چند مورد از گزاره‌های زیر درست‌اند؟

الف) اگر صفحهٔ P بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل دایره است.

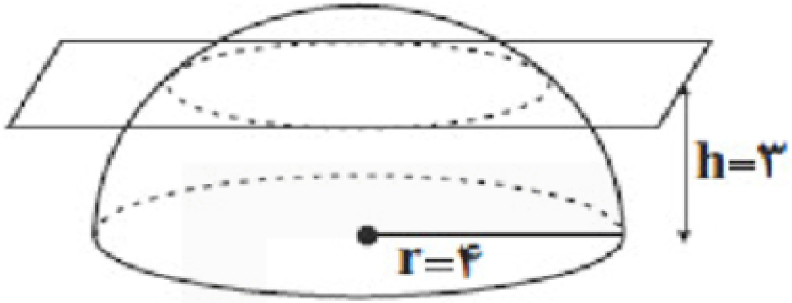
ب) اگر صفحهٔ P بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از رأس نگذرد، شکل حاصل بیضی است.

ج) اگر صفحهٔ P در یکی از موقعیت‌ها با مولد سطح مخروطی موازی باشد و از رأس آن عبور نکند، حاصل یک سهمی است.

د) اگر صفحهٔ P سطح مخروطی را هم در قسمت بالایی و هم در قسمت پائینی قطع کند و از رأس آن عبور کند، شکل حاصل هذلولی است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. موارد ب و د غلط هستند.

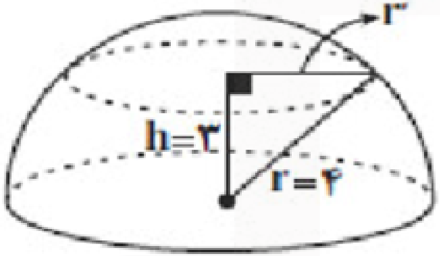


مطابق شکل، یک نیم‌کره به شعاع $r = ۴$ را با صفحه‌ای موازی صفحهٔ قاعده و به فاصلهٔ $h = ۳$ از آن قطع می‌کنیم. مساحت سطح مقطع حاصل کدام است؟

۱) ۷π ۲) π

۳) $\frac{۱۶\pi}{۹}$ ۴) ۱۲π

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



مطابق شکل، طبق قضیهٔ فیثاغورس، به راحتی می‌توانیم شعاع دایرهٔ مقطع را حساب کنیم.

$$r' \sqrt{۴^۲ - ۳^۲} = \sqrt{۷}$$

پس مساحت دایرهٔ حاصل برابر است با:

$$S = \pi r^۲ = ۷\pi$$

می‌خواهیم یک قوطی فلزی استوانه‌ای شکل با ضخامت معین و در باز بسازیم که گنجایش آن ۳۰۰۰ واحد مکعب باشد. ارتفاع قوطی کدام باشد تا مقدار فلز به کار رفته برای تولید آن مینیمم شود؟ ($\pi \approx ۳$)

۱) ۱۰   ۲) ۲۰   ۳) ۱۵   ۴) ۸

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به حجم قوطی، رابطهٔ بین ارتفاع و شعاع استوانه به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$V = \pi r^{۲} h \Rightarrow \pi r^{۲} h = ۳۰۰۰ \xrightarrow{\pi \approx ۳} r^{۲} h = ۱۰۰۰ \Rightarrow h = \frac{۱۰۰۰}{r^{۲}}$$

طبق صورت سؤال، باید مساحت کل استوانه مورد نظر کم‌ترین مقدار ممکن گردد.

$$S = \text{مساحت کل استوانه} = \text{مساحت قاعده} + \text{مساحت جانبی} = \pi r^{۲} + ۲\pi r h$$

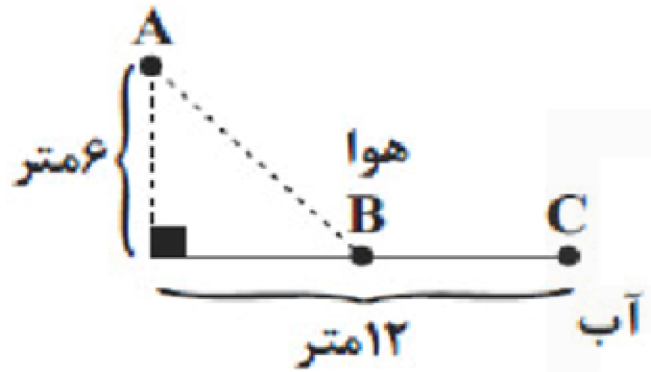
$$S = \pi r^{۲} + \pi \left(\frac{۲۰۰۰}{r}\right) = \pi \left(r^{۲} + \frac{۲۰۰۰}{r}\right)$$

