt{۳^۲+۴^۲}}=\frac{|۳-۴-۷|}{۵}=\frac{|-۸|}{۵}=\frac{۸}{۵}>r=۱$$

فاصلهٔ مرکز دایره تا خط، از شعاع بیشتر است پس خط و دایره نقطهٔ مشترکی ندارند.



اشاره از روی شکل بگویید چرا بیشترین و کم‌ترین فاصلهٔ نقاط دایره تا خط، $\frac{۸}{۵}-۱$ و $\frac{۸}{۵}+۱$ است؟!

؟ **معادلهٔ دایره‌ای که مرکزش $(2,-1)$ و بر محور y مماس باشد کدام است؟**

۱) $x^2+y^2-4x+2y+4=-1$ ۲) $x^2+y^2-4x-2y+1=0$

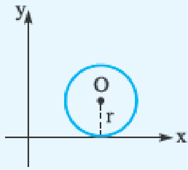
۳) $x^2+y^2-4x+2y+1=0$ ۴) $x^2+y^2-4x-2y+4=0$

= گزینهٔ «۳»

اشاره گفتیم شعاع برابر فاصلهٔ مرکز از خط مماس است.

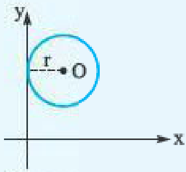
$r=OH$

این حالت‌ها را ببینید:



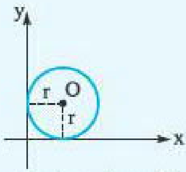
دایره مماس بر محور x

$r=|y_O|$



دایره مماس بر محور y

$r=|x_O|$



دایره مماس بر دو محور

$r=|x_O|=|y_O|$

پس در این سؤال که دایره بر محور y مماس است داریم: $r=|x_O|=2$

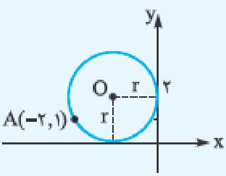
$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2 \xrightarrow[r=2]{\alpha(2,-1)} (x-2)^2+(y+1)^2=2^2$$

$$\Rightarrow x^2+y^2-4x+2y+1=0$$

؟ **دایرهٔ C مماس بر هر دو محور مختصات است و از $(-2,1)$ می‌گذرد. مقادیر شعاع آن کدام‌اند؟**

۱) ۳ و ۱   ۲) ۳ و ۲   ۳) ۲ و ۵   ۴) ۱ و ۵

= گزینهٔ «۴» شکل را ببینید. مرکز این دایره حتماً $O(-r,r)$ است:



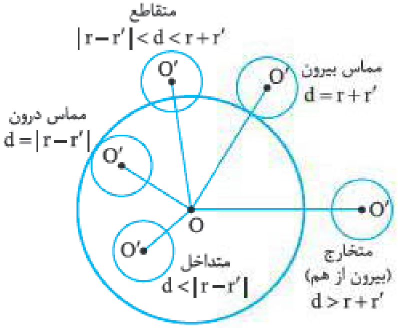
پس معادلهٔ دایره به صورت $(x+r)^2+(y-r)^2=r^2$ است و باید $A(-2,1)$ در آن صدق کند:

$$\xrightarrow[\uparrow\uparrow\; x\, y]{(-2,1)} (-2+r)^2+(1-r)^2=r^2 \Rightarrow r^2-4r+4+r^2-2r+1=r^2$$

$$\Rightarrow r^2-6r+5=0 \Rightarrow r=1 \text{ یا } 5$$

اوضاع نسبی دو دایره:

برای بررسی وضع دو دایره نسبت به هم باید فاصلهٔ بین دو مرکز (طول خط‌المرکزین) و شعاع دایره‌ها را داشته باشیم: $d=OO'$: طول خط‌المرکزین



اشاره در حالت $d=۰$ دو دایره را هم‌مرکز می‌نامند.

؟ **دو دایره به مراکز $(۳,-۱)$ و $(۰,۳)$ و شعاع‌های ۱ و ۴ نسبت به هم چگونه‌اند؟**

۱) متخارج ۲) متداخل ۳) مماس برون ۴) مماس درون

= گزینهٔ «۳»

$$\left.\begin{array}{l} OO'=d=\sqrt{(۰-۳)^۲+(۳-(-۱))^۲}=۵ \\ r+r'=۴+۱=۵ \end{array}\right\} \Rightarrow \text{مماس برون}$$

؟ **دو سر قطر دایره‌ای $B=(۲,-۱)$ و $A(۴,۵)$ هستند. این دایره نسبت به دایرهٔ $x^۲+y^۲-۲x-۴y=۴$ چگونه است؟**

۱) مماس درون ۲) مماس برون ۳) متخارج ۴) متقاطع

= گزینهٔ «۴» در دایرهٔ اولی مرکز $O=\frac{A+B}{۲}=(۳,۲)$ و شعاع $r=\frac{AB}{۲}=\frac{\sqrt{۴۰}}{۲}=\sqrt{۱۰}$ است که تقریباً می‌شود ۳/۱. مرکز و شعاع دایرهٔ دوم $O'(-\frac{-۲}{۲},-\frac{-۴}{۲})=(۱,۲)$ و شعاع $r=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴+۱۶-۴(-۴)}=۳$ است. طول خط‌المرکزین می‌شود:

$$d=OO'=\sqrt{(۳-۱)^۲+(۲-۲)^۲}=۲$$

و با توجه به $r+r'\simeq ۶/۱$ و از $|r-r'|\simeq ۰/۱$ داریم $|r-r'|<d<r+r'$ یعنی متقاطع‌اند.

