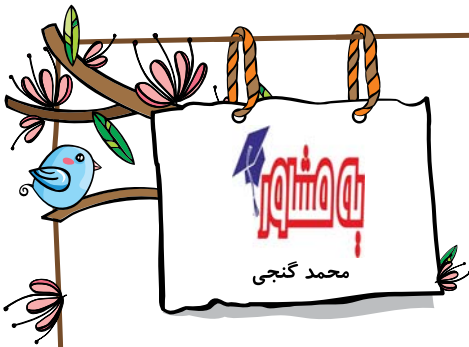
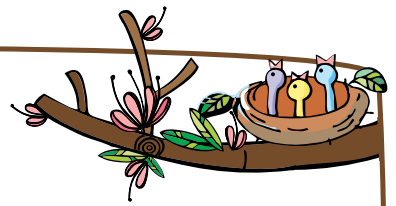


تاریخ آزمون: ۱۳۹۸/۰۱/۰۲
 زمان برگزاری: ۱۸۰۰۰ دقیقه



نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: ریاضی دهم متوسط

۱ ☆ کدام گزینه صحیح است؟

$Z - W = Z^-$ (۴)

$W \cup N = N$ (۳)

$Z \cup Q = Z$ (۲)

$Z^- \cup Z^+ = Z$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴ زیرا با بررسی می کنیم:

۱) $Z^- \cup Z = \{\dots, -4, -3, -2, -1\} \cup \{1, 2, 3, 4, \dots\} = Z - \{0\}$

۲) $Z \cup Q = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\} \cup Q = Q$

دقت کنید که چون Z زیر مجموعه‌ای از Q است، اجتماع آن‌ها برابر با مجموعه‌ی بزرگ‌تر (یعنی Q) است.

۳) $W \cup N = \{0, 1, 2, 3, \dots\} \cup \{1, 2, 3, \dots\} = \{0, 1, 2, 3, \dots\} = W$

۴) $Z - W = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\} - \{0, 1, 2, 3, \dots\} = Z^-$

۲ ☆ کدام گزینه مجموعه‌ی اعداد گویا را مشخص می کند؟

$R - Q'$ (۴)

$\{\frac{a}{b} | a, b \in N\}$ (۳)

$R - Z$ (۲)

$\{\frac{a}{b} | b \neq 0\}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴ بررسی گزینه‌ها

۱) شرط $\frac{a}{b}$ برای اعداد گویا کافی نیست؛ مثلاً $\frac{\sqrt{2}}{3}$ عددی گنگ است اما در این تعریف مجاز شمرده شده است. نمایش ریاضی مجموعه اعداد گویا به شکل $\{\frac{a}{b} | a, b \in Z, b \neq 0\}$ است.

۲) $R - Z$ اعداد حقیقی به جز اعداد صحیح را مشخص می کند؛ حال آن که می دانیم اعداد صحیح خودشان گویا نیز هستند.

۳) $\{\frac{a}{b} | a, b \in N\}$ فقط کسره‌های با صورت و مخرج مثبت را به عنوان عدد گویا در نظر گرفته که این تعریف ناقص است و بخشی از اعداد مانند $-\frac{2}{5}$ را دربر نمی گیرد.

۴) $R - Q'$ یعنی همه‌ی اعداد به جز اعداد گنگ یعنی اعداد گویا

۳ ☆ کدام گزینه درست است؟

هیچکدام (۴)

$\{\{\}\} = \phi$ (۳)

$\{\} = \phi$ (۲)

$\{\emptyset\} = \text{تهی}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ زیرا مجموعه‌هایی تک عضوی هستند و در نتیجه نمی توانند با مجموعه‌ی تهی برابر باشند. گزینه‌ی ۲ مجموعه‌ای بدون عضو است و این یعنی مجموعه‌ی \emptyset .

دقت: \emptyset به تنهایی یعنی مجموعه‌ی تهی و $\{\emptyset\}$ مجموعه‌ی تک عضوی شامل حرف \emptyset (فی) در الفبای لاتین است.

۴ ☆ با فرض $A = \{a, \{7, 11\}, \{1, 6\}\}$ کدام گزاره درست است؟

$\{a\} \subseteq A$ (۴)

$7 \in A$ (۳)

$\{\{7, 11\}\} \in A$ (۲)

$\{1, 6\} \subseteq A$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴ بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) مجموعه‌ی A شامل عضو $\{1, 6\}$ است، و این عضویت را باید با $\{1, 6\} \in A$ نشان داد نه با $\{1, 6\} \subseteq A$ (نماد \subseteq به معنای زیرمجموعه بودن است).

۲) با توجه به آن چه که در گزینه‌ی ۱ گفتیم، مجموعه‌ی $\{\{7, 11\}\}$ زیرمجموعه‌ی A است و برای بیان آن باید از نماد \subseteq استفاده کرد.

۳) عدد ۷ به تنهایی در مجموعه‌ی A حضور ندارد، بلکه به همراه عدد ۱۱ $\{\{7, 11\}\}$ یک از عضو از A را تشکیل می دهند.

۵ ☆ مجموعه‌ی $\{x | x \in Z, x \leq 11\} \cap \{\text{اعداد طبیعی زوج}\}$ چند عضو دارد؟

بی شمار (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

مجموعه‌ی A را با اعضایش می نویسیم:

$\{x | x \in Z, x \leq 11\} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, 11\}$
 $\{\text{اعداد طبیعی زوج}\} = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$

اشتراک دو مجموعه عبارت است از $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ که ۵ عضو دارد.





محمد گنجی

۶ ☆ باتوجه به مجموعه ی $A = \{\{a\}, \{\emptyset\}, a\}$ چه تعداد از رابطه های زیر صحیح هستند؟

- الف) $a \in A$ (۱) صفر
 ب) $\emptyset \subseteq A$ (۲) ۱
 ج) $\{\{a\}\} \subseteq A$ (۳) ۲
 د) $\{\emptyset\} \in A$ (۴) ۳

پاسخ: گزینه ۲ (الف) مجموعه ی A، عضوی به صورت a (به تنهایی) ندارد. پس $a \in A$ صحیح نیست. (ب) تهی، زیرمجموعه ی تمام مجموعه هاست.

(ج) $\{\{a\}\}$ زیرمجموعه ی A نیست. چون عضوی به صورت $\{a\}$ به تنهایی در A وجود ندارد. پس این رابطه هم صحیح نیست. (د) مثل موارد الف و ج، A عضوی به صورت $\{\emptyset\}$ ندارد. دقت کنید که $\{\emptyset\}$ تهی نیست و به معنای مجموعه ی تک عضوی شامل \emptyset است.

۷ ☆ اگر $A = \{0, 1, 2, 3, \dots, 30\}$ و $B = \{x | x = 3n + 1, n \in \mathbb{N}\}$ مجموعه ی $A \cap B$ چند عضو دارد؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۳۰ (۴) ۳۱

پاسخ: گزینه ۱ مجموعه ی B را با اعضایش می نویسیم:

$$B = \{4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, \dots\}$$

$A \cap B$ را تشکیل می دهیم:

$$A \cap B = \{4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28\}$$

۹ عضو دارد.

۸ ☆ مجموعه ی اعداد طبیعی، طبیعی زوج، طبیعی فرد، حسابی و صحیح را به ترتیب با \mathbb{N} , \mathbb{O} , \mathbb{E} , \mathbb{W} , \mathbb{Z} نمایش می دهیم. حاصل کدام گزینه برابر

با مجموعه ی \emptyset است؟

- (۱) $\mathbb{N} - \mathbb{E}$ (۲) $\mathbb{Z} - \mathbb{N}$ (۳) $\mathbb{E} - \mathbb{O}$ (۴) $\mathbb{W} - \mathbb{Z}$

پاسخ: گزینه ۴ بررسی گزینه ها:

$$1) \mathbb{N} - \mathbb{E} = \{1, 2, 3, \dots\} - \{2, 4, 6, \dots\} = \{1, 3, 5, \dots\}$$

$$2) \mathbb{Z} - \mathbb{N} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} - \{1, 2, 3, \dots\} = \{\dots, -2, -1, 0\}$$

$$3) \mathbb{E} - \mathbb{O} = \{2, 4, 6, \dots\} - \{1, 3, 5, \dots\} = \{2, 4, 6, \dots\}$$

$$4) \mathbb{W} - \mathbb{Z} = \{0, 1, 2, \dots\} - \{\dots, -1, 0, 1, \dots\} = \{\}$$

۹ ☆ کدام گزینه "مجموعه ی مضارب ۵" را مشخص می کند؟

- (۱) $\{x | x = 5k, k \in \mathbb{N}\}$ (۲) $\{x | x = 5 + k, k \in \mathbb{N}\}$ (۳) $\{x | x = 5k, k \in \mathbb{Z}\}$ (۴) $\{x | x = 5 + k, k \in \mathbb{Z}\}$

پاسخ: گزینه ۳ مضارب ۵ اعدادی هستند به فرم $5k$ ، از طرفی می دانیم که قرار نیست اعداد مضرب ۵ فقط مثبت باشند و مثلاً -25 نیز مضرب ۵ به شمار می رود. بنابراین k باید عددی صحیح باشد. پس گزینه ی ۳ صحیح است. (گزینه ی ۱ فقط مضارب نامنفی ۵ را مشخص می کند.)

۱۰ ☆ اگر $A = \{\frac{1}{x} | x \in (-2, 4] \cap \mathbb{N}\}$ باشد، آن گاه A چند عضو دارد؟

- (۱) بی شمار (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

پاسخ: گزینه ۳ مجموعه ای که xها از آن انتخاب می شوند، اعضای از بازه $(-2, 4]$ هستند که در \mathbb{N} هم باشند. پس xها عبارتند از ۱، ۲، ۳، ۴. پس A عبارت است از:

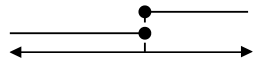
$$A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\}$$

۱۱ ☆ بازه ی $(-\infty, \frac{a}{2}] \cap [\frac{2a-1}{3}, +\infty)$ فقط شامل یک عضو است. a کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

پاسخ: گزینه ۳

برای تک عضوی شدن اشتراک دو بازه، بازه‌ها باید به این شکل باشند:



یعنی پایان بازه‌ی اول، آغاز بازه‌ی دوم باشد:

$$\frac{a}{2} = \frac{2a-1}{3} \Rightarrow 3a = 4a-2 \Rightarrow a = 2$$

۱۲ ☆ اگر $(-2, 6] \cup (m, 3] = (-2, 6]$ باشد، محدوده‌ی m کدام است؟

$m \leq -2$ (۴)

$-2 < m \leq 3$ (۳)

$-2 < m < 4$ (۲)

$3 < m$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳
برای برقرار شدن رابطه‌ی فوق، دو بازه باید به شکل باشد. بنابراین اولاً باید $m \leq 3$ باشد تا شروع بازه‌ی دوم در بدنه‌ی بازه‌ی اول باشد؛ ثانیاً باید $m < -2$ باشد تا حاصل اشتراک بازه‌ها از -2 آغاز شود (وگرنه باید از m آغاز شود)، بنابراین به $-2 < m \leq 3$ می‌رسیم.

۱۳ ☆ اگر دو بازه $(2a-2, 6)$ و $(-2, a+1)$ هیچ عضو مشترکی نداشته باشند، محدوده‌ی a کدام است؟

$3 < a \leq 4$ (۴)

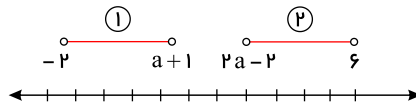
$3 \leq a < 4$ (۳)

$-2 < a \leq 4$ (۲)

$-2 < a < 4$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

بازه‌ها به این شکل باشند تا عضو مشترکی نداشته باشند:



(۱) بازه سمت راست از جایی که بازه اول و پایان می‌پذیرد (به بعد) آغاز شود. یعنی:

$$a+1 \leq 2a-2 \Rightarrow 1+2 \leq 2a-a \Rightarrow 3 \leq a$$

(۲) در بازه دوم، شروع بازه از پایان آن کوچک‌تر باشد یا حداکثر با آن مساوی باشد:

$$2a-2 \leq 6 \Rightarrow 2a \leq 8 \Rightarrow a \leq 4$$

$$\xrightarrow{1,2} 3 \leq a \leq 4$$

۱۴ ☆ اگر عدد ۱۱ عضوی از بازه‌ی $\left[\frac{4a-3}{3}, 2a+13\right)$ باشد، محدوده‌ی a کدام است؟

$(-1, 2]$ (۴)

$(0, 13)$ (۳)

$(-1, 13)$ (۲)

$(-1, 9]$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱
برای آن که ۱۱ عضو این بازه باشد، باید نامساوی $\frac{4a-3}{3} \leq 11 < 2a+13$ برقرار باشد:

$$(I) \frac{4a-3}{3} \leq 11 \xrightarrow{\times 3} 4a-3 \leq 33 \Rightarrow 4a \leq 36 \xrightarrow{\div 4} a \leq 9$$

$$(II) 11 < 2a+13 \Rightarrow 11-13 < 2a \Rightarrow -2 < 2a \xrightarrow{\div 2} -1 < a \xrightarrow{I, II} -1 < a \leq 9$$

۱۵ ☆ اگر $(-\infty, 2) \cup \left[\frac{a-6}{2}, +\infty\right) = \mathbb{R}$ باشد، محدوده‌ی a کدام است؟

$(-\infty, 10]$ (۴)

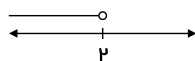
\mathbb{R} (۳)

$(-1, 3]$ (۲)

$(-1, 3)$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

بازه‌ی $(-\infty, 2)$ را روی محور در نظر بگیرید:



بازه‌ی $\left[\frac{a-6}{2}, +\infty\right)$ باید از $x = 2$ به قبل آغاز شود تا اجتماع هر دو بازه، کل محور اعداد را شامل شود؛ یعنی آغاز آن باید کوچک‌تر یا مساوی ۲ باشد.

$$\frac{a-6}{2} \leq 2 \xrightarrow{\times 2} a-6 \leq 4 \Rightarrow a \leq 10$$

۱۶ ☆ نمایش بازه ای مجموعه $A = \{x | x \in Z, -3 \leq x < 2\}$ کدام است؟

- ۱) $[-3, 2]$ ۲) $[-2, 1/9]$ ۳) $[-3, 1]$ ۴) هیچکدام

پاسخ: گزینه ۴ مجموعه را با اعضایش می نویسیم: $A = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$

دقت کنید که x ها باید از مجموعه Z انتخاب شوند؛ بنابراین مجموعه A فقط شامل اعضای صحیح است و این مجموعه، نمایش بازه ای ندارد.

نکته: $[-3, 2]$ شامل تمام اعداد حقیقی در بازه $-3 \leq x < 2$ می شود.

۱۷ ☆ اگر $i \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ و $A_i = \left[-i, \frac{9-i}{2}\right]$ ، آن گاه مجموعه $(A_2 \cap A_5) - (A_1 \cap A_7)$ به کدام صورت است؟

- ۱) $[-2, -1) \cup (1, 2]$ ۲) $[-2, -1) \cup (1, 2]$ ۳) $[-1, 1]$ ۴) \emptyset

پاسخ: گزینه ۱

$$A_1 = [-1, 4], A_2 = [-2, 3.5], A_5 = [-5, 2], A_7 = [-7, 1]$$

$$\begin{cases} A_2 \cap A_5 = [-2, 2] \\ A_1 \cap A_7 = [-1, 1] \end{cases} \Rightarrow (A_2 \cap A_5) - (A_1 \cap A_7) = [-2, -1) \cup (1, 2]$$

۱۸ ☆ کدام گزینه به عدد خاصی اشاره می کند؟

- ۱) بزرگ ترین عدد گنگ کوچک تر از ۲ ۲) بزرگ ترین عدد گویای کوچک تر از ۲
۳) بزرگ ترین عدد صحیح کوچک تر از ۲ ۴) کوچک ترین عدد صحیح کوچک تر از ۲

پاسخ: گزینه ۳ از میان چهار گزینه فقط بزرگ ترین عدد صحیح کوچک تر از ۲ وجود دارد که آن هم ۱ است. در بقیه ی گزینه ها، عدد خواسته شده قابل تعیین نیست.

۱۹ ☆ کدام مجموعه ی زیر، متناهی است؟

- ۱) مجموعه ی اعداد طبیعی که از معکوس خود کوچک ترند. ۲) مجموعه ی اعداد حقیقی بین ۰ و ۱
۳) مجموعه ی اعداد صحیح کوچک تر از ۲- ۴) مجموعه ی اعداد صحیح بزرگ تر از ۲-

پاسخ: گزینه ۱ اعداد طبیعی و معکوس آن ها را ببینید:

$$1 \xrightarrow{\text{معکوس}} 1, \quad 2 \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{1}{2}, \quad 3 \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{1}{3}, \quad \dots$$

همان طور که می بینید، در میان اعداد طبیعی، ۱ با معکوس خود برابر است و بقیه از معکوس خود بزرگ ترند. بنابراین مجموعه ی اعداد طبیعی که از معکوس خود کوچک ترند، تهی است؛ و تهی مجموعه ای متناهی است.

۲۰ ☆ کدام مجموعه، متناهی است؟

- ۱) $W - Q$ ۲) $R - Q'$ ۳) $Q \cap Z$ ۴) $Q \cap N$

پاسخ: گزینه ۱ همه ی اعداد حسابی (اعضای W)، گویا هم هستند. بنابراین اگر از W اعداد گویا را حذف کنیم، تهی می شود و تهی مجموعه ای متناهی است. در نتیجه گزینه ی ۱ صحیح است.

بررسی سایر گزینه ها:

۲) $R - Q' = Q$ نامتناهی

۳) $Q \cap Z = Z$ نامتناهی

۴) $Q \cap N = N$ نامتناهی

۲۱ ☆ اگر $A \subseteq B$ و B مجموعه ای متناهی باشد، آن گاه A کدام است؟

- ۱) نامتناهی ۲) متناهی ۳) تهی ۴) B

پاسخ: گزینه ۲ مجموعه ای متناهی است و A قسمتی از آن است؛ بنابراین در بزرگ ترین حالت برابر با خود B است و در کوچک ترین حالت تهی است. مجموعه هایی که در

حد فاصل تهی تا B قرار می گیرند نیز جواب مسئله هستند؛ اما خاصیت مشترک همه این مجموعه ها، متناهی بودن آن ها است یعنی گزینه ی ۲.

