معادلهٔ $\sqrt{2x+1}+x=|x+2|$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به عبارت $\sqrt{2x+1}$، باید $2x+1\geq 0$ باشد، یعنی $x\geq -\frac{1}{2}$ است که در این صورت عبارت $x+2$ همواره مثبت خواهد بود. بنابراین داریم:

$$\Rightarrow \sqrt{2x+1}+x=|x+2|=x+2$$

$$\Rightarrow \sqrt{2x+1}=2 \Rightarrow 2x+1=4 \Rightarrow x=\frac{3}{2}\geq -\frac{1}{2}$$

بنابراین معادله یک جواب دارد.

اگر اعداد غیرصفر a و b جواب‌های معادلهٔ $x^۲ + ax + b = ۰$ باشند، کم‌ترین مقدار عبارت $x^۲ + ax + b$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$　　۲) $\frac{۹}{۴}$　　۳) $-\frac{۹}{۴}$　　۴) ۱

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. می‌دانیم مجموع و حاصل‌ضرب جواب‌های معادله به ترتیب برابر a- و b هستند، پس داریم:

$$a + b = -a \;,\; ab = b$$

$$b \neq ۰ \Rightarrow a = ۱ \;,\; b = -۲$$

$$\Rightarrow x^۲ + ax + b = x^۲ + x - ۲ = \left(x + \frac{۱}{۲}\right)^۲ - \frac{۹}{۴}$$

$$\Rightarrow \text{کم ترین مقدار} = -\frac{۹}{۴}$$

می‌خواهیم با یک قطعه سیم به طول ۴۸ واحد، یک مکعب مستطیل بسازیم. بیش‌ترین حجم این مکعب مستطیل، در صورتی که یکی از بعدها ۳ برابر بعد دیگر باشد، کدام است؟

۱) ۴۰     ۲) ۴۸     ۳) ۶۰     ۴) ۶۴

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. قطعه سیم مورد نظر، یال‌های مکعب مستطیل را می سازد.


ابعاد مکعب مستطیل را مطابق شکل، x، ۳x و y در نظر می‌گیریم.

$\Rightarrow$ مجموع طول یال ها $= ۴x + ۴(۳x) + ۴y = ۴۸$

$\Rightarrow ۴x + y = ۱۲ \Rightarrow y = ۱۲ - ۴x$

$V(x) = (۳x)(x)(y) = ۳x^۲y = ۳x^۲(۱۲ - ۴x) \quad = ۱۲\left(۳x^۲ - x\right)$

$V'(x) = ۱۲\left(۶x - ۳x^۲\right) = ۰ \Rightarrow x = ۲$

$\Rightarrow V_{max} = V(۲) = ۱۲(۱۲ - ۸) = ۴۸$

به‌ازای کدام مقدار k ماکزیمم و مینیمم تابع $f(x) = x^۳ - ۳x^۲ + k$ در بازهٔ $[۱ , ۳]$ قرینهٔ یکدیگرند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا نقاط بحرانی $f(x)$ را در بازهٔ $[۱ , ۳]$ به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = ۳x^۲ - ۶x = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ & \text{غ.ق.ق} \\ x = ۲ \end{cases} \Rightarrow x = ۲$$

$\Rightarrow$

| x | ۱ | ۲ | ۳ |
|---|---|---|---|
| f(x) | k − ۲ | k − ۴ | k |

باید k (ماکزیمم مطلق) و k - ۴ (مینیمم مطلق) قرینهٔ یکدیگر باشند:

$$\Rightarrow k - ۴ = -k \Rightarrow k = ۲$$

تابع $f(x)=\sqrt[۳]{x^۲+kx-k}$ فقط یک نقطهٔ بحرانی دارد. k چند مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. دامنهٔ تابع f، R است.

$$f'(x)=\frac{۲x+k}{۳\sqrt[۳]{\left(x^۲+kx-k\right)^۲}}=۰\Rightarrow x=\frac{-k}{۲}$$

برای این‌که $x=\frac{-k}{۲}$ تنها نقطهٔ بحرانی تابع f باشد، دو حالت می‌تواند اتفاق بیفتد:

حال اول: مخرج 'f ریشه نداشته باشد:

$$\Rightarrow k^۲+۴k<۰\Rightarrow -۴<k<۰ \qquad (۱)$$

حالت دوم: مخرج ریشهٔ مضاعف $-\frac{k}{۲}$ داشته باشد:

$$\Rightarrow \Delta=k^۲+۴k=۰\Rightarrow k=۰,-۴ \qquad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱)\text{ و }(۲)} k\in[-۴,۰]$$

پس k، ۵ مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد.