؟ **دایره به مرکز $(۳,-۱)$ و مماس بر محور xها و دایرهٔ دیگر به مرکز $(-۱,۲)$. مماس درون هستند. شعاع دایرهٔ دوم کدام است؟**

۱) ۶ ۲) ۴ ۳) ۶ یا ۴ ۴) نشدنی

= گزینهٔ «۱» اول طول خط‌المرکزین:

$$d=OO'=\sqrt{(۳-(-۱))^۲+(-۱-۲)^۲}=\sqrt{۱۶+۹}=۵$$

حالا سؤال می‌گوید این‌ها مماس درون‌اند پس $d=|r-r'|$

چون شعاع دایرهٔ اولی $r=|y_O|=1$ (مماس بر محور xها) است. پس داریم:

$$5=|1-r'| \Rightarrow 1-r'=\pm 5 \xrightarrow{r'>0} r'=6$$

? دایره‌ای از ۳ نقطهٔ $(1,-2)$، $(2,1)$ و $(5,0)$ می‌گذرد. این دایره و دایره به معادلهٔ $x^2+y^2-2x+m=0$ مماس درون‌اند. مقدار m کدام است؟

۱) -4 ۲) -9 ۳) -14 ۴) -19

= گزینهٔ «۴» اول معادلهٔ دایرهٔ گذرا بر ۳ نقطه را بنویسیم، چون فعلاً مرکز را نداریم (شعاع را هم نداریم!)

راه عادی این است که سه نقطه را در معادلهٔ گسترده قرار دهیم:

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

$$\xrightarrow{(2,1)} 4+1+2a+b+c=0 \Rightarrow 2a+b+c=-5$$

$$\xrightarrow{(5,0)} 25+0+5a+0b+c=0 \Rightarrow 5a+c=-25$$

$$\xrightarrow{(1,-2)} 1+4+a-2b+c=0 \Rightarrow a-2b+c=-5$$

$$\ominus : 3a-b=-20$$

$$\ominus : -4a-2b=20$$

از حل این دستگاه: $a=-6$، $b=2$ و $c=5$. پس مرکز $O(\frac{-a}{2},\frac{-b}{2})=(3,-1)$ و شعاع $r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}=\frac{1}{2}\sqrt{36+4-20}=\sqrt{5}$ است.

راه خاص هم این است که بفهمیم مثلث با رئوس $A(1,-2)$، $B(2,1)$ و $C(5,0)$ قائم‌الزاویه است!

$$AB=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}\,,\ AC=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}\,,\ BC=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$$

پس $AC^2=AB^2+BC^2$. بنابراین مرکز در وسط وتر AC و شعاع نصف وتر AC است:

$$O=\frac{A+C}{2}=(\frac{5+1}{2},\frac{-2+0}{2})=(3,-1)$$

$$r=\frac{AC}{2}=\frac{\sqrt{20}}{2}=\frac{2\sqrt{5}}{2}=\sqrt{5}$$

حالا قرار است این دایره و دایرهٔ $x^2+y^2-2x+m=0$ مماس درون شوند:

$$x^2+y^2-2x+m=0 \Rightarrow \begin{cases} O'(1,0) \\ r'=\sqrt{1-m} \end{cases} \xrightarrow{\text{مماس درون}} d=OO'=|r-r'|$$

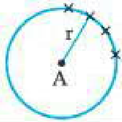
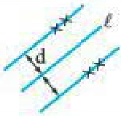
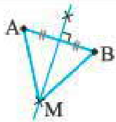
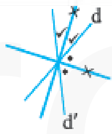
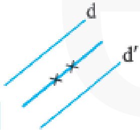
$$\Rightarrow \sqrt{(3-1)^2+(-1-0)^2}=|\sqrt{5}-r'|$$

$$\Rightarrow \sqrt{5}=|\sqrt{5}-r'| \xrightarrow{r'>0} r'=2\sqrt{5}$$

پس $r'=\sqrt{1-m}=2\sqrt{5}$ و در نتیجه:

$$1-m=4\times 5=20$$
$$\Rightarrow m=-19$$

مکان هندسی یعنی مجموعه نقاطی از صفحه که یک ویژگی مشترک دارند. این‌ها را باید بلد باشید.

توصیف مکان هندسی	شکل آن	
۱ نقاطی که از نقطهٔ A به فاصلهٔ r هستند.		دایره به مرکز A و شعاع r (همان $C(A,r)$)
۲ نقاطی که از خط ℓ به فاصلهٔ d هستند.		دو خط موازی ℓ به فاصلهٔ d از آن
۳ نقاطی که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله‌اند.		عمودمنصف پاره‌خط AB
۴ نقاطی که از دو خط متقاطع d و d' به یک فاصله‌اند.		دو نیمساز زاویهٔ بین دو خط (دو خط عمود بر هم)
۵ نقاطی که از دو خط موازی d و d' به یک فاصله‌اند.		خطی موازی آن‌ها و در وسط d و d'

؟ حداکثر چند نقطه در یک صفحه وجود دارد که از دو خط موازی به یک فاصله و از نقطهٔ A به فاصلهٔ ۲ باشند؟