دقت کنید که چون A بخشی از یک مجموعه ی متناهی است، خودش نمی تواند نامتناهی باشد و گزینه ی ۱ صحیح نیست.

۲۲ ☆ کدام نامتناهی است؟

- ۱) مجموعه‌ی اعداد اول یک رقمی
۲) مجموعه‌ی انسان‌های روی زمین
۳) مجموعه‌ی اعداد اول زوج
۴) مجموعه‌ی کسره‌های مثبت با صورت یک

- ۱) مجموعه‌ی اعداد اول یک رقمی
۲) مجموعه‌ی انسان‌های روی زمین
۳) مجموعه‌ی اعداد اول زوج
۴) گزینه‌ها را ببینید: پاسخ:

متناهی $\rightarrow \{2, 3, 5, 7\}$ = مجموعه‌ی اعداد اول یک رقمی (۱)

متناهی \rightarrow مجموعه‌ای که تعداد اعضای آن قابل شمارش است = مجموعه‌ی انسان‌های روی زمین (۲)

متناهی $\rightarrow \{2\}$: مجموعه‌ی اعداد اول زوج (۳)

دقت: تنها عدد اول زوج، ۲ است. اعداد زوج دیگر چون بر ۲ بخش پذیرند، اول نیستند.

نامتناهی $\rightarrow \{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ = مجموعه‌ی کسره‌های مثبت با صورت یک (۴)

۲۳ ☆ n عددی طبیعی است و $A = \{x | x \in \mathbb{N}, x \leq n+1\}$ ، در مورد A کدام یک درست است؟

۱) نامتناهی
۲) متناهی است.
۳) بسته به مقدار n می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد.
۴) تهی است.

پاسخ: گزینه ۲ را با اعضای A می‌نویسیم:

$$A = \{1, 2, 3, \dots, n, n+1\}$$

در نتیجه تعداد اعضای A معلوم و برابر با عدد طبیعی $n+1$ است. پس متناهی است.

۲۴ ☆ اگر $A = \{x | x \in \mathbb{R}, 2x - \frac{1}{2} \leq 3x \leq \frac{2x+3}{3}\}$ متتم کدام است؟

- ۱) $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{3}{2}, +\infty)$
۲) $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$
۳) $(-\frac{1}{2}, 1]$
۴) $(\frac{2}{3}, 1)$

پاسخ: گزینه ۱

$$\left. \begin{aligned} 2x - \frac{1}{2} \leq 3x &\Rightarrow -\frac{1}{2} \leq 3x - 2x \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq x \\ 3x \leq \frac{2x+3}{3} &\xrightarrow{\times 3} 9x \leq 2x+3 \Rightarrow 7x \leq 3 \Rightarrow x \leq \frac{3}{7} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{7}$$

$$\rightarrow A = \left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{7}\right] \Rightarrow A' = \mathbb{R} - A = (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{3}{7}, +\infty)$$

۲۵ ☆ اگر $U = \{مجموعه‌ی اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۱۵\}$ مجموعه‌ی مرجع باشد و $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{3, 11, 13, 14\}$ و

$C = \{3, 6, 9, 10, 11, 12, 13\}$ مجموعه‌ی $(A' \cap B') \cup C'$ چند عضو دارد؟

- ۱) ۹
۲) ۱۱
۳) ۱۳
۴) ۱۴

پاسخ: گزینه ۲ $(A \cup B)' = A' \cap B'$

مجموعه‌ی مرجع عبارت است از: $U = \{1, 2, 3, 4, \dots, 14\}$

$$A' \cap B' = (A \cup B)' = (\{1, 2, 3, 4, 11, 13, 14\})' = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 12\}$$

$$C' = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 14\}$$

$$\Rightarrow (A' \cap B') \cup C' = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14\} \Rightarrow \text{تعداد اعضا} = 11$$

۲۶ ☆ اگر $A_n = \{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$ باشد، متتم مجموعه‌ی $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ در مجموعه‌ی اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۲۰

چند عضو دارد؟

- ۱) ۹
۲) ۱۰
۳) ۱۱
۴) ۱۲

$$U = \{1, 2, 3, \dots, 19\}$$

پاسخ: گزینه ۳ مجموعه‌ی مرجع عبارت است از:

$$\begin{cases} A_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\ A_2 = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\} \Rightarrow A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \\ A_3 = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\} \end{cases}$$

مجموعه های A_1, A_2, A_3 را نیز تشکیل می دهیم:

A ۸ عضو دارد. تعداد اعضای متمم آن برابر $11 - 8 = 19$ است.

۲۷ ☆ اگر R^+ مجموعه ی مرجع باشد و $A = (2, 3), B = (1, +\infty)$ ، مجموعه ی $A' - B'$ کدام است؟

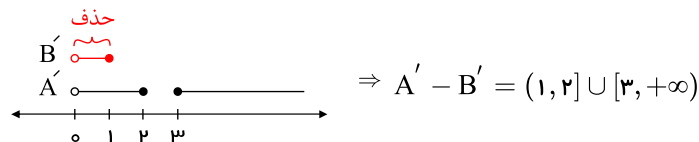
۱) $(0, 2] \cup [3, +\infty)$ ۲) $(1, 2] \cup [3, +\infty)$ ۳) $(0, 1)$ ۴) $(0, +\infty)$

پاسخ: گزینه ۲ مجموعه ی مرجع عبارت است از:
از طرفی: $U = (0, +\infty)$

$$A' = (0, +\infty) - (2, 3) = (0, 2] \cup [3, +\infty)$$

$$B' = (0, +\infty) - (1, +\infty) = (0, 1]$$

$A' - B'$ را روی نمودار تعیین می کنیم.



۲۸ ☆ اگر U مجموعه ی مرجع باشد، کدام یک نادرست است؟

۱) $U \cup U' = U \cup \emptyset = U$ ۲) $U \cap U' = \emptyset$ ۳) $U - U' = U - \emptyset = U$ ۴) $U' - U = \emptyset - U = \emptyset$

پاسخ: گزینه ۴ متمم مجموعه ی مرجع، \emptyset است.
بررسی گزینه ها:

- ۱) $U \cup U' = U \cup \emptyset = U$
- ۲) $U \cap U' = U \cap \emptyset = \emptyset$
- ۳) $U - U' = U - \emptyset = U$
- ۴) $U' - U = \emptyset - U = \emptyset$

۲۹ ☆ اگر A زیر مجموعه ای از مجموعه ی مرجع U باشد، کدام یک نادرست است؟

۱) $U \cup A = U$ ۲) $U - A = A'$ ۳) $A \cap A' = \emptyset$ ۴) $A' - A = A$

پاسخ: گزینه ۴ بررسی گزینه ها:

۱) اجتماع هر مجموعه با مجموعه ی مرجع، برابر با مجموعه ی مرجع است.

۲) این گزینه، همان تعریف مجموعه ی متمم است.

۳) هر مجموعه با متمم خود، هیچ اشتراکی ندارد. بنابراین حاصل اشتراک، مجموعه ی تهی است.

۴) اعضای A در A' نیستند. بنابراین اگر A را از A' کم کنیم، در A' تغییری حاصل نمی شود و $A' - A = A'$.

۳۰ ☆ اگر $A = \{x | x \in Z, |x| \leq 25\}$ و B یک زیرمجموعه ی متناهی از اعداد صحیح باشد، کدام یک در Z متناهی است؟

۱) $A \cap B'$ ۲) $A \cup B'$ ۳) $A \cap B$ ۴) $A' \cup B$

پاسخ: گزینه ۳

$$A = \{-25, -24, \dots, 24, 25\} \Rightarrow A' = Z - A = \{\dots, -27, -26\} \cup \{26, 27, \dots\}$$

مشخص است که A' مجموعه ای نامتناهی است. اجتماع یک مجموعه ی نامتناهی با هر مجموعه ی دیگر (اعم از نامتناهی و متناهی)، مجموعه ای نامتناهی خواهد بود. بنابراین گزینه های ۲

و ۴ نامتناهی هستند. و اما گزینه ی ۱: $A \cap B' = A - B$

و این یعنی تعداد قابل شمارشی از اعضا، باید از A حذف شوند و این نامتناهی بودن A را نقض نمی کند.

۳۱ ☆ اگر $A \subseteq B$ باشد، آن گاه $B - A'$ کدام است؟

- ۱ B' ۲ A' ۳ A ۴ B

پاسخ: گزینه ۳

$$B - A' = B \cap A'$$

$$A \subseteq B \Rightarrow \begin{cases} A \cup B = B \\ A \cap B = A \end{cases}$$

$$B - A' = B \cap (A')' = B \cap A = A$$

۳۲ ☆ اگر $A \subseteq B'$ و $A \subseteq B$ باشد، مجموعه A کدام است؟

- ۱ B ۲ B' ۳ B یا B' ۴ \emptyset

پاسخ: گزینه ۴
مجموعه A مجموعه ای است که هم زیرمجموعه B است و هم زیرمجموعه B' متتم آن. اگر A دارای عضو باشد، آن عضو باید هم متعلق به B باشد و هم متعلق به B' و این امکان پذیر نیست. (چون B و B' عضو مشترک ندارند و گرنه متتم هم نیستند) بنابراین A نمی تواند حاوی هیچ عضوی باشد. پس تهی است که تهی زیرمجموعه همه مجموعه هاست.

۳۳ ☆ مجموعه $A \cap (A - B)$ برابر با کدام یک از مجموعه های زیر است؟

- ۱ $B - A$ ۲ $A - B$ ۳ A' ۴ B'

پاسخ: گزینه ۲

$$A - B = A \cap B'$$

$$A \cap (A - B) = A \cap (A \cap B') = \overbrace{A \cap A}^A \cap B' = A \cap B' = A - B$$

۳۴ ☆ اگر $n(A) = 14$ ، $n(A \cap B) = 3$ ، $n(A \cup B) = 29$ آن گاه $n(B)$ کدام است؟

- ۱ ۱۲ ۲ ۱۸ ۳ ۲۳ ۴ ۲۶

پاسخ: گزینه ۲

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow n(B) = n(A \cup B) - n(A) + n(A \cap B)$$

$$\Rightarrow n(B) = 29 - 14 + 3 = 18$$

۳۵ ☆ از دانش آموزان یک کلاس ۲۴ نفری برای شرکت در المپیادهای ریاضی و کامپیوتر ثبت نام به عمل آمده است. اگر ۱۲ نفر برای المپیاد

ریاضی و ۱۶ نفر برای المپیاد کامپیوتر ثبت نام کرده باشند، چند نفر در هر دو المپیاد ثبت نام کرده اند؟

- ۱ ۴ ۲ ۸ ۳ ۱۲ ۴ ۱۶

پاسخ: گزینه ۱

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

اگر مجموعه افرادی که برای المپیاد ریاضی ثبت نام کرده اند را A و مجموعه افرادی که برای المپیاد کامپیوتر ثبت نام کرده اند را B بنامیم آنگاه:

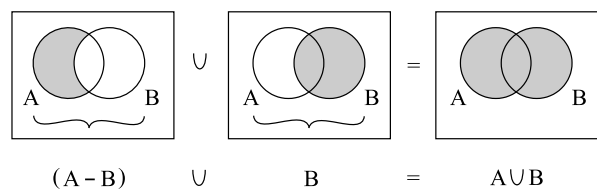
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$24 = 12 + 16 - n(A \cap B) \Rightarrow 24 = 28 - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 4$$

۳۶ ☆ مجموعه B دارای ۷ عضو و مجموعه $A \cup B$ دارای ۱۵ عضو است. مجموعه $(A - B) \cup B$ چند عضو دارد؟

- ۱ ۷ ۲ ۸ ۳ ۱ ۴ ۱۵

پاسخ: گزینه ۴
با توجه به نمودار ون:



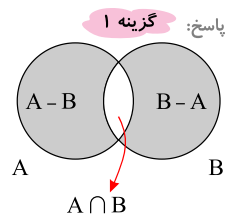
$\Rightarrow n((A - B) \cup B) = n(A \cup B) = 15$

۳۷ ☆ اگر $n(A) = 20$, $n(B) = 21$, $n(A \cap B) = 8$ باشد، آنگاه تعداد اعضای مجموعه $(A - B) \cup (B - A)$ کدام است؟

- ۱) ۲۵ ۲) ۲۸ ۳) ۲۹ ۴) ۴۹

$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 20 - 8 = 12$

$n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = 21 - 8 = 13$



$\Rightarrow n((A - B) \cup (B - A)) = n(A - B) + n(B - A) - n((B - A) \cap (A - B)) = 12 + 13 - 0 = 25$

۳۸ ☆ اگر $A = \{\text{مضارب دو رقمی و طبیعی } 6\}$ و $B = \{\text{مضارب دو رقمی و طبیعی } 4\}$ ، مجموعه $A - B$ چند عضو دارد؟

- ۱) ۴ ۲) ۷ ۳) ۱۳ ۴) ۱۵

پاسخ: گزینه ۲
مجموعه $A - B$ شامل اعدادی است که مضارب ۶ باشند و مضرب ۴ نباشند و از طرفی دو رقمی طبیعی نیز باشند:

$A - B = \{18, 30, 42, 54, 66, 78, 90\} \Rightarrow n(A - B) = 7$

۳۹ ☆ یک باشگاه ورزشی ۴۳ عضو دارد. از میان این اعضا، ۲۳ نفر در تمرین فوتبال و ۲۷ نفر در تمرین فوتسال حضور می‌یابند. اگر ۱۶ نفر در هر دو تمرین حضور داشته باشند، چند نفر در هیچ تمرینی شرکت نمی‌کنند؟

- ۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

پاسخ: گزینه ۲
در این مسئله مجموعه مرجع، مجموعه اعضای باشگاه است. $n(U) = 43$
از طرفی:

$n(\text{فوتسال} \cup \text{فوتبال}) = n(\text{فوتسال}) + n(\text{فوتبال}) - n(\text{فوتسال} \cap \text{فوتبال}) = 23 + 27 - 16 = 34$
تعداد شرکت کنندگان هر دو رشته

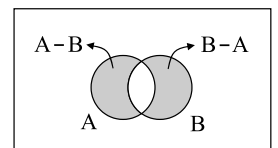
پس در مجموع ۳۴ نفر در تمرین‌ها شرکت می‌کنند و تعداد افرادی که در هیچ تمرینی حضور ندارند، برابر $43 - 34 = 9$ است.

۴۰ ☆ دو مجموعه A و B را در نظر بگیرید. اگر اجتماع آن‌ها ۲۷ عضو و اشتراکشان ۸ عضو داشته باشد، مجموعه $(A - B) \cup (B - A)$ چند عضو دارد؟

- ۱) ۱۹ ۲) ۲۱ ۳) ۲۷ ۴) ۳۵

پاسخ: گزینه ۱
با توجه به نمودار ون:

$n((A - B) \cup (B - A)) = n(A \cup B) - n(A \cap B) = 27 - 8 = 19$



۴۱ ☆ اگر $n(A \cup B) = 17$, $n(A \cap B) = 1$, $n(B \cap A') = 9$, آن گاه $n(A - B)$ کدام است؟

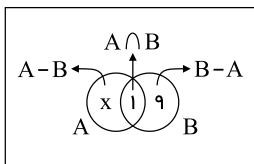
۹ (۴)

۸ (۳)

۷ (۲)

۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۲



$$n(B \cap A') = n(B - A) = 9$$

$$\Rightarrow n(A \cup B) = x + 1 + 9 \Rightarrow 17 = x + 10 \Rightarrow x = n(A - B) = 7$$

۴۲ ☆ شکل های مقابل با چوب کبریت ساخته شده اند. تعداد چوب کبریت های شکل بیست و پنجم کدام است؟



۷۵ (۲)

۷۴ (۱)

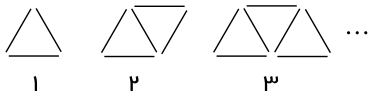
۷۷ (۴)

۷۶ (۳)

پاسخ: گزینه ۳ اولین شکل ۴ چوب کبریت دارد و بعدی ۳ چوب کبریت بیش تر دارد و این الگو در حال تکرار شدن است. پس عدد ۳ در حال اضافه شدن به شکل قبلی و تولید شکل جدید است. در شکل n ام به تعداد $n - 1$ گروه ۳ تایی چوب کبریت به شکل اول اضافه شده است. یعنی تعداد چوب کبریت های شکل n ام، $4 + (n - 1) \times 3$ است:

$$n = 25 \Rightarrow \text{تعداد چوب کبریت های شکل } 25 \text{ ام} = 4 + (25 - 1) \times 3 = 4 + 24 \times 3 = 4 + 72 = 76$$

۴۳ ☆ در الگوی زیر، تعداد چوب کبریت های شکل هفدهم کدام است؟



۳۵ (۲)

۳۴ (۱)

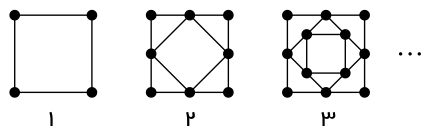
۳۷ (۴)

۳۶ (۳)

پاسخ: گزینه ۲ اولین شکل ۳ چوب کبریت دارد و در الگو، هر شکل ۲ چوب کبریت بیش تر از شکل قبل دارد. بنابراین شکل n ام به تعداد $3 + (n - 1) \times 2$ چوب کبریت خواهد داشت:

$$n = 17 \rightarrow \text{تعداد چوب کبریت های شکل } 17 \text{ ام} = 3 + (17 - 1) \times 2 = 3 + 16 \times 2 = 3 + 32 = 35$$

۴۴ ☆ شکل n ام الگوی مقابل، چند گلوله ی توپُر خواهد داشت؟



۴n (۲)

n + 4 (۱)

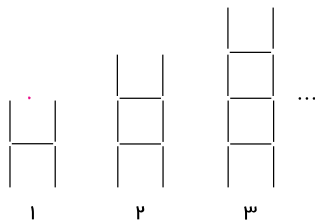
$\frac{4n + 1}{2}$ (۴)