اگر $f(x) = \begin{cases} (x-۱)^۲ + ۲ & ; x > ۱ \\ m & ; x = ۱ \\ x - ۴ & ; x < ۱ \end{cases}$ اکسترمم نسبی نداشته باشد، مجموعهٔ مقادیر $m$ کدام است؟

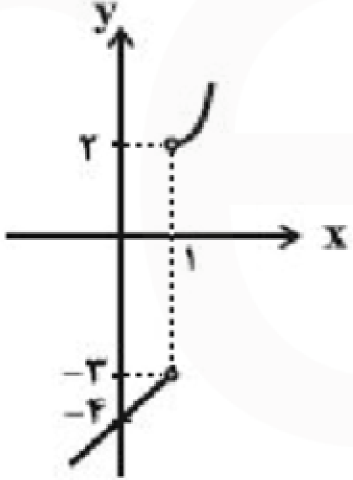
۱) $-۳ \le m \le ۲$

۲) $-۴ < m < ۲$

۳) $m \ge ۲$ یا $m \le -۳$

۴) $m < -۳$ یا $m > ۲$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. نمودار تابع $f$ بدون در نظر گرفتن نقطه $(۱ , m)$ به‌صورت زیر است:




حال اگر نقطهٔ $(۱ , m)$ بالاتر از نقطهٔ $(۱ , ۲)$ باشد، تابع ماکزیمم نسبی و اگر پایین‌تر از نقطهٔ $(۱ , -۳)$ باشد، مینیمم نسبی دارد. اما اگر نقطهٔ $(۱ , m)$ بین انی دو نقطه یا روی یکی از آن‌ها باشد، تابع اکسترمم نسبی ندارد.

در جعبه‌ای، $n$ کارت سفید، ۳ کارت سیاه و $۳n + ۹$ کارت قرمز دارد. کارتی به تصادف از این جعبه خارج می‌کنیم.
احتمال کدام‌یک از پیشامدهای تصادفی زیر، وابسته به $n$ نیست؟ $(n \in N)$

۱) پیشامد سیاه یا قرمز بودن کارت
۲) پیشامد سفید یا قرمز بودن کارت
۳) پیشامد سفید یا سیاه بودن کارت
۴) هیچ‌کدام

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. تعداد کل کارت‌های درون جعبه برابر است با:

$$n(S) = n + ۳ + ۳n + ۹ = ۴n + ۱۲$$

حال تعداد حالات مطلوب هر پیشامد و احتمال آن را حساب می‌کنیم:

«گزینهٔ ۱»: $n(A) = ۳ + (۳n + ۹) = ۳n + ۱۲ \Rightarrow P(A) = \frac{۳n + ۱۲}{۴n + ۱۲} \Rightarrow$ وابسته به

«گزینهٔ ۲»: $n(B) = n + (۳n + ۹) = ۴n + ۹ \Rightarrow P(B) = \frac{۴n + ۹}{۴n + ۱۲} \Rightarrow$ وابسته به

«گزینهٔ ۳»: $n(C) = n + ۳ \Rightarrow P(C) = \frac{n + ۳}{۴n + ۱۲} = \frac{n + ۳}{۴(n + ۳)} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow$ مستقل از $n$

اگر $P(A \cup B) = \frac{۴}{۵}$ و $P(A \cap B) = \frac{P(B)}{۱۰} = \frac{P(A')}{۱۲}$ باشند. مقدار $P(B - A)$ کدام است؟

۱) ۰/۸ ۲) ۰/۲ ۳) ۰/۶ ۴) ۰/۴

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. $P(A \cap B)$ را k فرض می‌کنیم و چنین می‌نویسیم:

$$\frac{P(A')}{۱۲} = \frac{P(B)}{۱۰} = P(A \cap B) = k$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P(A') = ۱۲k \\ P(B) = ۱۰k \end{cases} \Rightarrow P(A) = ۱ - ۱۲k$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\Rightarrow \frac{۴}{۵} = ۱ - ۱۲k + ۱۰k - k \quad \Rightarrow \frac{۴}{۵} = ۱ - ۳k \Rightarrow ۳k = ۱ - \frac{۴}{۵} \quad \Rightarrow ۳k = \frac{۱}{۵} \Rightarrow k = \frac{۱}{۱۵}$$

$$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = ۱۰\left(\frac{۱}{۱۵}\right) - \frac{۱}{۱۵} = \frac{۹}{۱۵} = \frac{۳}{۵} = ۰/۶$$

اگر احتمال وقوع A یا B برابر ۰/۷۶ و احتمال وقوع A برابر ۰/۵۲ باشد، آن‌گاه احتمال وقوع 'B به شرط وقوع 'A برابر کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به داده‌های مسئله داریم:

$$P(A \cup B) = ۰/۷۶$$
$$P(A) = ۰/۵۲$$

حال به خواستهٔ مسئله می‌پردازیم:

$$P(B' \mid A') = \frac{P(A' \cap B')}{P(A')} = \frac{P((A \cup B)')}{P(A')} = \frac{۱ - P(A \cup B)}{۱ - P(A)}$$
$$= \frac{۱ - ۰/۷۶}{۱ - ۰/۵۲} = \frac{۰/۲۴}{۰/۴۸} = \frac{۱}{۲}$$

