

می خواهیم از بین ۶ دانش آموز رشته تجربی و ۴ دانش آموز رشته ریاضی، سه نفر به تصادف انتخاب کنیم. احتمال اینکه حداقل یک نفر از رشته ریاضی انتخاب شود، کدام است؟

$$\frac{3}{4} (4)$$

$$\frac{1}{6} (3)$$

$$\frac{4}{5} (2)$$

$$\frac{5}{6} (1)$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. برای راحتی کار، متمم خواسته صورت سوال را حساب می کنیم:

$$n(S) = \binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2} = 120$$

حداقل یک نفر از رشته ریاضی باشد =

$$A' = \text{هیچ کدام از سه نفر از رشته ریاضی نباشد} = \binom{6}{3} = 20$$

$$P(A') = \frac{n(A')}{n(S)} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6} \rightarrow P(A) = \frac{5}{6}$$

سه تاس سالم و یکسان را با هم پرتاب می‌کنیم. احتمال آن که سه عدد رو شده یک دنباله حسابی با قدر نسبت ۲ تشکیل دهند، کدام است؟

$$\frac{1}{9}(4)$$

$$\frac{1}{6}(3)$$

$$\frac{1}{18}(2)$$

$$\frac{1}{36}(1)$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$n(S) = 6^3 = 216$$

$$n(A) = \begin{cases} \text{تعداد حالت } 5 \text{ و } 3 \text{ و } 1 \xrightarrow{3! = 6} 12 \\ \text{تعداد حالت } 6 \text{ و } 4 \text{ و } 2 \xrightarrow{3! = 6} 12 \end{cases} \Rightarrow n(A) = 12$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{12}{216} = \frac{1}{18}$$

سه تاس سالم را با هم پرتاب می‌کنیم. احتمال این که فقط تاس اول و دوم ۳ بیاید، کدام است؟

$$\frac{25}{216} \quad (4)$$

$$\frac{1}{6} \quad (3)$$

$$\frac{5}{216} \quad (2)$$

$$\frac{1}{36} \quad (1)$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. تاس اول و دوم، هر کدام یک حالت و تاس سوم، پنج حالت دارد:

$$\frac{\{3\}}{1} \times \frac{\{3\}}{1} \times \frac{\{1, 2, 4, 5, 6\}}{5 \text{ حالت}}$$

$$n(A) = 5$$

$$n(S) = 6^3 = 216$$

$$P(A) = \frac{5}{216}$$

در پرتاب دو تاس سالم اگر هیچ کدام ۵ نیامده باشد، با کدام احتمال مجموع اعداد رو شده بر ۸ بخشنده است؟

$$\frac{4}{25} \quad (4)$$

$$\frac{3}{25} \quad (3)$$

$$\frac{5}{36} \quad (1)$$

$$\frac{1}{12} \quad (1)$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. هر تاس ۵ حالت دارد. در نتیجه $n(S) = 5 \times 5 = 25$ تاس ۸ می‌شود، می‌نویسیم:

$$A = \{(4, 4), (2, 6), (6, 2)\}$$

$$n(A) = 3$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{25}$$

دو رأس از یک پنج ضلعی را به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال این که دو رأس مجاور هم باشند، کدام است؟

$$\frac{1}{5} \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \quad (3)$$

$$\frac{2}{5} \quad (2)$$

$$\frac{3}{5} \quad (1)$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



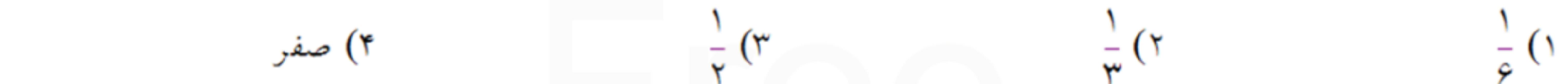
فضای نمونه‌ای، انتخاب دو رأس از بین پنج رأس است. برای که دو رأس مجاور هم باشند باید هر دو سر یک ضلع انتخاب شود. در واقع یک ضلع از پنج ضلع را انتخاب می‌کنیم. پس:

$$n(S) = \binom{5}{2} = 10$$

$$n(A) = \binom{5}{1} = 5$$

$$n(A) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

در پرتاب یک تاس سالم، احتمال اول بودن عدد بوده رو شده است؟



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. از تعداد اعداد اول (۱، ۳ و ۵) برابر است، پس احتمال هر دو حالت برابر است.