4n + 4 (۳)

پاسخ: گزینه ۲ شکل اول ۴ گلوله دارد و در شکل های بعدی، به هر کدام ۴ گلوله نسبت به شکل قبل اضافه می شود. بنابراین:

$$n \text{ام} = 4 + (n - 1) \times 4 = 4 + 4n - 4 = 4n$$

۴۵ ☆ شکل n ام الگوی مقابل از چند چوب کبریت تشکیل خواهد شد؟



۲ + 3n (۱)

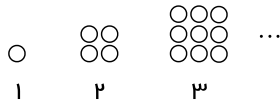
۳ + 5n (۲)

۵ + 3n (۳)

۳ + 2n (۴)

پاسخ: گزینه ۱ شکل اول الگو ۵ چوب کبریت دارد و در ادامه، هر شکل ۳ چوب کبریت بیش تر از شکل قبل از خودش دارد. پس:

تعداد چوب کبریت‌های شکل n ام $= 5 + (n - 1) \times 3 = 5 + 3n - 3 = 2 + 3n$

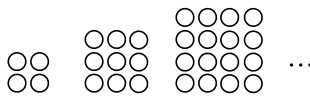


۴۶ ☆ تعداد دایره‌های شکل دهم الگوی زیر کدام است؟

- ۵۴ (۲) ۵۲ (۱)
۱۰۰ (۴) ۷۸ (۳)

پاسخ: گزینه ۴. تعداد هر یک از دایره‌های هر شکل برابر با n^2 است. (n: شماره‌ی هر شکل) پس:

تعداد دایره‌های شکل دهم $= 10^2 = 100$



۴۷ ☆ تعداد دایره‌های شکل دوازدهم الگوی زیر کدام است؟

- ۱۶۹ (۲) ۱۴۴ (۱)
۲۲۱ (۴) ۱۹۶ (۳)

پاسخ: گزینه ۲. تعداد دایره‌های هر شکل برابر با شماره‌ی شکل به علاوه یک است. یعنی $(n + 1)^2$

تعداد دایره‌های شکل دوازدهم $= (12 + 1)^2 = 13^2 = 169$

۴۸ ☆ در یک الگوی خطی، جمله‌ی چهارم ۱۱- و جمله‌ی دهم ۷ است. چندمین جمله از این الگو، برابر با ۱۹ است؟

- پانزدهم (۴) چهاردهم (۳) سیزدهم (۲) دوازدهم (۱)
پاسخ: گزینه ۳

$$\boxed{t_n = an + b} \Rightarrow \begin{cases} t_4 = a \times 4 + b = -11 \Rightarrow 4a + b = -11 \\ t_{10} = a \times 10 + b = 7 \Rightarrow 10a + b = 7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -4a - b = 11 \\ 10a + b = 7 \end{cases} \Rightarrow 6a = 18 \Rightarrow a = \frac{18}{6} = 3$$

$$4a + b = -11 \xrightarrow{a=3} 4 \times 3 + b = -11 \Rightarrow b = -12 - 11 = -23 \Rightarrow t_n = 3n - 23$$

$$t_n = 19 \Rightarrow 3n - 23 = 19 \Rightarrow 3n = 23 + 19 \Rightarrow 3n = 42 \Rightarrow n = \frac{42}{3} = 14$$

۴۹ ☆ در یک الگو، از جمله‌ی دوم به بعد، هر جمله یک واحد از نصف مربع شماره همان جمله بیش تر است. جمله‌ی چهاردهم این الگو کدام

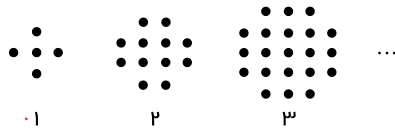
است؟

- ۹۹ (۴) ۹۷ (۳) ۹۵ (۲) ۹۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۴. جمله‌ی عمومی این الگو عبارت است از $t_n = \frac{n^2}{2} + 1$ ($n \geq 2$). بنابراین:

$$t_{14} = \frac{14^2}{2} + 1 = \frac{196}{2} + 1 = 98 + 1 = 99$$

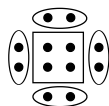
۵۰ ☆ شکل نهم الگوی زیر از چند نقطه تشکیل شده است؟



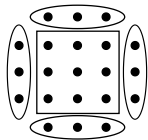
- ۱۲۰ (۲) ۱۱۷ (۱)
۱۲۶ (۴) ۱۲۳ (۳)

پاسخ: گزینه ۱

شکل‌های دوم و سوم را ببینید:



تعداد نقاط شکل دوم $= 2^2 + 4 \times 2$



تعداد نقاط شکل سوم = $3^2 + 4 \times 3$

تعداد نقاط شکل n ام = $n^2 + 4 \times n$

\Rightarrow تعداد نقاط شکل نهم = $9^2 + 4 \times 9 = 81 + 36 = 117$

۵۱ ☆ جمله ی عمومی الگوی $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \dots$ کدام است؟

$t_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ (۴)

$t_n = \frac{1}{2n-1}$ (۳)

$t_n = \frac{1}{n^2+n}$ (۲)

$t_n = \frac{1}{n^2-n}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ روش اول: از میان گزینه ها، فقط گزینه ی ۲ می تواند اعداد حاضر در الگو را تولید کند:

$$t_n = \frac{1}{n^2+n} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} & t_2 = \frac{1}{4+2} = \frac{1}{6} \\ t_3 = \frac{1}{9+3} = \frac{1}{12} & t_4 = \frac{1}{16+4} = \frac{1}{20} \end{cases}$$

روش دوم: مخرج همه ی اعداد حاضر در دنباله، حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی هستند:

$$\frac{1}{1 \times 2}, \frac{1}{2 \times 3}, \frac{1}{3 \times 4}, \frac{1}{4 \times 5}, \dots \Rightarrow t_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n^2+n}$$

۵۲ ☆ اگر جمله ی عمومی یک دنباله به صورت $t_n = an^2 + bn$ باشد و جمله ی دوم آن ۲ و جمله ی هفتمش ۲۸- باشد، جمله ی دهم کدام

است؟

-۹۰ (۴)

-۸۰ (۳)

-۷۰ (۲)

-۶۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

$$t_n = an^2 + bn \Rightarrow \begin{cases} t_2 = a \times 4 + b \times 2 = 2 \Rightarrow 4a + 2b = 2 \xrightarrow{\div 2} 2a + b = 1 \xrightarrow{\times 7} 14a + 7b = 7 \\ t_7 = a \times 49 + b \times 7 = -28 \Rightarrow 49a + 7b = -28 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -14a - 7b = -7 \\ 49a + 7b = -28 \end{cases} \Rightarrow 35a = -35 \Rightarrow a = -1$$

$$2a + b = 1 \xrightarrow{a=-1} -2 + b = 1 \Rightarrow b = 3$$

$$\Rightarrow t_n = -n^2 + 3n \Rightarrow t_{10} = -100 + 3 \times 10 = -70$$

۵۳ ☆ در دنباله ی اعداد طبیعی زوج، کدام یک از روابط زیر مجموع جملات n ام و $n+1$ ام را نشان می دهد؟

$4n+2$ (۴)

$4n$ (۳)

$n+2$ (۲)

$2n$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴ دنباله ی اعداد طبیعی زوج به صورت $2, 4, 6, 8, \dots$ بوده و جمله عمومی آن $t_n = 2n$ است. بنابراین:

$$t_n + t_{n+1} = 2n + 2(n+1) = 2n + 2n + 2 = 4n + 2$$

۵۴ ☆ اگر $a_n = \frac{n+3}{n^2+9}$ ، $b_n = \frac{1}{n}$ دو دنباله باشند، جمله چندم آن ها با هم برابر است؟

نهم (۴)

هفتم (۳)

پنجم (۲)

سوم (۱)

پاسخ: گزینه ۱

$$a_n = b_n \Rightarrow \frac{n+3}{n^2+9} = \frac{1}{n} \Rightarrow n^2 + 3n = n^2 + 9 \Rightarrow 3n = 9 \Rightarrow n = 3$$

۵۵ ☆ دنباله $t_n = \frac{n+3}{2n-5}$ چند جمله منفی دارد؟

سه ۴

دو ۳

یک ۲

صفر ۱

پاسخ: گزینه ۳ راه اول: نامعادله $t_n < 0$ را حل می کنیم:

$$\frac{n+3}{2n-5} < 0 \Rightarrow \begin{cases} n+3=0 \Rightarrow n=-3 \\ 2n-5=0 \Rightarrow n=\frac{5}{2} \end{cases}$$

n	-۳	$\frac{5}{2}$	
n+3	-	+	+
2n-5	-	-	+
$\frac{n+3}{2n-5}$	+	-	+

تعریف نشده

پس مجموعه ی جواب نامعادله عبارت است از: $(-3, \frac{5}{2})$ اما از آن جا که n فقط می تواند مقادیر طبیعی داشته باشد، مقادیر $n=1, n=2$ برای آن به دست می آیند. پس این دنباله دو جمله منفی دارد.

راه دوم: صورت کسر عددی مثبت است. مخرج به ازای $n=1, n=2$ منفی است و از $n=3$ به بعد، 2n بزرگ تر از 5 است و حاصل مخرج نیز مثبت می شود و t_n را مثبت می کند. پس جملات منفی، فقط t_1, t_2 هستند.

۵۶ ☆ دنباله $t_n = 34n - 2n^2$ چند جمله مثبت دارد؟

۱۶ ۴

۱۵ ۳

۱۴ ۲

۱۳ ۱

پاسخ: گزینه ۴ معادله $t_n > 0$ را حل می کنیم:

$$34n - 2n^2 > 0 \Rightarrow 2n(17-n) > 0 \Rightarrow \begin{cases} 2n=0 \Rightarrow n=0 \\ 17-n=0 \Rightarrow n=17 \end{cases}$$

n	0	17	
2n	-	+	+
17-n	+	+	-
2n(17-n)	-	+	-

جواب

در این بازه 16 عدد طبیعی $n \in (0, 17)$ وجود دارد. پس این دنباله 16 جمله مثبت دارد.

۵۷ ☆ مقدار جمله ی مشترک دو دنباله $a_n = \frac{n-3}{n+1}$, $b_n = \frac{n-2}{n+6}$ کدام است؟

$\frac{1}{6}$ ۴

$\frac{1}{5}$ ۳

$\frac{1}{4}$ ۲

$\frac{1}{3}$ ۱

پاسخ: گزینه ۳ جمله مشترک یعنی جمله ای که در معادله $a_n = b_n$ صدق کند.

$$\Rightarrow \frac{n-3}{n+1} = \frac{n-2}{n+6}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} n^2 + 3n - 18 = n^2 - n - 2 \Rightarrow 3n + n = 18 - 2 \Rightarrow 4n = 16 \Rightarrow n = 4$$

حال با استفاده از $n=4$ مقدار جمله مشترک را محاسبه می کنیم:

$$a_4 = \frac{4-3}{4+1} = \frac{1}{5} \quad b_4 = \frac{4-2}{4+6} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

۵۸ ☆ در یک دنباله ی حسابی، جمله ی اول ۲- است و از جمله ی دوم به بعد، هر جمله از رابطه ی $a_n = a_{n-1} + 4$ به دست می آید. جمله ی

دهم این دنباله، چند برابر قدر نسبت آن است؟

۱۲٫۵ ۴

۱۰٫۵ ۳

۹٫۵ ۲

۸٫۵ ۱

پاسخ: گزینه ۱
معنی رابطه ی $a_n = a_{n-1} + 4$ آن است که هر جمله از اضافه شدن عدد ثابت ۴ به جمله قبلی به دست می آید. پس قدرنسبت برابر ۴ است؛ جمله اول هم برابر ۲- است. جمله ی عمومی را تشکیل می دهیم:

$$t_n = t_1 + (n-1)d = -2 + (n-1) \times 4 = -2 + 4n - 4 = 4n - 6$$

$$t_{10} = 4 \times 10 - 6 = 34$$

جمله ی دهم:

نسبت جمله ی دهم به قدرنسبت:

$$\frac{t_{10}}{d} = \frac{34}{4} = \frac{17}{2} = 8,5$$

۵۹ ☆ دنباله ی حسابی $3, 7, 11, \dots$ چند جمله کوچک تر از ۱۰۰ دارد؟

۲۷ (۴)

۲۶ (۳)

۲۵ (۲)

۲۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۲
جمله ی اول دنباله ی ۳ و قدرنسبت دنباله ی حسابی برابر با: $d = 7 - 3 = 4$ است. جمله ی عمومی را تشکیل می دهیم:

$$t_n = a_1 + (n-1) \times 4 \Rightarrow t_n = 3 + 4n - 4 \Rightarrow t_n = 4n - 1$$

حال نامعادله ی $t_n < 100$ را حل می کنیم:

$$4n - 1 < 100 \Rightarrow 4n < 101 \xrightarrow{\div 4} n < \frac{101}{4} \Rightarrow n < 25,25 \dots \Rightarrow n \leq 25$$

۱۱های طبیعی کم تر از $25,25 \dots$ عبارتند از:

$$n = 1, 2, 3, \dots, 25$$

پس این دنباله ی ۲۵ جمله ی کوچک تر از ۱۰۰ دارد.

۶۰ ☆ در یک دنباله ی حسابی، جمله ی هفتم برابر ۲۴ و جمله ی بیست و هفتم برابر ۶۴ است. جمله ی هشتم این دنباله کدام است؟

۲۱۰ (۴)

۱۹۰ (۳)

۱۸۰ (۲)

۱۷۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

$$\begin{cases} t_7 = 24 \Rightarrow t_1 + 6d = 24 \\ t_{27} = 64 \Rightarrow t_1 + 26d = 64 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -t_1 - 6d = -24 \\ t_1 + 26d = 64 \end{cases} \Rightarrow 20d = 40 \Rightarrow d = 2$$

$$t_1 + 6d = 24 \xrightarrow{d=2} t_1 + 6 \times 2 = 24 \Rightarrow t_1 = 24 - 12 = 12$$

جمله ی عمومی:

$$t_n = 12 + (n-1) \times 2 = 12 + 2n - 2 \Rightarrow t_n = 2n + 10$$

$$t_{80} = 2 \times 80 + 10 = 160 + 10 = 170$$

جمله ی هشتماد:

۶۱ ☆ در دنباله ی حسابی $-3, x, 5, y, z, \dots$ حاصل $x + y + z$ کدام است؟

۲۵ (۴)

۲۳ (۳)

۱۸ (۲)

۱۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۳
در دنباله ی حسابی، هر جمله (غیر از جمله اول) میانگین جملات طرفین خود است:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{-3+5}{2} = \frac{2}{2} = 1 \\ 5 &= \frac{x+y}{2} \xrightarrow{x=1} 5 = \frac{1+y}{2} \Rightarrow 10 = 1+y \Rightarrow y = 9 \\ y &= \frac{5+z}{2} \xrightarrow{y=9} 9 = \frac{5+z}{2} \Rightarrow 18 = 5+z \Rightarrow z = 13 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x + y + z = 1 + 9 + 13 = 23$$

۶۲ ☆ بین دو عدد ۴ و ۵۸ سه عدد قرار می دهیم تا حاصل یک دنباله ی حسابی شود. جمله ی وسط این دنباله کدام است؟

۳۱ (۴)

۲۷ (۳)

۲۴ (۲)

۱۸ (۱)

پاسخ: گزینه ۴
باید دنباله ای به صورت $4, \dots, x, \dots, 58$ و جمله ی وسط آن را تعیین کنیم. از آن جا که در هر دنباله، هر جمله ی برابر است با میانگین جملات متساوی الفاصله از طرفین آن، داریم:

$$x = \frac{4 + 58}{2} = \frac{62}{2} = 31$$

روش دوم:

$$4 \overset{+d}{\curvearrowright}, \dots, \dots, \dots, \dots \overset{+d}{\curvearrowright}, 58$$

$$\Rightarrow 4 + 4d = 58 \Rightarrow 4d = 54 \Rightarrow d = \frac{54}{4} = \frac{27}{2}$$

$$\text{جمله ی وسط} = 4 + 2d = 4 + 2 \times \frac{27}{2} = 4 + 27 = 31$$

۶۳ ☆ بین دو عدد ۳۲ و ۸۴ سه عدد به گونه‌ای قرار می‌دهیم که یک دنباله‌ی حسابی ساخته شود. مجموع این سه عدد کدام است؟

۲۱۴ (۴)

۱۹۴ (۳)

۱۷۴ (۲)

۱۵۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

دنباله‌ی حسابی به فرم مقابل خواهد بود:

$$32 \overset{+d}{\curvearrowright}, \dots, \dots, \dots, \dots \overset{+d}{\curvearrowright}, 84$$

$$\Rightarrow 32 + 4d = 84 \Rightarrow 4d = 52 \Rightarrow d = \frac{52}{4} = 13$$

$$\Rightarrow 32 \overset{+13}{\curvearrowright}, \underbrace{45, 58, 71, 84}$$

$$\text{مجموع سه جمله} : 45 + 58 + 71 = 174$$

۶۴ ☆ مجموع ۵ جمله‌ی متوالی از یک دنباله‌ی حسابی ۷۰ است. اگر جمله‌ی دوم ۱۰ باشد، قدرنسبت کدام است؟

۸ (۴)

۴ (۳)

۲ (۲)

-۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ نکته: برای نمایش جملات متوالی یک دنباله‌ی حسابی، آن هم وقتی مجموع آن‌ها در دسترس باشد، دنباله را به صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$\dots, x - 2d, x - d, x, x + d, x + 2d, \dots$$

$$\text{مجموع ۵ جمله ی متوالی} = 70 \Rightarrow (x - 2d) + (x - d) + x + (x + d) + (x + 2d) = 70$$

$$\Rightarrow 5x = 70 \Rightarrow x = \frac{70}{5} = 14 = \text{وسط جمله ی وسط} = t_p$$

از طرفی $t_p = 10$ می‌توانیم قدرنسبت را به دست آوریم:

$$d = t_p - t_p = 14 - 10 = 4$$

۶۵ ☆ با جملات مشترک دو دنباله‌ی حسابی ۳، ۶، ۹، ۱۲، ۱۵، ... و ۳، ۵، ۷، ۹، ... یک دنباله‌ی حسابی می‌سازیم. جمله‌ی بیستم دنباله‌ی جدید

کدام است؟

۱۱۷ (۴)

۱۰۲ (۳)

۹۳ (۲)

۸۹ (۱)

پاسخ: گزینه ۴ دنباله‌ی جملات مشترک عبارت است از: ۳، ۹، ۱۵، ...