اگر احتمال قهرمانی یک تیم فوتبال در لیگ ایتالیا ۰/۷ و امکان قهرمانی تیم دیگری در لیگ ایران ۰/۶ باشد، احتمال این‌که حداقل یکی از این دو تیم در کشور خود قهرمان شوند کدام است؟

۱) ۰/۷۵ ۲) ۰/۸۵ ۳) ۰/۸۸ ۴) ۰/۶۵

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. واضح است که لیگ ایران و ایتالیا ارتباطی به هم ندارند، وقوع قهرمانی هر یک از دو تیم تأثیری بر دیگری نداشته و مستقل‌اند، پس:

$A$: قهرمانی در لیگ ایتالیا

$B$: قهرمانی در لیگ ایران

$P(A\cap B)=P(A).P(B)\Rightarrow P(A\cap B)=$ ۰/۷ × ۰/۶ = ۰/۴۲

پس احتمال این‌که حداقل یکی از دو تیم فهرمان شوند برابر است با:

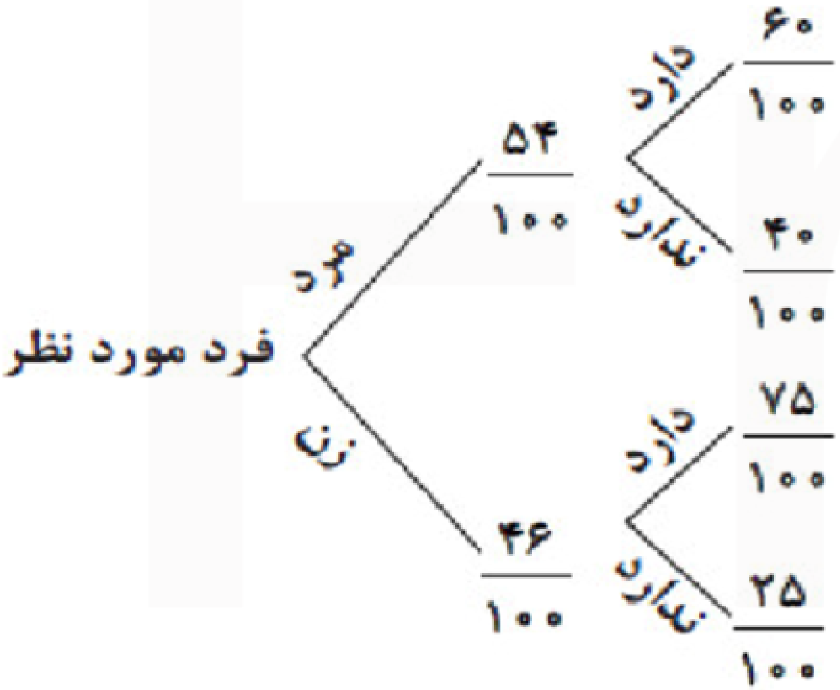
$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$\Rightarrow P(A\cup B)=$ ۰/۷ + ۰/۶ - ۰/۴۲ = ۱/۳ - ۰/۴۲ = ۰/۸۸

در یک شهر ۵۴ درصد جمعیت را مردان تشکیل می‌دهند. فرض کنید ۶۰ درصد مردان و ۷۵ درصد زنان دارای دفترچه سلامت باشند. اگر فردی به تصادف از شهر انتخاب کنیم، با کدام احتمال دارای دفترچه سلامت نیست؟

۱) ۰/۶۶۹ ۲) ۰/۶۹۶ ۳) ۰/۳۰۴ ۴) ۰/۳۳۱

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به نمودار درختی زیر داریم:




احتمال دفترچه سلامت نداشتن: $\frac{۵۴}{۱۰۰} \times \frac{۴۰}{۱۰۰} + \frac{۴۶}{۱۰۰} \times \frac{۲۵}{۱۰۰} = ۰/۳۳۱$

احتمال آنکه محمد در کنکور سال ۹۸ پذیرفته شود $\frac{۱}{۵}$ است و احتمال آنکه در آزمون‌های قلم‌چی شرکت کند $\frac{۱}{۲}$ است. اگر او در آزمون‌های قلم‌چی شرکت کند با احتمال $\frac{۱}{۳}$ در کنکور پذیرفته می‌شود. با چه احتمالی او در آزمون‌های قلم‌چی شرکت می‌کند یا در کنکور ۹۸ پذیرفته می‌شود؟