ذوزنقه قائم‌الزاویه با قاعده‌های ۴، ۶ و طول ساق قائم ۳ واحد حول ساق قائم دواران یافته است. حجم جسم حاصل چند واحد مکعب است؟

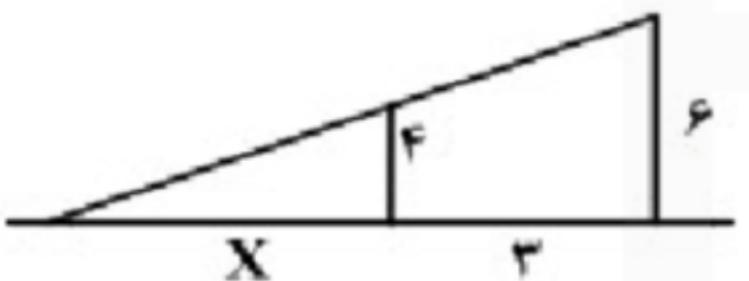
$$84\pi \quad (4)$$

$$76\pi \quad (3)$$

$$72\pi \quad (2)$$

$$68\pi \quad (1)$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



$$\frac{x}{x+3} = \frac{4}{6} \Rightarrow x = 6$$

حجم حاصل تفاضل حجم‌های دو مخروط دوار است.

$$V = \frac{1}{3}\pi (36 \times 9 - 16 \times 6) = \pi (108 - 32) = 76\pi$$

در ذوزنقه قائم الزاویه به طول قاعده‌های ۶، ۹ و ارتفاع ۵ واحد، خط گذرا بر وسط قاعده‌ها، امتداد ساق‌ها را در A و B قطع می‌کند، اندازه AB کدام است؟

(۱) صفر
۰/۲۵ (۲)

۰/۵ (۳)

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.
اگر نقطه تلاقی دو ساق به وسط یک قاعده دیگر را نصف می‌کند. یعنی خط گذرا بر وسطهای دو قاعده امتداد ساق‌ها را در یک نقطه قطع می‌کند پس $AB = 0$.

با نردهای به طول ۱۲۰ متر، بیشترین مساحت زمین مستطیل شکل، مجاور یک دیوار محصور شده است. این مساحت کدام است؟

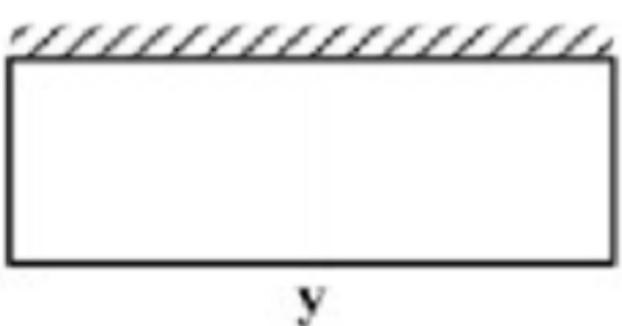
۱۶۰۰ (۴)

۱۸۰۰ (۳)

۱۸۶۰ (۲)

۱۹۲۰ (۱)

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. به فرض $y = 120 - 2x$ ، بیشترین مقدار xy محاسبه شود.



$$xy = x(120 - 2x) = -2(x^2 - 60x) = -2(x - 30)^2 + 1800$$

پش $xy \leq 1800$ بیشترین مقدار مساحت ۱۸۰۰ واحد مربع است.

از رابطه $\sin y = \frac{yx - 1}{2x + 1}$ دامنه تغییرات x کدام است؟

$$R - (-2, \infty) \quad (4)$$

$$R - (\infty, 2) \quad (3)$$

$$(\infty, 2) \quad (2)$$

$$(-2, \infty) \quad (1)$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\left| \frac{yx - 1}{2x + 1} \right| \leq 1 \Rightarrow 2x^2 + 2x + 1 \geq yx^2 - yx + 1 \Rightarrow x^2 + 2x \geq 0$$

در نتیجه $x \geq 0$ یا $x \leq -2$ است.

خط گذرنده از نقاط ماکزیمم و مینیمم نمودار تابع $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x$ با کدام طول قطع می‌کند؟

۲/۵) ۴

۲) ۳

۱/۵) ۲

۱) ۱

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$y' = 6x^2 - 18x + 12 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1, 2$$

خط واصل به نقاط آن دو نقطه قطع می‌کند پس $x = 1/5$

مشتق عبارت

در نقطه $x = 4$ کدام است؟

$$\left(\frac{x + \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{1}{6\sqrt[3]{9}} \quad (4)$$

$$\frac{1}{12\sqrt[3]{9}} \quad (3)$$

$$\frac{-1}{6\sqrt[3]{3}} \quad (2)$$

$$\frac{1}{6\sqrt[3]{3}} \quad (1)$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$y = \left(\frac{x}{\sqrt[3]{x}} + 1 \right)^{\frac{1}{3}} = (\sqrt[3]{x} + 1)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow y' = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2\sqrt[3]{x}} \right) (\sqrt[3]{x} + 1)^{-\frac{2}{3}}$$

$$\text{به ازای } x = 4 \text{ مقدار مشتق برابر است با } \frac{1}{12\sqrt[3]{9}}$$