جمله‌ی اول این دنباله‌ی ۳ و قدرنسبت آن ۶ است. جمله‌ی عمومی را تشکیل می‌دهیم:

$$t_n = a_1 + (n - 1)d = 3 + (n - 1) \times 6 = 3 + 6n - 6 \Rightarrow t_n = 6n - 3$$

$$t_{p_0} = 6 \times 20 - 3 = 120 - 3 = 117$$

۶۶ ☆ جمله‌ی n ام دنباله‌ی حسابی $a_1 = 5$ ، $d = 3$ چقدر از جمله‌ی n ام دنباله‌ی حسابی $a'_1 = 4$ ، $d' = 3$ بزرگتر است؟

$n - 1$ (۴)

n (۳)

$n + 1$ (۲)

1 (۱)

پاسخ: گزینه ۱

$$a_n = a_1 + (n - 1)d = 5 + (n - 1) \times 3 = 5 + 3n - 3 = 3n + 2$$

$$a'_n = a'_1 + (n - 1)d' = 4 + (n - 1) \times 3 = 4 + 3n - 3 = 3n + 1$$

$$a'_n, a_n \text{ اختلاف} = (3n + 2) - (3n + 1) = 1$$

۶۷ ☆ در یک دنباله‌ی حسابی حاصل $t_{16} - t_{11}$ با حاصل کدام یک برابر است؟

$t_{39} - t_{34}$ (۴)

$t_{24} - t_{20}$ (۳)

$t_{17} - t_{14}$ (۲)

$t_{12} - t_6$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

$$t_{21} - t_{16} = (t_1 + 20d) - (t_1 + 15d) = 20d - 15d = 5d$$

$$t_{39} - t_{34} = (t_1 + 38d) - (t_1 + 33d) = 38d - 33d = 5d$$

۶۸ ☆ کدام یک از دنباله‌های زیر یک دنباله‌ی حسابی است؟

$t_n = n^3 + 2n$ (۴)

$t_n = n^2 + 2$ (۳)

$t_n = 3n + 1$ (۲)

$t_n = \frac{1}{n+1}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲. دنباله‌ی حسابی یک الگوی خطی است و جمله‌ی عمومی آن به شکل $t_n = an + b$ (یعنی برحسب n از درجه‌ی ۱) است. پس تنها گزینه‌ی ۲ صحیح است.

۶۹ ☆ در دنباله‌ی حسابی $3, 8, 13, 18, \dots$ جملات t_3, t_7, t_{11}, \dots دنباله‌ی حسابی جدیدی تشکیل می‌دهند. قدرنسبت این دنباله کدام

است؟

۳۲ (۴)

۲۸ (۳)

۲۲ (۲)

۲۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۱. قدرنسبت دنباله‌ی $3, 8, 13, 18, \dots$ برابر است با ۵

از طرفی:

$$\Rightarrow \text{قدرنسبت دنباله‌ی جدید} = 4d = 4 \times 5 = 20$$

$$+4d + 4d$$

t_3, t_7, t_{11}, \dots

۷۰ ☆ در یک دنباله‌ی حسابی جمله‌ی هفتم ۴ برابر جمله‌ی سوم است. در این دنباله قدرنسبت چند برابر جمله‌ی دوم است؟

۳ (۴)

۸ (۳)

۹ (۲)

۱۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

$$t_7 = 4t_3 \Rightarrow t_1 + 6d = 4(t_1 + 2d)$$

$$\Rightarrow t_1 + 6d = 4t_1 + 8d \Rightarrow 3t_1 = -2d \Rightarrow t_1 = -\frac{2}{3}d$$

$$\frac{d}{t_7} = \frac{d}{t_1 + d} = \frac{d}{-\frac{2}{3}d + d} = \frac{d}{\frac{1}{3}d} = 3$$

۷۱ ☆ اگر در یک دنباله‌ی هندسی $\frac{t_9}{t_5} = \sqrt{5}$ ، $\frac{t_3}{t_1} = \sqrt{5}$ ، آن گاه $\frac{t_9}{t_5}$ کدام است؟

$5\sqrt{5}$ (۴)

۵ (۳)

$\sqrt{5}$ (۲)

$\frac{\sqrt{5}}{5}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

$$t_n = t_1 \times r^{n-1}$$

جمله‌ی عمومی دنباله‌ی هندسی

$$\frac{t_3}{t_1} = \frac{t_1 \times r^2}{t_1} = r^2 = \sqrt{5}$$

$$\frac{t_9}{t_5} = \frac{t_1 \times r^8}{t_1 \times r^4} = r^4 = (r^2)^2 = (\sqrt{5})^2 = 5$$

۷۲ ☆ کدام مجموعه متناهی است؟

اعداد اول بین ۱۰۰ تا ۱۰۰۰۰۰۰ (۲)

مجموعه خطوطی که از نقطه $(2, 0)$ می‌گذرد. (۱)

$Z - W$ (۴)

اعداد حقیقی در فاصله بین ۱ و ۲ (۳)

پاسخ: گزینه ۲. از هر نقطه بیشمار خط راست می‌گذرد، بنابراین مجموعه خطوط گذرنده از نقطه‌ای به مختصات $(2, 0)$ نامتناهی است.

(۲) تعداد اعداد اول بین ۱۰۰ تا ۱۰۰۰۰۰۰ معلوم و برابر با یک عدد حسابی است؛ پس یک مجموعه متناهی را تشکیل می‌دهند.

(۳) بین هر دو عدد حقیقی، بیشمار عدد حقیقی وجود دارد. (به نقاط روی محور اعداد که بین ۱ و ۲ وجود دارند، فکر کنید).

(۴)

$$Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\} \Rightarrow Z - W = \{\dots, -3, -2, -1\}$$

$$W = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

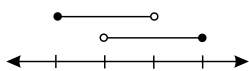
پس نامتناهی است.

دقت: برای متناهی بودن یک مجموعه، فقط کافیست که تعداد اعضای آن قابل شمارش باشد؛ حتی اگر شمارش آن مشکل باشد یا تعداد اعضای آن زیاد باشد.

۷۳ ☆ اشتراک بازه های $[-2, a]$ و $(b, 4]$ برابر $(-\frac{2}{3}, 1)$ است. اجتماع بازه های (b, a) و $(-2a - 1, b)$ کدام است؟

۱ $(-3, 1)$ ۲ $(-1, \frac{2}{3})$ ۳ $(1, 4)$ ۴ $(-3, 1) - \{-\frac{2}{3}\}$

پاسخ: گزینه ۴ برای آنکه اشتراک بازه های $[-2, a]$ و $(b, 4]$ برابر با $(-\frac{2}{3}, 1)$ باشد، باید روی محور چنین وضعیتی داشته باشد:



بنابراین اشتراک آنها (b, a) است:

$$(b, a) = \left(-\frac{2}{3}, 1\right) \Rightarrow \begin{cases} b = -\frac{2}{3} \\ a = 1 \end{cases}$$

$$(-2a - 1, b) = (-2 \times 1 - 1, -\frac{2}{3}) = (-3, -\frac{2}{3})$$

$$(b - a) = \left(-\frac{2}{3}, 1\right)$$

پس:

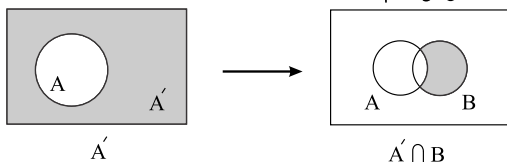
$$(-2a - 1, b) \cup (b, a) = \left(-3, -\frac{2}{3}\right) \cup \left(-\frac{2}{3}, 1\right)$$

$$= (-3, 1) - \left\{-\frac{2}{3}\right\}$$

۷۴ ☆ اگر $n(A) = 20$ و $n(A \cap B) = 10$ باشد، حاصل $n(A' \cap B)$ کدام است؟

۱ ۸ ۲ ۱۲ ۳ ۵ ۴ ۳۰

پاسخ: گزینه ۳ مسئله $n(A' \cap B)$ یعنی تعداد اعضای $A' \cap B$ را خواسته است. آن را روی نمودار ون نمایش می دهیم:



$$n(A' \cap B) = n(B) - n(A \cap B)$$

پس تعداد اعضای $A' \cap B$ عبارتست از:

فرض های مسئله را ببینید:

$$\left. \begin{aligned} n(B) &= 10 \\ 2n(A \cap B) &= 10 \Rightarrow n(A \cap B) = 5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow n(A' \cap B) = 10 - 5 = 5$$

۷۵ ☆ اگر مجموعه A متناهی و مجموعه های B و C نامتناهی باشند، در مورد هر یک از مجموعه های $A \cap (B \cup C)$ و $B - (A \cap C)$ ، به

ترتیب از راست به چپ، از نظر متناهی بودن یا نبودن چه می توان گفت؟

۱ متناهی - متناهی ۲ نامتناهی - نامتناهی ۳ متناهی - نامتناهی ۴ نامتناهی - متناهی

پاسخ: گزینه ۳ از متناهی بودن مجموعه A نتیجه می گیریم که تعداد اعضای آن قابل شمارش و محدود است؛ پس تعداد اعضای اشتراک A با مجموعه $B \cup C$ نمی تواند نامحدود باشد (یعنی از تعداد اعضای A بیشتر باشد)؛ پس مجموعه $A \cap (B \cup C)$ متناهی است.

$A \cap C$ نامتناهی است، پس $A \cap C$ متناهی است (اشتراک هر مجموعه متناهی و نامتناهی، خودش متناهی است). از طرفی برای تعیین $B - (A \cap C)$ باید اعضای $A \cap C$ را از B خارج کنیم؛ یعنی تعداد قابل شمارشی عضو را از B که نامتناهی است، خارج کرده ایم؛ در نتیجه تعداد اعضای باقیمانده در B نامحدود است و

$B - (A \cap C)$ نامتناهی خواهد بود.

۷۶ ☆ حاصل $A = ([-6, 4] \cap (-\infty, 1]) - [0, 2]$ کدام است؟

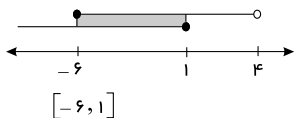
۴ $[2, 4]$

۳ $[-6, 2]$

۲ $[-6, 0]$

۱ $[-6, 0]$

پاسخ: گزینه ۱ ابتدا حاصل $[-6, 4] \cap (-\infty, 1]$ را با استفاده از محور بدست می آوریم:



حال، اعضای بازه $[0, 2]$ را از این بازه کم می کنیم:

$$[-6, 1] - [0, 2] = [-6, 0]$$



باز هم استفاده از محور، بهترین راه حل است.

دقت: چون خود صفر را از بازه $[-6, 1]$ خارج کرده ایم، جای خالی آن باقیمانده و انتهای بازه، باز است.

۷۷ ☆ اگر A و B زیرمجموعه هایی از مجموعه مرجع U ، $n(U) = 100$ ، $n(A) = 45$ ، $n(B) = 70$ ، $n(B - A) = 50$ باشند، آن

گاه $n((A \cup B)')$ کدام است؟

۴ ۲۰

۳ ۱۵

۲ ۱۰

۱ ۵

پاسخ: گزینه ۱ باید تعداد اعضای مجموعه $(A \cup B)'$ را بیابیم؛ یعنی متمم $A \cup B$ را؛ برای این کار تعداد اعضای $A \cup B$ را تعیین می کنیم و اختلاف آن را از ۱۰۰ (تعداد اعضای مرجع) بدست می آوریم:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

در این رابطه: $n(A)$ و $n(B)$ معلوم است؛ می ماند $n(A \cap B)$ که برای آن داریم:

$$\begin{aligned} n(B - A) &= n(B) - n(A \cap B) \\ \Rightarrow 50 &= 70 - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 70 - 50 = 20 \end{aligned}$$

$$n(A \cup B) = 45 + 70 - 20 = 95$$

$$n((A \cup B)') = n(u) - n(A \cup B) = 100 - 95 = 5$$

۷۸ ☆ اگر ۶۰٪ دانش آموزان کلاس عضو تیم فوتبال، ۵۰٪ دانش آموزان کلاس عضو تیم والیبال باشند و ۵٪ آن ها عضو هیچ تیمی نباشند،

در این صورت چند درصد دانش آموزان عضو هر دو تیم هستند؟

۴ ۵

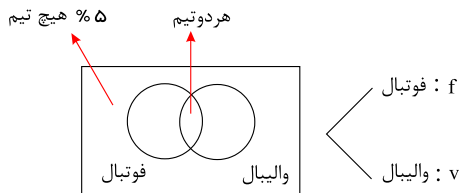
۳ ۱۰

۲ ۱۵

۱ ۲۰

پاسخ: گزینه ۲

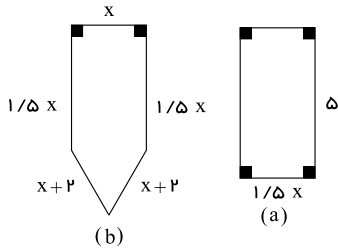
به نمودار ون توجه کنید:



$$n(f \cup v) = \%100 - \%5 = \%95$$

$$\Rightarrow n(f) + n(v) - n(f \cap v) = \%95 \Rightarrow \%60 + \%50 - n(f \cap v) = \%95$$

$$\Rightarrow n(f \cap v) = \%60 + \%50 - \%95 = \%15$$



۷۹ ☆ مجموعه مقادیر x، کدام بازه زیر باشد تا محیط شکل (a) از محیط شکل (b) بیشتر باشد؟

(کامل ترین گزینه را انتخاب کنید)

- ۱ $(-\infty, 2)$
- ۲ $(2, 4)$
- ۳ $(0, 2)$
- ۴ $(0, 1)$

پاسخ: گزینه ۳

(a) محیط شکل = $2 \times 5 + 2 \times 1,5x = 10 + 3x$ (دقت کنید که شکل مستطیل است)

(b) محیط شکل = $1,5x + (x + 2) + (x + 2) + 1,5x + x = 6x + 4$

حکم مسئله: محیط شکل (a) > محیط شکل (b) $\Rightarrow 10 + 3x > 6x + 4 \Rightarrow 10 - 4 > 6x - 3x$

$$\Rightarrow 3x < 6 \xrightarrow{\div 3} x < 2$$

اما: xها باید مثبت باشند که طول ضلع منفی تولید نکنند. پس: $0 < x < 2$

۸۰ ☆ کدام یک از مجموعه های زیر متناهی است؟ (N مجموعه اعداد طبیعی می باشد).

۱ $A_1 = \{x | x \in N, x^2 > 25\}$

۲ $A_2 = \{x | 1000 \text{ از } x \text{ و عدد اول بزرگتر از } x\}$

۳ $A_3 = \{x \in N | x > 9, x < 1000\}$

۴ $A_4 = \{x | 100 \text{ و عدد حقیقی کوچک تر از } x\}$

پاسخ: گزینه ۳ A_1 (مجموعه همه اعداد طبیعی است که مربع آنها از ۲۵ بیشتر است؛ یعنی: $\{6, 7, 8, \dots\}$ پس نامتناهی است.

۲ A_2 مجموعه اعداد اول بیشتر از ۱۰۰۰ است. پس مجموعه ای بی انتها است و نامتناهی است.

۳ A_3 مجموعه اعداد طبیعی بیش از ۹ و کمتر از ۱۰۰۰ است. یعنی: $\{10, 11, \dots, 999\}$ پس متناهی است. (اعضای آن قابل شمارش هستند)

۴ A_4 مجموعه اعداد حقیقی کوچکتر از ۱۰۰ هستند؛ پس تعداد آن بی شمار است. (به تعداد نقاط روی محور اعداد و قبل از ۱۰۰ فکر کنید)

۸۱ ☆ اگر مجموعه مرجع، مجموعه اعداد صحیح باشد، $A' = \{5, 6, 7, 8\}$ و $B' = \{7, 8, 9, 10\}$ باشد، آنگاه مجموعه $(A \cup B)'$

چندعضوی است؟

- ۱ ۲ عضوی
- ۲ ۵ عضوی
- ۳ ۷ عضوی
- ۴ ۸ عضوی

پاسخ: گزینه ۱ می دانیم: $(A \cup B)' = A' \cap B'$

بنابراین:

$$n((A \cup B)') = n(A' \cap B')$$

حال $A' \cap B'$ را بدست می آوریم:

$$A' \cap B' = \{5, 6, 7, 8\} \cap \{7, 8, 9, 10\} = \{7, 8\}$$

$$\Rightarrow n(A' \cap B') = n((A \cup B)') = 2$$

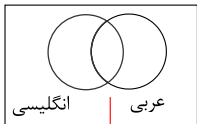
۸۲ ☆ در یک گروه ۴۰ نفره دانش آموزی، ۲۵ نفر زبان انگلیسی، ۳۲ نفر زبان عربی و ۶ نفر هیچ کدام از این دو زبان را نمی خوانند. چه تعداد

از دانش آموزان هر دو زبان را می خوانند؟

- ۱ ۲۲
- ۲ ۲۳
- ۳ ۲۱
- ۴ ۲۰

پاسخ: گزینه ۲ دانش آموزانی که هر دو زبان را می خوانند، کسانی هستند که در ناحیه مشترک بین دو مجموعه زیر حضور دارند. پس تعداد آنها را برابر با x قرار می دهیم و در

آخر x را محاسبه می کنیم:



E: انگلیسی

A: عربی

پس تعداد کسانی که لااقل یکی از دو زبان را می‌خوانند $۳۴ = ۴۰ - ۶$ نفر خواهد بود؛ یعنی:

۶ نفر = کسانی که هیچ زبانی را نمی‌خوانند

$$n(E \cup A) = ۳۴ \Rightarrow n(A) + n(E) - n(A \cap E) = ۳۴$$

$$\Rightarrow ۳۲ + ۲۵ - x = ۳۴ \Rightarrow x = ۵۷ - ۳۴ = ۲۳$$

۸۳ ☆ اگر a عددی مثبت باشد و اعداد a ، $\frac{a}{۳}$ و $\frac{a}{۹}$ به ترتیب جملات اول، سوم و پنجم یک دنباله هندسی باشند، جمله دهم دنباله کدام است؟

۳^۵ × a (۴)

۳a (۳)

$\frac{a\sqrt{۳}}{۳^۵}$ (۲)

$\frac{a}{۳^۵}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

جمله عمومی دنباله هندسی $t_n = t_1 \times r^{n-1}$

$$\left. \begin{aligned} t_1 &= a \\ t_3 &= \frac{a}{۳} \\ t_3 &= t_1 r^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{a}{۳} = a \times r^2 \Rightarrow r^2 = \frac{1}{۳} \Rightarrow r = \pm \sqrt{\frac{1}{۳}} \xrightarrow{\text{همه جملات مثبت هستند}} r = \sqrt{\frac{1}{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$t_{10} = t_1 r^9 = a \times \left(\frac{\sqrt{۳}}{۳}\right)^9 = a \times \frac{۳^4 \sqrt{۳}}{۳^9} = \frac{a\sqrt{۳}}{۳^۵}$$

۸۴ ☆ جمله پنجم دنباله هندسی ۱ ، $۳x$ ، $۹x - ۶$ ، ... کدام است؟

۴۸ (۴)

۴۲ (۳)

۳۸ (۲)

۲۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

باتوجه به آن که در سه جمله متوالی هر دنباله هندسی، مربع جمله وسط برابر با حاصل ضرب دو طرفین خود است، داریم:

$$(۳x)^2 = (x+1)(9x-6) \Rightarrow 9x^2 = 9x^2 + 9x - 6x - 6$$

$$\Rightarrow 9x^2 = 9x^2 + 3x - 6 \Rightarrow 3x - 6 = 0 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2$$

و دنباله هندسی به صورت زیر است:

۳، ۶، ۱۲، ...