اگر مشتق مساحت برحسب شعاع را برابر با صفر قرار دهیم، شعاع مطلوب به‌دست می‌آید:

$$S' = \pi \left(۲r - \frac{۲۰۰۰}{r^{۲}}\right) = ۰$$

$$\Rightarrow ۲r = \frac{۲۰۰۰}{r^{۲}} \Rightarrow r^{۳} = ۱۰۰۰ \Rightarrow r = ۱۰ \Rightarrow h = ۱۰$$

مرغ دریایی در نقطهٔ A قرار گرفته و قصد دارد به نقطهٔ C برود. برای این‌کار، قسمتی از مسیر را در هوا و بخشی را روی سطح آب، مطابق شکل زیر طی می‌کند. اگر این پرنده روی آب ۱۰ کالری بر متر و در هوا $۱۰\sqrt{۵}$ کالری بر متر انرژی مصرف کند، فاصلهٔ نقطهٔ B از C چند متر باشد تا مرغ دریایی کم‌ترین انرژی ممکن را مصرف کند؟



۱) ۳ ۲) ۹ ۳) ۴ ۴) ۶

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$BC = ۱۲ - ۳ = ۹$

برای توابع مشتق‌پذیر $f(x)$ و $g(x)$ در R داریم: $f'(x) = (۵ - x)g(x)$، اگر $g(۵) = \frac{-۱}{۳}$، نقطه‌ای به طول $x = ۵$ برای تابع $f(x)$ چگونه است؟

۱) ماکزیمم نسبی ۲) مینیمم نسبی ۳) نقطه‌ای معمولی است. ۴) قابل تعیین نیست.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. تابع g پیوسته است و از طرفی داریم: $g(۵) = -\frac{۱}{۳}$ بنابراین در همسایگی $x = ۵$ ، $g(x) < ۰$ است. حال جدول تعیین علامت f' را در همسایگی $x = ۵$ رسم می‌کنیم.

x		۵	
$f'(x) = (۵ - x)g(x)$	$-$	۰	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

پس $x = ۵$ برای f نقطهٔ مینیمم نسبی است.

اگر f تابع همانی و تمام نقاط تابع $f - g$ بحرانی باشند، کدام ضابطه برای g مناسب است؟

۱) $y = ۲$ ۲) $y = x - ۱$ ۳) $y = [x]$ ۴) $y = |x|$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: $(f - g)(x) = x - ۲$ نقطهٔ بحرانی ندارد.

گزینهٔ «۲»: $(f - g)(x) = x - (x - ۱) = ۱$ و تمام نقاط نمودار آن بحرانی هستند.

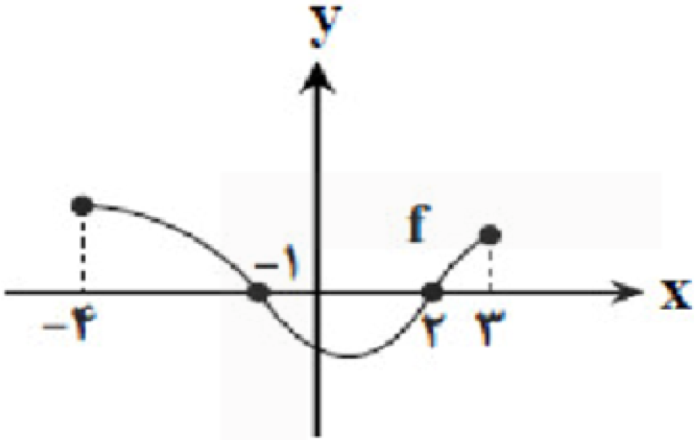
گزینهٔ «۳»: در تابع $(f - g)(x) = x - [x]$ نقاط با طول غیرصحیح، بحرانی نیستند.

گزینهٔ «۴»: در تابع $(f - g)(x) = x - |x|$ داریم:

$$(f - g)(x) = \begin{cases} ۰ & , \quad x \geq ۰ \\ ۲x & , \quad x < ۰ \end{cases}$$

پس x های منفی بحرانی نیستند.

اگر نمودار تابع f به‌صورت زیر باشد، تابع $y = \sqrt{xf(x)}$ الزاماً در کدام بازه اکیداً صعودی است؟



۱) $(-۴, -۱)$

۲) $(-۱, ۰)$

۳) $(۲, ۳)$

۴) در هیچ بازه‌ای اکیداً صعودی نیست.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$y' = \frac{(۱)f(x) + xf'(x)}{۲\sqrt{xf(x)}}$$

برای این‌که y اکیداً صعودی باشد باید $y' > ۰$ باشد. در بازهٔ $(۲, ۳)$ تابع حتماً اکیداً صعودی است، ولی در بازهٔ $(-۱, ۰)$ علامت y' نامشخص است.

دامنهٔ y: $xf(x) \geq ۰ \quad [-۱, ۰] \cup [۲, ۳]$

$y' > ۰ \Rightarrow f(x) + xf'(x) > ۰$

اگر $h(x) = f(x) - (f(x))^{۲} + (f(x))^{۳}$ برای هر عدد حقیقی x برقرار باشد، آن‌گاه کدام گزینه درست است؟ ($f(x)$ تابعی غیر ثابت است.)

۱) تابع h صعودی است هرگاه تابع f صعودی باشد.
۲) تابع h نزولی است هرگاه تابع f صعودی باشد.
۳) تابع h صعودی است هرگاه تابع f نزولی باشد.
۴) ارتباطی بین صعودی یا نزولی بودن توابع f و h وجود ندارد.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. از دو تساوی مشتق می‌گیریم:

$$h'(x) = f'(x) - ۲f(x)f'(x) + ۳f^{۲}(x)f'(x)$$

$$h'(x) = f'(x)\left(۱ - ۲f(x) + ۳f^{۲}(x)\right)$$

$$h'(x) = ۳f'(x)\underbrace{\left(\left(f(x) - \frac{۱}{۳}\right)^{۲} + \frac{۲}{۹}\right)}_{\text{همواره مثبت}}$$

با توجه به تساوی بالا، $f'(x)$ و $h'(x)$ همواره هم‌علامت‌اند. پس اگر f صعودی باشد آن‌گاه $h(x)$ نیز صعودی خواهد بود.

رباتی طبق معادلهٔ $d(t) = t^۴ - ۸t^۲ + ۸$ $(۰ \le t \le ۳)$ حرکت می‌کند. سرعت متوسط این ربات، بین زمان‌هایی که ربات مقادیر ماکزیمم و مینیمم را برای مکان خود اختیار می‌کند، کدام است؟

۱) ۱۰-
۲) ۸
۳) ۲۱-
۴) ۲۵

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. برای اینکه ببینیم ربات در چه لحظاتی مقادیر ماکزیمم و مینیمم را برای مکان خود اختیار می‌کند، باید اکسترمم‌های مطلق $d(t)$ را بیابیم:

$$d'(t) = ۴t^۳ - ۱۶t = ۰ \Rightarrow ۴t(t^۲ - ۴) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t = -۲ \text{ غ ق ق} \\ t = ۰ \\ t = ۲ \end{cases}$$

حال مقدار تابع را در هر یک از نقاط بحرانی و هم‌چنین انتهای بازه محاسبه می‌کنیم:

$$d(۰) = ۸$$
$$d(۲) = -۸$$
$$d(۳) = ۱۷$$

پس باید سرعت متوسط را در بازهٔ $[۲ , ۳]$ پیدا کنیم:

$$\frac{f(۳) - f(۲)}{۳ - ۲} = \frac{۱۷ - (-۸)}{۱} = ۲۵$$

اگر $\frac{f(x)}{۲} = x - |x|$ و $g(x) = ۲x + ۲|x|$ باشند، مشتق تابع $(fog)(x)$ کدام است؟

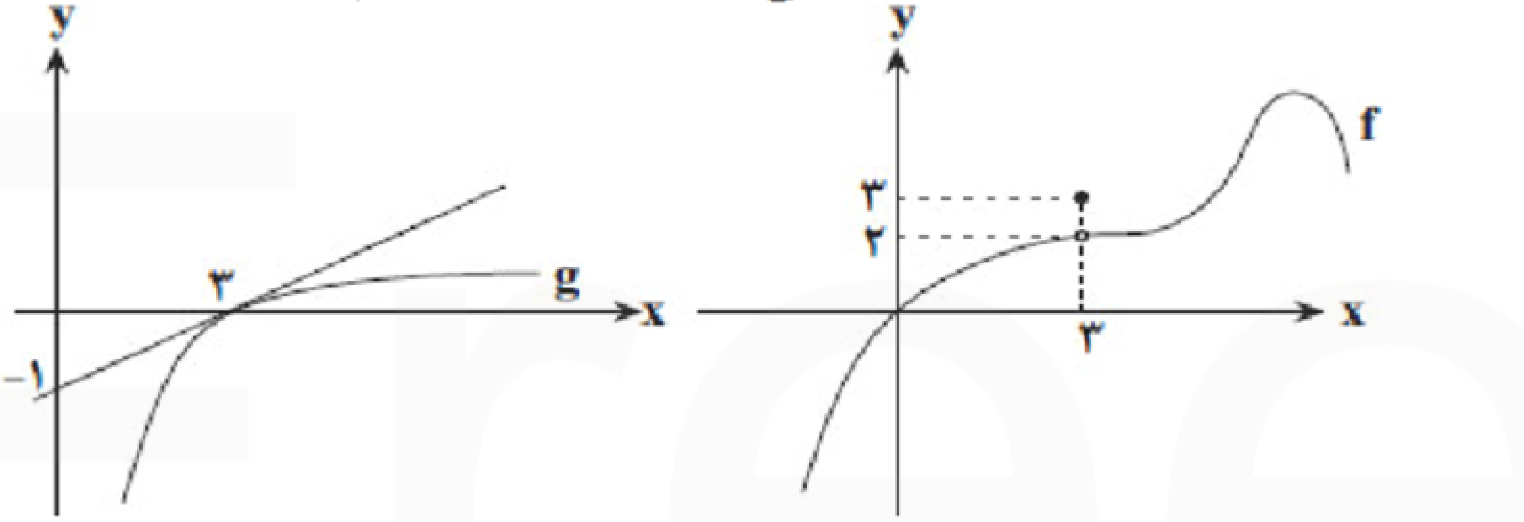
۱) ۱ ۲) صفر ۳) -۱ ۴) وجود ندارد.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$(fog)(x) = f(g(x)) = ۲(۲x + ۲|x| - |۲x + ۲|x||) = \begin{cases} ۰ & x \geq ۰ \\ ۰ & x < ۰ \end{cases}$$

$$(fog)(x) = ۰ \Rightarrow (fog)'(x) = ۰$$

نمودار تابع f و g به‌صورت زیر است. مقدار مشتق تابع $f.g$ در $x = ۳$ کدام است؟



۱) ۱

۲) $\frac{۲}{۳}$

۳) $\frac{۴}{۳}$

۴) صفر

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

توجه: $g'(۳)$ شیب خط مماس بر تابع g در $x = ۳$ است که با توجه به شکل، خط مماس از دو نقطهٔ $(۰ , -۱)$ و $(۳ , ۰)$ می‌گذرد و شیب آن $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{۱}{۳}$ است.

اگر تابع f بر روی R مشتق‌پذیر باشد و $\lim\limits_{h \to ۰} \frac{f(h+۳)-۴}{h} = ۵$ مشتق تابع $y = \frac{\sqrt{f(x)}}{x}$ در نقطهٔ $x = ۳$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۴}{۱۷}$

۲) $\frac{۷}{۳۶}$

۳) $\frac{۵}{۳۶}$

۴) $\frac{۵}{۱۷}$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به تعریف مشتق داریم:

$$\lim_{h \to ۰} \frac{f(h+۳)-f(۳)}{h} = ۵ \Rightarrow \begin{cases} f(۳) = ۴ \\ f'(۳) = ۵ \end{cases}$$

حال مشتق تابع داده شده را در $x = ۳$ محاسبه می‌کنیم:

$$y' = \frac{\frac{xf'(x)}{۲\sqrt{f(x)}} - \sqrt{f(x)}}{x^۲} \Rightarrow y'(۳) = \frac{\frac{۳ \times ۵}{۲ \times \sqrt{۴}} - \sqrt{۴}}{۳^۲} = \frac{۷}{۳۶}$$

اگر $f(x) = \sqrt{\frac{x[x]}{|۱ - x|}}$ باشد، آن‌گاه حاصل $\lim\limits_{h \to ۰^{+}} \frac{f(۲ + h) - f(۲)}{h}$ کدام است؟ ($[\ ]$ علامت جزء صحیح است.)

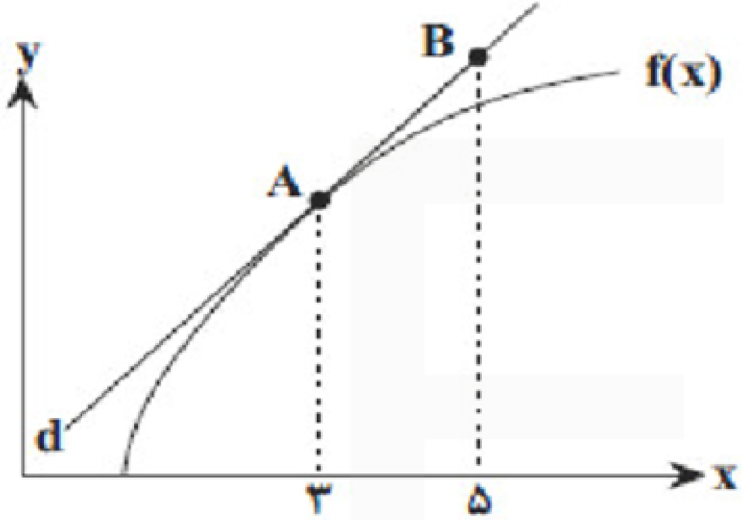
۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۲ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) ۲-

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. واضح است که حد خواسته شده همان $f'_{+}(۲)$ است. حالا با توجه به این‌که تابع داده شده در $x = ۲$ پیوستگی راست دارد، پس برای محاسبهٔ $f'_{+}(۲)$ ابتدا $f(x)$ را ساده نموده و سپس $f'(x)$ را در همسایگی راست نقطهٔ $x = ۲$ حساب کرده و در مرحلهٔ آخر $f'_{+}(۲)$ را به دست می‌آوریم:

$$x \to ۲^{+} \Rightarrow \begin{cases} [x] = ۲ \\ |۱ - x| = x - ۱ \end{cases} \Rightarrow f(x) = \sqrt{\frac{۲x}{x - ۱}} = \left(\frac{۲x}{x - ۱}\right)^{\frac{۱}{۲}}$$

$$f'(x) = \frac{۱}{۲}\left(\frac{-۲}{(x - ۱)^{۲}}\right)\left(\frac{۲x}{x - ۱}\right)^{\frac{-۱}{۲}} \Rightarrow f'_{+}(۲) = -\frac{۱}{۲}$$

مطابق شکل زیر، خط d در نقطه‌ای به طول $x = ۳$ بر تابع $f(x)$ مماس است. اگر $f(۳) = f'(۳) = ۳$ باشد، آن‌گاه عرض نقطهٔ B کدام است؟



۱) ۶

۲) ۸

۳) ۹

۴) ۱۲

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به آن‌که مشتق در یک نقطه، شیب خط مماس بر منحنی در آن نقطه را می‌دهد، پس شیب پاره‌خط AB برابر با ۳ است. طبق تعریف شیب خط داریم:

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = ۳ \Rightarrow \frac{y_B - ۳}{۵ - ۳} = ۳ \Rightarrow y_B = ۹$$

به ازای چه مقادیری از m تابع $y = ۲x^{۳} + ۳mx^{۲} + ۲۴x + ۹$ اکیداً یکنواست؟

۱) $-۴\sqrt{۲} \leq m \leq ۴\sqrt{۲}$
۲) $-۸ \leq m \leq ۸$
۳) $۰ < m \leq ۸$
۴) $-۴ \leq m \leq ۴$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. یک تابع پیوسته هنگامی یکنواست که علامت مشتق در آن تغییر نکند.

$y' = ۶x^{۲} + ۶mx + ۲۴$

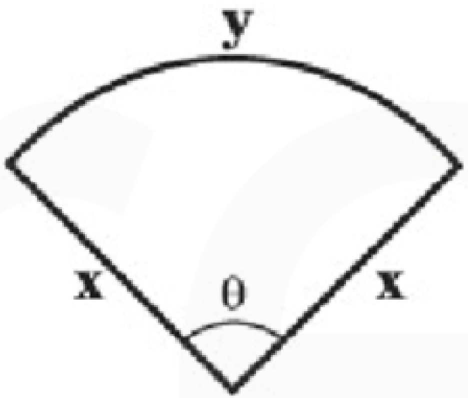
پس باید مشتق عبارت در این‌جا یک تابع درجه دوم است تغییر علامت ندهد، یعنی $\Delta \leq ۰$ باشد.

$\Rightarrow \Delta = ۰ \Rightarrow ۳۶\left(m^{۲} - ۱۶\right) \leq ۰ \Rightarrow m^{۲} \leq ۱۶ \Rightarrow -۴ \leq m \leq ۴$

با ۴۰ متر سیم می‌خواهیم دور یک زمین به شکل قطاع یک دایره را محصور کنیم. شعاع دایره کدام باشد تا مساحت زمین بیشترین مقدار ممکن باشد؟

۱) ۵   ۲) ۱۰   ۳) ۱۲   ۴) ۱۵

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



مطابق شکل داریم: $۲x + y = ۴۰ \Rightarrow y = ۲(۲۰ - x)$

مساحت قطاعی با زاویهٔ θ رادیان از دایره‌ای به شعاع r برابر است با $\frac{۱}{۲}\theta r^{۲}$ بنابراین داریم:

$$\Rightarrow S(x) = \frac{۱}{۲}x^{۲}\theta = \frac{۱}{۲}x^{۲}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{۱}{۲}xy \quad = \frac{۱}{۲}x(۲(۲۰ - x)) = -x + ۲۰x$$

رأس سهمی $S(x)$ نقطهٔ $(۱۰ , ۱۰۰)$ است، یعنی به ازای شعاع $x = ۱۰$، مساحت قطاع حداکثر مقدار ممکن خواهد بود.

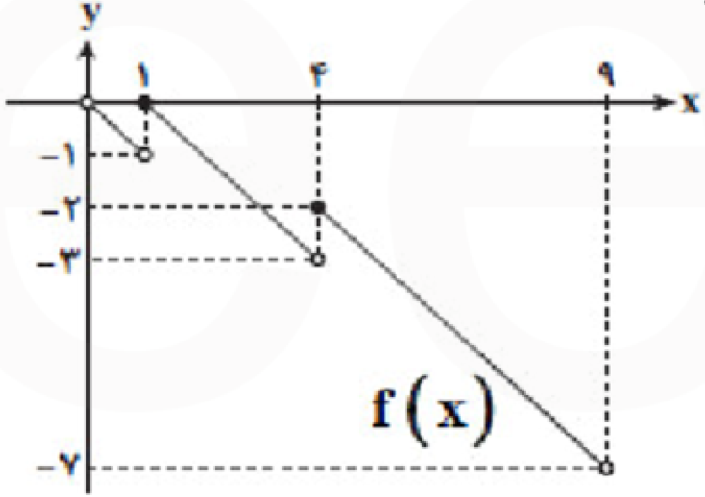
تابع $f(x) = \left[\sqrt{x}\right] - x$ در بازهٔ $(۰ , ۹)$ به‌ترتیب از راست به چپ چند ماکزیمم نسبی و چند مینیمم نسبی دارد؟

([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) ۲، صفر ۲) ۱، ۱ ۳) صفر، ۲ ۴) ۲، ۱

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. می‌توان تابع را در بازهٔ مذکور به صورت زیر نوشت:

$$f(x) = \begin{cases} -x & ; ۰ < x < ۱ \\ ۱ - x & ; ۱ \le x < ۴ \\ ۲ - x & ; ۴ \le x < ۹ \end{cases}$$



نمودار دارای ۲ ماکزیمم نسبی در $x = ۴$ و $x = ۱$ و فاقد مینیمم نسبی است.

اگر $D_f = R$ و $f'(x) = -x^۳ + ۳x^۲ - ۲x$ باشد، مجموع طول نقاط ماکزیمم نسبی نمودار تابع f کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f'(x) = x\left(-x^۲ + ۳x - ۲\right) = x(x - ۱)(-x + ۲)$$

با تعیین علامت f' داریم:

x	$-\infty$		۰		۱		۲		$+\infty$
$f'(x)$		+ ↗	۰ max	− ↘	۰ min	+ ↗	۰ max	− ↘	

بنابراین نمودار تابع f در $x = ۰$ و $x = ۲$ ماکزیمم نسبی و در $x = ۱$ مینیمم نسبی دارد. پس مجموع طول نقاط ماکزیمم نسبی برابر ۲ است.

مجموعهٔ طول نقاط بحرانی تابع با ضابطهٔ $f(x) = (x^۲ - ۱)\sqrt[۳]{x^۲}$ کدام است؟

۱) $\{-۱ , ۱\}$ ۲) $\{-۴ , ۰ , ۱\}$ ۳) $\{-۲ , ۰ , ۲\}$ ۴) $\left\{-\frac{۱}{۲} , ۰ , \frac{۱}{۲}\right\}$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = (x^۲ - ۱)\sqrt[۳]{x^۲}$$

$$\Rightarrow f'(x) = (۲x)\sqrt[۳]{x^۲} + \frac{۲}{۳\sqrt[۳]{x}}(x^۲ - ۱) = \frac{۸x^۲ - ۲}{۳\sqrt[۳]{x}}$$

$$f'(x) = ۰ \Rightarrow ۸x^۲ - ۲ = ۰ \Rightarrow x = \pm\frac{۱}{۲}$$

همچنین در $x = ۰$ مشتق وجود ندارد.

پس مجموعهٔ نقاط بحرانی تابع برابر $\left\{-\frac{۱}{۲} , ۰ , \frac{۱}{۲}\right\}$ است.

نقطهٔ $M(x\,,\,y)$ روی نمودار تابع $y=\sqrt{۷x+۴}$ در حال حرکت است. اگر d فاصلهٔ نقطهٔ M از مبدأ مختصات باشد، آهنگ لحظه‌ای تغییر d نسبت به x در نقطهٔ $x=۵$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۵}{۱۶}$ ۲) $\frac{۱۷}{۱۶}$ ۳) $\frac{۱۹}{۱۶}$ ۴) $\frac{۲۱}{۱۶}$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$d=\sqrt{x^{۲}+\left(\sqrt{۷x+۴}\right)^{۲}}=\sqrt{x^{۲}+۷x+۴}$$

$$\Rightarrow \text{آهنگ لحظه ای تغییر } d = d'=\frac{۲x+۷}{۲\sqrt{x^{۲}+۷x+۴}} \xrightarrow{x=۵} d'=\frac{۱۰+۷}{۲\sqrt{۲۵+۳۵+۴}}=\frac{۱۷}{۱۶}$$

مشتق دوم تابع $f(x) = (۲x - ۱)^۲ \sqrt{x + \frac{۱}{۲}}$ در $x = \frac{۱}{۲}$ کدام است؟

۱) ۲
۲) ۴
۳) ۸
۴) ۱۶

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f'(x) = ۴(۲x - ۱)\sqrt{x + \frac{۱}{۲}} + \frac{۱}{۲\sqrt{x + \frac{۱}{۲}}}(۲x - ۱)^۲$$

حال باید از f' مشتق بگیریم برای محاسبهٔ مقدار مشتق در یک نقطهٔ خاص، اگر عامل صفرکننده داشته باشیم کافی است فقط از آن عامل مشتق بگیریم. اگر توان عامل صفرکننده بیش از یک باشد، مشتق در آنجا صفر است، پس داریم:

$$f''\left(\frac{۱}{۲}\right) = ۸\sqrt{x + \frac{۱}{۲}}\Bigg|_{x = ۱} = ۸$$

در تابع درجهٔ دوم f داریم: $f'(1) = 2$ و $f''(3) = 4$ مقدار $f'(2)$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۲

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow f'(x) = 2ax + b \,,\, f''(x) = 2a$$

$$f''(3) = 4 \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = 2$$

$$f'(1) = 2 \Rightarrow 2a + b = 2 \xrightarrow{a = 2} b = -2$$

$$\Rightarrow f'(x) = 4x - 2$$

$$\Rightarrow f'(2) = 4(2) - 2 = 6$$

اگر $f(۲x+۱)=g\left(x^۲+\sqrt{x}\right)$ و $f'(۳)=۵$ باشد، $g'(۲)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(۲x+۱)=g\left(x^۲+\sqrt{x}\right)\Rightarrow (f(۲x+۱))'=\left(g\left(x^۲+\sqrt{x}\right)\right)'$$

$$\Rightarrow ۲f'(۲x+۱)=\left(۲x+\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\right)g'\left(x^۲+\sqrt{x}\right)$$

$$\xrightarrow{x=۱} ۲f'(۳)=\left(۲+\frac{۱}{۲}\right)g'(۲)$$

$$\xrightarrow{f'(۳)=۵} ۱۰=\frac{۵}{۲}g'(۲)\Rightarrow g'(۲)=۴$$

اگر تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{۲a}{\sqrt{x}} + ۳x & ; x \geq ۱ \\ bx^۲ + ۶ & ; x < ۱ \end{cases}$ در $x = ۱$ مشتق‌پذیر باشد، حاصل $\frac{a}{b}$ کدام است؟

۱) ۵
۲) ۲
۳) ۱
۴) ۳

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

شرط پیوستگی: $\lim\limits_{x \to ۱^+} f(x) = f(۱) = \lim\limits_{x \to ۱^-} f(x) \Rightarrow ۲a + ۳ = b + ۶ \Rightarrow ۲a - b = ۳ \quad (۱)$

$$f'(x) = \begin{cases} ۳ - \frac{a}{\sqrt{x^۳}} & ; x \geq ۱ \\ ۲bx & ; x < ۱ \end{cases}$$

شرط مشتق‌پذیری: $f'_+(۱) = f'_-(۱) \Rightarrow ۳ - a = ۲b \Rightarrow a + ۲b = ۳ \quad (۲)$

$$\xrightarrow{(۱) \text{ و } (۲)} a = \frac{۹}{۵}, b = \frac{۳}{۵} \Rightarrow \frac{a}{b} = ۳$$

اگر $f(x) = [x]\,|x^۲ - x - ۲|$ باشد، حاصل $f'_+(-۲) - f'_-(۲)$ کدام است؟ ($[\ ]$ نماد جزء صحیح است.)

۱) ۷　　　　۲) ۱۲　　　　۳) ۱۳　　　　۴) ۱۸

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. برای مشتق‌گیری یک طرفه در چنین توابعی، کافی است در همسایگی نقطهٔ مورد نظر، مقدار عبارت جزء صحیح و علامت عبارت قدرمطلق را تعیین کنیم و از تابع به دست آمده مشتق بگیریم. بنابراین در این سؤال داریم:

$$x \to (-۲)^+ : f(x) = -۲x^۲ + ۲x + ۴$$

$$\Rightarrow f'_+(-۲) = ۴x + ۲\Big|_{x=-۲} = ۱۰$$

$$x \to ۲^- : f(x) = -x^۲ + x + ۲ \Rightarrow f'_-(۲) = -۲x + ۱\Big|_{x=۲} = -۳$$

$$\Rightarrow f'_+(-۲) - f'_-(۲) = ۱۰ - (-۳) = ۱۳$$

اگر $\lim\limits_{h \to ۰} \dfrac{f(۲+h)-f(۲)}{h} = \dfrac{۳}{۲}$ و $h(x)=f(۲x)$ باشد، $h'(۱)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

حاصل حد $\lim\limits_{h \to ۰} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ (در صورت وجود) را مشتق تابع f نامیده و با $f'(a)$ نشان می‌دهیم.

$$\lim_{h \to ۰} \frac{f(۲+h)-f(۲)}{h} = f'(۲) = \frac{۳}{۲}$$

$$h(x)=f(۲x) \Rightarrow h'(x)=۲f'(۲x)$$

$$\xrightarrow{x=۱} h'(۱)=۲f'(۲) \Rightarrow h'(۱)=۲\times\frac{۳}{۲}=۳$$

اگر $f(x)=(x^{۲}+۲)(x^{۴}+۴)$ و $g(x)=x^{۸}-۱۶$ باشد، حاصل $g'(۱)f(۱)-f'(۱)g(۱)$ کدام است؟

۱) ۲۲۵ ۲) ۲۵۰ ۳) ۴۵۰ ۴) ۵۰۰

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$A=g'(۱)f(۱)-f'(۱)g(۱)=\frac{g'(۱)f(۱)-f'(۱)g(۱)}{(f(۱))^{۲}}(f(۱))^{۲}=\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)'\Bigg|_{x=۱}(f(۱))^{۲}$$

$$\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{x^{۸}-۱۶}{(x^{۲}+۲)(x^{۴}+۴)}=x^{۲}-۲\Rightarrow\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)'=۲x$$

$$\Rightarrow A=۲(۱)(f(۱))^{۲}=۲(۱)(۱۵^{۲})=۴۵۰$$

خط $y = ۴x + a$ بر نمودار تابع $y = x^۲ - ۲$ مماس است. مقدار a کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) -۶ ۴) -۲

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. راه حل اول:

$$y = x^۲ - ۲ \Rightarrow y' = ۲x$$

شیب خط مماس $= ۴ \Rightarrow ۲x = ۴ \Rightarrow$ طول نقطه مماس: $x = ۲$

$y = x^۲ - ۲ \xrightarrow{x = ۲}$ عرض نقطه تماس: $y = ۲$

خط مماس: $y = ۴x + a \xrightarrow[y = ۲]{x = ۲} ۲ = ۸ + a \Rightarrow a = -۶$

راه حل دوم:

چون خط بر سهمی مماس است، معادلهٔ $x^۲ - ۲ = ۴x + a$ باید جواب مضاعف داشته باشد:

$$\Rightarrow x^۲ - ۴x - a - ۲ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۴a + ۲۴ = ۰ \Rightarrow a = -۶$$

تابع $f(x) = \begin{cases} x^۴ - ۴x - ۴ & ۰ \le x \le ۲ \\ \sqrt{۲x} & ۲ < x \le ۸ \end{cases}$ در کدام بازه مشتق‌پذیر است؟

۱) $(۰, ۳)$ ۲) $[۰, \frac{۵}{۲})$ ۳) $(۲, ۸)$ ۴) $[۰, ۷]$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. تابع f در $x = ۲$ (نقطه‌ی مرزی) پیوسته نیست، زیرا:

$$f(۲) = \lim_{x \to ۲^-} f(x) = ۱۶ - ۸ - ۴ = ۴ , \lim_{x \to ۲^+} f(x) = ۲$$

حال مشتق تابع را حساب می‌کنیم.

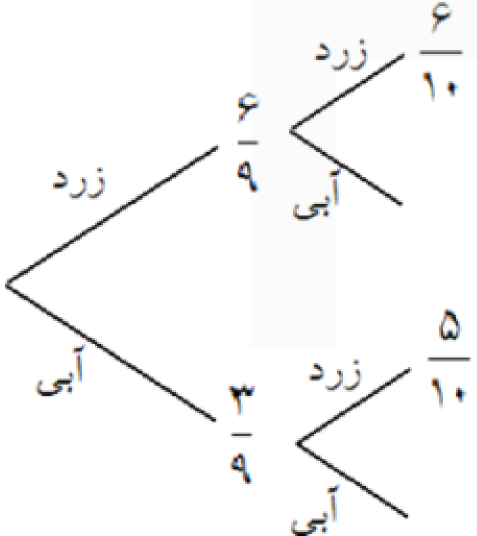
$$f'(x) = \begin{cases} ۴x^۳ - ۴ & ۰ \le x < ۲ \\ \dfrac{۱}{\sqrt{۲x}} & ۲ < x \le ۸ \end{cases}$$

چون تابع در $x = ۲$ ناپیوسته است، پس مشتق آن در بازه‌ای که فاقد عدد ۲ باشد وجود دارد.

دو ظرف یکسان داریم. ظرف اول شامل ۶ مهره‌ی زرد و ۳ مهره‌ی آبی و ظرف دوم شامل ۵ مهره‌ی زرد و ۴ مهره‌ی آبی است. از ظرف اول مهره‌ای انتخاب می‌کنیم و درون ظرف دوم قرار می‌دهیم، سپس از ظرف دوم مهره‌ای انتخاب می‌کنیم. با چه احتمالی این مهره زرد است؟

۱) $\frac{۱۷}{۳۰}$ ۲) $\frac{۱۹}{۳۰}$ ۳) $\frac{۱۳}{۳۰}$ ۴) $\frac{۱۱}{۳۰}$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



$$P(A) = \frac{۶}{۹} \times \frac{۶}{۱۰} + \frac{۳}{۹} \times \frac{۵}{۱۰} = \frac{۳۶ + ۱۵}{۹۰} = \frac{۵۱}{۹۰} = \frac{۱۷}{۳۰}$$