جواب کلی معادله مثلثاتی

$$\frac{2 \sin 2x \cos 2x + \sin 4x}{1 + \cos x} = 0, \text{ کدام است؟}$$

$$\frac{k\pi}{5} \quad (۱)$$

$$\frac{k\pi}{4} \quad (۲)$$

$$\frac{2k\pi}{5} \quad (۳)$$

$$\frac{2k\pi}{4} \quad (۴)$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\frac{\sin 4x + \sin 2x}{1 + \cos x} = 0 \Rightarrow \sin 4x = \sin(-2x), \cos x \neq -1$$

$$4x = 2k\pi + (-2x) \Rightarrow x = \frac{k\pi}{4}$$

ضابطه وارون تابع $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ برابر کدام است؟

$$\frac{-x}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad (٤)$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad (٣)$$

$$\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (٢)$$

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (١)$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در تابع $y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ y , x مقادیر y , x هم علامت‌اند.

$$y^2 = \frac{x^2}{1+x^2} \Rightarrow x^2(1-y^2) = y^2 \Rightarrow x = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

جمله دوازدهم از دنباله اعداد ... و ۲۰ و ۱۲ و ۶ و ۲، کدام است؟

۱۵۶ (۴)

۱۳۵ (۲)

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$1 \times 2, 2 \times 3, 3 \times 4, 4 \times 5, \dots \Rightarrow a_n = n(n+1)$$

$$a_{12} = 12 \times 13 = 156$$

پس

حد عبارت

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x - 12 - [2x]}{2 + x - \sqrt{5x + 10}}$$

۴ (۱)

۳ (۲)

۵ (۳)

۶ (۴)

$$\lim_{x \rightarrow 3} [2x] = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x - 12}{x + 2 - \sqrt{5x + 10}} = 4 \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(5 + 5)}{x^2 - x - 6} = 4 \lim_{x \rightarrow 3} \frac{10(x - 3)}{(x - 3)(x + 2)} = 4$$

$x \rightarrow 3$

اگر $g(x) = 2x - 5$ و $f(x) = x^2 - x$ باشد، نمودارهای دو تابع gof ، fog با کدام طول‌ها متقاطع‌اند؟

$$3 \pm \sqrt{7/5} \quad (4)$$

$$3 \pm \sqrt{2/5} \quad (3)$$

$$5 \pm \sqrt{7/5} \quad (2)$$

$$5 \pm \sqrt{2/5} \quad (1)$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$(fog)(x) = (2x - 5)^2 - (2x - 5) = 4x^2 - 22x + 30, \quad (gof)(x) = 2x^2 - 2x - 5$$

$$4x^2 - 22x + 30 = 2x^2 - 2x - 5 \Rightarrow x^2 - 10x + 17/5 = 0 \Rightarrow x = 5 \pm \sqrt{7/5}$$

اگر α زاویه حاده باشد، حاصل

کدام است؟

$$\left(\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}\right)^{\frac{1}{2}}$$

۴ $\tan \alpha$

۳ $\cot \alpha$

۲ $\cos \alpha$

۱ $\sin \alpha$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha} = \frac{(1 + \sin \alpha)^2}{\cos^2 \alpha}$$

خواهیم داشت.

$$\frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$$

با توجه به تساوی

۱۲/۳ (۱)

از معادله‌ی

$$(\log_{\frac{x}{5}} - 1)$$

= ۵

۱۹ (۲)

$$(\sqrt{x})$$

، تفاضل ریشه‌ها کدام است؟

۲۴/۸ (۳)

۱۹/۸ (۴)

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. از طرفین تساوی لگاریتم در پایه ۵ می‌گیریم

$$(\log_{\frac{x}{5}} - 1) \log_5 \sqrt{x} = 1 \Rightarrow (\log_{\frac{x}{5}} - 2)^2 - (\log_{\frac{x}{5}})^2 - 2 = 0 \Rightarrow \log_{\frac{x}{5}} = -1, 2$$

در نتیجه $x = 25$, $x = 0/2$ و تفاضل ریشه‌ها برابر ۲۴/۸ است.