که جمله اول آن ۳ و قدرنسبت آن ۲ است. پس: $t_5 = t_1 q^4 = 3 \times (2)^4 = 48$

۸۵ ☆ در یک دنباله هندسی با جملات مثبت، حاصل ضرب سه جمله اول برابر با ۲۱۶ است. اگر جمله اول دنباله ۲ باشد، جمله سوم چند برابر قدرنسبت است؟

۳۶ (۴)

۳۲ (۳)

۱۶ (۲)

۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

$$t_1 \times t_3 \times t_3 = ۲۱۶ \Rightarrow t_1 \times t_1 r \times t_1 r^2 = ۲۱۶ \Rightarrow t_1^3 r^3 = ۲۱۶$$

$$\sqrt[3]{t_1^3 r^3} = \sqrt[3]{۲۱۶} \Rightarrow t_1 r = 6 \xrightarrow{t_1=2} 2r = 6 \Rightarrow r = 3$$

$$\frac{t_3}{t_1} = \frac{t_1 r^2}{t_1} = t_1 r = 2 \times 3 = 6$$

۸۶ ☆ بین دو عدد ۲ و ۲۰۰ نوزده عدد مثبت چنان قرار داده‌ایم که یک دنباله هندسی تولید شود جمله وسط این دنباله کدام است؟

۲۰ (۴)

۱۸ (۳)

۱۲ (۲)

۱۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۴ دنباله حاصل به صورت زیر است: $۲، \dots، ۲۰۰$ جمله ۹، $\dots، ۲۰۰$ جمله ۹ وسط، $۲، \dots$

در هر دنباله هندسی، مربع جمله ی وسط، برابر با حاصل ضرب حالت متساوی الفاصله از طرفین خود است:

$$(جمله ی وسط)^2 = 2 \times 200 = 400 \Rightarrow \sqrt{400} = 20 = \text{جمله ی وسط}$$

۸۷ ☆ در دنباله هندسی $m, m^2, 27, \dots$ جمله ی چهارم کدام است؟

۹۹ (۴)

۸۱ (۳)

۴۸ (۲)

۳۹ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ قدر نسبت این دنباله m است:

$$\begin{matrix} \times m & \times m \\ \curvearrowright & \curvearrowright \\ m, m^2, 27, \dots \end{matrix}$$

از طرفی ۲۷ جمله سوم است و داریم:

$$t_3 = t_1 r^2 = m \times m^2 = 27 \Rightarrow m^3 = 27 \Rightarrow 3$$

$$t_4 = t_1 r^3 = 3 \times 3^3 = 3^4 = 81$$

۸۸ ☆ در یک دنباله هندسی صعودی به صورت $4, a, 9, b, \dots$ مجموع ۶ جمله اول کدام است؟

$83\frac{1}{8}$ (۴)

$82\frac{3}{8}$ (۳)

$81\frac{7}{8}$ (۲)

$81\frac{3}{8}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴ برای جمله سوم این دنباله داریم: $9 = 4r^2 \Rightarrow r^2 = \frac{9}{4}$

در دنباله هندسی، اگر قدر نسبت بزرگ تر از ۱ باشد، دنباله هندسی صعودی است پس $r = \frac{3}{2}$ قابل قبول است.

$$\Rightarrow \begin{cases} r = \frac{3}{2} \\ r = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

جملات دنباله را تشکیل می دهیم:

$$t_1 = 4, \quad t_2 = 4 \times \frac{3}{2} = 6, \quad t_3 = 9$$

$$t_4 = 9 \times \frac{3}{2} = \frac{27}{2}, \quad t_5 = \frac{27}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{81}{4}$$

$$t_6 = \frac{81}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{243}{8}$$

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6 = 83\frac{1}{8}$$

۸۹ ☆ در یک دنباله هندسی با قدر نسبت $r = 2$ مجموع شش جمله اول چند برابر مجموع سه جمله اول است؟

۹ (۴)

۸ (۳)

۷ (۲)

۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

$$\frac{t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6}{t_1 + t_2 + t_3} = \frac{t_1 + t_1 r + t_1 r^2 + t_1 r^3 + t_1 r^4 + t_1 r^5}{t_1 + t_1 r + t_1 r^2}$$

$$\stackrel{r=2}{=} \frac{t_1 + 2t_1 + 4t_1 + 8t_1 + 16t_1 + 32t_1}{t_1 + 2t_1 + 4t_1} = \frac{63t_1}{7t_1} = \frac{63}{7} = 9$$

۹۰ ☆ بین اعداد $\frac{3}{2}$ ، ۴۸ چهار عدد به گونه ای قرار می دهیم که یک دنباله هندسی تشکیل شود. جمله سوم این دنباله کدام است؟

۲۲ (۴)

۱۲ (۳)

۶ (۲)

۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

$$\begin{matrix} \times r & \times r & \times r & \times r & \times r \\ \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright \\ \frac{3}{2}, \dots, \dots, \dots, \dots, 48 \end{matrix}$$

دنباله حاصل به صورت مقابل است: $\frac{3}{2}, \dots, \dots, \dots, 48$

$$48 = \frac{3}{2} \times r^5 \Rightarrow r^5 = \frac{48}{\frac{3}{2}} = \frac{2 \times 48}{3} = 32 \Rightarrow r = 2$$

جمله‌ی سوم $t_3 = t_1 r^2 = \frac{3}{2} \times 2^2 = 3 \times 2 = 6$

۹۱ ☆ در یک دنباله‌ی هندسی $t_1 t_3 t_5 = 8 t_2 t_4 t_6$ ؛ قدرنسبت کدام است؟

$\sqrt{2}$ (۴)

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ (۳)

۲ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

$t_1 t_3 t_5 = 8 t_2 t_4 t_6 \Rightarrow t_1 \times t_1 r^2 \times t_1 r^4 = 8 t_1 r^1 \times t_1 r^3 \times t_1 r^5$

$\Rightarrow \sqrt[3]{t_1^3 r^6} = 8 \sqrt[3]{t_1^3 r^9} \Rightarrow r^6 = 8 r^9 \Rightarrow \frac{r^6}{r^9} = 8 \Rightarrow \frac{1}{r^3} = 8$

$\rightarrow \frac{1}{r} = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} \Rightarrow \frac{1}{r} = \sqrt[3]{2^3} \Rightarrow r = \frac{1}{\sqrt[3]{2^3}}$

۹۲ ☆ اعداد $b, 9, 3\sqrt{3}, 3^a$ جملات متوالی یک دنباله‌ی هندسی هستند. واسطه‌ی هندسی بین دو عدد $a\sqrt{3}$ و b کدام است؟

۹ (۴)

$\sqrt{3}$ (۳)

۳ (۲)

$3\sqrt{3}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

قدرنسبت این دنباله عبارت است از:

$r = \frac{9}{3\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$

$b = 9r = 9\sqrt{3}$

از طرفی b از ضرب شدن 9 در 2 به دست آمده:

3^a نیز وقتی در 2 ضرب شده، $3\sqrt{3}$ را ساخته است:

$3^a \times \sqrt{3} = 3\sqrt{3} \Rightarrow 3^a = 3 \Rightarrow a = 1$

پس $a\sqrt{3}$ برابر است با $\sqrt{3}$ و واسطه‌ی هندسی $\sqrt{3}$ و $9\sqrt{3}$ عبارت است از:

واسطه‌ی هندسی $= \sqrt{a\sqrt{3} \times b} = \sqrt{\sqrt{3} \times 9\sqrt{3}} = \sqrt{9 \times 3} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

دقت: واسطه‌ی هندسی دو عدد هم علامت، برابر است با جذر حاصل ضرب آن‌ها.

۹۳ ☆ اگر $2^a, 4\sqrt{2}, 2^b, \dots$ یک دنباله‌ی هندسی و $0 \dots$ و b و x و a یک دنباله‌ی حسابی باشند، مقدار x کدام است؟

$\sqrt{2}$ (۴)

$\frac{3}{2}$ (۳)

۲ (۲)

$\frac{5}{2}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱ در دنباله‌ی هندسی مربع جمله‌ی وسط برابر است با حاصل ضرب جملات طرفین:

$(4\sqrt{2})^2 = 2^a \times 2^b \Rightarrow 32 = 2^{a+b} \Rightarrow 2^5 = 2^{a+b} \Rightarrow a+b = 5$

از طرفی در دنباله‌ی حسابی، جمله‌ی وسط برابر است با میانگین جملات طرفین:

$a, x, b, \dots \Rightarrow x = \frac{a+b}{2} \stackrel{a+b=5}{=} \frac{5}{2}$

۹۴ ☆ اگر Z را به عنوان مجموعه‌ی مرجع در نظر بگیریم، آن گاه حاصل عبارت $(Z - W)' \cap N'$ کدام است؟

N (۴)

Z (۳)

$\{0\}$ (۲)

\emptyset (۱)

پاسخ: گزینه ۲

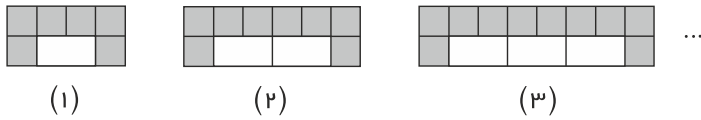
$Z - W = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} - \{0, 1, 2, \dots\} = \{\dots, -2, -1\}$

$(Z - W)' = \{0, 1, 2, \dots\}$

N' : با فرض مرجع بودن $N = \{\dots, -2, -1, 0\}$

$\Rightarrow (Z - W)' \cap N' = \{0, 1, 2, \dots\} \cap \{\dots, -2, -1, 0\} = \{0\}$

۹۵ ☆ با توجه به الگوی زیر برای ۷۲ کاشی تیره، چند کاشی سفید لازم است؟



- ۱ ۳۳
- ۲ ۳۴
- ۳ ۳۵
- ۴ ۷۲

پاسخ: گزینه ۲ دنباله t_n را برای تعداد کاشی های تیره می نویسیم:

$$+2+2$$

$$\underbrace{\quad} \quad \underbrace{\quad}$$

$$6, 8, 10, \dots$$

چون این یک الگوی خطی است (به دلیل برابر بودن قدر نسبت)، جمله عمومی آن $t_n = an + b$ است. حال a و b را به دست می آوریم:

$$t_1 = 6 \Rightarrow a \times 1 + b = 6 \Rightarrow a + b = 6$$

$$t_2 = 8 \Rightarrow a \times 2 + b = 8 \Rightarrow 2a + b = 8 \Rightarrow \begin{cases} a + b = 6 \\ -2a - b = -8 \end{cases}$$

$$-a = -2 \Rightarrow a = 2$$

$$a + b = 6 \xrightarrow{a=2} 2 + b = 6 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow t_n = 2n + 4$$

حالا ببینیم که در کدام مرحله، تعداد کاشی های تیره، ۷۲ تا می شود:

$$t_n = 72 \Rightarrow 2n + 4 = 72 \Rightarrow 2n = 68 \Rightarrow n = 34$$

از طرفی: دنباله t'_n را به عنوان تعداد کاشی های سفید در نظر می گیریم:

$$t'_n : 1, 2, 3, \dots$$

به سادگی معلوم است که $t'_n = n$ است؛ و می دانیم که مرحله ۳۴ام، مورد سؤال مسئله است. پس: $t'_{34} = 34$

۹۶ ☆ مجموعه B متناهی و مجموعه های A و C نامتناهی اند. کدام یک از گزینه ها حتماً نامتناهی است؟

- ۱ $A - (C - B)$
- ۲ $B \cup (A - C)$
- ۳ $A - (B - C)$
- ۴ $(B \cap C) - A$

پاسخ: گزینه ۳ بررسی گزینه ها:

(۱) نامتناهی و B متناهی است. پس $B - C$ قطعاً نامتناهی است. از طرفی A نیز نامتناهی است و (نامتناهی A - نامتناهی B) ممکن است متناهی یا نامتناهی باشد.

(۲) تفاضل دو مجموعه نامتناهی است و ممکن است متناهی یا نامتناهی باشد؛ بنابراین اجتماع آن با مجموعه C نیز ممکن است متناهی یا نامتناهی باشد.

(۳) $B - C$ (تفاضل یک مجموعه نامتناهی از یک مجموعه متناهی) قطعاً متناهی است؛ پس $A - (B - C)$ یعنی (متناهی A - حتماً نامتناهی خواهد بود).

(۴) $B \cap C$ اشتراک یک مجموعه متناهی با یک مجموعه نامتناهی است و حتماً متناهی است؛ پس $(B \cap C) - A$ متناهی خواهد بود.

۹۷ ☆ اگر $A \subseteq B \subseteq C'$ باشد و مجموعه های A, B, C و D به ترتیب دارای ۳، ۶، ۱۲ و ۳۰ عضو باشند حاصل $n[(A \cup B) - C]'$

کدام است؟ (U مجموعه مرجع است.)

- ۱ ۲۴
- ۲ ۱۸
- ۳ ۱۲
- ۴ ۱۰

پاسخ: گزینه ۱ یادآوری ۱: اگر $A \subseteq B$ ، آن گاه اجتماع آن ها برابر با B و اشتراکشان برابر با A است.

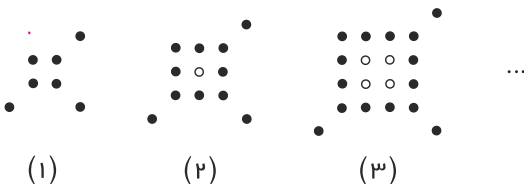
یادآوری ۲: $A - B = A \cap B'$ (این توری تفاضل را با اشتراک بیان می کنیم).

$$((A \cup B) - C)' \xrightarrow{A \cup B = B} (B - C)' = (B \cap C)'$$

$$\xrightarrow{B \subseteq C'} (B)' = B'$$

$$\Rightarrow n((A \cup B) - C)' = n(B') = n(V) - n(B) = 30 - 6 = 24$$

۹۸ ☆ در چه مرحله ای از الگوی زیر، تعداد دایره های مشکی برابر ۱۰۳ است؟



- ۱ ۱۵
- ۲ ۲۵
- ۳ ۳۰
- ۴ ۳۲

پاسخ: گزینه ۲ تعداد دایره های مشکی، دنباله ای به صورت زیر تشکیل می دهند:

$$\begin{aligned} &+4+4 \\ &\underbrace{\quad} \quad \underbrace{\quad} \\ &7, 11, 15, \dots \end{aligned}$$

چون اختلاف هر دو جمله متوالی ۴ است، یک الگوی خطی داریم و می‌دانیم که جمله عمومی آن به صورت $t_n = an + b$ است. حال به کمک دنباله فوق، a و b را می‌یابیم:

$$\begin{aligned} t_1 = 7 &\Rightarrow a \times 1 + b = 7 \Rightarrow a + b = 7 \\ t_2 = 11 &\Rightarrow a \times 2 + b = 11 \Rightarrow 2a + b = 11 \\ \Rightarrow \begin{cases} a + b = 7 \\ -2a - b = -11 \end{cases} &\Rightarrow t_n = 4n + 3 \\ \frac{-a = -4 \Rightarrow a = 4}{a = 4} & \\ a + b = 7 \rightarrow 4 + b = 7 \Rightarrow b = 3 & \end{aligned}$$

حال ببینیم که در کدام مرحله، تعداد آن‌ها به 103 می‌رسد:

$$t_n = 103 \Rightarrow 4n + 3 = 103 \Rightarrow 4n = 100 \Rightarrow n = 25$$

۹۹ ☆ در دنباله‌ای که از یک الگوی خطی پیروی می‌کند، اگر جمله‌ی سوم برابر ۷ و جمله‌ی هفتم برابر ۳ باشد، چند جمله‌ی این دنباله مثبت

است؟

۱۱ ۴

۱۰ ۳

۹ ۲

۸ ۱

پاسخ: گزینه ۲ جمله‌ی عمومی یک الگوی خطی به صورت $t_n = a_n + b$ است:

$$\begin{aligned} t_2 = 7 &\Rightarrow a \times 3 + b = 7 \Rightarrow 3a + b = 7 \\ t_3 = 3 &\Rightarrow a \times 7 + b = 3 \Rightarrow 7a + b = 3 \\ \Rightarrow \begin{cases} -3a - b = -7 \\ 7a + b = 3 \end{cases} &\Rightarrow \frac{4a = -4 \Rightarrow a = -1}{} \end{aligned}$$

$$3a + b = 7 \xrightarrow{a=-1} -3 + b = 7 \Rightarrow b = 10$$

پس t_n به صورت زیر به دست می‌آید:

$$t_n = -n + 10$$

حال نامعادله $t_n > 0$ را حل می‌کنیم:

$$t_n > 0 \Rightarrow -n + 10 > 0 \Rightarrow n < 10 \Rightarrow n \in \{1, 2, 3, 4, \dots, 9\}$$

۱۰۰ ☆ دانش‌آموزان یک کلاس می‌توانند در مسابقات علمی و ورزشی شرکت کنند. ۲۰ نفر در مسابقه‌ی ورزشی و ۱۵ نفر در مسابقه‌ی علمی شرکت کرده‌اند. اگر ۵ نفر در هیچ مسابقه‌ی شرکت نکرده باشند و ۳ نفر در هر دو مسابقه شرکت کرده باشند، تعداد کل دانش‌آموزان کلاس

چند نفر است؟

۲۶ ۴

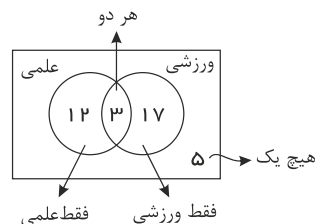
۳۷ ۳

۴۰ ۲

۳۵ ۱

پاسخ: گزینه ۳ نمودار زیر را برای این مسئله رسم می‌کنیم:

$$\text{تعداد کل کلاس} = 12 + 3 + 17 + 5 = 37$$



۱۰۱ ☆ اگر R مجموعه‌ی مرجع و $A = (-1, 5]$ باشد، آن گاه مجموعه‌ی $A' \cap [-\sqrt{5}, 7)$ شامل چند عدد صحیح است؟

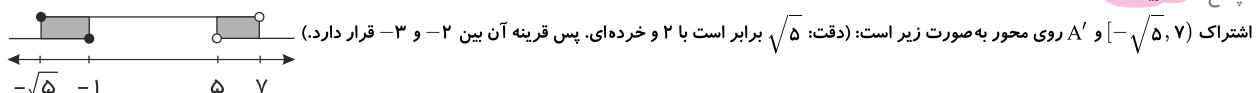
صفر ۴

۳ ۳

۲ ۲

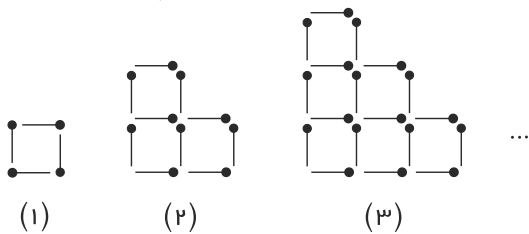
۱ ۱

پاسخ: گزینه ۳



و بخش‌های هاشور خورده شامل اعداد صحیح -1 و -2 و 6 خواهد بود.

۲۰ ☆ با تعدادی چوب کبریت مطابق الگوی زیر اشکالی را می‌سازیم. تعداد چوب کبریت‌های استفاده شده در مرحله‌ی هفتم کدام است؟



- ۵۳ (۱)
- ۵۴ (۲)
- ۶۹ (۳)
- ۷۰ (۴)

پاسخ: گزینه ۴ دنباله t_n را برای تعداد چوب کبریت‌های هر مرحله می‌نویسیم:

$$t_n : ۴, ۱۰, ۱۸, \dots$$

حال تلاش می‌کنیم که رابطه‌ای بین شماره مرحله و تعداد چوب کبریت‌ها بیابیم:

$$t_n = 1 \times 4, 2 \times 5, 3 \times 6, 4 \times 7, \dots$$

در هر یک از حاصل ضرب‌های بالا، اختلاف دو عدد که در هم ضرب شده‌اند، ۳ است. پس:

$$t_n = n(n + 3)$$

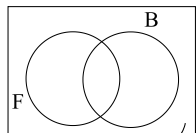
تعداد چوب کبریت‌های مرحله هفتم عبارتست از:

$$t_7 = 7 \times (7 + 3) = 7 \times 10 = 70$$

۳۰ ☆ در یک کلاس ۲۵ نفری، تعداد ۱۵ عضو فوتبال و ۱۱ نفر عضو تیم بسکتبال کلاس هستند. اگر ۵ نفر از دانش‌آموزان این کلاس عضو هیچ یک از این دو تیم نباشند، چند نفر از آن‌ها عضو هر دو تیم هستند؟

- ۷ (۱)
- ۶ (۲)
- ۵ (۳)
- ۴ (۴)

پاسخ: گزینه ۳



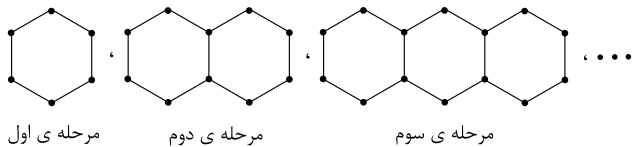
A: فوتبال B: بسکتبال
 $n(A) = 11$ $n(B) = 15$
 $n(A \cup B) = \text{کل کلاس} - 5 = 25 - 5 = 20$

۵ نفر: عضو هیچ تیم

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - \underbrace{n(A \cap B)}_{\text{تعداد اعضای هر دو تیم}} \Rightarrow 20 = 15 + 11 - n(A \cap B)$$

$$\Rightarrow n(A \cap B) = 15 + 11 - 20 = 6$$

۴۰ ☆ بانوجه به الگوی زیر، تعداد پاره‌خط‌ها در مرحله دهم کدام است؟



- ۵۰ (۱)
- ۵۱ (۲)
- ۶۰ (۳)
- ۶۱ (۴)

$$\begin{matrix} +5 & +5 \\ \hline 6, & 11, & 16, & \dots \end{matrix}$$

پاسخ: گزینه ۲ دنباله‌ی تعداد پاره‌خط‌های هر مرحله را می‌نویسیم: $6, 11, 16, \dots$

این یک الگوی خطی (دنباله حسابی) با قدر نسبت ۵ است و می‌دانیم که جمله عمومی دنباله حسابی عبارتست از:

$$t_n = 5n + b \text{ یعنی } t_n = an + b$$

برای محاسبه b ، جمله اول را در t_n قرار می‌دهیم: $t_1 = 5 \times 1 + b = 6$

$$\Rightarrow b = 6 - 5 = 1 \Rightarrow t_n = 5n + 1$$

و مرحله‌ی دهم عبارتست از:

$$t_{10} = 5 \times 10 + 1 = 51$$

۵. اگر c_n جمله عمومی یک الگوی خطی، $c_7 = 17$ و $c_{10} = 41$ باشد، کدام است؟

$c_n = 4n$ (۴)

$c_n = 5n - 9$ (۳)

$c_n = 4n + 1$ (۲)

$c_n = 5n - 3$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ جمله عمومی یک الگوی خطی بصورت $c_n = an + b$ است:

$$\begin{cases} c_7 = 17 \Rightarrow 7a + b = 17 \\ c_{10} = 41 \Rightarrow 10a + b = 41 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3a - b = -17 \\ 10a + b = 41 \end{cases}$$

$$6a = 24 \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow c_n = 4n + 1$

۶. جمله بیستم دنباله حسابی $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ کدام است؟

$-\frac{17}{3}$ (۴)

$-\frac{8}{3}$ (۳)

$\frac{1}{20}$ (۲)

$\frac{1}{19}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ اگر دنباله $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ حسابی باشد (مطابق اشاره سوال)، تفاضل جمله دوم و اول، قدر نسبت آن را تشکیل خواهد داد:

$$d = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{2-3}{6} = -\frac{1}{6}$$

می‌دانیم جمله عمومی دنباله حسابی بصورت $t_n = t_1 + (n-1)d$ است؛ مقادیر $d = -\frac{1}{6}$ و $t_1 = \frac{1}{2}$ را در آن قرار می‌دهیم:

$$t_n = \frac{1}{2} + (n-1)\left(-\frac{1}{6}\right)$$

و جمله بیستم عبارتست از:

$$t_{20} = \frac{1}{2} + (20-1)\left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{2} - \frac{19}{6} = \frac{3-19}{6} = -\frac{16}{6} = -\frac{8}{3}$$

۷. چه تعداد از عبارت‌های زیر صحیح است؟

(الف) اجتماع دو مجموعه‌ی متناهی، مجموعه‌ای متناهی است.

(ب) اشتراک یک مجموعه‌ی متناهی با یک مجموعه‌ی نامتناهی، مجموعه‌ای نامتناهی است.

(پ) اشتراک مجموعه مضارب عدد ۵ با مجموعه مضارب عدد ۷، مجموعه‌ای متناهی است.

(ت) اگر A مجموعه‌ای متناهی و B مجموعه‌ای نامتناهی باشد مجموعه $A - B$ مجموعه‌ای نامتناهی است.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۱ گزینه‌ها را ببینید: (الف) دو مجموعه‌ی متناهی، تعداد اعضای قابل شمارش دارند. پس تعداد اعضای اجتماع آنها نیز قابل شمارش است و متناهی است.

(ب) اشتراک یک مجموعه‌ی متناهی با یک مجموعه‌ی نامتناهی، حداکثر می‌تواند به اندازه‌ی تمام مجموعه‌ی متناهی باشد. پس متناهی است و این گزینه نادرست است.

(پ) این جمله به مضارب مشترک ۵ و ۷ اشاره دارد؛ یعنی مضارب ۳۵ و مجموعه مضارب ۳۵ نامتناهی است. پس این گزینه نیز نادرست است.

(ت) اگر از مجموعه‌ای متناهی مثل A ، مجموعه‌ای نامتناهی مثل B را کم کنیم، حاصل این کار مجموعه‌ای است که زیرمجموعه A است و نمی‌تواند نامتناهی باشد. پس این گزینه نیز نادرست است.

۸. اگر M مجموعه‌ی مرجع: $M = \{x | x \in \mathbb{N}, x \leq 50\}$ ، $A = \{x | x \in M, x \leq 15\}$ و $B' = \{x | x \in M, \sqrt{x} < 5\}$ باشد، $A' - B$ کدام است؟

$\{x \in M | 4 \leq x\}$ (۴)

$\{x \in M | 4 \leq \sqrt{x} < 5\}$ (۳)

$\{x \in M | 2 < \sqrt{x} \leq 10\}$ (۲)

$\{x \in M | x^2 \geq 10\}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ مجموعه‌های M ، A و B' را با اعضایشان می‌نویسیم:

$M = \{1, 2, 3, \dots, 50\}$

$A = \{1, 2, 3, \dots, 15\} \Rightarrow A' = \{16, 17, 18, \dots, 50\}$

$$B' = \{1, 2, 3, \dots, 24\} \Rightarrow B = \{25, 26, \dots, 50\}$$

$$\Rightarrow A' - B = \{16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24\}$$

و اینها اعدادی هستند که جذر آنها از ۴ بیشتر یا مساوی و از ۵ کمتر است. یعنی: $4 \leq \sqrt{x} < 5$

$$\Rightarrow A' - B = \{x | x \in M, 4 \leq \sqrt{x} < 5\}$$

۹ و ۱۰ اگر A و B دو مجموعه‌ی جدا از هم در مجموعه‌ی مرجع U باشند، مجموعه‌ی $[(A - B) \cup (B - A)]'$ برابر کدام مجموعه است؟

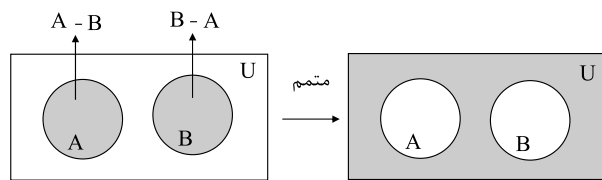
$$A' \cap B' \quad \text{۴}$$

$$A' \cap B \quad \text{۳}$$

$$A' \cup B' \quad \text{۲}$$

$$A \cup B \quad \text{۱}$$

پاسخ: گزینه ۴ با توجه به نمودار ون: (A و B جدا از هم هستند)



$$(A - B) \cup (B - A)$$

$$[(A - B) \cup (B - A)]' = (A \text{ بیرون}) \cap (B \text{ بیرون}) = A' \cap B'$$

۱۱ در یک الگوی خطی با جملات متمایز، حاصل کدام عبارت برابر جمله سیزدهم نیست؟

$$\frac{5a_8 + a_{38}}{6} \quad \text{۴}$$

$$\frac{5a_{20} - a_{24}}{4} \quad \text{۳}$$

$$\frac{a_8 + a_{18}}{2} \quad \text{۲}$$

$$5a_5 - 4a_3 \quad \text{۱}$$

پاسخ: گزینه ۳ جمله عمومی یک الگوی خطی به فرم $t_n = an + b$ است. بنابراین:

$$t_{13} = 13a + b$$

$$۱) 5a_5 - 4a_3 = 5(5a + b) - 4(3a + b) = 13a + b = t_{13}$$

$$۲) \frac{a_8 + a_{18}}{2} = \frac{(8a + b) + (18a + b)}{2} = \frac{26a + 2b}{2} = 13a + b = t_{13}$$

$$۳) \frac{5a_{20} - a_{24}}{4} = \frac{5(20a + b) - (24a + b)}{4} = \frac{76a + 4b}{4} = 19a + b \neq t_{13}$$

$$۴) \frac{5a_8 + a_{38}}{6} = \frac{5(8a + b) + (38a + b)}{6} = \frac{74a + 6b}{6} = 13a + b = t_{13}$$

حال ببینیم حاصل کدامیک از گزینه‌ها، برابر با عبارت فوق نیست:

۱۱۱ در یک هتل ۷۲ مسافر اقامت دارند. از این تعداد مسافر، ۲۳ نفر تاجر می‌باشند، ۱۲ نفر برای اولین بار سفر کرده‌اند و ۸ نفر تاجرانی

می‌باشند که برای اولین مسافرت کرده‌اند. چند مسافر در این هتل اقامت دارند که نه تاجر هستند و نه برای اولین بار سفر کرده‌اند؟

$$۱۹ \quad \text{۴}$$

$$۳۵ \quad \text{۳}$$

$$۴۵ \quad \text{۲}$$

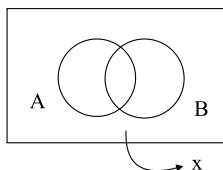
$$۲۷ \quad \text{۱}$$

پاسخ: گزینه ۲

$$A: \text{تاجران} \Rightarrow n(A \cap B) = 23$$

$$B: \text{نوسفرها} \Rightarrow n(B) = 12$$

$$A \cap B: \text{تاجر و نوسفر} \Rightarrow n(A \cap B) = 8$$



$$x = \text{کل مسافران} - n(A \cup B) = 72 - (n(A) + n(B) - n(A \cap B))$$

$$= 72 - (23 + 12 - 8) = 72 - 27 = 45$$

۱۱۲ ☆ جمعیت شهری برابر با ۲ میلیون نفر می باشد که از این جمعیت، ۷۰ درصد در سن کار هستند. اگر این شهر ۱۵۰ هزار نفر بیکار داشته باشد، نرخ بیکاری این شهر تقریباً برابر با کدام گزینه است؟

۰٫۰۵ (۴)

۰٫۱ (۳)

۰٫۲ (۲)

۰٫۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

$$\text{نفر} = 0.7 \times 2000000 = 1400000$$

$$\text{نرخ بیکاری} = \frac{\text{جمعیت بیکار}}{1400000} = \frac{150000}{1400000} \approx 0.1$$

۱۱۳ ☆ در یک دنباله حسابی، $a_3 + a_5 = 16$ و $a_3^2 - a_5^2 = -160$ است، قدر نسبت این دنباله کدام است؟

-۵ (۴)

۵ (۳)

-۲ (۲)

۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

$$a_3^2 - a_5^2 = -160 \Rightarrow \underbrace{(a_3 + a_5)}_{16}(a_3 - a_5) = -160 \Rightarrow a_3 - a_5 = \frac{-160}{16} = -10$$

جمله عمومی دنباله حسابی به فرم $a_n = a_1 + (n - 1)d$ است. پس:

$$\begin{cases} a_3 = a_1 + 2d \\ a_5 = a_1 + 4d \end{cases} \Rightarrow a_3 - a_5 = (a_1 + 2d) - (a_1 + 4d) = -2d \stackrel{\text{باید}}{=} -10 \Rightarrow d = 5$$

۱۱۴ ☆ اگر A و B زیرمجموعه‌هایی از مجموعه مرجع U باشند به طوری که $n(U) = 100$ ، $n(A) = 60$ ، $n(B) = 40$ و $n(A \cap B) = 20$ ، مقدار $n(A' \cap B')$ کدام است؟

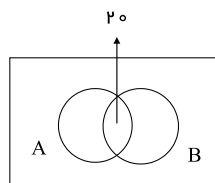
۲۵ (۴)

۲۰ (۳)

۱۵ (۲)

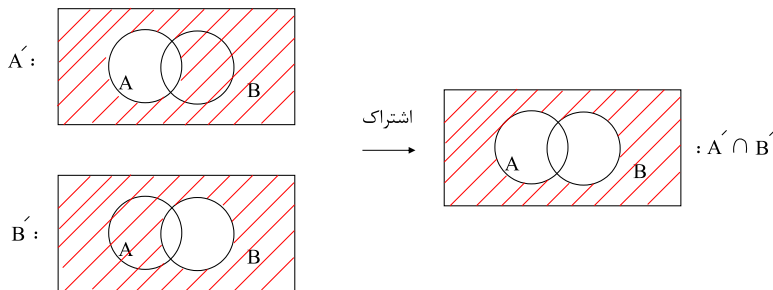
۱۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۳



$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ &= 60 + 40 - 20 = 80 \end{aligned}$$

حال، A' و B' و اشتراک آنها را با استفاده از نمودار تعیین می کنیم:



$$\Rightarrow n(A' \cap B') = n(U) - n(A \cup B) = 100 - 80 = 20$$

۱۱۵ ☆ کدام گزینه زیر متعلق به مجموعه Q' نیست؟

$1/817817 \dots$ (۴)

$\sqrt{\pi}$ (۳)

$-\sqrt{50}$ (۲)

$\frac{\pi}{3}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴ $\pi(1)$ عددی گنگ است. پس $\frac{\pi}{3}$ نیز گنگ است.

