

سراسری تجربی ۹۶

مشتق تابع $y = 2 \cos^2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4}\right)$ به ازای $x = \frac{\pi}{6}$ کدام است؟

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴)

$\frac{\sqrt{2}}{4}$ (۳)

$-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲)

$-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۱)

$y = \cos^2 u \rightarrow y' = -2 \times u' \times \sin u \times \cos u \rightarrow y = \cos^2 u \rightarrow y' = -u' \sin 2u$

$y = 2 \cos^2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4}\right) \rightarrow y' = -2 \times \left(-\frac{1}{4}\right) \sin 2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4}\right) \rightarrow y' = \left(\frac{1}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{2}\right)$

$y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{1}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{12}\right) = \left(\frac{1}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

سراسری تجربی ۹۶ - خارج از کشور

مشتق تابع $y = \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}$ به ازای $x = \frac{\pi}{4}$ کدام است؟

۲ (۴)

۱ (۳)

۲ (۲)

-۱ (۱)

با استفاده از مشتق عامل صفر:

$y = (\cos x - \sin x) \times \frac{1}{\cos x + \sin x} \quad y' = (-\sin x - \cos x) \times \frac{1}{\cos x + \sin x}$

$y' = -(\sin x + \cos x) \times \frac{1}{(\cos x + \sin x)} = -1$

روش دوم: شبیه هموگرافیک:

$y = \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} \div \cos x \rightarrow y = \frac{-\tan x + 1}{\tan x + 1} \rightarrow y' = \frac{-1 - 1}{(1 + 1)^2} \times (1 + \tan^2 x)$

$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{-2}{(1+1)^2} \times (1+1) = -1$

سراسری تجربی ۹۵

در تابع با ضابطه $f(x) = \left(\sqrt{\frac{x+2}{2x-3}}\right)^3$ حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ کدام است؟

۱۵ (۴)

۱۲ (۳)

-۱۸ (۲)

-۲۱ (۱)

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2) \quad \text{or} \quad \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x) - 0}{1} = \lim_{x \rightarrow 2} f'(x) = f'(2)$

$$f(x) = \left(\sqrt{\frac{x+2}{2x-3}} \right)^3 \rightarrow u = \frac{x+2}{2x-3} \rightarrow u' = \frac{-3-4}{(2x-3)^2} = \frac{-7}{(2x-3)^2} \rightarrow u'(2) = -7$$

$$f'(x) = (\sqrt{u})^3 \rightarrow f'(x) = 3 \times \frac{u'}{2\sqrt{u}} \times u \rightarrow f'(2) = 3 \times \frac{-7}{4} \times 4 = -21$$

سراسری تجربی ۹۵ - خارج از کشور

در تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{\frac{4x+5}{x+3}}$ کدام است؟

$\frac{7}{16}$ (۴)

$\frac{7}{24}$ (۳)

$\frac{5}{24}$ (۲)

$\frac{7}{48}$ (۱)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(1+h) - 0}{1} = f'(1) \quad y = \frac{ax+b}{cx+d} \rightarrow y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{4x+5}{x+3}} \rightarrow u = \frac{4x+5}{x+3} \rightarrow u' = \frac{12-5}{(x+3)^2} = \frac{7}{(x+3)^2} \rightarrow u'(1) = \frac{7}{16}$$

$$f(x) = \sqrt{u} \rightarrow f'(x) = \frac{u'}{2\sqrt{u}} \rightarrow f'(1) = \frac{\frac{7}{16}}{2 \times \frac{3}{4}} = \frac{7}{48}$$

سراسری تجربی ۹۴

در تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به متغیر x در نقطه $1 = x$ با نمود تغییر $0/21$ از آهنگ لحظه ای تابع در این نقطه، چقدر کمتر است؟

$\frac{2}{21}$ (۴)

$\frac{3}{42}$ (۳)

$\frac{1}{21}$ (۲)

$\frac{1}{42}$ (۱)

$$f(x) = \sqrt{x} \rightarrow x = 1, \Delta x = 0/21$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1/21) - f(1)}{0/21} = \frac{1/21 - 1}{0/21} = \frac{0/1}{0/21} = \frac{10}{21}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \rightarrow f'(1) = \frac{1}{2}$$

$$f'(1) - \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{2} - \frac{10}{21} = \frac{1}{42}$$

سراسری تجربی ۹۴ - خارج از کشور

در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به متغیر x ، در نقطه $x=1$ با نمو متغیر

۶ / ۴۴ از آهنگ لحظه‌ای تابع در این نقطه ، چقدر کمتر است؟

$\frac{1}{6}$ (۴)

$\frac{1}{12}$ (۳)

$\frac{1}{24}$ (۲)

$\frac{1}{30}$ (۱)

$f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}} \rightarrow x=1 , \Delta x = 0/44$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1/44)-f(1)}{0/44} = \frac{\frac{44}{120}-1}{0/44} = \frac{\frac{44}{120}}{\frac{44}{100}} = \frac{100}{120} = \frac{5}{6}$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}(x-1)}{x} \rightarrow f'(1) = 1$$

$f'(1) - \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$

سراسری تجربی ۹۳

در تابع با ضابطه $f(x) = (2x+1)^{-\frac{1}{2}}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع ، از $x=4$ تا $x=12$ ، از آهنگ لحظه‌ای آن در نقطه $x=4$ چقدر بیشتر است؟

$\frac{11}{270}$ (۴)

$\frac{7}{270}$ (۳)

$\frac{11}{540}$ (۲)

$\frac{7}{540}$ (۱)

$f(x) = (2x+1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} \quad x_1 = 4 , \quad x_2 = 12$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(12)-f(4)}{12-4} = \frac{\frac{1}{5}-\frac{1}{3}}{8} = -\frac{1}{60}$$

$$f'(x) = -\frac{2}{2\sqrt{2x+1}} \rightarrow f'(4) = -\frac{1}{9} = -\frac{1}{27}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) = -\frac{1}{60} - \left(-\frac{1}{27}\right) = \frac{-27+60}{1620} = \frac{33}{1620} = \frac{11}{540}$$