در یک دنباله حسابی، a_p کدام است؟ $a_m = v$ و $a_n = m$

$$m + n - p + 1 \quad (*)$$

$$-m - n + p \quad (**)$$

$$m + n - p \quad (***)$$

$$m + n + p \quad (****)$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} a + (n - 1)d = m \\ a + (m - 1)d = n \end{cases} \Rightarrow d = -1, a = m + n - 1 \Rightarrow a_p = m + n - 1 + (p - 1)(-1)$$

$$a_p = m + n - p$$

فرینه منحنی ۱) $y = \log_2(2x + 1)$ نسبت به نمیساز ناحیه اول خط قائم $x = 2$ را با کدام عرض قطع می‌کند؟

۴) $\frac{3}{2}$

۲) $\frac{5}{2}$

۵) $\frac{1}{2}$

۳) $\frac{1}{2}$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. فرینه نسبت به نمیساز ناحیه اول، معکوس تابع است.

$$2x + 1 = 2^y \Rightarrow x = \frac{1}{2}(2^y - 1) \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln(x) + \frac{1}{2} \Rightarrow f^{-1}(2) = \frac{1}{2} \ln(2) + \frac{1}{2}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

اگر a و b ریشه‌های معادله

باشند خواهیم داشت.

فقط یک معادله موجود است.

چند سه جمله‌ای به صورت $x^2 + ax + b$ وجود دارد که ریشه آن a و b باشد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

$$\begin{cases} a+b = -a \\ ab = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a+b = 0 \\ a=1 \end{cases} \Rightarrow a=1, b=-2 \Rightarrow x^2 + ax - 2 = 0$$

جواب معادله

$$\sqrt{x-2 + \sqrt{2x-5}} + \sqrt{x+2 + 3\sqrt{2x-5}} = \sqrt[4]{2}$$

۱۵ (۴)

۱۲ (۳)

۷ (۲)

۵ (۱)

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\sqrt{2x-5} = z \Rightarrow \sqrt{\frac{z^2 + 5}{2}} - 2 + z + \sqrt{\frac{z^2 + 5}{2} + 2 + 3z} = \sqrt[4]{2}$$

$$\sqrt{z^2 + 2z + 1} + \sqrt{z^2 + 8z + 19} = 14 \Rightarrow z + 1 + z + 3 = 14 \Rightarrow \begin{cases} z = 5 \\ x = 10 \end{cases}$$

در نتیجه

تفاضل دو ریشه مشتق دوم تابع $y = \frac{1}{1+x^2}$ کدام است؟

$$\frac{2\sqrt{3}}{3} \quad (4)$$

$$\sqrt{3} \quad (3)$$

$$\frac{3}{2} \quad (2)$$

$$\frac{3}{4} \quad (1)$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$y' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \Rightarrow y'' = -2 \frac{(1+x^2)^2 - 2x^2(1+x^2)}{(1+x^2)^4}$$

$$2x = \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \text{پس } x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{یا } 1+x^2 = 4x^2$$

اگر $y'' = 0$ باشد

۱۰ سکه، که ۳ تای آنها هر دو رویشان A نوشته شده و ۷ سکه که دو روی آنها متفاوت بوده و یک رو A و یک رو B نوشته شده است، داریم. سکه‌ای به تصادف انتخاب کرده و فقط یک روی آن را نگاه می‌کنیم و می‌بینیم که A رو نوشته شده است. احتمال آن که سکه انتخاب شده هر دو رویش A نوشته شده باشد، کدام است؟

$$\frac{1}{10} (۴)$$

$$\frac{6}{13} (۳)$$

$$\frac{3}{5} (۲)$$

$$\frac{10}{13} (۱)$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در واقع ۱۳ حرف A، ۶ حرف B داریم. از این ۱۳ حرف ۷ حرف A داریم. احتمال خواسته شده سکه‌های دور رو A می‌باشد. پس برای این که سکه دور رو A باشد، داریم:

$$=\frac{\text{احتمال خواسته شده}}{\text{تمام حروف A}} \rightarrow \frac{6}{13}$$

$$\text{حرف دور رو A} \rightarrow 6$$

۱۰ دانشآموزان یک کلاس در درس زیست‌شناسی و ۵% در هر دو درس مردود شده‌اند. دانشآموزی را به‌طور تصادفی از بین آن‌ها انتخاب می‌کنیم. اگر پدانیم که در درس شیمی شیمی قبول شده است، احتمال آن‌که در درس زیست‌شناسی مردود شده باشد کدام است؟

$$\frac{1}{10} (۴)$$

$$\frac{1}{9} (۳)$$

$$\frac{1}{8} (۲)$$

$$\frac{1}{7} (۱)$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

اگر A پیشامد مردود شدن در درس شیمی و B پیشامد مردود شدن در درس زیست‌شناسی باشد، داریم:

$$P(A) = \frac{10}{100}, P(B) = \frac{15}{100}, P(A \cap B) = \frac{5}{100}$$

$$\Rightarrow P(B | A') = \frac{P(B \cap A')}{P(A')} = \frac{P(B - A)}{1 - P(A)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{1 - P(A)} = \frac{\frac{15}{100} - \frac{5}{100}}{\frac{90}{100}} = \frac{\frac{10}{100}}{\frac{90}{100}} = \frac{1}{9}$$