(۲) $\sqrt{50}$ عددی گنگ است. پس $-\sqrt{50}$ نیز گنگ است.

(۳) π گنگ است؛ جذر آن هم گنگ است.

(۴) $1/817817000$ را می توان بصورت $1/817$ نوشت و اعداد اعشاری متناوب گنگ نیستند.

۱۱۶ ★ اگر U مجموعه مرجع باشد و داشته باشیم $n(U) = 100$ و مجموعه تعداد اعضای دو مجموعه مجزای A و B برابر 60 باشد، در این

صورت $n(A' \cap B')$ کدام است؟

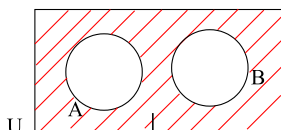
۹۰ (۴)

۸۰ (۳)

۶۰ (۲)

۴۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۱



$$A' \cap B' = \text{بیرون } A \text{ و بیرون } B$$

$$\Rightarrow n(A' \cap B') = n(u) - n(A \cup B) = 100 - 60 = 40$$

۱۱۷ ★ کدام دو مجموعه مجزا نیستند؟

(۲) مجموعه شمارنده های عدد 50 و مجموعه مضرب های عدد 6

(۴) مجموعه مضارب عدد 11 و مجموعه مضارب عدد 67

(۱) مجموعه اعداد اول و مجموعه اعداد مرکب

(۳) مجموعه دخترهای فامیل و مجموعه پسرهای فامیل

پاسخ: گزینه ۴ دو مجموعه ی مجزا، مجموعه هایی بدون اشتراک هستند:

(۱) اعداد یا اول اند، یا مرکب و یا یک. پس اعداد اول و مرکب، مجزا هستند.

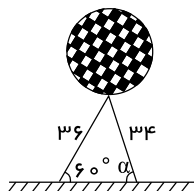
(۲) در بین شمارنده های عدد 50 ، هیچ مضربی از 6 وجود ندارد. پس این دو مجموعه مجزا هستند.

(۳) مجموعه دخترها و پسرها در همه جای دنیا، مجزا هستند!

(۴) می توان عددی مثل 11×67 را یافت که هم مضرب 11 باشد و هم مضرب 67

۱۱۸ ★ یک بالن اطلاع رسانی مطابق شکل زیر توسط دو طناب به طول های 34 و 36 متر به زمین بسته شده است. مقدار سینوس زاویه ی α

تقریباً کدام است؟ ($\sqrt{3} \approx 1,7$)



۰,۸۷ (۲)

۰,۸۵ (۱)

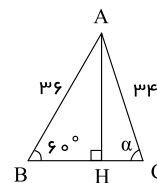
۰,۹ (۴)

۰,۸۸ (۳)

پاسخ: گزینه ۴

ارتفاع AH را رسم می کنیم و در مثلث قائم الزاویه AHC ، سینوس α را تشکیل می دهیم:

$$\sin \alpha = \frac{AH}{AC} = \frac{AH}{34}$$



برای محاسبه ی سینوس α ، مقدار AH باید معلوم شود؛ به سراغ مثلث AHB می رویم:

$$\sin 60^\circ = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AH = AB \times \sin 60^\circ = 36 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{3} \approx 18 \times 1,7$$

حال با این مقدار بدست آمده برای AH ، سینوس α را محاسبه می کنیم:

$$\sin \alpha = \frac{18 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{20} = \frac{18}{20} = 0,9$$

۱۱۹ ★ اگر A و B دو زیرمجموعه از مجموعه‌ی مرجع اعداد صحیح باشند، به طوری که B منتهای و A' نامنتهای باشد، آنگاه کدام یک از گزینه‌ها ممکن است منتهای باشد؟

A' - B (۴)

A' ∪ B' (۳)

B' ∩ A (۲)

B ∪ A' (۱)

پاسخ: گزینه ۲

می‌دانیم $\begin{cases} A: \text{منتهای} \Rightarrow A': \text{نامنتهای} \\ A: \text{نامنتهای} \Rightarrow A': \text{منتهای} \end{cases}$

از طرفی: اجتماع یک مجموعه نامنتهای با هر مجموعه دیگر، نامنتهای است. بنابراین B ∪ A' و A' ∪ B' (بدلیل نامنتهای بودن A')، نامنتهای هستند.

از آنجا که B منتهای است، اگر اعضای آن را از A' حذف کنیم، حاصل نامنتهای خواهد بود. در گزینه ۲ مشخص نیست که A منتهای است یا نامنتهای، پس B' ∩ A ممکن است منتهای یا نامنتهای باشد.

۱۲۰ ★ یک موشک در ارتفاع ۲۰ متری از سطح زمین، با زاویه ۴۵° پرتاب می‌شود. پس از طی ۲۰۰۰ متر با همین زاویه، موشک به چه ارتفاعی از سطح زمین می‌رسد؟

۲۰۲۰ (۴)

۲۰۰۰ + ۲√۲ (۳)

۱۰۰۰√۲ + ۲۰ (۲)

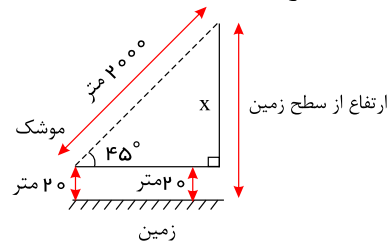
۲۰۰۰√۲ + ۲۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۲
برای یافتن ارتفاع از سطح زمین، باید x را در شکل مقابل محاسبه کنیم و با ۲۰ متر جمع کنیم. برای محاسبه x به نسبت مثلثاتی زاویه می‌رویم که در آن وتر و x (ضلع مقابل) حضور داشته باشند و آن نسبت مثلثاتی، چیزی نیست جز سینوس:

$$\cos 45^\circ = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{x}{2000} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{x}{2000}$$

$$\Rightarrow x = 2000 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1000\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\text{ارتفاع از سطح زمین} = 1000\sqrt{2} + 20$$



۱۲۱ ★ اگر $n(A - B) = 2$ ، $n(B - A) = 8$ و $n(B) = 3n(A)$ باشد، $n(A \cup B)$ کدام است؟

۱۱ (۴)

۱۰ (۳)

۹ (۲)

۱۲ (۱)

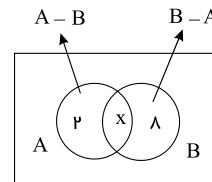
پاسخ: گزینه ۴

نمودار زیر را رسم می‌کنیم و تعداد اعضای $A \cap B$ را x می‌نامیم.

$$\left. \begin{aligned} n(A) &= 2 + x \\ n(B) &= 8 + x \end{aligned} \right\} \Rightarrow 8 + x = 3(2 + x) \Rightarrow 8 + x = 6 + 3x \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$$

$$\Rightarrow n(A \cap B) = 1, \quad n(A) = 3, \quad n(B) = 9$$

$$\text{از طرفی: } n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 3 + 9 - 1 = 11$$



۱۲۲ ★ در یک کلاس ۴۵ نفری همه‌ی دانش‌آموزان کفش مشکی یا کت قهوه‌ای پوشیده‌اند. اگر ۳۰ نفر کفش مشکی و ۲۵ نفر کت قهوه‌ای پوشیده باشند، معین کنید چند نفر هم کفش مشکی و هم کت قهوه‌ای پوشیده‌اند؟

۱۳ (۴)

۵ (۳)

۱۵ (۲)

۱۰ (۱)

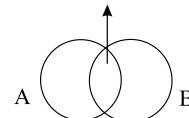
پاسخ: گزینه ۱

هم کفش مشکی هم کت قهوه ای

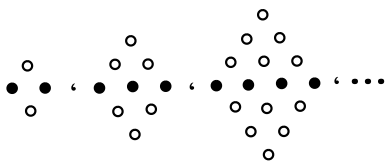
$$\begin{cases} A: \text{کفش مشکی} \\ B: \text{کت قهوه ای} \end{cases}$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$\Rightarrow 45 = 30 + 25 - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 30 + 25 - 45 = 10$$



۱۲۳ ☆ باتوجه به الگوی شکل زیر، تعداد دایره‌های سفید در شکل مرحله‌ی یازدهم کدام است؟



مرحله‌ی سوم مرحله‌ی دوم مرحله‌ی اول

۱ ۱۳۲

۲ ۱۳۶

۳ ۱۲۲

۴ ۱۲۶

پاسخ: گزینه ۱ تعداد کل دایره‌ها در مرحله‌ی n م برابر است با $(n+1)^2$

و از میان این دایره‌ها، $n+1$ تا رنگ شده است. پس تعداد رنگ نشده‌ها عبارتست از:

$$(n+1)^2 - (n+1)$$

و در مرحله‌ی یازدهم داریم:

$$(11+1)^2 - (11+1) = 144 - 12 = 132$$

۱۲۴ ☆ حاصل ضرب ۱۰ جمله‌ی اول دنباله با جمله‌ی عمومی $a_n = (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1}$ کدام است؟

۱ $\frac{1}{10}$

۲ $-\frac{1}{10}$

۳ $\frac{1}{11}$

۴ $-\frac{1}{11}$

پاسخ: گزینه ۴

جملات دنباله عبارتند از:

$$a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = -\frac{2}{3}, a_3 = \frac{3}{4}, \dots, a_{10} = -\frac{10}{11}$$

و حاصل ضرب آن‌ها:

$$a_1 \times a_2 \times a_3 \times \dots \times a_{10} = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{2}{3}\right) \times \frac{3}{4} \times \dots \times \left(-\frac{10}{11}\right) = -\frac{1}{11}$$

دقت: در این جملات، ۵ جمله‌ی منفی داریم، یعنی در این حاصل ضرب وجود دارد. پس حاصل منفی است. همچنین، در هر کسر، صورت با مخرج کسر قبل ساده می‌شود و در آخر صورت کسر اول و مخرج کسر آخر باقی می‌ماند.

۱۲۵ ☆ ۳۰۰ قرص نان را بین ۵ نفر چنان تقسیم کرده‌ایم که سهم‌های دریافت شده، دنباله‌ی حسابی تشکیل دهند و یک سوم مجموع سه سهم

بزرگتر، مساوی مجموع دو سهم کوچکتر است. بیشترین سهم دریافتی نان‌ها چند قرص است؟

۱ ۳۰

۲ ۹۰

۳ ۱۰۰

۴ ۱۲۰

پاسخ: گزینه ۲ - دنباله‌ی سهم‌ها به صورت زیر است:

$$t_1, t_1 + d, t_1 + 2d, t_1 + 3d, t_1 + 4d$$

تعداد کل نان‌ها عبارتست از ۳۰۰ تا؛ یعنی:

$$t_1 + (t_1 + d) + (t_1 + 2d) + (t_1 + 3d) + (t_1 + 4d) = 300$$

$$\Rightarrow 5t_1 + 10d = 300 \xrightarrow{\div 5} t_1 + 2d = 60 (*)$$

از طرفی طبق فرض:

$$\frac{1}{3}((t_1 + 2d) + (t_1 + 3d) + (t_1 + 4d)) = t_1 + (t_1 + d)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}(2t_1 + 9d) = 2t_1 + d \Rightarrow t_1 + 3d = 2t_1 + d \Rightarrow t_1 = 2d$$

این را در رابطه (*) می گذاریم:

$$2d + 2d = 60 \Rightarrow d = \frac{60}{4} = 15 \xrightarrow{t=2d} t_1 = 30$$

پس بزرگترین جمله ی این دنباله عبارتست از:

$$t_1 + 4d = 30 + 4 \times 15 = 90$$

راه دوم: جملات متوالی یک دنباله ی حسابی با تعداد جملات فرد را می توانیم به صورت زیر بنویسیم: (جمله وسط را x نامیدیم)

$$x - 2d, x - d, x, x + d, x + 2d$$

$$\text{مجموع عبارت} = (x - 2d) + (x - d) + x + (x + d) + (x + 2d) = 5x = 300 \Rightarrow x = 60$$

$$\text{از طرفی: } \frac{1}{3}(x + (x + d) + (x + 2d)) = (x - 2d) + (x - d)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}(3x + 3d) = 2x - 3d \Rightarrow x + d = 2x - 3d \Rightarrow x = 4d \Rightarrow 60 = 4d \Rightarrow d = \frac{60}{4} = 15$$

$$\text{بزرگترین جمله} = x + 2d = 60 + 2 \times 15 = 90$$

۱۲۶* در یک دنباله ی خطی با جمله ی عمومی a_n ، $\frac{1}{3}a_3 = \frac{1}{2}a_2$ و جمله ی پنجم، دو واحد بیش تر از قرینه ی نصف جمله ی اول است. جمله

ی یازدهم کدام است؟

۶ (۴)

۴ (۳)

-۴ (۲)

-۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

در یک الگوی خطی، جمله ی عمومی بصورت $a_n = an + b$ است:

$$\frac{1}{3}a_3 = \frac{1}{2}a_2 \Rightarrow 3a_3 = 2a_2 \Rightarrow 3(3a + b) = 2(2a + b) \Rightarrow 9a + 3b = 4a + 2b \Rightarrow 5a + b = 0 \quad (I)$$

$$a_5 = \frac{-1}{2}a_1 + 2 \Rightarrow 5a + b = -\frac{1}{2}(a + b) + 2 \Rightarrow 11a + 3b = 4 \quad (II)$$

از طرفی طبق فرض:

معادله های I و II را در یک دستگاه قرار می دهیم:

$$\times (-3) \begin{cases} 5a + b = 0 \\ 11a + 3b = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -15a - 3b = 0 \\ 11a + 3b = 4 \end{cases} \\ \hline -4a = 4 \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 5 \end{cases} \Rightarrow a_n = -n + 5 \Rightarrow a_{11} = -11 + 5 = -6$$

۱۲۷* در یک کلاس ۲۸ نفره، ۱۶ نفر در المپیاد ریاضی و ۱۴ نفر در المپیاد فیزیک شرکت کرده اند. اگر ۵ نفر در هیچ یک از دو المپیاد شرکت

نکرده باشند، تعداد افرادی که فقط در المپیاد ریاضی شرکت کرده اند، کدام است؟

۱۰ (۴)

۹ (۳)

۸ (۲)

۷ (۱)

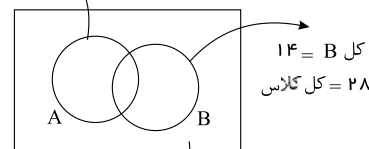
پاسخ: گزینه ۳ رشته های المپیاد را نامگذاری می کنیم:

$\begin{cases} \text{ریاضی: A} \\ \text{فیزیک: B} \end{cases}$

و شکل زیر را ترتیب می دهیم:

$$n(A \cup B) = \text{کل} - 5 = 28 - 5 = 23$$

$$16 = A \text{ کل}$$

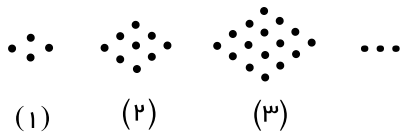


۵ نفر: هیچ رشته

$$\text{از طرفی: } n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow 23 = 16 + 14 - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 30 - 23 = 7$$

و داریم:

ریاضی $n(A) - n(A \cap B) = 16 - 7 = 9$ فقط ریاضی



۱۲۸ ☆ مطابق الگوی زیر، در شکل مرحله دهم چند نقطه وجود دارد؟

- ۱۱۰ (۲)
۱۳۲ (۴)

- ۱۰۰ (۱)
۱۲۱ (۳)

پاسخ: گزینه ۳ جملات دنباله را می نویسیم:

۴, ۹, ۱۶, ...

اینها اعداد مربع کامل هستند، اما از $۳^۲$ شروع شده اند، پس جمله عمومی عبارتست از:

$t_n = (n + 1)^۲$

پس جمله دوم عبارتست از:

$t_{10} = (10 + 1)^۲ = 11^۲ = ۱۲۱$

۱۲۹ ☆ به ازای چند مقدار طبیعی n ، دو مجموعه $A = [-۲, ۲]$ و $B = [n - ۲, ۳n + ۱]$ جدا از هم نیستند؟

- ۶ (۴)

- ۵ (۳)

- ۴ (۲)

- ۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ برای آنکه در بازه A و B جدا از هم باشند، باید یکی از این دو وضعیت اتفاق بیافتد:

$$\begin{cases} \overset{n-2}{\bullet} \text{---} \overset{3n+1}{\bullet} & \overset{-2}{\bullet} \text{---} \overset{2}{\bullet} : 3n + 1 < -2 \Rightarrow 3n < -3 \Rightarrow n < -1 \\ \overset{-2}{\bullet} \text{---} \overset{2}{\bullet} & \overset{n-2}{\bullet} \text{---} \overset{3n+1}{\bullet} : 2 < n - 2 \Rightarrow 4 < n \end{cases}$$

از طرفی، چون n عددی طبیعی است، به ازای $n < 4$ این دو بازه جدا از هم هستند. پس به ازای $n = 1, 2, 3, 4$ ، جدا از هم نیستند.

۱۳۰ ☆ در دنباله هندسی t_n که همه ی جملات آن مثبت اند، روابط $t_1 t_7 = 75$ و $\frac{t_4}{t_6} = \frac{1}{3}$ برقرار است. مقدار جمله سوم کدام است؟

- ۱۷ (۴)

- ۱۲ (۳)

- ۵ (۲)

- ۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ جمله عمومی دنباله هندسی عبارتست از: $t_n = t_1 q^{n-1}$ ؛ پس:

$\frac{t_4}{t_6} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{t_1 q^3}{t_1 q^5} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{q^2} = \frac{1}{3} \Rightarrow q^2 = 3 \Rightarrow q = \pm \sqrt{3}$

چون طبق فرض، همه ی جملات دنباله مثبت هستند، فقط $r = \sqrt{3}$ را می پذیریم؛ از طرفی:

$t_1 t_7 = 75 \Rightarrow t_1 \times t_1 q^6 = 75 \Rightarrow t_1^2 (\sqrt{3})^6 = 75 \Rightarrow t_1^2 \times 27 = 75$

$\Rightarrow t_1 = \frac{75}{27} = \frac{25}{9} \xrightarrow{\text{جذر}} t_1 = \pm \frac{5}{3}$

و باز چون همه جملات مثبت هستند، فقط $t_1 = \frac{5}{3}$ قابل قبول است. پس:

$t_4 = t_1 r^3 = \frac{5}{3} \times (\sqrt{3})^3 = \frac{5}{3} \times 3 = 5$

۱۳۱ ☆ دنباله $a_n = 102n - 6n^2$ دارای چند جمله مثبت است؟

- ۲۰ (۴)

- ۱۶ (۳)

- ۱۷ (۲)

- ۱۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

$102n - 6n^2 > 0 \Rightarrow 102n > 6n^2 \xrightarrow{\div 6} 17n > n^2$

چون n عددی طبیعی (و مثبت) است، می توانیم طرفین نامساوی را بر n تقسیم کنیم، بدون آنکه جهت نامساوی تغییر کند:

$\xrightarrow{\div n} 17 > n$

یعنی به ازای اعداد طبیعی ۱ تا ۱۶، جملات این دنباله مثبت هستند.