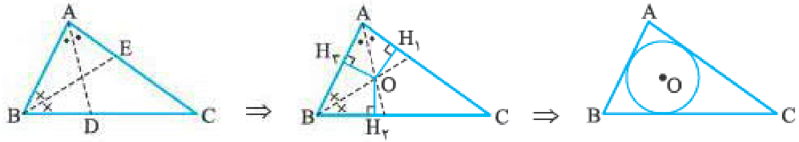
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

= گزینهٔ «۲» در بالا دیدیم نقاطی که از دو خط موازی به یک فاصله‌اند روی خطی در وسط آن‌ها قرار دارند و نقاطی که از A به فاصلهٔ ۲ باشند روی دایره به مرکز A و شعاع ۲ قرار دارند. پس جواب، نقاط مشترک این خط و دایره است که حداکثر ۲ نقطه است.

اشاره موافقید که فاصلهٔ این دو نقطه از هم می‌تواند حداکثر ۴ باشد؟!

اشاره اگر در مثلث، ۲ نیمساز را رسم کنیم در نقطه‌ای مثل O به هم می‌خورند. (اصطلاحاً می‌گویند همرس‌اند.)

این نقطه از ۳ ضلع مثلث به یک فاصله است و دایرهٔ به مرکز این نقطه و شعاع $r = \dfrac{\text{مساحت مثلث}}{\text{نصف محیط مثلث}}$، بر ۳ ضلع مثلث مماس می‌شود.



نقاط روی AD از AB و AC به یک فاصله‌اند.

نقاط روی BE از BA و BC به یک فاصله‌اند.

نقطهٔ O از ۳ ضلع مثلث به یک فاصله است.

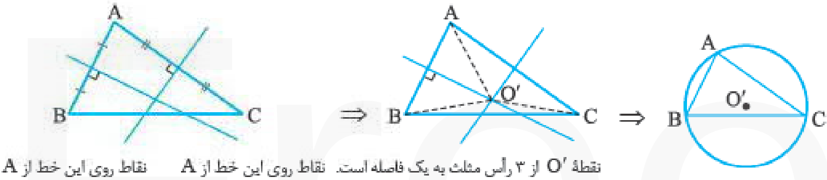
$r = OH_1 = OH_2 = OH_3$

دایره به مرکز O بر اضلاع مثلث مماس است.

نقطهٔ O تنها نقطه درون مثلث است که این ویژگی را دارد.

اشاره اگر در مثلث، عمودمنصف ۲ تا از اضلاع را رسم کنیم در نقطه‌ای مثل O' متقاطع‌اند.

این نقطه از ۳ رأس مثلث به یک فاصله است و دایرهٔ به مرکز O' و شعاع $R = \frac{abc}{4S} = \frac{\text{ضرب اضلاع}}{4 \times \text{مساحت}}$ از ۳ رأس می‌گذرد.



نقاط روی این خط از A و C به یک فاصله‌اند.

نقاط روی این خط از A و B به یک فاصله‌اند.

نقطهٔ O' از ۳ رأس مثلث به یک فاصله است.

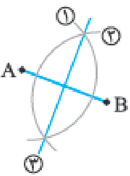
$R = O'A = O'B = O'C$

دایره به مرکز O' از ۳ رأس می‌گذرد.

O' تنها نقطه‌ای در صفحه است که این ویژگی را دارد. O' لزوماً درون مثلث نیست و اگر یکی از زاویه‌ها بیشتر از 90° باشد، بیرون مثلث می‌افتد. در مثلث قائم‌الزاویه هم O' وسط وتر است.

چند ترسیم مهم

الف رسم عمودمنصف پاره‌خط AB سه مرحله دارد:



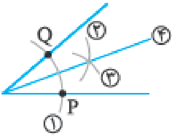
۱ و **۲** از دو سر پاره‌خط کمانی به شعاع بیش از نصف AB می‌زنیم.

۳ نقطهٔ تلاقی دو کمان را به هم وصل می‌کنیم.

ب رسم نیمساز یک زاویه ۴ مرحله دارد:

۱ به شعاع دلخواه از رأس زاویه، کمان می‌زنیم تا اضلاع را در دو نقطهٔ P و Q قطع کند.

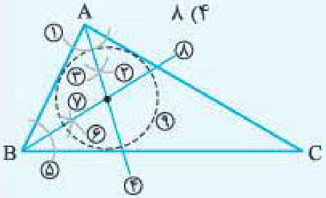
۲ و **۳** از محل تلاقی کمان با اضلاع، دو کمان جدید به شعاع کمی بیشتر از نصف طول پاره‌خط PQ می‌زنیم.



۴ رأس زاویه را به محل برخورد ۲ کمان جدید وصل می‌کنیم.

برای رسم دایرهٔ مماس بر ۳ ضلع یک مثلث با خط‌کش و پرگار چند عمل لازم است؟

۱) ۹ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸



گزینهٔ «۱» اول باید نیمساز زاویه‌های A و B را بکشیم که هر کدام ۴ مرحله دارد پس تا این‌جا ۸ عمل لازم است. سپس از محل تلاقی آن‌ها دایره‌ای به شعاع r رسم کنیم که یک مرحله اضافه می‌شود یعنی ۹ مرحله داریم.