۱) $\frac{۸}{۱۵}$ ۲) $\frac{۱۷}{۳۰}$ ۳) $\frac{۷}{۱۰}$ ۴) $\frac{۳۱}{۶۰}$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اگر A پیشامد قبولی در کنکور و B پیشامد شرکت در آزمون‌های قلم‌چی باشد، داریم:

$$P(A)=\frac{۱}{۵},\ P(B)=\frac{۱}{۲},\ P(A\mid B)=\frac{۱}{۳}$$

$$P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\Rightarrow \frac{۱}{۳}=\frac{P(A\cap B)}{\frac{۱}{۲}}\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{۱}{۶}$$

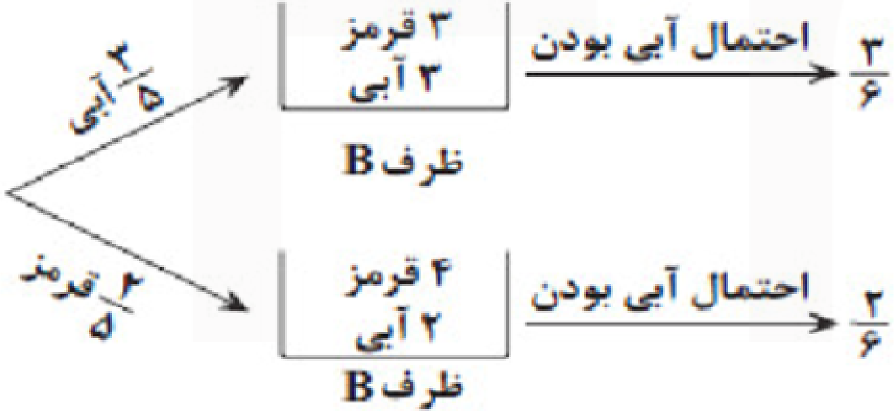
ما حاصل $P(A\cap B)$ را می‌خواهیم:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\quad=\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۶}=\frac{۶+۱۵-۵}{۳۰}=\frac{۱۶}{۳۰}=\frac{۸}{۱۵}$$

از کیسهٔ A که شامل ۳ مهرهٔ آبی و ۲ مهرهٔ قرمز است، یک مهره به تصادف خارج و در کیسهٔ B که شال ۳ مهرهٔ قرمز و ۲ مهرهٔ آبی است قرار می‌دهیم و از کیسهٔ B یک مهره خارج می‌کنیم. احتمال آن‌که این مهره آبی باشد، چقدر است؟

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۱۳}{۳۰}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مهرهٔ انتخابی از جعبهٔ A، به احتمال $\frac{۳}{۵}$ آبی و به احتمال $\frac{۲}{۵}$ قرمز است:




$$\Rightarrow P(\text{آبی}) = \frac{۳}{۵} \times \frac{۳}{۶} + \frac{۲}{۵} \times \frac{۲}{۶} = \frac{۹+۴}{۳۰} = \frac{۱۳}{۳۰}$$

می‌دانیم که رمز چهار رقمی یک کارت اعتباری بانکی با ارقام متمایز ۵ و ۴ و ۲ و ۱ ساخته شده و مضرب ۶ است. در وارد کردن رمز به صورت تصادفی، احتمال آنکه رمز در همان مرتبهٔ اول درست وارد شود، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲۰}$ ۲) $\frac{۵}{۱۲}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۱۲}$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. جمع ارقام $۱۲ = ۵ + ۴ + ۲ + ۱$ است و بر ۳ بخش‌پذیر است. پس اگر عدد ۴ رقمی ساخته شده زوج باشد، مضرب ۶ نیز خواهد بود. بنابراین یکان این رمز باید یکی از اعداد ۲ یا ۴ باشد:

$$n(S) = ۳ \times ۱ \times ۲ = ۱۲$$

پس احتمال این‌که در دفعهٔ اول رمز را درست وارد کنیم $\frac{۱}{۱۲}$ است.

سه تاس سالم با رنگ‌های آبی، قرمز و سبز پشت سر هم می‌اندازیم. اگر بدانیم اعداد رو شده متوالی‌اند، در این صورت احتمال آن‌که بین اعداد رو شده رابطهٔ «آبی $<$ قرمز» برقرار باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $\frac{۳}{۸}$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. برای اینکه عددهای ظاهر شده در پرتاب سه تاس متوالی باشند، باید به صورت (۳ و ۲ و ۱) و یا (۵ و ۴ و ۳) و یا (۶ و ۵ و ۴) باشند. هر کدام از این حالات نیز به $۳!$ حالت می‌توانند جابه‌جا شوند، پس $n(B) = ۴ \times ۳! = ۲۴$ می‌باشد.