سراسری تجربی ۹۳

مشتق تابع $y = 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{4}\right)$ به ازای $x = \frac{\pi}{3}$ کدام است؟

$-\frac{1}{8}$ (۴)

$-\frac{1}{4}$ (۳)

$-\frac{1}{2}$ (۲)

$-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۱)

$$y = \sin^r u \rightarrow y' = r \times u' \times \cos u \times \sin u \longrightarrow y = \sin^r u \longrightarrow y' = u' \sin r u$$

$$y = 2 \sin^r \left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4} \right) \longrightarrow y' = 2 \times \left(-\frac{1}{4} \right) \sin \left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4} \right) \longrightarrow y' = \left(-\frac{1}{2} \right) \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{2} \right)$$

$$y' \left(\frac{\pi}{3} \right) = \left(-\frac{1}{2} \right) \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) = \left(-\frac{1}{2} \right) \sin \left(\frac{\pi}{6} \right) = \left(-\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{4}$$

سراسری تجربی ۹۳ - خارج از کشور

در تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع از نقطه $x = 4$ تا $x = 6/25$ ، از آهنگ لحظه‌ای آن در نقطه $x = 4$ چقدر کمتر است؟

$$\frac{1}{12} \quad (4)$$

$$\frac{5}{72} \quad (3)$$

$$\frac{1}{18} \quad (2)$$

$$\frac{1}{36} \quad (1)$$

$$f(x) = \sqrt{x} \quad x_1 = 4, \quad x_2 = 6/25$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(6/25) - f(4)}{6/25 - 4} = \frac{2/5 - 2}{2/25} = \frac{2}{9}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \rightarrow f'(4) = \frac{1}{4}$$

$$f'(x) - \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{4} - \frac{2}{9} = \frac{9-8}{36} = \frac{1}{36}$$

سراسری تجربی ۹۳ - خارج از کشور

مشتق تابع $y = \sin^r \sqrt{2x}$ به ازای $x = \frac{\pi}{18}$ کدام است؟

$$\frac{27}{4\pi} \quad (4)$$

$$\frac{27}{8\pi} \quad (3)$$

$$\frac{9}{4\pi} \quad (2)$$

$$\frac{9}{8\pi} \quad (1)$$

$$y = \sin^r \sqrt{2x} \longrightarrow y' = r \times \frac{1}{2\sqrt{2x}} \times \cos \sqrt{2x} \times \sin^r \sqrt{2x}$$

$$y' \left(\frac{\pi}{18} \right) = r \times \frac{1}{\pi} \times \cos \frac{\pi}{3} \times \sin^r \frac{\pi}{3} = r \times \frac{1}{\pi} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{27}{8\pi}$$

سراسری تجربی ۹۱

مقدار مشتق تابع $f(x) = \frac{1 - \cos^r x}{2 - \sin^r x}$ به ازای $x = \frac{\pi}{4}$ کدام است؟

$$\frac{8}{9} \quad (4)$$

$$\frac{7}{9} \quad (3)$$

$$\frac{5}{9} \quad (2)$$

$$\frac{4}{9} \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{au + b}{cu + d} \longrightarrow f'(x) = \frac{ad - bc}{(cu + d)^2} \times u'$$

مشتق با استفاده از شبه هموگرافیک:

$$f(x) = \frac{1 - \cos^2 x}{2 - \sin^2 x} = \frac{\sin^2 x + 1}{-\sin^2 x + 2} \rightarrow f(x) = \frac{2 - 1}{(-\sin^2 x + 2)^2} \times \sin 2x$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{(2 - \frac{1}{2})^2} \times 1 = \frac{8}{9}$$

سراسری تجربی ۹۱ - خارج از کشور

مقدار مشتق تابع $f(x) = \sqrt{1 + \tan^2 \frac{1}{x}}$ به ازای $x = \frac{3}{\pi}$ کدام است؟

$$\frac{2\pi^2 \sqrt{3}}{9} \quad (4)$$

$$\frac{2\pi^2}{9} \quad (3)$$

$$-\frac{2\pi^2}{9} \quad (2)$$

$$-\frac{2\pi^2 \sqrt{3}}{9} \quad (1)$$

۱۲

روش اول:

$$f(x) = \sqrt{1 + \tan^2 \frac{1}{x}} \rightarrow f(x) = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \frac{1}{x}}} = \frac{1}{\cos \frac{1}{x}} \quad y = \frac{1}{x} \rightarrow y' = \frac{-1}{x^2} \rightarrow f'(x) = \frac{\frac{-1}{x^2} \times \sin \frac{1}{x}}{\cos^2 \frac{1}{x}}$$

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} \times \tan \frac{1}{x} \times \frac{1}{\cos \frac{1}{x}} \rightarrow f'\left(\frac{3}{\pi}\right) = -\frac{\pi^2}{9} \times \tan \frac{\pi}{3} \times \frac{1}{\cos \frac{\pi}{3}} = -\frac{2\sqrt{3}\pi^2}{9}$$

روش دوم:

$$f(x) = \sqrt{1 + \tan^2 \frac{1}{x}} \rightarrow u = 1 + \tan^2 \frac{1}{x} \rightarrow u' = 2 \times \left(\frac{-1}{x^2}\right) \times (1 + \tan^2 \frac{1}{x}) \times \tan \frac{1}{x}$$

$$u\left(\frac{3}{\pi}\right) = 1 + \tan^2 \frac{\pi}{3} = 1 + 3 = 4 \quad u'\left(\frac{3}{\pi}\right) = 2 \times \left(\frac{-\pi^2}{9}\right) \times (4) \times \tan \frac{\pi}{3} = \left(\frac{-8\pi^2}{9}\right) \times \sqrt{3}$$

$$f(x) = \sqrt{u} \rightarrow f'(x) = \frac{u'}{2\sqrt{u}} \rightarrow f'\left(\frac{3}{\pi}\right) = \frac{\left(\frac{-8\pi^2}{9}\right) \times \sqrt{3}}{2 \times 2} = \frac{-2\sqrt{3}\pi^2}{9}$$

سراسری تجربی ۹۰

در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{36}{x^2}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع از $x_1 = 2$ تا $x_2 = 3$ چقدر از آهنگ لحظه‌ای آن در

$x = \sqrt[3]{12}$ بیشتر است؟

$$2/5 \quad (4)$$

$$2 \quad (3)$$

$$1/5 \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

۱۳

$$f(x) = \frac{36}{x^2} \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 3$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{4 - 9}{1} = -5$$

$$f'(x) = \frac{-2x(36)}{x^4} = \frac{-72}{x^3} \rightarrow f'(\sqrt[3]{12}) = \frac{-72}{12} = -6$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) = -5 - (-6) = 1$$

سراسری تجربی ۹۰

مقدار مشتق تابع $y = \cos^r(\frac{\pi}{3} + \frac{x}{4})$ به ازای $x = \frac{\pi}{3}$ کدام است؟

$$\frac{1}{4} \quad (4)$$

$$\frac{1}{8} \quad (3)$$

$$-\frac{1}{8} \quad (2)$$

$$-\frac{1}{4} \quad (1)$$

$$y = \cos^r u \rightarrow y' = -r \times u' \times \sin u \times \cos u \rightarrow y = \cos^r u \rightarrow y' = -u' \sin ru$$

$$y = \cos^r(\frac{\pi}{3} + \frac{x}{4}) \rightarrow y' = -(\frac{1}{4}) \sin r(\frac{\pi}{3} + \frac{x}{4}) \rightarrow y' = (-\frac{1}{4}) \sin(\frac{2\pi}{3} + \frac{x}{2})$$

$$y'(\frac{\pi}{3}) = (-\frac{1}{4}) \sin(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6}) = (-\frac{1}{4}) \sin(\frac{5\pi}{6}) = (-\frac{1}{4}) \sin(\pi - \frac{\pi}{6}) = (-\frac{1}{4}) \sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{8}$$

سراسری تجربی ۹۰ - خارج از کشور

در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x}{x-1}$ ، آهنگ متوسط از $x_1 = 2$ تا $x_2 = 5$ برابر آهنگ لحظه‌ای آن در $x = a$ است،

مقدار a کدام است؟

$$4 \quad (4)$$

$$3 \quad (3)$$

$$1 + \sqrt{3} \quad (2)$$

$$2/5 \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{x}{x-1} \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 5$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{\frac{5}{4} - \frac{2}{3}}{3} = \frac{-1}{4}$$

$$f'(x) = \frac{-1 - 0}{(x-1)^2} \rightarrow f'(a) = \frac{-1}{(a-1)^2}$$

$$\frac{-1}{(a-1)^2} = \frac{-1}{4} \rightarrow (a-1)^2 = 4 \rightarrow (a-1) = \pm 2 \rightarrow a = 3, \quad a = -1$$

سراسری تجربی ۹۰ - خارج از کشور

مقدار مشتق تابع $y = \cos^2 \frac{\pi}{3x}$ به ازای $x = 4$ ، کدام است؟

$\frac{\pi}{32}$ (۴)

$\frac{\pi}{48}$ (۳)

$\frac{\pi}{72}$ (۲)

$\frac{\pi}{96}$ (۱)

$$y = \cos^2 u \rightarrow y' = -2 \times u' \times \sin u \times \cos u \rightarrow y = \cos^2 u \rightarrow y' = -u' \sin 2u$$

$$y = \cos^2 \frac{\pi}{3x} \rightarrow y' = -\left(\frac{-\pi}{3x}\right) \sin \frac{2\pi}{3x} \rightarrow y' = \frac{\pi}{3x} \sin \frac{2\pi}{3x}$$

$$y'(4) = \frac{\pi}{48} \sin \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{48} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{48} \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{96}$$

سراسری تجربی ۸۹

اندازه مشتق تابع $y = \frac{1 - \tan 2x}{1 + \tan 2x}$ به ازای $x = \frac{\pi}{4}$ ، کدام است؟

۱ (۴)

$\frac{1}{2}$ (۳)

-۱ (۲)

-۲ (۱)

روش اول:

$$y = \frac{1 - \tan 2x}{1 + \tan 2x} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) \rightarrow y' = -2 \times \left[1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)\right]$$

$$y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2 \times \left[1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right)\right] = -2$$

روش دوم: شبہ هموگرافیک

$$y = \frac{1 - \tan 2x}{1 + \tan 2x} = \frac{-\tan 2x + 1}{\tan 2x + 1} \rightarrow y' = \frac{-1 - 1}{(\tan 2x + 1)^2} \times (2)(1 + \tan^2 2x)$$

$$y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{-4}{(\tan \frac{\pi}{4} + 1)^2} \times (1 + \tan^2 \frac{\pi}{4}) = \frac{-4}{(1+1)^2} \times (1+1) = -2$$

روش سوم: مشتق عامل صفر

$$y = \frac{1 - \tan 2x}{1 + \tan 2x} = (1 - \tan 2x) \times \frac{1}{1 + \tan 2x}$$

$$y' = -2(1 + \tan^2 2x) \times \frac{1}{1 + \tan 2x} \rightarrow y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2(1+1) \times \frac{1}{1+1} = -2$$

سراسری تجربی ۸۹ - خارج از کشور

$$\text{مقدار مشتق تابع } y = \frac{1 + \cos 2x}{\cos 2x} \text{، به ازای } x = \frac{\pi}{12} \text{ کدام است؟}$$

$$\frac{4}{3} \quad (4)$$

$$\frac{3}{4} \quad (3)$$

$$-\frac{3}{4} \quad (2)$$

$$-\frac{4}{3} \quad (1)$$

۱۸

مشتق با استفاده از شبه هموگرافیک:

$$y = \frac{1 + \cos 2x}{\cos 2x} = \frac{\cos 2x + 1}{\cos 2x + 0} \rightarrow y' = \frac{0 - 1}{\cos^2 2x} \times (-2 \sin 2x) = \frac{2}{\cos^2 2x} \times \sin 2x$$

$$y'\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{2}{\cos^2 \frac{\pi}{6}} \times \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

سراسری تجربی ۸۸

آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x) = \sqrt{x^2 + 16}$ نسبت به متغیر x روی بازه $[0, 3]$ ، از آهنگ لحظه‌ای تابع در

$$x = \sqrt{2} \text{، چقدر کمتر است؟}$$

$$\frac{1}{9} \quad (4)$$

$$\frac{1}{12} \quad (3)$$

$$\frac{1}{18} \quad (2)$$

$$0 \quad (1)$$

۱۹

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 16}$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 3$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 16}} \rightarrow f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 16}}$$

$$f'(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}} = \sqrt{\frac{2}{18}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$$

سراسری تجربی ۸۸

اگر $u = \sin^2 x - \cos 2x$ و $y = \sqrt{2u} - \frac{1}{u}$ باشد، مقدار $\frac{dy}{dx}$ به ازای $x = \frac{\pi}{4}$ کدام است؟

$$15 \quad (4)$$

$$12 \quad (3)$$

$$10 \quad (2)$$

$$9 \quad (1)$$

۲۰

$$x = \frac{\pi}{4} \rightarrow u = \sin^2 \frac{\pi}{4} - \cos^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \left(\frac{2}{2\sqrt{2u}} - \frac{-1}{u^2} \right) \times (2\cos x \sin x + 2\sin^2 x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{\sqrt{2u}} + \frac{1}{u^2} \right) \times (2\sin^2 x) \quad y'(\frac{\pi}{4}) = (1+4) \times (2\sin^2 \frac{\pi}{4}) = 15$$

سراسری تجربی ۸۸ - خارج از کشور

در تابع $f(x) = \frac{x}{x-1}$ آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به متغیر x ، از آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در $x=2$ ، چقدر بیشتر است ؟

$$\frac{2}{51} \quad (4)$$

$$\frac{1}{51} \quad (3)$$

$$\frac{1}{101} \quad (2) \quad \frac{1}{202} \quad (1)$$

۲۱

$$f(x) = \frac{x}{x-1} \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 2/02$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2/02) - f(2)}{2/02 - 2} = \frac{\frac{1}{51} - 2}{\frac{1}{02} - 2} = \frac{\frac{-1}{51}}{\frac{-1}{02}} = \frac{-5^{\circ}}{51}$$

$$f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} \rightarrow f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}$$

$$f'(2) = \frac{-1}{(2-1)^2} = -1$$

$$\frac{-5^{\circ}}{51} - (-1) = \frac{-5^{\circ}}{51} + 1 = \frac{1}{51}$$

سراسری تجربی ۸۸ - خارج از کشور

اگر $x = \frac{1}{4}$ باشد ، آنگاه مقدار $y = \tan^2(\pi u)$ و $u = x + \sqrt{x}$ به ازای کدام است ؟

$$8\pi \quad (4)$$

$$4\pi \quad (3)$$

$$-4\pi \quad (2)$$

$$-8\pi \quad (1)$$

۲۲

$$x = \frac{1}{4} \rightarrow u = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} \rightarrow \frac{dy}{dx} = 2\pi(1 + \tan^2 \pi u)(\tan \pi u) \times (1 + \frac{1}{2\sqrt{x}})$$

$$y'(\frac{1}{4}) = 2\pi(1 + \tan^2 \frac{3\pi}{4})(\tan \frac{3\pi}{4}) \times (1 + \frac{1}{1}) = 2\pi(1 + 1)(-1) \times (2) = -8\pi$$

سراسری تجربی ۸۷

در تابع $f(x) = \sqrt{x}$ آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به متغیر روی بازه $[2/25, 2/56]$ از آهنگ آنی، در شروع این بازه، چقدر کمتر است؟

۱/۳۱ (۴)

۱/۶۲ (۳)

۲/۹۳ (۲)

۱/۹۳ (۱)

$$f(x) = \sqrt{x} \quad x_1 = 2/25, \quad x_2 = 2/56$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2/56) - f(2/25)}{2/56 - 2/25} = \frac{1/6 - 1/5}{0/31} = \frac{0/1}{0/31} = \frac{10}{31}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \rightarrow f'(2/25) = \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} - \frac{10}{31} = \frac{31 - 30}{93} = \frac{1}{93}$$

۲۳

سراسری تجربی ۸۷ - خارج از کشور

در تابع با ضابطه $f(x) = x^3$ ، آهنگ متوسط تغییر این تابع وقتی $\Delta x = 0/1$ و $x = 0/3$ از آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در نقطه $x = 3$ ، چقدر بیشتر است؟

۰/۹۱ (۴)

۰/۶۲ (۳)

۰/۴۲ (۲)

۰/۳۱ (۱)

$$f(x) = x^3 \rightarrow x = 3, \quad \Delta x = 0/1$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3/1) - f(3)}{0/1} = \frac{(3/1)^3 - (3)^3}{0/1} = \frac{(3/1 - 3)(3/1^2 + 9/3 + 9)}{0/1} = 27/91$$

$$f'(x) = 3x^2 \rightarrow f(3) = 27 \quad 27/91 - 27 = 0/91$$

۲۴

سراسری تجربی ۸۶

در تابع با ضابطه $f(x) = x + \frac{1}{x}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع وقتی متغیر از عدد ۲ به عدد $2+h$ تغییر کند،

برابر $\frac{h}{9}$ است. h ، کدام است؟

۳ (۴)

۲/۵ (۳)

۲ (۲)

۱/۵ (۱)

نکته: آهنگ متوسط تغییر تابع f در بازه $[x_1, x_2]$ برابر است با:

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 2+h, \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{h}{9}$$

۲۵

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{x+h + \frac{1}{x+h} - x - \frac{1}{x}}{h} = \frac{h + \frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h}$$

$$\frac{h + \frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \frac{\frac{h}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \frac{h}{9} + \frac{\frac{1}{9}}{x+h} - \frac{\frac{1}{9}}{x} = h + \frac{\frac{1}{9}}{x+h} - \frac{\frac{1}{9}}{x} = 0 \rightarrow 2h^2 - 9h = 0 \rightarrow \begin{cases} h = \frac{9}{2} \\ h = 0 \end{cases}$$

سراسری تجربی ۸۶

مقدار مشتق تابع $y = \tan^3 x - \cot 2x$ کدام است؟

۴ (۴)

$\frac{8}{3}$

۲ (۲)

$\frac{4}{3}$

۲۶

$$y = \tan^3 x - \cot 2x \rightarrow y' = 3(1)(1 + \tan^2 x)(\tan x) + 2(1 + \cot^2 2x)$$

$$y'(\frac{\pi}{6}) = 3(1 + \tan^2 \frac{\pi}{6})(\tan \frac{\pi}{6}) + 2(1 + \cot^2 \frac{\pi}{3}) = 3(1 + \frac{1}{3})(\frac{1}{3}) + 2(1 + \frac{1}{3}) = 4$$

سراسری تجربی ۸۶ - خارج از کشور

مقدار مشتق $x = \frac{\pi}{4}$ در نقطه $y = \sin x \cos 3x$ کدام است؟

۲ (۴)

۱ (۳)

-۱ (۲)

-۲ (۱)

۲۷

روش اول:

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

$$y = \sin x \cos 3x = \frac{1}{2} [\sin 4x - \sin 2x] \rightarrow y' = \frac{1}{2} [4 \cos 4x - 2 \cos 2x]$$

$$y'(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2} [4 \cos \pi - 2 \cos \frac{\pi}{2}] = \frac{1}{2} [4(-1) - 2(0)] = -2$$

$$y = \sin x \cos 3x \rightarrow y' = \cos x \cos 3x - 3 \sin 3x \sin x$$

$$y'(\frac{\pi}{4}) = \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{3\pi}{4} - 3 \sin \frac{3\pi}{4} \sin \frac{\pi}{4} = (\frac{\sqrt{2}}{2})(-\frac{\sqrt{2}}{2}) - 3(\frac{\sqrt{2}}{2})(\frac{\sqrt{2}}{2}) = -2$$

روش دوم:

سراسری تجربی ۸۶ - خارج از کشور

در تابع با ضابطه $f(x) = 3x^2 + 4x - 2$ تفاضل آهنگ لحظه‌ای در نقطه $a + \frac{h}{2}$ از آهنگ متوسط تغییر تابع

۲۸

وقتی متغیر x از عدد a به عدد $a + h$ تغییر کند، کدام است؟

۰ (۴)

۳h (۳)

۲h (۲)

h (۱)

$$f(x) = 3x^2 + 4x - 2 \quad x_1 = a, \quad x_2 = a + h \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{3(a+h)^2 + 4(a+h) - 2 - 3a^2 - 4a + 2}{h} = 6h + 6a + 4$$

$$f'(x) = 6x + 4 \rightarrow f'(a + \frac{h}{2}) = 6(a + \frac{h}{2}) + 4 = 6a + 3h + 4$$

سراسری تجربی ۸۵

اگر $f'(x) = \sqrt{2} \sin \pi x^2$ باشد، آنگاه $\frac{1}{\sqrt{6}}$ کدام است؟

$\pi\sqrt{3}$ (۴)

$\pi\sqrt{2}$ (۳)

$\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$ (۲)

$\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$ (۱)

$$f(x) = \sqrt{2} \sin \pi x^2 \rightarrow u = \sqrt{2} \sin \pi x^2 \rightarrow u' = 4\pi x \cos \pi x^2$$

$$u(\frac{1}{\sqrt{6}}) = \sqrt{2} \sin \pi(\frac{1}{\sqrt{6}})^2 = 1 \quad u'(\frac{1}{\sqrt{6}}) = 4\pi(\frac{1}{\sqrt{6}}) \cos \pi(\frac{1}{\sqrt{6}})^2 = \pi\sqrt{2}$$

$$f(x) = \sqrt{u} \rightarrow f'(x) = \frac{u'}{2\sqrt{u}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

سراسری تجربی ۸۵ - خارج از کشور

اندازه مشتق تابع با ضابطه $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \sqrt{3 + 2 \cos \frac{\pi}{x}}$ به ازای $x = 3$ کدام است؟

$\frac{1}{4}$ (۴)

$\frac{1}{6}$ (۳)

$\frac{1}{9}$ (۲)

$\frac{1}{12}$ (۱)

$$f(x) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \sqrt{3 + 2 \cos \frac{\pi}{x}} \rightarrow u = 3 + 2 \cos \frac{\pi}{x} \rightarrow u' = \frac{2\pi}{x^2} \sin \frac{\pi}{x}$$

$$u(3) = 3 + 2 \cos \frac{\pi}{3} = 3 + 1 = 4 \quad u'(3) = \frac{2\pi}{9} \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\pi\sqrt{3}}{9}$$

$$f(x) = \sqrt{u} \rightarrow f'(x) = \frac{u'}{2\sqrt{u}} = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \times \frac{\frac{2\pi}{9}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{12}$$

سراسری تجربی ۸۴

آهنگ متوسط تغییر تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x^2 + 144}$ نسبت به متغیر x روی بازه ای از $x_1 = 5$ تا $x_2 = 9$ کدام است؟

۰/۷ (۴)

۰/۶ (۳)

۰/۵ (۲)

۰/۴ (۱)

۲۹

۳۰

۳۱

نکته: آهنگ متوسط تغییر تابع پیوسته f در بازه $[a, b]$ برابر است با :

$$f(x) = f(x) = \sqrt{x^2 + 144} \quad x_1 = 5, \quad x_2 = 9$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(9) - f(5)}{9 - 5} = \frac{15 - 13}{4} = \frac{1}{2}$$

سراسری تجربی ۸۴ - خارج از کشور
نقطه $M(x, y) = \sqrt{x^2 + 8}$ بر روی منحنی به معادله $y = \sqrt{x + 8}$ در حرکت است. T فاصله نقطه M تا مبدأ مختصات است، آهنگ لحظه‌ای تغییر T در نقطه $x = 7$ کدام است؟

۳۲

$$\frac{5}{4} \quad (4)$$

$$\frac{3}{7} \quad (3)$$

$$\frac{15}{8} \quad (2)$$

$$\frac{15}{16} \quad (1)$$

$$M(x, \sqrt{x+8}) \quad O(0, 0) \quad T(x) = OM = \sqrt{x_M^2 + y_M^2} = \sqrt{x^2 + x + 8}$$

$$T'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+8}} \rightarrow T'(7) = \frac{15}{16}$$

سراسری تجربی ۸۴ - خارج از کشور

اگر $f(x) = (x-2)\sqrt[3]{x^2}$ ، حاصل $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(-1+\Delta x) - f(-1)}{\Delta x}$ کدام است؟

$$\frac{4}{3} \quad (4)$$

$$\frac{2}{3} \quad (3)$$

$$3 \quad (2)$$

$$2 \quad (1)$$

۳۳

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(-1+\Delta x) - f(-1)}{\Delta x} = f'(-1) \quad f(x) = (x-2)\sqrt[3]{x^2}$$

$$f'(x) = (1)\sqrt[3]{x^2} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}(x-2) \rightarrow f'(-1) = (1) + (-\frac{2}{3})(-3) = 3$$

سراسری تجربی ۸۳

در تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع وقتی متغیر x از ۴ به ۲۵ تغییر کند برابر با آهنگ لحظه‌ای در نقطه $x = a$ است. a کدام است؟

$$13/5 \quad (4)$$

$$12/5 \quad (3)$$

$$12/25 \quad (2)$$

$$11/75 \quad (1)$$

نکته: آهنگ متوسط تغییرات بین دو نقطه $(A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ روی منحنی عبارتست از

۳۴

و آهنگ لحظه‌ای در نقطه a به طول $f'(a)$ برابر است با

$$f(x) = \sqrt{x} \quad x_1 = 4, \quad x_2 = 25$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(25) - f(4)}{25 - 4} = \frac{5 - 2}{21} = \frac{1}{7}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \rightarrow f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{a}} = \frac{1}{7} \rightarrow 2\sqrt{a} = 7 \rightarrow 4a = 49 \rightarrow a = \frac{49}{4} = 12 + \frac{1}{4} = 12/25$$

سراسری تجربی ۸۳

مقدار مشتق تابع $y = \sin^3 \sqrt{x}$ در نقطه $x = \frac{\pi}{9}$ چقدر است؟

$$\frac{27}{8\pi} \quad (4)$$

$$\frac{27}{16\pi} \quad (3)$$

$$\frac{9}{8\pi} \quad (2)$$

$$\frac{9}{16\pi} \quad (1)$$

۳۵

$$y = \sin^3 \sqrt{x} \longrightarrow y' = 3 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \times \cos \sqrt{x} \times \sin^2 \sqrt{x}$$

$$y'\left(\frac{\pi}{9}\right) = 3 \times \frac{3}{2\pi} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{27}{16\pi}$$

سراسری تجربی ۸۲

اگر $y = \cos \sqrt{2}x + \sin \sqrt{2}x$ باشد، حاصل $\frac{y''}{y}$ برابر کدام است؟

$$2 \quad (4)$$

$$\sqrt{2} \quad (3)$$

$$-\sqrt{2} \quad (2)$$

$$-2 \quad (1)$$

۳۶

$$y = \cos \sqrt{2}x + \sin \sqrt{2}x \rightarrow y' = -\sqrt{2} \sin \sqrt{2}x + \sqrt{2} \cos \sqrt{2}x$$

$$y'' = -2 \cos \sqrt{2}x - 2 \sin \sqrt{2}x = -2(\cos \sqrt{2}x + \sin \sqrt{2}x)$$

$$\frac{y''}{y} = \frac{-2(\cos \sqrt{2}x + \sin \sqrt{2}x)}{\cos \sqrt{2}x + \sin \sqrt{2}x} = -2$$

سراسری تجربی ۸۲

اگر $x = \sqrt{2}x$ و $f(x) = x^2 - x$ باشد، حاصل $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2 + \Delta x)g(2 + \Delta x) - f(2)g(2)}{\Delta x}$ برابر کدام است؟

۳۷

$$4 \quad (4)$$

$$6 \quad (3)$$

$$4 \quad (2)$$

$$3 \quad (1)$$

اگر فرض کنیم $h(x) = f(x) \cdot g(x) = (f \cdot g)(x)$ آنگاه داریم:

$$h(x) = f(x) \cdot g(x) \rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2 + \Delta x) \cdot g(2 + \Delta x) - f(2) \cdot g(2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{h(2 + \Delta x) - h(2)}{\Delta x} = h'(2)$$

$$h(x) = (x^2 - x) \cdot \sqrt{2x} \rightarrow h'(x) = (2x - 1)(\sqrt{2x}) + \left(\frac{2}{\sqrt{2x}}\right)(x^2 - x) \rightarrow h'(2) = 7$$

سراسری تجربی ۸۱

مشتق تابع $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ در نقطه $x = 1$ برابر ۳ است. اگر $f(1) = 0$ و $g'(1) = -4$ موجود باشد،

مقدار $g(1)$ کدام است؟

$\frac{4}{3} \quad (4)$

$\frac{3}{4} \quad (3)$

$-\frac{3}{4} \quad (2)$

$-\frac{4}{3} \quad (1)$

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{g^2(x)} \xrightarrow{y'(1)=3} \frac{f'(1) \cdot g(1) - g'(1) \cdot f(1)}{g^2(1)} = 3$$

$$\xrightarrow{f'(1)=-4 \quad f(1)=0} \frac{-4 \cdot g(1) - g'(1) \cdot 0}{g^2(1)} = 3 \rightarrow \frac{-4 \cdot g(1)}{g^2(1)} = 3 \rightarrow 3 \cdot g(1) = -4 \rightarrow g(1) = -\frac{4}{3}$$

سراسری تجربی ۸۱

اگر $f(x) = \sqrt{\frac{3x-1}{2x+1}}$ باشد، آنگاه $f'(2)$ کدام است؟

$\frac{1}{5} \quad (4)$

$\frac{1}{10} \quad (3)$

$-\frac{1}{10} \quad (2)$

$-\frac{1}{5} \quad (1)$

$$f(x) = \sqrt{\frac{3x-1}{2x+1}} \rightarrow u = \frac{3x-1}{2x+1} \rightarrow u' = \frac{3+2}{(2x+1)^2} = \frac{5}{(2x+1)^2} \rightarrow u'(2) = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$$

$$u(2) = 1 \quad f(u) = \sqrt{u} \rightarrow f'(u) = \frac{u'}{2\sqrt{u}} \rightarrow f'(2) = \frac{1}{2} = \frac{1}{10} = 0.1$$

سراسری تجربی ۸۰

اگر $x = \frac{\pi}{12}$ و $f(x) = \sin 2x$ و $g(x) = \sqrt{x}$ باشد، مقدار مشتق تابع gof در $x = \frac{\pi}{12}$ کدام است؟

$\sqrt{\frac{2}{3}} \quad (4)$

$\sqrt{\frac{3}{4}} \quad (3)$

$\sqrt{\frac{4}{3}} \quad (2)$

$\sqrt{\frac{3}{2}} \quad (1)$

۴۰

$$y = (gof)(x) = g(f(x)) \rightarrow y' = f'(x) \times g'(f(x))$$

$$f(x) = \sin 2x \rightarrow f'(x) = 2\cos 2x \quad g(x) = \sqrt{x} \rightarrow g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y'\left(\frac{\pi}{12}\right) = f'\left(\frac{\pi}{12}\right) \times g'\left(f\left(\frac{\pi}{12}\right)\right) = 2\cos \frac{\pi}{6} \times g'\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

سراسری تجربی ۸۰

اگر تابع f در x_0 مشتق پذیر و -2 باشد، مقدار $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h}$ $= -2$ کدام است؟

-۲ (۴)

۲ (۳)

۲ + $f(x_0)$ (۲)۲ - $f(x_0)$ (۱)

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{-h} \xrightarrow{-h = \Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'_+(x_0) = -2$$

می دانیم $\Delta x = -h$ است، حال اگر $h \rightarrow 0^-$ به راحتی پی می بریم که $\Delta x = -h$ به 0^+ میل می کند.

سراسری تجربی ۷۸

$$\text{اندازه مشتق } y = \frac{x - \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} \text{ به ازای } x = \frac{1}{4} \text{ کدام است؟}$$

۱ (۴)

 $\frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۲)

-۱ (۱)

ابتدا ضابطه تابع را ساده می کنیم. برای این کار در صورت کسر از \sqrt{x} فاکتور می گیریم.

$$y = \frac{x - \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} \rightarrow y = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)}{1 - \sqrt{x}} \rightarrow y = -\sqrt{x} \rightarrow y' = -\frac{1}{2\sqrt{x}} \rightarrow y'\left(\frac{1}{4}\right) = -1$$

سراسری تجربی ۷۷

اگر آهنگ لحظه ای تغییر تابع $f(x)$ در واحد تغییر x ، در نقطه $x = 2$ برابر $\frac{3}{2}$ باشد، آنگاه حد عبارت

$$\frac{f(2) - f(2+h)}{h} \text{ وقتی } h \rightarrow 0^+ \text{ برابر کدام است؟}$$

۳ (۴)

 $\frac{3}{2}$ (۳) $-\frac{3}{2}$ (۲)

-۳ (۱)

$$f'(2) = -\frac{3}{2} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2) - f(2+h)}{h} = -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = -f'(2) = -\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

سراسری تجربی ۷۷

مقدار مشتق $y = \tan^3 2x$ به ازای $x = \frac{\pi}{12}$ کدام است؟

$\frac{8}{9}$ (۴)

$\frac{8}{3}$ (۳)

$\frac{4}{9}$ (۲)

$\frac{4}{3}$ (۱)

$$y = \tan^3 2x \longrightarrow y' = 3 \times 2 \times (1 + \tan^2 2x) \tan^2 2x \longrightarrow y'\left(\frac{\pi}{12}\right) = 6(1 + \tan^2 \frac{\pi}{6}) \tan^2 \frac{\pi}{6}$$

$$y'\left(\frac{\pi}{12}\right) = 6(1 + \frac{1}{3})(\frac{1}{3}) = \frac{8}{3}$$

۴۴

سراسری تجربی ۷۶

مقدار مشتق عبارت $\frac{2 \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$ به ازای $x = \frac{\pi}{6}$ کدام است.