قضیهٔ نامساوی مثلث

برای رسم مثلث، با اضلاع a,b,c پاره‌خطی به طول a (مثلاً ضلع بزرگ‌تر) می‌کشیم، سپس از یک سر آن کمانی به شعاع b و از سر دیگر کمانی به شعاع c می‌زنیم رأس سوم این مثلث محل برخورد دو کمان است.

دقت کنید که برای وجود مثلث لازم است دو کمان همدیگر را قطع کنند؛ یعنی $b+c>a$ باشد پس شرط وجود مثلث با طول اضلاع a,b,c این است که ضلع بزرگ‌تر از مجموع دوتای دیگر کوچک‌تر باشد.

اگر ندانیم ضلع بزرگ‌تر کدام است باید سه نامساوی $a<b+c$، $b<a+c$ و $c<a+b$ کنترل شوند.

کدام اعداد سه ضلع یک مثلث‌اند؟

۱) $\sqrt{۵},\sqrt{۱۰},۶$ ۲) $۱,\sqrt{۲},\pi$

۳) هر سه عدد طبیعی فرد متوالی ۴) ۳,۴,۶

گزینهٔ «۴» در ① واضح است که $\sqrt{۱۰}+\sqrt{۵}$ از ۶ بیشتر نیست.

در ② هم موافقید که $۱+\sqrt{۲}$ از π کم‌تر است.

در ③ می‌توان به راحتی نشان داد که ۱,۳,۵ قبول نیستند (البته هر سه عدد فرد متوالی دیگری قبول‌اند!)

اما ۳, ۴, ۶، در آرامش کامل، طول اضلاع یک مثلث‌اند. $(۳+۴>۶)$

انواع استدلال

استقرایی

اگر یک موضوع را در چند حالت بررسی کنیم و از یکسانی نتیجه‌ها به یک نتیجهٔ کلی برسیم، استدلال استقرایی داریم.

یعنی از جزء به کل می‌رسیم و نتیجهٔ چند مثال را به مواردی که ندیده‌ایم تعمیم می‌دهیم.

استنتاجی

نتیجه‌گیری منطقی بر مبنای واقعیت‌هایی است که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم. مثلاً حدسی که با استدلال استقرایی زده‌ایم را با استدلال استنتاجی اثبات می‌کنیم.

برهان خلف

این روش اثبات غیرمستقیم است. فرض می‌کنیم حکم درست نباشد (فرض خلف) و سپس به روش استنتاجی نشان می‌دهیم این فرض خلف، ما را به تناقض می‌رساند، پس حکم مجبور است درست باشد.

مثال نقض

مثالی که نشان می‌دهد یک حکم کلی نادرست است. مثلاً در بررسی حکم «$n^{۲} + n + ۴۱$ همواره اول است.» با آوردن مثال $n = ۴۱$ که عدد اول نمی‌سازد نادرستی حکم را نشان می‌دهیم.

قضایای شرطی

قضیه‌ها، نتایج مهم و پرکاربردی هستند که با استدلال استنتاجی به دست می‌آیند. هر قضیه یک فرض و یک حکم دارد و به صورت اگر .... آن‌گاه .... بیان می‌شود. قضیه با فرض P و حکم Q را به صورت $P \Rightarrow Q$ می‌نویسیم.

عکس یک قضیه

حالا اگر جای فرض و حکم یک قضیه را عوض کنیم عکس قضیه به دست می‌آید. ممکن است عکس یک قضیه درست نباشد. عکس قضیهٔ $P \Rightarrow Q$ به صورت $Q \Rightarrow P$ است.

قضایای دوشرطی

اگر عکس قضیهٔ $P \Rightarrow Q$ درست باشد می‌گوییم $P \Leftrightarrow Q$ و این قضیه را دو شرطی می‌نامیم.

در بیان فارسی می‌گوییم P اگر و تنها اگر Q.

نسبت و تناسب

اگر دو نسبت $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ با هم مساوی باشند یک تناسب داریم: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

خواص تناسب

۱ طرفین وسطین: از $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ همیشه می‌توان نتیجه گرفت $ad = bc$

برعکس، از $ad = bc$ می‌توانیم تناسب‌های $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ و $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ و ... را نتیجه بگیریم.

۲ اجازه داریم جای جملات طرفین یا وسطین را عوض کنیم:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \begin{cases} \xrightarrow{\text{معکوس‌کردن نسبت‌ها}} \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \\ \xrightarrow{\text{تعویض جای } c,b} \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \\ \xrightarrow{\text{تعویض جای } a,d} \frac{d}{b} = \frac{c}{a} \\ \xrightarrow{\text{هر دو با هم}} \frac{d}{c} = \frac{b}{a} \text{(انگار دو کسر را عکس کرده‌ایم.)} \end{cases}$$

۳ ترکیب یا تفضیل نسبت در صورت یا مخرج: یعنی اجازه داریم به صورت هر کسر، مضربی از مخرج خودش را اضافه یا کم کنیم یا به مخرج هر کسر مضربی از صورتش را اضافه یا کم کنیم:

Free

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d} \quad , \quad \frac{a}{b\pm a}=\frac{c}{d\pm c}$$

۴ ترکیب دو کسر با هم: در تناسب $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ می‌توان کسر سوم را از جمع صورت‌ها و جمع مخرج‌ها به دست آورد.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$$

؟ **اگر $\frac{۵۱}{۴۱}=\frac{۲x+۱۳/۷۵}{۲x+۱۱/۲۵}$ ، مقدار x کدام است؟**

۱) -۱ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $-\frac{۱}{۴}$ ۴) $-\frac{۳}{۴}$

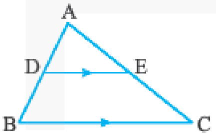
گزینهٔ «۲» صورت هر کسر را از مخرج کم کنیم:

$$\frac{۲x+۱۳/۷۵}{۲x+۱۱/۲۵-(۲x+۱۳/۷۵)}=\frac{۵۱}{۴۱-۵۱}$$

$$\Rightarrow \frac{۲x+۱۳/۷۵}{-۲/۵}=\frac{۵۱}{-۱۰} \Rightarrow ۲x+۱۳/۷۵=\frac{۵۱}{۴}=۱۲/۷۵ \Rightarrow x=-\frac{۱}{۲}$$

قضیهٔ تالس و تعمیم آن

اگر پاره‌خط DE با ضلع BC از مثلث ABC موازی باشد، طول پاره‌خط‌های AD، DB، AE و EC که روی دو ضلع دیگر مثلث ایجاد می‌شوند، متناسب‌اند.



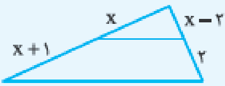
$$\underbrace{DE \parallel BC}_{\text{فرض}} \Rightarrow \underbrace{\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}}_{\text{حکم}}$$

اشاره برای اثبات این قضیه راه کتاب درسی را بلد باشید: از E بر AB عمود می‌کنیم و نسبت مساحت دو مثلث ADE و BDE را به دست می‌آوریم. بعد نسبت مساحت ADE و DEC را حساب می‌کنیم و تمام.

اشاره قضیهٔ تالس دوشرطی است یعنی عکس آن هم درست است و داریم:

$$DE \parallel BC \Leftrightarrow \frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$$

؟ **مقدار x کدام است؟**



۱) $\frac{۳+\sqrt{۱۷}}{۲}$ ۲) $\frac{۱+\sqrt{۱۰}}{۲}$

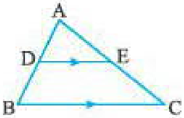
۳) $\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ ۴) $\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲}$

گزینهٔ «۱» طبق قضیهٔ تالس باید داشته باشیم:

$$\frac{x}{x+۱}=\frac{x-۲}{۲}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} ۲x=x^۲-x-۲ \Rightarrow x^۲-۳x-۲=۰ \xrightarrow{x>۱} x=\frac{۳+\sqrt{۱۷}}{۲}$$

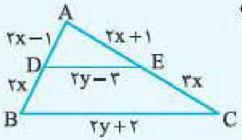
⇦ تعمیم قضیهٔ تالس



اگر $DE \parallel BC$ باشد داریم: $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$

این تناسب را نسبت «جزء به کل» می‌نامند (تناسب تالس که در بالا دیدیم «جزء به جزء» بود). دقت کنید که خود پاره‌خط‌های موازی یعنی DE و ضلع BC، در این تناسب جزء به کل ظاهر می‌شوند. پس هر وقت در مسئله، طول پاره‌خط‌های موازی را بدهند یا بخواهند از تعمیم تالس می‌رویم.

؟ در شکل روبه‌رو، DECB ذوزنقه است. $y-x$ کدام است؟



۱) ۱ ۲) ۰/۵

۳) ۱/۵ ۴) ۲

= گزینهٔ «۱» ذوزنقه یعنی DE و BC موازی‌اند. پس طبق تالس داریم:

$$\frac{۲x-۱}{۲x}=\frac{۲x+۱}{۳x}\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}}۶x^۲-۳x=۴x^۲+۲x$$

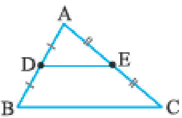
$$\Rightarrow ۲x^۲=۵x \Rightarrow x=\frac{۵}{۲}=۲/۵$$

حالا برای y داریم:

$$\frac{۲y-۳}{۲y+۲}=\frac{۲x-۱}{۲x-۱+۲x}=\frac{۲x-۱}{۴x-۱}=\frac{۲(\frac{۵}{۲})-۱}{۴(\frac{۵}{۲})-۱}=\frac{۴}{۹}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}}۱۸y-۲۷=۸y+۸ \Rightarrow ۱۰y=۳۵ \Rightarrow y=\frac{۳۵}{۱۰}=\frac{۷}{۲}=۳/۵$$

و در نتیجه: $y-x=۳/۵-۲/۵=۱$



اشاره اگر E و D وسط اضلاع AB و AC باشند داریم:

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}=۱$$

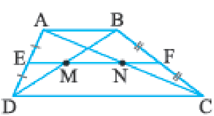
پس طبق عکس قضیهٔ تالس، DE و BC موازی‌اند.

حالا تعمیم تالس می‌گوید:

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{۱}{۲}=\frac{DE}{BC}$$

پس DE نصف BC است. دو نتیجه را با هم ببینید:

پاره‌خطی که وسط دو ضلع از مثلث را به هم وصل می‌کند با ضلع سوم موازی و طولش نصف طول ضلع سوم است.

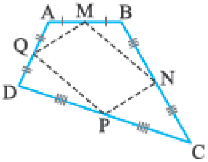


و بعضی‌ها به خاطر می‌سپارند که:

اگر E و F وسط دو ساق ذوزنقه باشند: $EF=\frac{AB+CD}{۲}$

EF از وسط قطرها هم می‌گذرد و داریم: $MN=\frac{CD-AB}{۲}$

همچنین ثابت می‌شود اگر وسط‌های اضلاع یک چهارضلعی را به هم وصل کنیم داریم:



MNPQ متوازی‌الاضلاع است.

MQ و NP موازی و نصف قطر BD هستند.

MN و PQ موازی و نصف قطر AC هستند.

مساحت MNPQ نصف مساحت ABCD است.

محیط MNPQ جمع طول قطرهای ABCD است؛ یعنی برابر AC+BD است.

مثلث‌های متشابه و قضیهٔ اساسی تشابه

دو مثلث زمانی متشابه‌اند که زاویه‌های مساوی و اضلاع متناسب داشته باشند. یعنی:

$$\hat{A}=\hat{A}',\hat{B}=\hat{B}',\hat{C}=\hat{C}',\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}$$

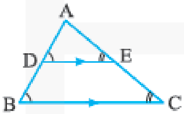
نسبت اضلاع دو مثلث متشابه را نسبت تشابه می‌نامیم و با k نشان می‌دهیم. مثلاً: $k=\frac{A'B'}{AB}$

با خواص تناسب می‌توان نشان داد که نسبت محیط دو مثلث نیز k است، نسبت طول میانه‌ها و ارتفاع‌ها نیز k است.

قضیهٔ اساسی تشابه

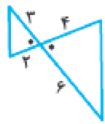
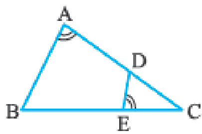
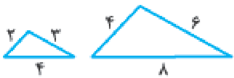
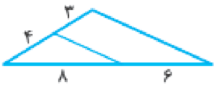
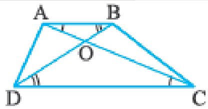
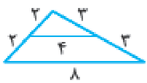
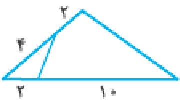
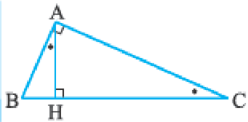
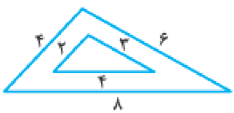
در تعمیم قضیهٔ تالس گفتیم از $DE \parallel BC$ نتیجه می‌شود $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$؛

پس حالا که زاویه‌های دو مثلث با هم مساوی‌اند، دو مثلث ADE و ABC متشابه‌اند.

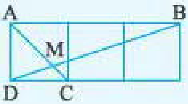


$$\overset{\Delta}{ABC}\sim\overset{\Delta}{ADE}$$

از کجا تشخیص دهیم دو مثلث متشابه‌اند.

تناسب دو ضلع و تساوی زاویهٔ بین	حالت دو زاویه (پرتکرار)	تناسب ۳ ضلع
اگر $\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}$ و $\hat{A}=\hat{A}'$ باشد دو مثلث متشابه‌اند.	وقتی دو مثلث دو جفت زاویهٔ مساوی دارند. $\hat{A}=\hat{A}',\hat{B}=\hat{B}'$	اگر $\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}$، آن‌گاه دو مثلث متشابه‌اند.
		
		
		

؟ در شکل روبه‌رو، ۳ مربع به ضلع ۱ در کنار هم هستند. طول MA چه‌قدر است؟

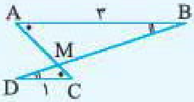


۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$

۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۴}$ ۴) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۴}$

= گزینهٔ «۴» مثلث‌های ABM و DCM متشابه‌اند:

چون طبق قضیهٔ خطوط موازی و مورب، $\hat{C}=\hat{A}$ و $\hat{B}=\hat{D}$ پس داریم:



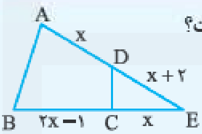
$$\overbrace{\frac{BM}{DM}}^{\hat{A}=\hat{C}}=\overbrace{\frac{AM}{MC}}^{\hat{B}=\hat{D}}=\overbrace{\frac{AB}{CD}}^{\hat{M}_۱=\hat{M}_۲}\Rightarrow\frac{AM}{CM}=\frac{۳}{۱}=۳$$

می‌دانیم طول کل AC برابر قطر مربع یعنی $\sqrt{۲}$ است. پس:

$$\left.\begin{array}{l}AM=۳CM\\ AC=AM+CM=\sqrt{۲}\end{array}\right\}\Rightarrow CM=\frac{\sqrt{۲}}{۴},AM=\frac{۳\sqrt{۲}}{۴}$$

اشاره کاری که در مثال بالا کردیم اصل ماجرای تشابه است. یعنی باید بعد از تشخیص دو مثلث متشابه، سه‌تا خط کسری بگذاریم. در هر کسر اضلاع روبه‌روی زوایای مساوی را بنویسیم و حواسمان باشد که تمام اضلاع یکی از مثلث‌ها در صورت و تمام اضلاع دیگری در مخرج باشند.

؟ در شکل روبه‌رو، زوایای مقابل چهارضلعی مکمل‌اند. [x] کدام است؟



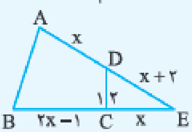
۱) ۵ ۲) ۶

۳) ۷ ۴) ۸

= گزینهٔ «۳» این‌که گفته زوایای مقابل چهارضلعی مکمل‌اند یعنی در ABCD داریم:

$$\hat{A}+\hat{C}=\hat{B}+\hat{D}=۱۸۰^\circ$$

از طرفی دو زاویهٔ C هم مکمل‌اند؛ یعنی $\hat{C}_۱+\hat{C}_۲=۱۸۰^\circ$. پس: $\hat{A}=\hat{C}_۲$



پس مثلث‌ها متشابه‌اند: $\hat{A}$ و $\hat{C}_۲$ مساوی‌اند و $\hat{E}$ مشترک است:

$$\overset{\Delta}{ABE}\sim\overset{\Delta}{CDE}\Rightarrow\overbrace{\frac{DC}{AB}}^{\text{روبه‌روی }\hat{E}}=\overbrace{\frac{x+۲}{۲x-۱+x}}^{\text{روبه‌روی }\hat{A},\hat{C}_۲}=\overbrace{\frac{x}{x+x+۲}}^{\text{ضلع‌سومی}}$$

$$\Rightarrow\frac{x+۲}{۳x-۱}=\frac{x}{۲x+۲}\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}}(x+۲)(۲x+۲)=(۳x-۱)x$$

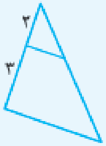
$$\Rightarrow ۲x^۲+۶x+۴=۳x^۲-x\Rightarrow x^۲-۷x-۴=۰$$

$$\xrightarrow{x>۰}x=\frac{۷+\sqrt{۶۵}}{۲}\xrightarrow{\sqrt{۶۵}=۸/۱}x\simeq\frac{۱۵/۱}{۲}=۷/۵۵\Rightarrow[x]=۷$$

مساحت در مثلث‌های متشابه

گفتیم وقتی دو مثلث با نسبت تشابه k متشابه‌اند، نسبت تمام اجزای طولی آن‌ها یعنی اضلاع، میانه‌ها، ارتفاع‌ها، نیمسازها و محیط نیز k است. حالا تأکید کنیم که نسبت مساحت‌ها می‌شود $k^۲$؛ یعنی:

$$\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'} \qquad \frac{A'B'}{AB} = k \Rightarrow \frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = k^۲$$

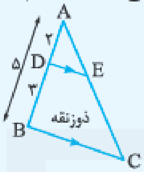


در شکل روبه‌رو، نسبت مساحت ذوزنقه به مثلث بزرگ‌تر کدام است؟

۱) ۰/۶۶ ۲) ۰/۶

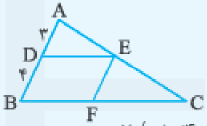
۳) ۰/۸۴ ۴) ۰/۷۵

گزینهٔ «۳» خود سؤال گفته چهارضلعی پایینی ذوزنقه است، پس پاره‌خط DE با ضلع BC موازی است و طبق قضیهٔ اساسی تشابه مثلث ADE با ABC متشابه می‌شود و داریم:



$$\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = k^۲ = (\frac{۲}{۵})^۲ = \frac{۴}{۲۵} \Rightarrow \frac{S_{DECB}}{S_{ABC}} = \frac{S_{ABC} - S_{ADE}}{S_{ABC}}$$

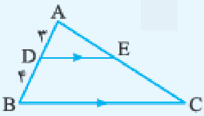
$$= ۱ - \frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = ۱ - \frac{۴}{۲۵} = \frac{۲۱}{۲۵} = ۰/۸۴$$

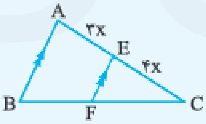


در شکل زیر، چهارضلعی $DEFB$ متوازی‌الاضلاع است. مساحت ABC چند برابر متوازی‌الاضلاع است؟

۱) ۱/۸۶ ۲) ۱/۹۶ ۳) ۲/۰۴ ۴) ۲/۰۸

گزینهٔ «۳» خب دوتا پاره‌خط موازی اضلاع داریم:





اشاره دقت می‌کنید که نسبت AD و DB، همان نسبت AE و EC است. پس چون $\frac{AD}{DB} = \frac{۳}{۴}$، روی ضلع AC نیز نسبت باید ۳ و ۴ باشد، برای همین نوشتیم $۳x$ و $۴x$.

حالا با توجه به قضیهٔ اساسی تشابه داریم:

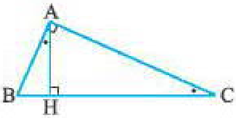
$$\overset{\Delta}{ADE} \sim \overset{\Delta}{ABC} \Rightarrow \frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = k^۲ = (\frac{۳}{۷})^۲ = \frac{۹}{۴۹}$$

$$\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{CEF} \Rightarrow \frac{S_{CEF}}{S_{ABC}} = k^۲ = (\frac{۴}{۷})^۲ = \frac{۱۶}{۴۹}$$

پس مثلث ADE به اندازهٔ $\frac{۹}{۴۹}$ و مثلث CEF به اندازهٔ $\frac{۱۶}{۴۹}$ از مساحت کل ABC را مال خودشان کردند و برای متوازی‌الاضلاع به اندازهٔ $۱ - \frac{۹}{۴۹} - \frac{۱۶}{۴۹} = \frac{۲۴}{۴۹}$ باقی مانده است؛ یعنی: $\frac{S_{DEFB}}{S_{ABC}} = \frac{۲۴}{۴۹}$

و داریم: $\frac{S_{ABC}}{S_{DEFB}} = \frac{۴۹}{۲۴} = ۲/۰۴$

روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه



قبلاً دیدیم که در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=۹۰^\circ)$ داریم:

$$AB^۲+AC^۲=BC^۲$$

حالا دقت کنید که اگر در مثلث قائم‌الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر را رسم کنیم دو مثلث ACH و ABH ایجاد می‌شوند. BH و CH را قطعه‌های وتر می‌نامیم. موافقید که مثلث‌ها متشابه‌اند؟ (شرط تشابه این است که دو جفت زاویهٔ مساوی داشته باشیم و هر ۳ مثلث قائم‌الزاویه‌اند و یک زاویهٔ حاده برابر با زاویهٔ $\hat{C}$ دارند.)

حالا تناسب‌ها را بنویسیم:

$$\overset{\Delta}{ABH}\sim\overset{\Delta}{ACH}\Rightarrow\overbrace{\frac{AB}{AC}}^{\text{روبه‌روی } H}=\overbrace{\frac{BH}{AH}}^{\substack{\text{روبه‌روی}\\ B\hat{A}H=\hat{C}}}=\overbrace{\frac{AH}{CH}}^{\text{سومی}}$$

از طرفین وسطین، دومی و سومی نتیجه می‌شود:

$$AH^۲=BH\times CH$$

یعنی ارتفاع، واسطهٔ هندسی دو قطعه وتر است.

$$\overset{\Delta}{ABH}\sim\overset{\Delta}{ABC}\Rightarrow\overbrace{\frac{AB}{BC}}^{\substack{\text{روبه‌روی}\\ \hat{A}=\hat{H}}}=\overbrace{\frac{AH}{AC}}^{\text{روبه‌روی } \hat{B}}=\overbrace{\frac{BH}{AB}}^{\text{سومی}}$$

طرفین وسطین اولی و سومی می‌گوید:

$$AB^۲=BH\times BC$$

یعنی مربع ضلع قائم برابر است با حاصل‌ضرب وتر در قطعه‌ای که به آن ضلع متصل است.

به همین ترتیب از تشابه دو مثلث ACH و ABC نتیجه می‌شود که:

$$AC^۲=CH\times BC$$

از اولی و دومی هم داریم: $AB\times AC=AH\times BC$ پس:

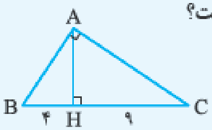
$$AH=\frac{AB\times AC}{BC}$$

یعنی:

$$\text{ارتفاع}=\frac{\text{ضرب اضلاع قائم}}{\text{وتر}}$$

مثال ببینید:

? در مثلث قائم‌الزاویهٔ شکل روبه‌رو، طول کوتاه‌ترین ارتفاع کدام است؟



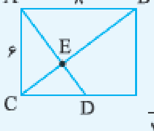
۱) ۶/۵ ۲) ۶

۳) ۵ ۴) ۴

= گزینهٔ «۲» کوتاه‌ترین ارتفاع همان ارتفاع وارد بر وتر است.

$$AH^۲=BH\times CH=۴\times۹=۳۶\Rightarrow AH=۶$$

? در شکل روبه‌رو، AD بر قطر مستطیل عمود است. نقطهٔ E قطر مستطیل را به چه نسبتی تقسیم می‌کند؟

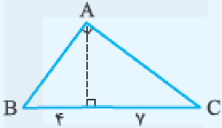


۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۵}$ ۳) $\frac{۹}{۱۶}$ ۴) $\frac{۹}{۲۵}$

گزینهٔ «۳» مثلث ABC قائم‌الزاویه و AE ارتفاع وارد بر وتر است و داریم:

$$\left.\begin{array}{l} AC^{۲} = CE \times BC \\ AB^{۲} = BE \times BC \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{تقسیم}} \frac{CE}{BE} = \frac{AC^{۲}}{AB^{۲}} = \frac{۶^{۲}}{۸^{۲}} = \left(\frac{۳}{۴}\right)^{۲} = \frac{۹}{۱۶}$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، مربع اندازهٔ میانهٔ ضلع AC کدام است؟



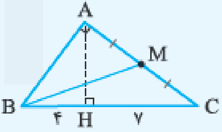
۱) ۶۴/۲۵

۲) ۶۱/۲۵

۳) ۶۲/۲۵

۴) ۶۳/۲۵

گزینهٔ «۴» میانهٔ ضلع AC را ببینید:



$$BM^{۲} = AM^{۲} + AB^{۲} = \left(\frac{AC}{۲}\right)^{۲} + AB^{۲}$$

پس برویم دنبال $AC^{۲}$ و $AB^{۲}$:

$$AC^{۲} = BC \times CH = ۷ \times ۱۱ = ۷۷ \,,\ AB^{۲} = BC \times BH = ۴ \times ۱۱ = ۴۴$$

$$\Rightarrow\ BM^{۲} = \frac{AC^{۲}}{۴} + AB^{۲} = \frac{۷۷}{۴} + ۴۴ = ۱۹/۲۵ + ۴۴ = ۶۳/۲۵$$