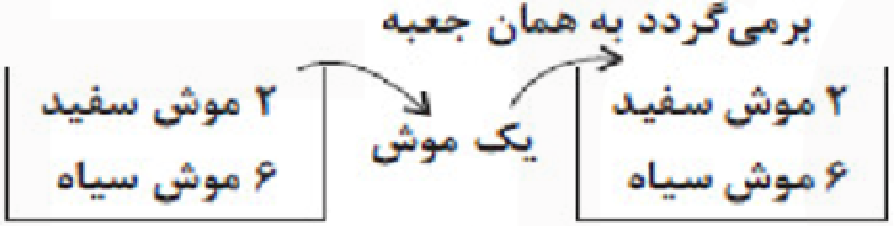
در هر یک از چهار حالت فوق، فقط در یک صورت عدد تاس قرمز بیشتر از سبز و سبز بیشتر از آبی است، لذا $n(A \cap B) = ۴$ می‌باشد، در نتیجه داریم:

$$P(A \mid B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{۴}{۲۴} \Rightarrow P(A \mid B) = \frac{۱}{۶}$$

جعبه‌ای شامل ۲ موش سفید و ۶ موش سیاه است. موشی را به تصادف از ان خارج کرده و پس از مشاهده رنگ آن، به جعبه برمی‌گردانیم و مجدداً موشی از آن خارج می‌کنیم. احتمال اینکه فقط یک بار موش سیاه بیرون آمده باشد، چقدر است؟

۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $\frac{۱۵}{۱۶}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۱۶}$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در اجرای این آزمایش می‌خواهیم فقط یک بار موش سیاه بیرون آمده باشد، پس:



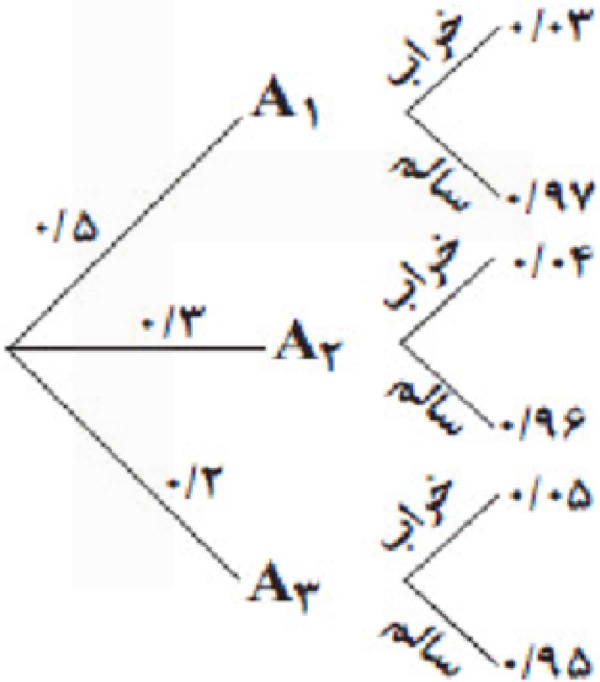

$$P = \underbrace{\frac{۲}{۸}}_{\text{اولی سفید}} \times \underbrace{\frac{۶}{۸}}_{\text{دومی سیاه}} + \underbrace{\frac{۶}{۸}}_{\text{اولی سیاه}} \times \underbrace{\frac{۲}{۸}}_{\text{دومی سفید}}$$

$$= \frac{۱۲}{۶۴} + \frac{۱۲}{۶۴} = \frac{۲۴}{۶۴} = \frac{۳}{۸}$$

سه ماشین $A_1$، $A_2$ و $A_3$ هر کدام به‌ترتیب ۰/۵، ۰/۳ و ۰/۲ از قطعات یک ربات را می‌سازند و می‌دانیم درصد قطعات خراب تولید شده توسط این ماشین‌ها به‌ترتیب ۳%، ۴% و ۵% می‌باشند. اگر یک قطعه از ربات را به تصادف برداریم، احتمال آنکه این قطعه خراب باشد چقدر است؟

۱) ۰/۰۲۷ ۲) ۰/۰۳۷ ۳) ۰/۰۴۷ ۴) ۰/۰۴۹

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با رسم نمودار درختی می‌بینیم:




که در این سؤال احتمال قطعهٔ خراب خواسته شده است.

$$(۰/۵ \times ۰/۰۳) + (۰/۳ \times ۰/۰۴) + (۰/۲ \times ۰/۰۵) = ۰/۰۳۷$$

در پرتاب دو سکه با هم، چند پیشامد با پیشامد «هر دو رو» ناسازگارند؟

۱) ۱۵     ۲) ۱۶     ۳) ۸     ۴) ۷

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. فضای نمونه‌ای به‌صورت {(ر ، ر) ، (ر ، پ) ، (پ ، ر) ، (پ ، پ)} = S و پیشامد مورد نظر باید فاقد (ر ، ر) باشد. پس زیرمجموعه‌ای از S فاقد (ر ، ر) می خواهیم که $۲^{۳} = ۸$ حالت دارد.

پدر و مادر و ۴ فرزند یک خانواده به تصادف در یک صف می‌ایستند. چقدر احتمال دارد نه مادر در دو انتهای صف باشند و نه پسر؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. فضای نمونه‌ای، کل جایگشت‌های ۶ نفر است که برابر است با: $n(S) = ۶ = ۶!$ برای تعیین تعداد عضوهای پیشامد، ۶ جایگاه در نظر می‌گیریم. ابتدا و انتهای صف باید با فرزندان پر شود که یک از ۴ حالت و دیگری ۳ حالت خواهد داشت. پدر و مادر و ۲ فرزند دیگر بین آن‌ها هستند که به !۴ حالت جابه‌جا می‌شوند:

$$n(A) = \overset{۴}{\_\_}\ \underbrace{\_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_}_{۴!}\ \overset{۳}{\_\_}$$

در نتیجه:

$$P(A) = \frac{۴ \times ۳ \times ۴!}{۶!} = \frac{۲}{۵}$$

از بین اعداد طبیعی چهاررقمی، عددی به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که حاصلضرب ارقام عدد انتخاب شده بر ۳ بخش‌پذیر نباشد، کدام است؟

۱) ۰/۱۴۴ ۲) ۰/۳۸۴ ۳) ۰/۶۴۸ ۴) ۰/۶۸۶ × $\frac{۱}{۳}$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. تعداد کل اعداد طبیعی چهاررقمی برابر است با: $n(S) = ۹ \times ۱۰ \times ۱۰ \times ۱۰$ برای آن‌که حاصل‌ضرب ارقام عدد انتخابی بر ۳ بخش‌پذیری نباشد، عدد مورد نظر باید فاقد ارقام ۰ و ۳ و ۶ و ۹ باشد. پس تعداد حالات مطلوب برابر است با تعداد اعداد طبیعی چهاررقمی که با استفاده از ارقام ۱، ۲، ۴، ۵، ۷، ۸ ساخته می‌شود:

$$n(A) = ۶ \times ۶ \times ۶ \times ۶$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{۶ \times ۶ \times ۶ \times ۶}{۹ \times ۱۰ \times ۱۰ \times ۱۰} = \frac{۲ \times ۲ \times ۶ \times ۶}{۱۰ \times ۱۰ \times ۱۰} = ۰/۱۴۴$$

جعبه‌ای شامل ۶ گوی آبی و ۴ گوی سفید است. گوی‌ها را یکی‌یکی از جعبه خارج می‌کنیم. چقدر احتمال دارد گوی سوم و پنجم همرنگ باشند؟

۱) $\frac{۷}{۱۵}$ ۲) $\frac{۲}{۱۵}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. چون نتیجهٔ بقیهٔ گوی‌ها مهم نیست، پس آن‌ها را در نظر نمی‌گیریم. بنابراین گوی سوم و پنجم را مانند گوی اول و دوم در نظر می‌گیریم و احتمال هم‌رنگ بودن آن‌ها را به دست می‌آوریم:

$$\frac{۶}{۱۰} \times \frac{۵}{۹} + \frac{۴}{۱۰} \times \frac{۳}{۹} = \frac{۳۰ + ۱۲}{۹۰} = \frac{۴۲}{۹۰} = \frac{۷}{۱۵}$$

دو تاس را پرتاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد که جمع اعداد رو شده حداقل ۸ و اختلاف آن‌ها حداکثر ۱ باشد؟

۱) $\frac{۲}{۹}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۵}{۳۶}$ ۴) $\frac{۷}{۳۶}$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. حالاتی را که جمع اعداد رو شده حداقل ۸ باشد می‌نویسیم:

$$A = \{\overbrace{(۲,۶),(۶,۲),(۵,۳),(۳,۵),(۴,۴)}^{\text{جمع ۸}},\overbrace{(۳,۶),(۶,۳),(۵,۴),(۴,۵)}^{\text{جمع ۹}},$$
$$\overbrace{(۴,۶),(۶,۴),(۵,۵)}^{\text{جمع ۱۰}},\overbrace{(۵,۶),(۶,۵)}^{\text{جمع ۱۱}},\overbrace{(۶,۶)}^{\text{جمع ۱۲}}\}$$

از بین حالات بالا آنهایی را که اختلاف اعداد رو شده صفر یا یک می‌باشند انتخاب می‌کنیم.

$$B = \{\underbrace{(۴,۴),(۵,۵),(۶,۶)}_{\text{اختلاف صفر}},\underbrace{(۴,۵),(۵,۴),(۵,۶),(۶,۵)}_{\text{اختلاف ۱}}\}$$

بنابراین احتمال خواستهٔ سؤال برابر است با:

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{۷}{۳۶}$$

درون جعبه‌ای پنج مهرهٔ سفید با شماره‌های ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و چهار مهرهٔ سیاه با شماره‌های ۱، ۲، ۳، و ۴ وجود دارد. دو مهره بدون رؤیت به تصادف خارج می‌کنیم. اگر مجموع شماره‌های خارج شده ۶ باشد، با کدام احتمال هر دو شمارهٔ زوج است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۴}{۷}$ ۳) $\frac{۸}{۱۳}$ ۴) $\frac{۹}{۱۷}$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر مهره های سفید را به‌صورت «۵، ۴، ۳، ۲، ۱» و مهره‌های سیاه را به‌صورت «چهار، سه، دو، یک» نشان دهیم، آن‌گاه:

B = مجموع ۶ = {(۱ , ۵) , (۵ , یک) , (۲ , ۴) , (چهار , دو) , (۲ , چهار) , (دو , ۴) و (سه , ۲)}

$$P(A \mid B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{۴}{۷}$$

از هر کدام از کلمات season و paris یک حرف به تصادف انتخاب می‌کنیم. با کدام احتمال حروف منتخب یکسان هستند؟

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۱۲ ۳) ۰/۱۸ ۴) ۰/۰۸

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. دو حالت مختلف وجود دارد:

۱) حرف یکسان s باشد: $\frac{۲}{۶} \times \frac{۱}{۵} = \frac{۲}{۳۰}$

۲) حرف یکسان a باشد: $\frac{۱}{۶} \times \frac{۱}{۵} = \frac{۱}{۳۰}$

پس جواب برابر است با: $\frac{۲}{۳۰} + \frac{۱}{۳۰} = \frac{۳}{۳۰} = ۰/۱$

اگر برای ساخت یک عدد دو رقمی، دهگان از مجموعهٔ $\{۰, ۱, ۲, ..., ۵\}$ و یکان از مجموعه $\{۱, ۲, ..., ۸\}$ انتخاب شود، احتمال آن که عدد ساخته شده بر ۳ بخش‌پذیر باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۲۴}$ ۲) $\frac{۷}{۲۰}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. می‌دانیم که رقم دهگان نمی‌تواند صفر باشد، بنابراین:

$$n(S) = ۵ \times ۸ = ۴۰$$

تمام اعدادی را که بر ۳ بخش‌پذیر هستند از دو مجموعهٔ مورد نظر می‌نویسیم:

$$A = \{۱۲, ۱۵, ۱۸, ۲۱, ۲۴, ۲۷, ۳۳, ۳۶, ۴۲, ۴۵, ۴۸, ۵۱, ۵۴, ۵۷\} \Rightarrow n(A) = ۱۴$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{۱۴}{۴۰} = \frac{۷}{۲۰}$$

هر یک از اعداد طبیعی کوچکتر از ۱۲ را روی یک کارت نوشته و به تصادف کارتی از بین آن‌ها خارج می‌کنیم. اگر مضرب ۳ باشد، ۳ سکه و اگر مضرب ۴ باشد، ۴ سکه پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال دقیقاً ۳ سکه رو می‌آید؟

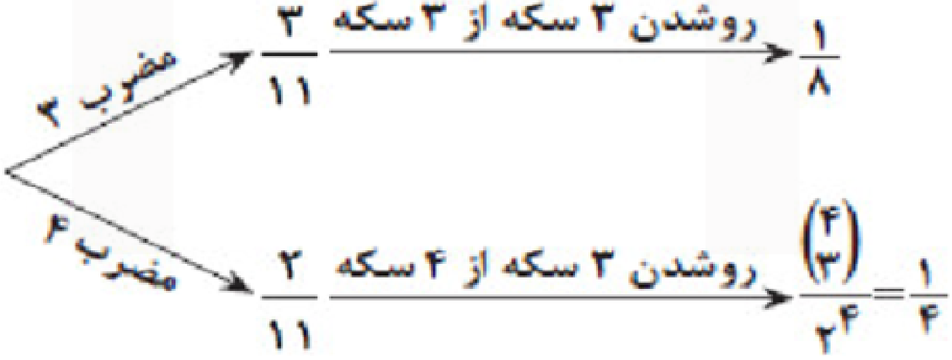
۱) $\frac{۷}{۸۸}$ ۲) $\frac{۱۳}{۱۲۰}$ ۳) $\frac{۱۱}{۴۸}$ ۴) $\frac{۱۳}{۴۸}$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$S = \{۱, ۲, ..., ۱۱\} \Rightarrow n(S) = ۱۱$$

$$\text{مضارب ۳} \Rightarrow A = \{۳, ۶, ۹\} \Rightarrow P(A) = \frac{۳}{۱۱}$$

$$\text{مضارب ۴} \Rightarrow B = (۴, ۸) \Rightarrow P(B) = \frac{۳}{۱۱}$$




$$\Rightarrow \frac{۳}{۱۱} \times \frac{۱}{۸} + \frac{۲}{۱۱} \times \frac{۱}{۴} = \frac{۳}{۸۸} + \frac{۴}{۸۸} = \frac{۷}{۸۸}$$

تاس سالمی را پرتاب می کنیم. اگر ۱ بیاید دو سکه، اگر ۲ یا ۳ بیاید سه سکه و اگر بزرگتر از ۳ بیاید چهار سکه پرتاب می‌کنیم، احتمال آن‌که حداقل یک سکه رو بیاید کدام است؟

۱) $\frac{۲۵}{۳۴}$ ۲) $\frac{۳۸}{۶۳}$ ۳) $\frac{۸۵}{۹۶}$ ۴) $\frac{۴}{۹}$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$P(B_۱) = \frac{۱}{۶}$ احتمال آمدن ۱

$P(B_۲) = \frac{۲}{۶}$ احتمال آمدن ۲ یا ۳

$P(B_۳) = \frac{۳}{۶}$ احتمال آمدن ۴ یا ۵ یا ۶

$\Rightarrow P(\text{حداقل یک رو}) = P(A) = P(B_۱)P(A \mid B_۱) + P(B_۲)P(A \mid B_۲) + P(B_۳)P(A \mid B_۳)$

$= \frac{۱}{۶} \times \frac{۳}{۴} + \frac{۲}{۶} \times \frac{۷}{۸} + \frac{۳}{۶} \times \frac{۱۵}{۱۶} = \frac{۱}{۸} + \frac{۷}{۲۴} + \frac{۱۵}{۳۲} = \frac{۸۵}{۹۶}$

کلاس A، ۵ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی و ۳ دانش‌آموز رشتهٔ تجربی و کلاس B، ۳ دانش‌آموز رشتهٔ تجربی دارد. اگر از هر کدام از این کلاس‌ها ۲ دانش‌آموز به تصادف انتخاب شود، احتمال این‌که تمام دانش‌آموزان انتخاب شده رشتهٔ یکسانی نداشته باشند، کدام است؟

۱) $\frac{۲۳}{۱۹۶}$ ۲) $\frac{۴}{۴۹}$ ۳) $\frac{۴۵}{۴۹}$ ۴) $\frac{۱۷۳}{۱۹۶}$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. اگر پیشامد این که هر چهار دانش‌آموز انتخاب شده، از یک رشته باشند A بنامیم داریم:

$$P(A)=\overbrace{\frac{\binom{۵}{۲}}{\binom{۸}{۲}}\times\frac{\binom{۴}{۲}}{\binom{۷}{۲}}}^{\text{احتمال آن‌که دانش‌آموزان رشتهٔ ریاضی باشند.}}+\overbrace{\frac{\binom{۳}{۲}}{\binom{۸}{۲}}\times\frac{\binom{۳}{۲}}{\binom{۷}{۲}}}^{\text{احتمال آن‌که دانش‌آموزان رشتهٔ تجربی باشند.}}=\frac{۶۹}{۲۸\times۲۱}=\frac{۲۳}{۱۹۶}$$

حال احتمال حالتی را که در آن چهار دانش‌آموز انتخابی از یک رشته نیستند، به دست می‌آوریم:

$$P(A')=۱-P(A)=۱-\frac{۲۳}{۱۹۶}=\frac{۱۷۳}{۱۹۶}$$

درخانواده‌ای با ۴ فرزند، احتمال آنکه فرزند سوم پسر باشد یا همهٔ فرزندان هم‌جنس باشند، چقدر است؟

۱) $\frac{۵}{۸}$ ۲) $\frac{۹}{۱۶}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱۱}{۱۶}$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$n(S) = ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ = ۱۶$

اگر پیشامد پسر بودن فرزند سوم را A و پیشامد هم‌جنس بودن همهٔ فرزندان را B بنامیم، داریم:

$n(A) = ۲ \times ۲ \times ۱ \times ۲ = ۸$

$B = \{(\text{پ پ پ پ}), (\text{د د د د})\} \Rightarrow n(B) = ۲$

حال $P(A \cup B)$ را می‌خواهیم، می‌دانیم که $A \cap B = \{(\text{پ پ پ پ})\}$ است.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{۸}{۱۶} + \frac{۲}{۱۶} - \frac{۱}{۱۶} = \frac{۹}{۱۶}$

در خانواده‌ای با ۶ فرزند چقدر احتمال دارد تعداد دختران از تعداد پسران بیشتر باشد؟

۱) $\frac{۱۱}{۶۴}$ ۲) $\frac{۱۱}{۳۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۹}{۳۲}$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. تعداد اعضای فضای نمونه‌ای:

$n(S) = ۲^{۶} = ۶۴$

تعداد حالاتی که تعداد دختران و پسران برابرند، برابر با $۲۰ = \binom{۶}{۳}$ می‌باشد. در $۴۴ = ۲۰ - ۶۴$ حالت تعداد دختران و پسران برابر نمی‌باشد که در نصف این حالات تعداد دختران از پسران بیشتر است:

$n(A) = ۲۲$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۲۲}{۶۴} = \frac{۱۱}{۳۲}$$