سه تاس سالم را پرتاب می‌کنیم. احتمال آن که عدد تاس وسط واسطه حسابی عدد دو تاس دیگر باشد، کدام است؟

$$\frac{1}{12} \quad (4)$$

$$\frac{1}{6} \quad (3)$$

$$\frac{1}{18} \quad (2)$$

$$\frac{2}{9} \quad (1)$$

$$n(S) = 6 \times 6 \times 6$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. فضای نمونه‌ای شامل $6 \times 6 \times 6$ عضو می‌باشد:
برای محاسبه تعداد پیشامدهای مطلوب داریم:

(۱) اعداد روشنده هر سه تاس برابر باشند: ۶ حالت

$$\{(1, 2, 3), (1, 3, 5), (2, 3, 4), (2, 4, 6), (3, 4, 5), (4, 5, 6)\}$$

و از برعکس کردن مؤلفه‌های اول و سوم نیز همین تعداد پیشامد به دست می‌آید: ۱۲ حالت.

$$n(A) = 18 \Rightarrow P(A) = \frac{18}{6 \times 6 \times 6} = \frac{1}{12}$$

در نتیجه:

خانواده‌ای با ۴ فرزند وجود دارد. احتمال این‌که فرزندان در فصول مختلف سال به دنیا آمده باشند، کدام است؟

$$\frac{3}{32} (4)$$

$$\frac{3}{24} (3)$$

$$\frac{1}{24} (2)$$

$$\frac{1}{4} (1)$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

تولد ۴ فرزند در فصل‌های مختلف = فضای نمونه آزمایش

= تعداد اعضای پیشامد

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4!}{4^4} = \frac{3!}{4^3} = \frac{6}{64} = \frac{3}{32}$$

در پرتاب ۳ تاس سالم، احتمال این که حاصل ضرب اعداد رو شده عددی زوج باشد، کدام است؟

$$\frac{7}{8} \quad (4)$$

$$\frac{1}{4} \quad (3)$$

$$\frac{3}{4} \quad (2)$$

$$\frac{1}{8} \quad (1)$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. برای این که حاصل ضرب سه عدد رو شده زوج باشد، باید حداقل یکی از اعداد، زوج باشد. برای راحتی کار ابتدا حالتی را که هیچ یک از اعداد رو شده زوج نیست حساب کرده و از $n(S)$ کم می کنیم:

$$n(S) = 6 \times 6 \times 6 = 216$$

حالت $A' : 27 = 27$ عدد رو شده هر سه تاس فرد باشد.

$$\Rightarrow P(A') = \frac{27}{216} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{27}{216} = \frac{189}{216} = \frac{7}{8}$$

طول قطر کوچک بیضی $\sqrt{2}$ و فاصله یک کانون تا نزدیکترین رأس ۲ است. خروج از مرکز بیضی کدام است؟

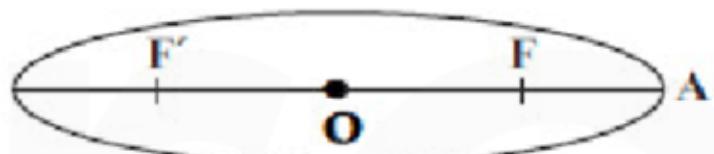
$$\frac{2}{3}(4)$$

$$\frac{1}{4}(3)$$

$$\frac{1}{2}(2)$$

$$\frac{1}{3}(1)$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



$$2b = 4\sqrt{2} \Rightarrow b = 2\sqrt{2}$$

$$FA = 2 \Rightarrow a - c = 2 \quad (\text{I})$$

$$b^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow b^2 = (a - c)(a + c)$$

$$b^2 = 2(a + c) \Rightarrow a + c = 2(a + c) \Rightarrow a + c = 4 \quad (\text{II})$$

$$(\text{I}), (\text{II}) \Rightarrow \begin{cases} a - c = 2 \\ a + c = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ c = 1 \end{cases}$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{1}{3}$$

مطابق شکل فرضی داریم:

طبق رابطه $a^2 = b^2 + c^2$ ، داریم: