

تست های طبقه بندی شده کتاب ریاضیات ۳

(فصل سوم - حد و پیوستگی)

رشته علوم تجربی داخل و خارج از کشور

از سال ۱۳۷۶ تا سال ۱۳۹۶

کاری از سید علی موسوی فوق لیسانس ریاضی محض

دبیر ریاضی دبیرستان های مشهد

@dostaneriazi - ۰۹۱۵۳۲۱۵۶۱۴

سراسری تجربی ۹۶

$$\text{حاصل } \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{6}{x^2 - 2x} - \frac{x+1}{x-2} \right) \text{ کدام است؟}$$

$\frac{3}{2}$ (۴)

$\frac{1}{2}$ (۳)

$-\frac{3}{2}$ (۲)

$-\frac{5}{2}$ (۱)

نکته: برای رفع ابهام $\infty - \infty$ ، ابتدا مخرج مشترک گرفته و عامل صفر شونده را در صورت و مخرج کسر پدید آورده و آن را حذف کرده و حاصل حد را می‌یابیم.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{6}{x^2 - 2x} - \frac{x+1}{x-2} \right) = \infty - \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{6}{x(x-2)} - \frac{x+1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{6 - (x^2 + x)}{x(x-2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2 - x + 6}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x+3)(x-2)}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x+3)}{x} = -\frac{5}{2}$$

سراسری تجربی ۹۶

$$\text{تابع با ضابطه } f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1 - \sqrt{1-x}} & , x \neq 0 \\ a & , x = 0 \end{cases} \text{ پیوسته است؟}$$

۲ (۴)

۱ (۳)

-۱ (۲)

-۲ (۱)

نکته: قاعدة هوپیتال یعنی به طور جداگانه از صورت و مخرج کسر مشتق گرفته و حد کسر حاصل را بیابیم.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \quad f(0) = a \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - \sqrt{1-x}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}} = 2 \quad (2) \quad (1), (2) \rightarrow a = 2$$

توجه داشته باشیم که در این تابع، نیازی به محاسبه جداگانه حدود چپ و راست نیست.

سراسری تجربی ۹۶ - خارج از کشور

$$\text{حاصل } \lim_{x \rightarrow (-1)} \left(\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{x}{x+1} \right) \text{ کدام است؟}$$

$\frac{3}{2}$ (۴)

۱ (۳)

$-\frac{3}{2}$ (۲)

-۲ (۱)

$$\lim_{x \rightarrow (-1)} \left(\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{x}{x+1} \right) = \infty - \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{2}{(x-1)(x+1)} - \frac{x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{2 - x^2 + x}{(x-1)(x+1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{-(x-2)(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{-(x-2)}{(x-1)} = \frac{-(-1-2)}{(-1-1)} = -\frac{3}{2}$$

۳

سراسری تجربی ۹۶ - خارج از کشور

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x-\sqrt{x}}, & x > 1 \\ ax-a+2, & x \leq 1 \end{cases}$$

تابع با ضابطه
تعدادی است؟

۴

۴) هیچ مقدار

a هر مقدار

۲ (۲)

۱ (۱)

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = a - a + 2 = 2 \quad (1)$$

$$(1), (2) \longrightarrow a \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x-\sqrt{x}} = \frac{\circ}{\circ} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}} = 2 \quad (2)$$

سراسری تجربی ۹۵

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \frac{5}{2}, \text{ اگر } f(x) = \frac{ax + \sqrt{4x^2 + 5}}{2x + 2} \text{ باشد، آنگاه حد } f(x) \text{ وقتی } x \rightarrow (-1)^+ \text{ کدام است؟}$$

۵

$\frac{5}{4}$ (۴)

$\frac{3}{2}$ (۳)

$\frac{5}{6}$ (۲)

$\frac{2}{3}$ (۱)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax + \sqrt{4x^2 + 5}}{2x + 2} = \frac{a}{2} \longrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax + |2x|}{2x} = \frac{a}{2} \longrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax + 2x}{2x} = \frac{a}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(a+2)x}{2x} = \frac{a+2}{2} = \frac{a}{2} + 1 \longrightarrow a = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x + \sqrt{4x^2 + 5}}{2x + 2} = \frac{\circ}{\circ} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3 + \frac{4x}{\sqrt{4x^2 + 5}}}{2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3 + \frac{4x}{\sqrt{4x^2 + 5}}}{2} = \frac{3 + \frac{-4}{3}}{2} = \frac{5}{6}$$

سراسری تجربی ۹۵

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x - \sqrt{\cos x}}{\sin^2 x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$$

به ازای کدام مقدار a ، تابع با ضابطه
تعدادی است؟

۶

۴) هیچ مقدار

$\frac{1}{2}$ (۳)

$-\frac{1}{2}$ (۲)

$-\frac{1}{4}$ (۱)

$$\cos u \xrightarrow{u \rightarrow 0} \approx 1 - \frac{u^2}{2} \quad 1 - \cos u \xrightarrow{u \rightarrow 0} \approx \frac{u^2}{2} \quad \sqrt[n]{1 \pm u} \xrightarrow{u \rightarrow 0} \approx 1 \pm \frac{u}{n} \quad \text{نکته:}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = f(\infty) \quad f(\infty) = a \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{x^2}{2} - 1 + \frac{x^2}{4}}{\frac{x^2}{4}} = -\frac{1}{4} \quad (2) \quad (1), (2) \rightarrow a = -\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos x - \sqrt{\cos x}}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos x - \cos^2 x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{x^2}{2} - (1 - \frac{x^2}{2}) \times \frac{1}{2}}{x^2} = -\frac{1}{4} \quad \text{روش دوم:}$$

سراسری تجربی ۹۵ - خارج از کشور

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x - 2}}{ax + b} = \frac{1}{2} \quad \text{اگر } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x - 2}}{ax + b} \text{ باشد، آن گاه } b \text{ کدام است؟}$$

۲ (۴)

۱ (۳)

-۱ (۲)

-۲ (۱)

نکته: چون صورت کسر به ازای $x = 2$ برابر صفر شده است پس باید مخرج کسر نیز برابر صفر باشد زیرا اگر مخرج

کسر مخالف صفر باشد حاصل حد برابر صفر می باشد، در صورتی که حاصل حد برابر $\frac{1}{2}$ است.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x - 2}}{ax + b} = \frac{0}{2a + b} \rightarrow 2a + b = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x - 2}}{ax + b} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - \frac{3}{2\sqrt{3x - 2}}}{a} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{4a} = \frac{1}{2} \rightarrow a = \frac{1}{2} \rightarrow b = -1$$

سراسری تجربی ۹۵ - خارج از کشور

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x - \sin x}{x^2}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases} \quad \text{به ازای کدام مقدار } a, \text{ تابع با ضابطه}$$

۴) هیچ مقدار a

-۱ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

توجه داشته باشیم که در این تابع، نیازی به محاسبه جداگانه حدود چپ و راست نیست.

$$f(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \quad f(\infty) = a \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin 2x - \sin x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \infty \quad (2) \quad (1), (2) \rightarrow a \notin \mathbb{R}$$

حد تابع در $x = \infty$ وجود ندارد. چون حاصل حد ∞ شده است، بنابراین تابع هیچ گاه تابع پیوسته نیست.

سراسری تجربی ۹۴

در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{ax^n + 15}{3x - \sqrt{4x^2 + 15x}}$ کدام است؟ باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ ، اگر $f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

۵ (۴)

۳ (۳)

-۴ (۲)

-۶ (۱)

۹

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax^n + 15}{3x - \sqrt{4x^2 + 15x}} = -1 \rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax^n}{3x - |2x|} = -1 \rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax^n}{5x} = -1 \rightarrow \begin{cases} n=1 \\ a=-5 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5x + 15}{3x - \sqrt{4x^2 + 15x}} = \frac{\circ}{\circ} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5}{3 - \frac{8x + 15}{2\sqrt{4x^2 + 15x}}} = \frac{-5}{3 - \frac{39}{18}} = \frac{-5}{\frac{15}{18}} = -6$$

سراسری تجربی ۹۴

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{\pi}{x} & , 1 \leq x \leq 6 \\ a + \cos \frac{\pi x}{36} & , x > 6 \end{cases}$$

به ازای کدام مقدار a ، تابع با ضابطه

۱۰

بزرگتر از یک پیوسته است؟

$\frac{1}{2}$ (۴)

$\frac{1}{4}$ (۳)

$-\frac{1}{4}$ (۲)

$-\frac{1}{2}$ (۱)

$$f(6) = \lim_{x \rightarrow 6} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$(1), (2) \rightarrow a + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \rightarrow a = -\frac{1}{4}$$

$$f(6) = \lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) = a + \cos \frac{\pi}{6} = a + \frac{3}{4} \quad (2)$$

سراسری تجربی ۹۴ - خارج از کشور

در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{2x + \sqrt{x^2 - 3x}}{ax^n - 6}$ کدام است؟ باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{1}{2}$ ، اگر $f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$\frac{1}{3}$ (۴)

$\frac{1}{4}$ (۳)

$-\frac{1}{8}$ (۲)

$-\frac{1}{6}$ (۱)

۱۱

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sqrt{x^2 - 3x}}{ax^n - 6} = -\frac{1}{2} \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + |x|}{ax^n} = -\frac{1}{2} \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{ax^n} = -\frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} n=1 \\ a=-6 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + \sqrt{x^2 - 3x}}{-6x - 6} = \frac{\circ}{\circ} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2 + \frac{2x - 3}{\sqrt{x^2 - 3x}}}{-6} = \frac{2 + \frac{-5}{4}}{-6} = -\frac{1}{8}$$

سراسری تجربی ۹۴ - خارج از کشور

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos 3x}{\cos x}, & 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ \sin \Delta x - a, & \frac{\pi}{2} \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه $\left[0, 2\pi\right]$ پیوسته است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۱۲

نکته: هرگاه بخواهیم پیوستگی تابع را در یک بازه بررسی کنیم، پیوستگی تابع را در شکستگی دامنه مورد بررسی قرار می‌دهیم.

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \sin \frac{5\pi}{2} - a = \sin(2\pi + \frac{\pi}{2}) - a = \sin \frac{\pi}{2} = 1 - a$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\cos 3x}{\cos x} = \frac{\circ}{\circ} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{-3 \sin 3x}{-\sin x} = -3 \quad 1 - a = -3 \rightarrow a = 4$$

سراسری تجربی ۹۳

$$\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{3}{2x^2 + 5x + 2} - \frac{4}{x^2 - 4} \right) \text{ کدام است؟}$$

$\frac{7}{12}$ (۴)

$\frac{5}{12}$ (۳)

$-\frac{5}{12}$ (۲)

$-\frac{7}{12}$ (۱)

۱۳

نکته: برای رفع ابهام $\infty - \infty$ ، مخرج مشترک می‌گیریم.

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3}{(x+2)(2x+1)} - \frac{4}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3(x-2) - 4(2x+1)}{(x+2)(2x+1)(x-2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-5x - 10}{(x+2)(2x+1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-5(x+2)}{(x+2)(2x+1)(x-2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-5}{(2x+1)(x-2)} = \frac{-5}{(-3)(-4)} = -\frac{5}{12}$$

سراسری تجربی ۹۳

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \tan^3 x}{\cos 2x}, & 0 \leq x < \frac{\pi}{4} \\ a \cos 3x, & \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

تابع با ضابطه $x = \frac{\pi}{4}$ به ازای کدام مقدار a ، در نقطه $x = \frac{\pi}{4}$ پیوسته است؟

۲ (۴)

$\sqrt{2}$ (۳)

-۱ (۲)

$-2\sqrt{2}$ (۱)

۱۴

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} f(x) \quad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} f(x) = a \cos \frac{3\pi}{4} = a \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -a \cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} a$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \frac{1 - \tan^2 x}{\cos 2x} = \underset{\circ}{\underset{\circ}{\text{Hop}}} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \frac{-2(1)(1 + \tan^2 x)(\tan x)}{-2 \sin 2x} = 2$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} a = 2 \longrightarrow a = -2\sqrt{2}$$

سراسری تجربی ۹۳ - خارج از کشور

$$\text{حاصل} \underset{x \rightarrow 2^+}{\lim} \frac{2 - \sqrt[3]{x+6}}{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}, \text{ کدام است؟}$$

$$\frac{1}{6} \quad (4)$$

$$\frac{1}{12} \quad (3)$$

$$-\frac{1}{12} \quad (2)$$

$$-\frac{1}{6} \quad (1)$$

۱۵

نکته: هرگاه زیر رادیکال صفر شد، نمی توان از قاعدة هوپیتال استفاده کرد.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - \sqrt[3]{x+6}}{\sqrt{x^2 - 4x + 4}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - \sqrt[3]{x+6}}{|x-2|} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - \sqrt[3]{x+6}}{x-2} = \underset{\circ}{\underset{\circ}{\text{Hop}}} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{\sqrt[3]{(x+6)^2}} = -\frac{1}{12}$$

سراسری تجربی ۹۳ - خارج از کشور

$$\text{تابع با ضابطه} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1 + \cos x}}{x - \pi}, & \pi < x \leq 2\pi \\ a \cos \frac{2x}{3}, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

به ازای کدام مقدار a در نقطه $x = \pi$ پیوسته است؟

$$\sqrt{2} \quad (4)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (3)$$

$$-\sqrt{2} \quad (2)$$

$$-2\sqrt{2} \quad (1)$$

۱۶

نکته: هرگاه بخواهیم پیوستگی تابع را در یک بازه بررسی کنیم، پیوستگی تابع را در شکستگی دامنه مورد بررسی قرار می دهیم.

بسمه تعالیٰ

سوالات ریاضی سال سوم تجربی (فصل ۳ - حد و پیوستگی) تهیّه و تنظیم: سید علی موسوی

$$f(\pi) = \lim_{x \rightarrow \pi} f(x) \quad f(\pi) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = a \cos \frac{2\pi}{3} = a \cos(\pi - \frac{\pi}{3}) = -a \cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}a$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sqrt{2} \cos \frac{x}{2}}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sqrt{2} \left| \cos \frac{x}{2} \right|}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{-\sqrt{2} \cos \frac{x}{2}}{x - \pi} = \frac{\circ}{\circ} \xrightarrow{\text{Hop}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{-\sqrt{2} \times (-\frac{1}{2}) \sin \frac{x}{2}}{1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad -\frac{1}{2}a = \frac{\sqrt{2}}{2} \longrightarrow a = -\sqrt{2}$$

سراسری تجربی ۹۲

اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax + 9}{1 - x + \sqrt{x+1}} = 3$ باشد، آنگاه حد این کسر وقتی $x \rightarrow 3$ کدام است؟

۱۷

۵ (۴)

۴ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax + 9}{1 - x + \sqrt{x+1}} = 3 \longrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax}{-x} = 3 \longrightarrow a = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-3x + 9}{1 - x + \sqrt{x+1}} = \frac{\circ}{\circ} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-3}{-1 + \frac{1}{2\sqrt{x+1}}} = \frac{-3}{-1 + \frac{1}{4}} = 4$$

سراسری تجربی ۹۲

به ازای کدام مقدار a ، تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} 3x - [x] & , \quad x < 2 \\ a & , \quad x = 2 \\ x + 2 & , \quad x > 2 \end{cases}$ پیوسته است؟

۱۸

۴ (۴) هیچ مقدار a

۵ (۳)

۴/۵ (۲)

۱ (۱)

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \quad f(2) = a \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2 + 2 = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (3x - [2^-]) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (3x - 1) = 6 - 1 = 5 \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$$

سراسری تجربی ۹۲ - خارج از کشور

حد عبارت $\frac{x+2}{x^2 - 2x} + \frac{2[x]}{2-x}$ وقتی $x \rightarrow 2^-$ کدام است؟ (نماد جزء صحیح است)

۱۹

$+\infty$ (۴)

۱ (۳)

$-\frac{1}{2}$ (۲)

$-\infty$ (۱)

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{x+2}{x^2 - 2x} + \frac{2[x]}{2-x} \right) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{x+2}{x^2 - 2x} + \frac{2[2^-]}{2-x} \right) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{x+2}{x^2 - 2x} - \frac{2}{x-2} \right) = \infty - \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{x+2}{x^2 - 2x} - \frac{2}{x-2} \right) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+2-2x}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x+2}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-1}{x} = -\frac{1}{2}$$

سراسری تجربی ۹۲ - خارج از کشور

به ازای کدام مقدار a ، تابع با ضابطه

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{2x-\pi}, & x \neq \frac{\pi}{2} \\ a, & x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

۱ (۴)

$\frac{1}{2}$ (۳)

۰ (۲)

-۱ (۱)

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{2x-\pi} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2\cos 2x}{2} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos 2x = -1 \quad (1)$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = a \quad (2)$$

$$(1), (2) \longrightarrow a = -1$$

سراسری تجربی ۹۱

حاصل کدام است؟

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{x^2}$$

$\frac{3}{2}$ (۴)

۱ (۳)

$\frac{1}{2}$ (۲)

$-\frac{1}{2}$ (۱)

روش اول:

$$\cos u \xrightarrow{u \rightarrow 0} 1 - \frac{u^2}{2} \longleftrightarrow 1 - \cos u \xrightarrow{u \rightarrow 0} \frac{u^2}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{x^2} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Hop}} \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) - \left(1 - \frac{4x^2}{2}\right)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3x^2}{2}}{x^2} = \frac{3}{2}$$

$$\cos^n u \xrightarrow{u \rightarrow 0} 1 - \frac{u^2}{2} \times n \quad : \text{نکته}$$

$$\cos 2x \approx 1 - \frac{(2x)^2}{2} = 1 - \frac{4x^2}{2}$$

روش دوم:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos x - \cos 2x}{x^2} = \frac{0}{\infty} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\sin x + 2\sin 2x}{2x} = \frac{0}{\infty}$$

$$\xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\cos x + 4\cos 2x}{2} = \frac{-1+4}{2} = \frac{3}{2}$$

سراسری تجربی ۹۱

نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{ax+1+\sqrt{4x^2+9}}{3x-2}$ از نقطه $(2,1)$ می‌گذرد، کدام است؟

۱) ۴

$\frac{2}{3}$ (۳)

$\frac{1}{3}$ (۲)

$-\frac{1}{3}$ (۱)

$$f(x) = \frac{ax+1+\sqrt{4x^2+9}}{3x-2} \xrightarrow{(2,1)} 1 = \frac{2a+1+9}{6-2} \rightarrow 2a+6=4 \rightarrow a=-1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x+1+\sqrt{4x^2+9}}{3x-2} = \frac{\infty}{\infty} \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x+|2x|}{3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x+2x}{3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}$$

سراسری تجربی ۹۱

به ازای کدام مقدار a ، تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax - 5 & , x > 2 \\ ax - 1 & , x \leq 2 \end{cases}$ روی \mathbb{R} پیوسته است؟

$a=2$ (۴)

$a=-2$ (۳) فقط

۱) هر مقدار حقیقی a هیچ مقدار a (۲)

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \quad f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2a - 1 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4 + 2a - 5 = 2a - 1 \quad (2) \quad \xrightarrow{(1),(2)} 2a - 1 = 2a - 1 \rightarrow a \in \mathbb{R}$$

سراسری تجربی ۹۱ - خارج از کشور

حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{\cos 2x}$ کدام است؟

۱) ۴

$\frac{1}{2}$ (۳)

$-\frac{1}{2}$ (۲)

-1 (۱)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{\cos 2x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 + \tan^2 x}{-2 \sin 2x} = \frac{1+1}{-2} = -1$$

سراسری تجربی ۹۱ - خارج از کشور

در تابع با ضابطه $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{2}{3}$ ، اگر $f(x) = \frac{ax^n - 3x + 1}{3x^2 + x}$ کدام است؟

۳ (۴)

۲ (۳)

$\frac{3}{2}$ (۲)

-۲ (۱)

۲۵

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^n - 3x + 1}{3x^2 + x} = \frac{2}{3} \longrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^n}{3x^2} = \frac{2}{3} \longrightarrow \begin{cases} n = 2 \\ a = 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{3x^2 + x} \longrightarrow f(-1) = \frac{2+3+1}{3-1} = 3$$

سراسری تجربی ۹۱ - خارج از کشور

اگر تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} ax + b & , x > 2 \\ x^2 + bx - 1 & , x < 2 \end{cases}$ بر روی \mathbb{R} پیوسته باشد، a کدام است؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

-۱ (۱)

۲۶

$$f(2) = 5 \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2b + 3 \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2a + b$$

$$2b + 3 = 5 \longrightarrow b = 1 \quad 2a + b = 5 \xrightarrow{b=1} a = 2$$

سراسری تجربی ۹۰

در تابع با ضابطه $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{1}{2}$ ، اگر $f(x) = \frac{3 - \sqrt{x^2 + 5}}{ax^n + 4}$ کدام است؟

$\frac{3}{2}$ (۴)

$\frac{3}{4}$ (۳)

$\frac{2}{3}$ (۲)

$\frac{1}{3}$ (۱)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - \sqrt{x^2 + 5}}{ax^n + 4} = \frac{1}{2} \longrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-|x|}{ax^n} = \frac{1}{2} \longrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{ax^n} = \frac{1}{2} \longrightarrow \begin{cases} n = 1 \\ a = -2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3 - \sqrt{x^2 + 5}}{-2x + 4} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-\frac{2x}{\sqrt{x^2 + 5}}}{-2} = \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

۲۷

سراسری تجربی ۹۰

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2 + x - 2|}{x-1} & , x \neq 1 \\ a & , x = 1 \end{cases}$$

تابع با ضابطه $f(x)$ ، به ازای کدام مقدار a ، بر روی \mathbb{R} پیوسته است ؟

a هیچ مقدار

۳ (۳)

-۳ (۲)

۱) هر مقدار a

۲۸

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \quad f(1) = a$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^2 + x - 2|}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|(x+2)(x-1)|}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2)|(x-1)|}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2)|(x-1)|}{x-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x+2)|(x-1)|}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x+2)(x-1)}{(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+2) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x+2)|(x-1)|}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x+2)(x-1)}{(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} -(x+2) = -3$$

سراسری تجربی ۹۰ - خارج از کشور

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x} \text{ کدام است ؟}$$

۲ (۴)

۱ (۳)

$\frac{1}{2}$ (۲)

$\frac{1}{4}$ (۱)

روش اول :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \sin^2 x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

روش دوم :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - (1 - \frac{4x^2}{2})}{x \times x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

سراسری تجربی ۹۰ - خارج از کشور

$$f(x) = \begin{cases} a \sin 2x & , \frac{\pi}{4} \leq x < \frac{3\pi}{4} \\ \cos(x + \frac{\pi}{4}) & , \frac{3\pi}{4} \leq x < 2\pi \end{cases}$$

تابع با ضابطه $f(x)$ در نقطه $x = \frac{3\pi}{4}$ پیوسته است ، a کدام است ؟

۱ (۴)

$-\frac{1}{2}$ (۳)

۲) صفر

-۱ (۱)

۳۰

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \lim_{x \rightarrow (\frac{3\pi}{4})^+} f(x) = \cos\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos \pi = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{3\pi}{4})^-} f(x) = a \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = a \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -a \quad -a = -1 \longrightarrow a = 1$$

سراسری تجربی ۸۹

$$\text{حاصل} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\cos x}{1 - \sin x}, \text{ کدام است؟}$$

۳۱

$-\infty$ (۴)

$+\infty$ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\cos x}{1 - \sin x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{-\sin x}{-\cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$$

سراسری تجربی ۸۹

$$f(x) = \begin{cases} a + \sin 3x & , 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ b \cos 2x & , \frac{\pi}{2} < x \leq 2\pi \end{cases}$$

تابع با ضابطه $a + \sin 3x$ در بازه $[0, 2\pi]$ پیوسته است،

۳۲

$a - b$ کدام است؟

۵ (۴)

۴ (۳)

-۴ (۲)

-۵ (۱)

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} f(x) = b \cos \pi = -b$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} f(x) = a + \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = a - 1$$

$$\begin{cases} -b = 2 \longrightarrow b = -2 \\ a - 1 = 2 \longrightarrow a = 3 \end{cases} \longrightarrow a - b = 5$$

سراسری تجربی ۸۹ - خارج از کشور

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \text{ باشد، آنگاه} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3, \text{ اگر} f(x) = \frac{2x - \sqrt{x^2 + 6x}}{ax - 2} \text{ کدام است؟}$$

۳۳

$\frac{3}{2}$ (۴)

$\frac{3}{4}$ (۳)

$\frac{2}{3}$ (۲)

۰ (۱)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - \sqrt{x^2 + 6x}}{ax - 2} = 3 \longrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - |x|}{ax} = 3 \longrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{ax} = 3 \longrightarrow a = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - \sqrt{x^2 + 6x}}{x - 2} = \underset{\circ}{\circ} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \frac{2x + 6}{2\sqrt{x^2 + 6x}}}{1} = \lim_{x \rightarrow 2} \left(2 - \frac{x + 3}{\sqrt{x^2 + 6x}} \right) = 2 - \frac{5}{4} = \frac{3}{4}$$

سراسری تجربی ۸۹ - خارج از کشور

تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x - 2}, & x > 2 \\ 2x + b, & x \leq 2 \end{cases}$ است؟

۳۴ ۴ (۴) ۲ (۳) -۲ (۲) -۴ (۱)

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 4 + b$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x - 2} = \underset{\circ}{\circ} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x^2 - 6x}{1} = \circ \quad 4 + b = \circ \longrightarrow b = -4$$

سراسری تجربی ۸۸

حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{\tan^2 x - 1}{\cos 2x}$ کدام است؟

۳۵ ۲ (۴) ۱ (۳) $\frac{1}{2}$ (۲) -۲ (۱)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{\tan^2 x - 1}{\cos 2x} = \underset{\circ}{\circ} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{(2)(1)(1 + \tan^2 x)(\tan x)}{-2 \sin 2x} = \frac{(2)(1+1)(-1)}{-2(-1)} = -2$$

سراسری تجربی ۸۸

تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x + 1}, & |x| > 1 \\ 2x, & |x| \leq 1 \end{cases}$ است؟

۳۶ ۲) در (-1) ناپیوسته - در (1) ناپیوسته
 ۳) در (-1) پیوسته - در (1) پیوسته

۲) در (-1) ناپیوسته - در (1) پیوسته

۱) در (-1) ناپیوسته - در (1) ناپیوسته

۴) در (-1) پیوسته - در (1) ناپیوسته

۳) در (-1) پیوسته - در (1) پیوسته

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x + 1}, & x > 1 \text{ or } x < -1 \\ 2x, & -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$x = 1 \longrightarrow f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \quad f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \infty \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

$$x = -1 \longrightarrow f(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) \quad f(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{2x}{1} = -2$$

سراسری تجربی ۸۸ - خارج از کشور

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{2 - \sqrt{5-x}} \text{ حاصل کدام است؟}$$

۴ (۴)

۲ (۳)

-۲ (۲)

-۴ (۱)

۳۷

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{2 - \sqrt{5-x}} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{-\frac{-1}{2\sqrt{5-x}}} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = -2$$

سراسری تجربی ۸۸ - خارج از کشور

$$f(x) = \begin{cases} a + \sin^2 x, & 0 \leq x < \frac{\pi}{4} \\ \sqrt{2} \cos 3x, & \frac{\pi}{4} \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

به ازای کدام مقدار a ، تابع با ضابطه

است؟

۴) هیچ مقدار a

$\frac{1}{2}$ (۳)

$-\frac{1}{2}$ (۲)

$-\frac{3}{2}$ (۱)

۳۸

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^+} f(x) = \sqrt{2} \cos \frac{3\pi}{4} = \sqrt{2} \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^-} f(x) = a + \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = a + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = a + \frac{1}{2} \quad a + \frac{1}{2} = -1 \longrightarrow a = -\frac{3}{2}$$

سراسری تجربی ۸۷

در تابع با ضابطه $f(x) = (x+a)[x]$ ، عدد حقیقی a کدام است؟

۰ (۴)

-۱ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = (2+a)(2) = 4+2a$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = (2+a)(1) = 2+a$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3 \longrightarrow 4+2a - 2-a = 3 \longrightarrow a = 1$$

۳۹

سراسری تجربی ۸۷

در تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{x - \sqrt{2x}}{2-x} & , x \neq 2 \\ a & , x = 2 \end{cases}$ ، به ازای کدام مقدار a در نقطه $x=2$ پیوسته است؟

۱ (۴)

$-\frac{1}{2}$ (۳)

-۱ (۲)

-۲ (۱)

۴۰

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

$$f(2) = a$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{2x}}{2-x} = \frac{\circ}{\circ} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - \frac{2}{2\sqrt{2x}}}{-1} = -\frac{1}{2} \quad a = -\frac{1}{2}$$

نکته: توجه داشته باشیم که در این تابع ، نیازی به محاسبه جداگانه حدود چپ و راست نیست.

سراسری تجربی ۸۷ - خارج از کشور

حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan x}{\sin(x - \frac{\pi}{4})}$ ، کدام است؟

۲ (۴)

۱ (۳)

-۱ (۲)

-۲ (۱)

۴۱

$$\sin(x - \frac{\pi}{4}) \approx x - \frac{\pi}{4} \quad \text{بنابراین} \quad x - \frac{\pi}{4} \xrightarrow{\circ} x \xrightarrow{\circ} \frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan x}{\sin(x - \frac{\pi}{4})} = \frac{\circ}{\circ} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-(1 + \tan^2 x)}{\cos(x - \frac{\pi}{4})} = \frac{-(1+1)}{1} = -2$$

سراسری تجربی ۸۷ - خارج از کشور

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+a}, & x \geq -1 \\ x^2 + ax, & x < -1 \end{cases}$$

به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، تابع با ضابطه

۴۲

\mathbb{R} (۴)

\emptyset (۳)

$\{1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}\}$ (۲)

$\{1, \sqrt{2}\}$ (۱)

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x)$$

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \frac{1}{-1+a}$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = 1-a$$

$$\frac{1}{-1+a} = 1-a \longrightarrow (1-a)^2 = -1 \xrightarrow{\Delta < 0} \emptyset$$

سراسری تجربی ۸۶

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = k \text{ ، حاصل } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sin \pi x}{1-x} - g(x) \right) = \circ \text{ و } \frac{\sin \pi x}{1-x} \leq f(x) \leq g(x) \text{ در بازه } \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right]$$

کدام است؟

π (۴)

$\frac{\pi}{2}$ (۳)

\circ (۲)

$-\pi$ (۱)

نکته: (قضیه فشردگی) اگر در بازه $[a, b]$ اعداد $f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = k$ و $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ باشند، آن‌گاه

$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = k$ اگر g در همسایگی محدود x_0 تعریف شده باشد، آن‌گاه k عدد منحصر به فرد است.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sin \pi x}{1-x} - g(x) \right) = \circ \longrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sin \pi x}{1-x} \right) - \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \circ \longrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sin \pi x}{1-x} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{1-x} = \frac{\circ}{\circ} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\pi \cos \pi x}{-1} = -\pi \cos \pi = \pi$$

سراسری تجربی ۸۶

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{1-\cos x}, & x > \circ \\ a \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right), & x \leq \circ \end{cases}$$

تابع با ضابطه

۴۴

۴) هر مقدار a

۳) هیچ مقدار a

۴) (۲)

۲) (۱)

$$f(\circ) = \lim_{x \rightarrow \circ^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \circ^+} f(x)$$

$$f(\circ) = \lim_{x \rightarrow \circ^-} f(x) = a \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}a$$

$$\lim_{x \rightarrow \circ^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \circ^+} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} = \frac{\circ}{\circ} \longrightarrow \lim_{x \rightarrow \circ^+} \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow \circ^+} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{1 - \cos x} = 2$$

$$\frac{1}{2}a = 2 \longrightarrow a = 4$$

در اینجا می‌توان از هم ارزی نیز استفاده کرد.

سراسری تجربی ۸۶ - خارج از کشور

$$\text{حاصل} , \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{4x^2 + 9x}}{3x + \sqrt{x}}$$

۴۵

$$\frac{2}{3} (4)$$

$$\frac{1}{3} (3)$$

$$-\frac{1}{4} (2)$$

$$-\frac{1}{3} (1)$$

نکته: (هم ارزی رادیکالی)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{4x^2 + 9x}}{3x + \sqrt{x}} = \frac{\infty}{\infty} \longrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - |2x|}{3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 2x}{3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{3x} = -\frac{1}{3}$$

سراسری تجربی ۸۶ - خارج از کشور

$$\text{تابع با ضابطه } f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1} & , x > 1 \\ ax - a + 3 & , x \leq 1 \end{cases}$$

به ازای کدام مقدار a ، در نقطه $x = 1$ پیوسته است؟

۴۶

۴) هر مقدار a

۳) هیچ مقدار a

۲) فقط

۱) فقط

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = a - a + 3 = 3 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1} = \frac{\circ}{\circ} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4x - 1}{1} = 3 \quad (2)$$

(1),(2) $\longrightarrow a \in \mathbb{R}$

بنابراین تابع f همواره در $x = 1$ پیوسته است و پارامتر a ، هر مقدار دلخواهی می‌تواند باشد.

سراسری تجربی ۸۵

$$\text{حاصل } \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{4x-8} - \frac{1}{x^2-4} \right), \text{ کدام است؟}$$

۴۷

$$\frac{1}{16} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{8} \quad (۳)$$

$$\frac{3}{16} \quad (۲)$$

$$\frac{3}{8} \quad (۱)$$

نکته: به منظور رفع ابهام $\infty - \infty$ ، مخرج مشترک می‌گیریم.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{4x-8} - \frac{1}{x^2-4} \right) = \infty - \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{4(x-2)} - \frac{1}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2-4}{4(x-2)(x+2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)}{4(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{4(x+2)} = \frac{1}{16}$$

سراسری تجربی ۸۵

$$\text{تابع با ضابطه } f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{2x+|x|}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}, \text{ چگونه است؟}$$

(۲) از چپ پیوسته - از راست ناپیوسته

(۱) از چپ پیوسته - از راست پیوسته

(۴) از چپ ناپیوسته - از راست ناپیوسته

(۳) از چپ ناپیوسته - از راست پیوسته

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

$$f(0) = 1 \quad (۱)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{2x+|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{3x} = \frac{1}{3} \quad (۲)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{2x+|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{2x-x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (۳)$$

$$(۱), (۳) \longrightarrow f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$$

سراسری تجربی ۸۵ - خارج از کشور

$$\text{حاصل } \lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{2x + \sqrt{3-x}}{x^2+x}, \text{ کدام است؟}$$

$$\frac{5}{4} \quad (۴)$$

$$\frac{3}{4} \quad (۳)$$

$$-\frac{1}{4} \quad (۲)$$

$$-\frac{7}{4} \quad (۱)$$

۴۹

نکته: هرگاه در محاسبه حدود کسری به عبارت مبهم $\frac{0}{0}$ برسیم، از قاعده هوپیتال استفاده می‌کنیم. یعنی از صورت

و مخرج کسر به طور جداگانه مشتق گرفته و حد کسر حاصل را می‌یابیم.

$$\lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{2x + \sqrt{3-x}}{x^3 + x} = \frac{\circ}{\circ} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{2 + \frac{-1}{2\sqrt{3-x}}}{2x + 1} = -\frac{1}{4}$$

سراسری تجربی ۸۵ - خارج از کشور

اگر تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{x^3 + x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ همواره روی \mathbb{R} پیوسته باشد، a کدام است؟

۵۰

۲ (۴)

۱ (۳)

$\frac{2}{3}$ (۲)

\circ (۱)

$$f(\circ) = \lim_{x \rightarrow \circ} f(x)$$

$$f(\circ) = a \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \circ} f(x) = \lim_{x \rightarrow \circ} \frac{\sin 2x}{x^3 + x} = \frac{\circ}{\circ} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow \circ} \frac{2\cos 2x}{3x^2 + 1} = 2 \quad (2)$$

$$(1), (2) \longrightarrow a = 2$$

سراسری تجربی ۸۴

حد کسر $\frac{x^{m+3} + nx + m}{mx^{n-2} - mx + n - 1}$ با شرط $n > 3$ ، وقتی $x \rightarrow +\infty$ برابر (-2) است. $m+n$ کدام است؟

۵۱

۵ (۴)

$4/5$ (۳)

۴ (۲)

$3/5$ (۱)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{m+3} + nx + m}{mx^{n-2} - mx + n - 1} = -2 \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{m+3}}{mx^{n-2}} = -2 \rightarrow \begin{cases} m+3 = n-2 \rightarrow n = m+5 \\ \frac{1}{m} = -2 \rightarrow m = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$n = \frac{9}{2}$$

$$m+n = -\frac{1}{2} + \frac{9}{2} = 4$$

سراسری تجربی ۸۴

تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4, & x \geq 1 \\ ax + 5x - a, & x < 1 \end{cases}$ به ازای کدام مجموعه مقادیر a در بازه $[-2, 2]$ پیوسته است؟

۵۲

$\{-2, 2\}$ (۴)

$\{0, 1\}$ (۳)

\mathbb{R} (۲)

\emptyset (۱)

نکته: در تعیین پیوستگی توابع دو یا چند ضابطه ای، ابتدا پیوستگی تابع را در هر یک از ضابطه ها یافته و سپس پیوستگی تابع را در مرز ناحیه بررسی می کنیم.

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$$

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -1 + 4 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = a + 5 - a = 5$$

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \longrightarrow \emptyset$$

سراسری تجربی ۸۴ - خارج از کشور

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a & , x < -2 \\ 3x + 4 & , x > -2 \end{cases}$$

در تابع با ضابطه $f(x)$ مقدار حد چپ در نقطه $x = -2$ عکس مقدار حد راست در این نقطه است، مقدار a کدام است؟

۵۳

$-\frac{9}{2}$ (۴)

-۴ (۳)

$\frac{7}{2}$ (۲)

۳ (۱)

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = 4 + a$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = -2$$

$$4 + a = -\frac{1}{2} \longrightarrow a = -\frac{9}{2}$$

سراسری تجربی ۸۴ - خارج از کشور

$$\text{حاصل} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{\sin^2 x}, \text{ کدام است؟}$$

$\frac{1}{4}$ (۴)

$\frac{1}{2}$ (۳)

۳ (۲)

∞ (۱)

روش اول:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos^2 x} \times \frac{1 + \sqrt{\cos x}}{1 + \sqrt{\cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)(1 + \sqrt{\cos x})}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(1 + \cos x)(1 + \sqrt{\cos x})} = \frac{1}{(1 + 1)(1 + 1)} = \frac{1}{4}$$

$$\sqrt[n]{1 \pm u} \approx (1 \pm \frac{u}{n})$$

$$(1 \pm u)^n \approx 1 \pm nu \quad \text{وقتی } u \rightarrow 0 \quad \text{داریم: } u \longrightarrow 0$$

روش دوم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{x^2}{2}}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - \frac{x^2}{4})}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{4}}{x^2} = \frac{1}{4}$$

سراسری تجربی ۸۴ - خارج از کشور

$$x = 1 \quad \text{و} \quad f(x) = \begin{cases} x + 1 & , x < 1 \\ a & , x \geq 1 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x + a & , x < 1 \\ 1 & , x \geq 1 \end{cases}$$

اگر $f + g$ تابع به ازای کدام مقدار a پیوسته است؟

۵۵

۲ (۴)

-۲ (۳)

۴ (۲)

-۴ (۱)

$$(f+g)(x) = \begin{cases} 2x + a + 1 & , \quad x < 1 \\ \frac{a}{x+1} + 1 & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$$

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{a}{2} + 1 \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = a + 3 \quad \frac{a}{2} + 1 = a + 3 \longrightarrow a = -4$$

سراسری تجربی ۸۳

حاصل ، کدام است ؟ $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\tan \pi x}{|x^2 - 1|}$

۵۶

π (۴) $\frac{\pi}{2}$ (۳) $-\frac{\pi}{2}$ (۲) $-\pi$ (۱)

چون $|x^2 - 1| = x^2 - 1$ و لذا $x^2 - 1 > 0$ بنابراین داریم :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\tan \pi x}{|x^2 - 1|} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\tan \pi x}{x^2 - 1} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\pi(1 + \tan^2 \pi x)}{2x} = \frac{\pi(1 + 0)}{2} = \frac{\pi}{2}$$

روش اول :

روش دوم :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\tan \pi x}{x^2 - 1} = \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-\tan(\pi - \pi x)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-(\pi - \pi x)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\pi(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{\pi}{2}$$

سراسری تجربی ۸۳

مجموعه طول نقاط ناپیوستگی نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sqrt{5x^2 - 4x} & , \quad |x| > 1 \\ 2x - 1 & , \quad |x| \leq 1 \end{cases}$ کدام است ؟

\emptyset (۴) $\{-1\}$ (۳) $\{1\}$ (۲) $\{-1, 1\}$ (۱)

نکته : برای تعیین نقاط ناپیوستگی توابع دو ضابطه ای ، ابتدا تعداد نقاط ناپیوستگی هر یک از توابع را در دسته آن ها تعیین کرده و سپس پیوستگی را در مرز ناحیه مشخص می کنیم .

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{5x^2 - 4x} & , \quad x > 1 \text{ or } x < -1 \\ 2x - 1 & , \quad -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

۵۷

if $x = 1 \longrightarrow f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 - 1 = 1$ (۱)

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \sqrt{5 - 4} = 1$ (۲) (۱), (۲) $\longrightarrow f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

بسمه تعالیٰ

سوالات ریاضی سال سوم تجربی (فصل ۳ - حد و پیوستگی) تهیّه و تنظیم: سید علی موسوی

$$\text{if } x = -1 \rightarrow f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) \quad f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -3 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \sqrt{5+4} = 3 \quad (2)$$

$$(1), (2) \rightarrow f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$$

سراسری تجربی ۸۲

$$\text{حاصل ، کدام است ؟ } \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}^-} \frac{1 + \cot x}{1 + \tan x}$$

∞ (۴)

۱ (۳)

\circ (۲)

-۱ (۱)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}^-} \frac{1 + \cot x}{1 + \tan x} = \frac{1 + (-1)}{1 + (-1)} = \frac{\circ}{\circ} \rightarrow \text{مجهول}$$

روش اول :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}^-} \frac{1 + \cot x}{1 + \tan x} = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}^-} \frac{1 + \frac{1}{\tan x}}{1 + \tan x} = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}^-} \frac{\tan x + 1}{1 + \tan^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}^-} \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{\tan \frac{3\pi}{4}} = -1$$

روش دوم :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}^-} \frac{1 + \cot x}{1 + \tan x} = \frac{\circ}{\circ} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}^-} \frac{-(1 + \cot^2 x)}{1 + \tan^2 x} = \frac{-(1+1)}{1+1} = -1$$

دقت کنید در این تست نمی توانستیم از هم ارزی های مثلثاتی استفاده کنیم.

سراسری تجربی ۸۲

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - \sqrt{x}} & , x > 1 \\ ax - a + 4 & , x \leq 1 \end{cases} \quad \text{تابع } f \text{ با ضابطه } \mathbb{R} \text{ پیوسته است ؟}$$

a = ۴ (۴) فقط

a = \circ (۳) فقط

(۲) هر مقدار حقیقی a

(۱) هیچ مقدار a

تابع f در \mathbb{R} پیوسته است پس در نقطه مرزی $x = 1$ نیز پیوسته می باشد . بنابراین داریم :

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \quad f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = a - a + 4 = 4 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - \sqrt{x}} = \frac{\circ}{\circ} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x}{1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}} = 4 \quad (2) \quad (1), (2) \rightarrow a \in \mathbb{R}$$

چون $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = 4$ و مقدار a هیچ تاثیری در پیوستگی تابع در $x = 1$ ندارد، پس به ازای هر مقدار حقیقی a ، تابع در \mathbb{R} پیوسته است. توجه داشته باشید که تابع f در سایر نقاط \mathbb{R} پیوسته است.

سراسری تجربی ۸۱

$$\text{حاصل } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{2x+1}}{2 - \sqrt{x}}$$

$$\frac{3}{2} \quad (4)$$

$$\frac{4}{3} \quad (3)$$

$$\frac{3}{4} \quad (2)$$

$$\frac{2}{3} \quad (1)$$

۶۰

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{2x+1}}{2 - \sqrt{x}} = \underset{\circ}{\underset{\circ}{\text{Hop}}} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-\frac{2\sqrt{2x+1}}{1}}{-\frac{2\sqrt{x}}{1}} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{2x+1}} = \frac{4}{3}$$

سراسری تجربی ۸۱

$$f(x) = \begin{cases} \sin x + 2\cos x & , \quad 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ -\cos 2x & , \quad \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases} \quad \text{تابع با ضابطه}$$

۶۱

$$X = \frac{\pi}{2} \quad \text{چگونه است؟}$$

۲) از چپ ناپیوسته - از راست ناپیوسته

۱) از چپ ناپیوسته - از راست پیوسته

۴) از چپ پیوسته - از راست ناپیوسته

۳) از چپ ناپیوسته - از راست ناپیوسته

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} (\sin x + 2\cos x) = \sin \frac{\pi}{2} + 2\cos \frac{\pi}{2} = 1 + 0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} (-\cos 2x) = -(\cos \pi) = -(-1) = 1$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} f(x) = 1$$

به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} (x+a)^2 & , \quad x \geq -1 \\ 2x+1 & , \quad x < -1 \end{cases}$ حد دارد؟

$$\mathbb{R} \quad (4)$$

$$\emptyset \quad (3)$$

$$\{2\} \quad (2)$$

$$\{0\} \quad (1)$$

۶۲

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x+a)^r = (-1+a)^r \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (2x+1) = -1 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} (-1+a)^r = -1 \longrightarrow \emptyset$$

سراسری تجربی ۸۰

$$\text{حاصل} \lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{x + \sqrt{x+2}}{x^r + 1}, \text{ کدام است؟}$$

۲ (۴)

-۲ (۳)

$\frac{1}{2}$ (۲)

$-\frac{1}{2}$ (۱)

$$\lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{x + \sqrt{x+2}}{x^r + 1} = \frac{\circ}{\circ} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{1 + \frac{1}{2\sqrt{x+2}}}{3x^r} = \frac{1 + \frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{2}$$

سراسری تجربی ۷۹

$$\text{حد عبارت} \xrightarrow{x \rightarrow -2} \frac{x + \sqrt{2x+8}}{x+2} \text{ وقتی } x \rightarrow -2 \text{ برابر کدام است؟}$$

$\frac{3}{2}$ (۴)

$\frac{2}{3}$ (۳)

$-\frac{2}{3}$ (۲)

$-\frac{3}{2}$ (۱)

۶۳

۶۴

روش اول: صورت و مخرج کسر را گویا می کنیم یعنی صورت و مخرج کسر را در مزدوج صورت ضرب می کنیم.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + \sqrt{2x+8}}{x+2} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^r - (2x+8)}{(x+2)(x - \sqrt{2x+8})} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x-4)}{(x+2)(x - \sqrt{2x+8})} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x-4)}{(x - \sqrt{2x+8})} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

روش دوم:

$$\lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{x + \sqrt{2x+8}}{x+2} = \frac{\circ}{\circ} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{1 + \frac{2}{2\sqrt{2x+8}}}{1} = \lim_{x \rightarrow (-1)} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2x+8}}\right) = \frac{3}{2}$$

سراسری تجربی ۷۹

تعداد نقاط ناپیوستگی تابع با ضابطه $f(x) = \frac{|x|}{1+|x|}$ در مجموعه اعداد حقیقی کدام است؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

۰ (۱)

۶۵

روش اول: توابع کسری در نقاطی به طول های ریشه های مخرج ناپیوسته می باشند.

$$f(x) = \frac{|x|}{1+|x|} \longrightarrow 1+|x|=0 \longrightarrow |x|=-1 \longrightarrow \text{معادله جواب ندارد.}$$

چون مخرج کسر ریشه ندارد ، تابع نقطه ناپیوستگی ندارد .

روش دوم:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{|x|}{1+|x|} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{|x|}{1+|x|} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{x}{1+x} = \frac{a}{1+a}$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{|x|}{1+|x|} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{-x}{1-x} = \frac{-a}{1-a}$$

$$\frac{a}{1+a} = \frac{-a}{1-a} \longrightarrow \frac{1}{1+a} = \frac{-1}{1-a} \longrightarrow 1-a = -1-a \longrightarrow 1 \neq -1$$

سراسری تجربی ۷۸

۶۶

حدّ عبارت $\left(\frac{x^2}{x+1} - \frac{x^2+x}{x-1} \right)$ وقتی $x \rightarrow +\infty$ برابر کدام است ؟

۱ (۴)

۰ (۳)

-۲ (۲)

-۳ (۱)

نکته: برای رفع ابهام $\infty - \infty$ ، مخرج مشترک می‌گیریم .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x+1} - \frac{x^2+x}{x-1} \right) = \infty - \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2(x-1) - (x^2+x)(x+1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x^2 - x^3 - 2x^2 - x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^2 - x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^2}{x^2} = -3$$

سراسری تجربی ۷۸

۶۷

حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} [(x \sin(x + \frac{\pi}{6}))]$ کدام است ؟

۱ (۴)

$\frac{1}{2}$ (۳)

۰ (۲)

$-\frac{1}{2}$ (۱)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [(x \sin(x + \frac{\pi}{6}))] = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \times \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin(x + \frac{\pi}{6}) = 0 \times \frac{1}{2} = 0$$

نتیجه قضیه فشردگی: اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ کران دار باشد در این صورت

سراسری تجربی ۷۸

۶۸

تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{x-|x|}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ به ازای کدام مجموعه مقادیر a در $x = 0$ پیوسته است ؟

{۰, ۲} (۴)

{۲} (۳)

\emptyset (۲)

{۰} (۱)

$$f(0) = a \quad (۱)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-|x|}{x} \quad (۲)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-x}{x} = 0 \quad (۲)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+x}{x} = 2 \quad (۳)$$

$$(۱), (۲), (۳) \longrightarrow \emptyset$$

برای این که تابع در $x = \infty$ پیوسته باشد باید $\lim_{x \rightarrow \infty^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty^-} f(x) = f(\infty)$ باشد که به ازای هیچ مقدار a این شرط برقرار نمی شود. زیرا اصلاً تابع در این نقطه حد ندارد.

سراسری تجربی ۷۸

$$\text{اگر } \lim_{x \rightarrow (-3)} \frac{ax + 3a}{1 - \sqrt{5x + 16}} = 2 \text{ باشد، آنگاه } a \text{ کدام است؟}$$

-۵ (۴)

-۳ (۳)

۳ (۲)

۵ (۱)

$$\lim_{x \rightarrow (-3)} \frac{ax + 3a}{1 - \sqrt{5x + 16}} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow (-3)} \frac{a}{\frac{-5}{2\sqrt{5x + 16}}} = 2 \xrightarrow{\frac{a}{-\frac{5}{2}} = 2} a = -5$$

سراسری تجربی ۷۷

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-x + |x - 2|}{x - 1}, & x \neq 1 \\ a, & x = 1 \end{cases} \quad \text{تابع با ضابطه} \quad \text{به ازای کدام مقدار } a, \text{ در نقطه } x = 1 \text{ پیوسته است؟}$$

۲ (۴)

۱ (۳)

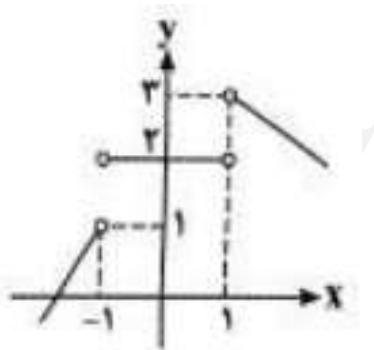
-۱ (۲)

-۲ (۱)

$$f(1) = a \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x + |x - 2|}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x - x + 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2x + 2}{x - 1} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2}{1} = -2$$

سراسری تجربی ۷۶

با توجه به شکل مقابل $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x)$ کدام است؟



-۱ (۲)

-۲ (۱)

۱ (۴)

۲ (۳)

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = 1 - 1 = 0$$

نکته: اگر x یک نقطه انتهایی دامنه f باشد، یعنی f فقط در یک طرف x تعریف شده باشد، به طوری که در x فقط حد راست یا حد چپ وجود داشته باشد، در این حالت حد راست یا حد چپ همان حد تابع است.

سراسری تجربی ۷۶

$$\text{حد عبارت } \frac{\cos(\frac{\pi}{2} + x)}{x^2 - 2x}, \text{ وقتی } x \rightarrow 0, \text{ کدام است؟}$$

۱) ۴

$$\frac{1}{2} \quad (3)$$

$$-\frac{1}{2} \quad (2)$$

-۱) ۱

۷۲

نکته: (قاعدۀ کم توان): چند جمله‌ای‌های جبری، وقتی متغیر به سمت صفر میل می‌کند، هم ارز با جمله‌ای از کوچک ترین درجه آن دارد.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} + x)}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{x^2 - 2x} = \frac{1}{2}$$

هم ارزی‌های بُرنولی:

الف) اگر u تابعی از x بوده و $\lim_{x \rightarrow a} u = 0$ باشد، آن‌گاه: $\lim_{x \rightarrow a} (1 \pm u)^n = \lim_{x \rightarrow a} 1 \pm nu$

ب) اگر u تابعی از x بوده و $\lim_{x \rightarrow a} u = 0$ باشد، آن‌گاه: $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{1 \pm u} = \lim_{x \rightarrow a} 1 \pm \frac{u}{n}$

نکته: استفاده از هم ارزی در صورتی که منجر به صفر مطلق شود، اشتباه است که در این حالت بایستی از هم ارزی

$$\sin u \approx u - \frac{u^3}{6} \quad \tan u \approx u + \frac{u^3}{3}$$

کامل‌تر استفاده کنیم.

نکته: برای محاسبه‌ی حد‌هایی به صورت $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)}$ که منجر به عبارت مبهم 1^∞ می‌شوند، ابتدا با محاسبه $k = \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - 1) \times g(x)$ حاصل حد برابر با e^k خواهد بود.

همکاران و دانش آموزان عزیز قبل از مطالعه هزینه‌این جزوات را پرداخت کنید و هزینه آن یک صلووات و یک فاتحه برای روح پدرم است.

با تشکر: سید علی موسوی

خواهشمند است پیشنهادات و نظرات خود را به آدرس تلگرام (۰۹۱۵۳۲۱۵۶۱۴) و یا به ایمیل seyedalimousavi48@gmail.com ارسال فرمائید. با تشکر