$\sqrt{3}$ (۴)

$\frac{1}{2}$ (۳)

۱ (۲)

$-\sqrt{3}$ (۱)

۴۵

ابتدا ضابطه تابع را ساده می کنیم و سپس از آن مشتق می گیریم.

$$y = \frac{2 \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} \xrightarrow{1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}} y = 2 \tan^2 x \cdot \cos^2 x = 2 \sin^2 x$$

$$y' = 2 \times 2 \cos x \cdot \sin x = 2 \sin 2x \longrightarrow y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \sin \frac{2\pi}{6} = 2 \times \sin \frac{\pi}{3} = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

سراسری تجربی ۷۶

با استفاده از تعریف مشتق، حد عبارت $\frac{4x \cos 2x - 0}{4x - \pi}$ وقتی $x \rightarrow 0$ کدام است؟

$1 + \frac{\pi}{2}$ (۴)

$1 - \frac{\pi}{2}$ (۳)

$\frac{\pi}{2}$ (۲)

$-\frac{\pi}{2}$ (۱)

۴۶

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{4x \cos 2x - 0}{4x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{4(x \cos 2x - 0)}{4(x - \frac{\pi}{4})} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{f(x) - f(\frac{\pi}{4})}{4(x - \frac{\pi}{4})} = f'(\frac{\pi}{4})$$

$$f(x) = x \cos 2x \longrightarrow f'(x) = \cos 2x - 2x \sin 2x \longrightarrow f'(\frac{\pi}{4}) = \cos \frac{\pi}{2} - 2(\frac{\pi}{4}) \sin \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

سراسری تجربی ۷۵

$$\text{مقدار مشتق } y = \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} \text{ به ازای } x = \frac{\pi}{12} \text{ کدام است؟}$$

-۲ (۴)

-۴ (۳)

۴ (۲)

۲ (۱)

۴۷

$$y = \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} = \tan(\frac{\pi}{4} + x) \longrightarrow y' = 1 + \tan^2(\frac{\pi}{4} + x) \longrightarrow y'(\frac{\pi}{12}) = 1 + \tan^2 \frac{\pi}{3} = 4$$

سراسری تجربی ۷۶

$$\text{اندازهٔ مشتق عبارت } x = \frac{1}{16} \text{ به ازای } \cos^2 \pi \sqrt{x} \text{ کدام است؟}$$

۴\pi (۴)

۲\pi (۳)

-۲\pi (۲)

-۴\pi (۱)

۴۸

$$y = \cos^2 \pi \sqrt{x} \longrightarrow y' = -2(\frac{\pi}{2\sqrt{x}}) \sin \pi \sqrt{x} \cdot \cos \pi \sqrt{x} = -\frac{\pi}{\sqrt{x}} \times \frac{1}{2} \sin 2\pi \sqrt{x}$$

$$\frac{\sin 2x = 2 \sin x \cos x}{y'(\frac{1}{16})} \rightarrow y'(\frac{1}{16}) = -2\pi \sin \frac{\pi}{2} = -2\pi$$

سراسری تجربی ۷۱

$$\text{مشتق تابع با ضابطه } f(x) = \frac{(2x-1)^2}{2x} \text{ کدام است؟}$$

$$f'(x) = \frac{2x+1}{2x^3} \quad (۴) \quad f'(x) = \frac{2x+1}{x^3} \quad (۳) \quad f'(x) = \frac{2x-1}{x^3} \quad (۲) \quad f'(x) = \frac{2x-1}{2x^3} \quad (۱)$$

۴۹

$$f(x) = \frac{(2x-1)^2}{2x^3} \longrightarrow f(x) = \frac{1}{2} \times (\frac{2x-1}{x})^2 \longrightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \times 2 \times (\frac{1}{x}) \times (\frac{2x-1}{x}) = \frac{2x-1}{x^3}$$

سراسری تجربی ۷۰

$$\text{اگر } f(x) = \frac{(x+1).h(x)}{(2x+1).h(2x+1)} \text{ باشد، } f'(-1) \text{ چه قدر است؟}$$

۵۰

۲ (۴)

۱ (۳)

-۱ (۲)

-۲ (۱)

$$f(x) = (x+1) \frac{h(x)}{(2x+1).h(2x+1)} \rightarrow f'(-1) = (1) \times \frac{h(-1)}{(-1).h(-1)} = -1$$

سراسری ریاضی ۸۳

مشتق تابع $f(x) = \frac{(x-1)\sqrt[5]{3x-2}}{(5x-3)^4}$ در نقطه $x=1$ کدام است ؟

۵۱

$\frac{5}{18} \quad (4)$

$\frac{3}{20} \quad (3)$

$\frac{1}{8} \quad (2)$

$\frac{1}{16} \quad (1)$

نکته : مشتق عامل صفر

فرض کنیم بخواهیم از تابع $y = f(x).g(x)$ مشتق بگیریم . اگر یکی از عوامل ضرب یعنی f یا g در این نقطه صفر شود ، برای مشتق گیری کافی است از عاملی که در $x=0$ صفر می شود (عامل صفر) مشتق گرفته و در عامل دیگر ضرب کنیم و سپس جای گذاری کنیم .

$$(f.g)'(x) = 1 \times \frac{\sqrt[5]{3x-2}}{(5x-3)^4} \rightarrow (f.g)'(1) = 1 \times \frac{\sqrt[5]{3x-2}}{(5x-3)^4} = \frac{1}{16}$$

همکاران و دانش آموزان عزیز قبل از مطالعه هزینه این جزوای را پرداخت کنید و هزینه آن یک صلوای و یک فاتحه برای روح پدرم است .

با تشکر : سید علی موسوی

خواهشمند است پیشنهادات و نظرات خود را به آدرس تلگرام (۰۹۱۵۳۲۱۵۶۱۴) و یا به ایمیل seyedalimousavi48@gmail.com ارسال فرمائید .

همکاران و دانش آموزان عزیز اگر اشکال تایپی یا راه حل های بهتری داشتید بنده را با سپاس فراوان از شما عزیزان همراهی کنید .