۱۳۲* در یک دنباله‌ی حسابی، جملات هفتم و سیزدهم دنباله به ترتیب از راست به چپ برابر با ۱۷ و ۴۱ هستند. جمله‌ی دهم این دنباله کدام است؟

۳۰ (۴)

۲۹ (۳)

۳۱ (۲)

۲۷ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ جمله‌ی عمومی یک دنباله‌ی حسابی بصورت $t_n = t_1 + (n - 1)d$ است:

$$\begin{cases} t_7 = 17 \Rightarrow t_1 + 6d = 17 \\ t_{13} = 41 \Rightarrow t_1 + 12d = 41 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -t_1 - 6d = -17 \\ t_1 + 12d = 41 \end{cases}$$

$$6d = 24 \Rightarrow d = 4$$

$$t_1 + 6d = 17 \xrightarrow{d=4} t_1 + 24 = 17 \Rightarrow t_1 = -7$$

و داریم:

$$t_{10} = t_1 + 9d = -7 + 9 \times 4 = -7 + 36 = 29$$

۱۳۳* اعداد $2p + 3$ ، $3p + 4$ و $5p - 1$ به ترتیب از راست به چپ سه جمله متوالی یک دنباله حسابی هستند. اگر $2p + 3$ جمله پنجم این دنباله باشد، جمله یازدهم آن کدام است؟

۷۱ (۴)

۵۷ (۳)

۴۵ (۲)

۳۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ یادآوری: در هر دنباله‌ی حسابی، هر جمله میانگین جملات طرفین خود است:

$$3p + 4 = \frac{(2p + 3) + (5p - 1)}{2} \Rightarrow 6p + 8 = 7p + 2 \Rightarrow p = 6$$

پس دنباله ما به صورت زیر است:

$$\dots, 2 \times 6 + 3, 3 \times 6 + 4, 5 \times 6 - 1, \dots$$

$$\Rightarrow \dots, 15, 22, 29, \dots \Rightarrow \text{قدر نسبت} = d = 22 - 15 = 7$$

از طرفی جمله پنجم این دنباله $2p + 3$ یعنی $15 = 2 \times 6 + 3$ است. برای رسیدن از جمله پنجم به جمله یازدهم، به $6d$ نیاز داریم؛ یعنی:

$$t_{11} = t_5 + 6d = 15 + 6 \times 7 = 57$$

۱۳۴* بین دو عدد ۱۷ و ۹۳، هجده واسطه‌ی حسابی درج کرده‌ایم. واسطه‌ی یازدهم کدام است؟ (جملات دنباله را به صورت افزایشی در نظر بگیرید.)

۵۳ (۴)

۶۵ (۳)

۶۱ (۲)

۵۷ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ نکته: اگر بین a و b به تعداد m واسطه‌ی حسابی قرار دهیم، قدر نسبت دنباله‌ی حسابی حاصل، از رابطه‌ی $d = \frac{b - a}{m + 1}$ بدست می‌آید. پس:

$$d = \frac{93 - 17}{18 + 1} = \frac{76}{19} = 4$$

پس یک دنباله‌ی حسابی به فرم زیر تشکیل می‌شود:

$$17, \overset{+4}{21}, \overset{+4}{25}, \dots, 93 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 17 \\ d = 4 \end{cases}$$

یازدهمین واسطه‌ی حسابی، دوازدهمین جمله‌ی این دنباله است:

$$t_n = t_1 + (n - 1)d \Rightarrow t_{12} = 17 + 11 \times 4 = 61$$

۱۳۵* در یک دنباله‌ی حسابی $a_m = n$ و $a_n = m$ می‌باشد. حاصل $a_{m+1} + a_{n+1}$ کدام است؟ ($m \neq n$)

$m + n - 1$ (۴)

$m + n - 2$ (۳)

$m + n + 2$ (۲)

$m + n$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ نکته: قدر نسبت یک دنباله که جملات a_n ، a_m از آن معلوم باشند عبارتست از:

$$d = \frac{a_m - a_n}{m - n}$$

پس داریم:

$$d = \frac{n - m}{m - n} = -1$$

حال خواسته‌ی مسئله را بدست می‌آوریم:

$$a_{m+1} + a_{n+1} = (a_m + d) + (a_n + d) = m - 1 + n - 1 = m + n - 2$$

۱۳۶ * مجموع سه جمله اول یک دنباله حسابی، چهار برابر مجموع سه جمله بعدی آن است. جمله ی چندم این دنباله برابر صفر است؟

- ۱ پنجم ۲ ششم ۳ هفتم ۴ چهارم

پاسخ: گزینه ۲

$$\begin{aligned} a_1 + a_p + a_r &= 4(a_f + a_d + a_e) \\ \Rightarrow a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) &= 4((a_1 + 3d) + (a_1 + 4d) + (a_1 + 5d)) \\ \Rightarrow 3a_1 + 3d &= 4(3a_1 + 12d) \Rightarrow 3a_1 + 3d = 12a_1 + 48d \\ \Rightarrow 9a_1 + 45d &= 0 \xrightarrow{\div 9} a_1 + 5d = 0 \Rightarrow a_e = 0 \end{aligned}$$

۱۳۷ * اگر جملات چهارم و هشتم یک دنباله هندسی به ترتیب از راست به چپ برابر با ۹ و ۱۲ باشند، جمله ی دوازدهم این دنباله کدام است؟

- ۱ ۱۰۸ ۲ ۱۶ ۳ ۳۶ ۴ ۱۸

پاسخ: گزینه ۲ در یک دنباله هندسی، جمله ی عمومی به صورت $t_n = t_1 q^{n-1}$ است:

$$\begin{aligned} t_4 = 9 &\Rightarrow t_1 q^3 = 9 \xrightarrow{\div t_1 q^3} \frac{1}{q^3} = \frac{9}{t_1} \\ t_8 = 12 &\Rightarrow t_1 q^7 = 12 \xrightarrow{\div t_1 q^7} \frac{1}{q^7} = \frac{12}{t_1} \Rightarrow \frac{1}{q^4} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} \Rightarrow q^4 = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

جمله ی دوازدهم این دنباله، از چهار بار ضرب کردن q در جمله ی هشتم بدست می آید:

$$t_{12} = t_8 \times q^4 = 12 \times \frac{4}{3} = 16$$

۱۳۸ * جمله ی هشتم از دنباله ی حسابی $1, 3, \dots$ با جمله ی چندم یک دنباله ی هندسی با جمله ی عمومی $t_n = \frac{1}{3} \times 9^{n-1}$ برابر است؟

- ۱ سوم ۲ پنجم ۳ ششم ۴ هشتم

پاسخ: گزینه ۱ جمله ی هشتم دنباله $1, 3, \dots$ $+4$ عبارت است از:

$$t_8 = t_1 + 7d = -1 + 7 \times 4 = 27$$

حال ببینیم جمله ی چندم از دنباله ی هندسی $a_n = \frac{1}{3} \times 9^{n-1}$ برابر با ۲۷ است:

$$27 = \frac{1}{3} \times 9^{n-1} \Rightarrow 81 = 9^{n-1} \Rightarrow 9^2 = 9^{n-1} \Rightarrow 2 = n - 1 \Rightarrow n = 3$$

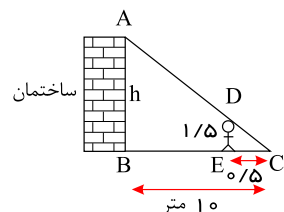
۱۳۹ * آرش می خواهد ارتفاع ساختمانی را که طول سایه ی آن بر روی زمین ۱۰ متر است، حساب کند. قد آرش ۱٫۵ متر و طول سایه ی او

۰٫۵ متر است. ارتفاع ساختمان چند متر است؟

- ۱ ۲٫۵ ۲ ۲۰ ۳ ۱۵ ۴ ۳۰

پاسخ: گزینه ۴ دو مثلث $\triangle ABC$ و $\triangle CDE$ متشابهند:

$$\frac{1.5}{h} = \frac{0.5}{10} \Rightarrow h = \frac{10 \times 1.5}{0.5} = 30$$



۱۴۰* در دنباله‌ی حسابی $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ کدام یک از عبارات‌های زیر همواره صحیح است؟

۱) $2a_n - a_{2n} = a_2$ ۲) $a_{n+1} - a_{n-1} = a_2$ ۳) $3a_{2n+1} - 2a_{2n} = a_3$ ۴) $a_{2n+1} - a_{2n-1} = a_2$

پاسخ: گزینه ۳

۱) $2a_n - a_{2n} = 2(a_1 + (n-1)d) - (a_1 + (2n-1)d)$
 $= 2a_1 + 2nd - 2d - a_1 - 2nd + d = a_1 - d \neq a_2$ نادرست

۲) $a_{n+1} - a_{n-1} = (a_1 + nd) - (a_1 + (n-2)d)$
 $= a_1 + nd - a_1 - nd + 2d = 2d \neq a_2$ نادرست

۳) $3a_{2n+1} - 2a_{2n} = 3(a_1 + 2nd) - 2(a_1 + (2n-1)d)$
 $= 3a_1 + 6nd - 2a_1 - 4nd + 2d = a_1 + 2d = a_2$ درست

۴) $a_{2n+1} - a_{2n-1} = (a_1 + 2nd) - (a_1 + (2n-2)d)$
 $= a_1 + 2nd - a_1 - 2nd + 2d = 2d \neq a_2$ نادرست

۱۴۱* کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟

- ۱) اشتراک دو مجموعه‌ی نامتناهی، مجموعه‌ای الزاماً نامتناهی است.
 ۲) تفاضل دو مجموعه‌ی نامتناهی، مجموعه‌ای الزاماً نامتناهی است.
 ۳) اگر $A \subseteq B$ و B مجموعه‌ای نامتناهی باشد، آن گاه A الزاماً نامتناهی است.
 ۴) اگر $A \subseteq B$ و $A \cap B$ مجموعه‌ای نامتناهی باشد، آن گاه B الزاماً نامتناهی است.

پاسخ: گزینه ۴ به گزینه‌ها توجه کنید:

۱) دو مجموعه‌ی نامتناهی می‌توانند با هم هیچ اشتراکی نداشته باشند؛ یعنی اشتراک آن‌ها تهی باشد که متناهی است. (نادرست)

۲) دو مجموعه‌ی نامتناهی می‌توانند با هم برابر باشند و تفاضلشان تهی باشد که متناهی است. (نادرست)

۳) اگر A تهی باشد، A زیرمجموعه‌ی همه‌ی مجموعه‌هاست. یعنی B می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد.

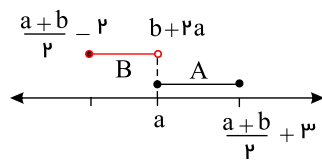
۴) اگر $A \subseteq B$ ، آنگاه $A \cap B = A$ خواهد بود. طبق متن گزینه‌ی A نامتناهی است و B مجموعه‌ای است که آن را در بر گرفته است؛ پس B الزاماً نامتناهی است.

۱۴۲* اگر $A = [a, \frac{a+b}{2} + 3]$ و $B = [\frac{a+b}{2} - 2, b + 2a]$ دو بازه‌ی جدا از هم باشند که اجتماع آن‌ها یک بازه‌ی بسته باشد، $A \cup B$

شامل چند عدد صحیح نیست؟ (مجموعه‌ی مرجع را R در نظر بگیرید.)

- ۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) بی‌شمار

پاسخ: گزینه ۲ برای آنکه اجتماع دو بازه، یک بازه‌ی بسته باشد، باید روی محور چنین آرایشی را ببینیم:



دقت کنید که $\frac{a+b}{2} - 2 < \frac{a+b}{2} + 3$ است. پس بازه‌ی B باید قبل از بازه‌ی A قرار گیرد)

داریم:

$$b + 2a = a \Rightarrow a + b = 0 \Rightarrow \begin{cases} A = [a, 3] \\ B = [-2, a] \end{cases} \Rightarrow A \cup B = [-2, 3]$$

متم $\rightarrow (A \cup B)^c = R - (A \cup B) = R - [-2, 3]$

پس اعداد $2, 3, 1, 0, -1, -2$ در آن وجود ندارد.

۱۴۳* اگر A مجموعه‌ای متناهی، B مجموعه‌ای نامتناهی و C مجموعه‌ای دلخواه و نامشخص باشد، $(C \neq B, A)$ ، کدام مجموعه قطعاً نامتناهی است؟ (مجموعه‌ی مرجع، اعداد حقیقی است.)

- ۱) $A \cap (B \cup C)$ ۲) $A \cup (B - C)$ ۳) $B - (A \cap C)$ ۴) $(A \cup C) \cap (B \cup C)$

پاسخ: گزینه ۳

گزینه ۱) اشتراک یک مجموعه‌ی منتهای با هر مجموعه‌ای، منتهای است.

$$\underbrace{A \cap (B - C)}_{\text{منتهای}} = \text{منتهای}$$

گزینه ۲) اجتماع یک مجموعه‌ی منتهای با هر مجموعه‌ای ممکن است منتهای یا نامنتهای باشد:

$$\underbrace{A \cup (B - C)}_{\text{منتهای}} = \text{نامشخص}$$

گزینه ۳)

$$\underbrace{B - (A \cap B)}_{\text{نامنتهای}} = \text{نامنتهای}$$

گزینه ۴)

$$\underbrace{(A \cup C) \cap (B \cup C)}_{\text{نامشخص}} = \text{نامشخص}$$

۱۴۴ * حاصل عبارت $\frac{\tan^2 60^\circ - 2 \tan^2 45^\circ}{\sin 30^\circ + \sqrt{2} \cos 45^\circ}$ کدام است؟

$\frac{2}{3}$ (۴)

$\frac{3}{2}$ (۳)

$\frac{1}{2}$ (۲)

$\frac{1}{3}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

$$\frac{(\sqrt{3})^2 - 2(1)^2}{\frac{1}{2} + \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{3 - 2(1)}{\frac{1}{2} + 1} = \frac{3 - 2}{\frac{1}{2} + 1} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

۱۴۵ * اگر $A = \frac{\cot 30^\circ - 2 \sin 60^\circ + \tan 45^\circ}{\tan^2 30^\circ - \frac{1}{2} \cos 60^\circ + \cot 45^\circ}$ باشد، حاصل $\frac{13A}{2}$ کدام است؟

$\frac{1}{6}$ (۴)

۶ (۳)

$\frac{13}{12}$ (۲)

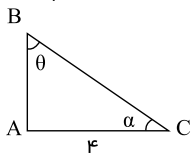
$\frac{12}{13}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

$$A = \frac{\sqrt{3} - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + 1} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{3} + 1}{\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + 1} = \frac{1}{\frac{4-3+12}{12}} = \frac{1}{\frac{13}{12}} = \frac{12}{13}$$

$$A = \frac{12}{13} \Rightarrow \frac{13A}{2} = \frac{13}{2} \times \frac{12}{13} = 6$$

۱۴۶ * در مثلث ABC زاویه \hat{A} قائمه و طول یکی از اضلاع قائمه آن ۴ است. اگر تانژانت زاویه‌ی واقع بر رأس دیگر این ضلع، $\frac{3}{4}$ باشد،



سینوس زاویه سوم کدام است؟

۰٫۴ (۲)

۰٫۲ (۱)

۰٫۸ (۴)

۰٫۶ (۳)

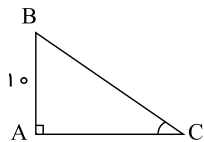
پاسخ: گزینه ۴

$$\tan \alpha = \frac{3}{4} \quad \sin \theta = ?$$

$$\tan \alpha = \frac{3}{4} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{4} \Rightarrow AB = 3$$

$$\text{فیثاغورس} \quad 3^2 + 4^2 = BC^2 \Rightarrow 9 + 16 = BC^2 \Rightarrow 25 = BC^2 \Rightarrow BC = 5$$

$$\sin \theta = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{3}{5} = \frac{8}{10} = 0.8$$



۱۴۷ * مساحت مثلث ABC کدام است؟ $\left(\cos C = \frac{\sqrt{46}}{7}\right)$

$50 \sqrt{\frac{3}{46}}$ (۴)

$100 \sqrt{\frac{3}{46}}$ (۳)

$50 \sqrt{\frac{46}{3}}$ (۲)

$100 \sqrt{\frac{46}{3}}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

$$\sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \sqrt{1 - \frac{46}{49}} = \sqrt{\frac{3}{49}} = \frac{\sqrt{3}}{7}$$

$$\sin C = \frac{10}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{7} \Rightarrow BC = \frac{70}{\sqrt{3}}$$

$$S = \frac{1}{2} AB \times BC \times \sin B$$

می‌دانیم سینوس و کسینوس دو زاویه متمم با هم برابرند؛ در مثلث ABC:

$$\hat{A} = 90^\circ, \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 90^\circ \Rightarrow \sin B = \cos C$$

$$S = \frac{1}{2} \times 10 \times \frac{70}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{46}}{7} = 50 \sqrt{\frac{46}{3}}$$

۱۴۸ * حاصل عبارت $\tan^2 \theta + \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\cos \theta} \times \frac{1}{1 + \tan \theta}$ کدام است؟

$\frac{1}{\cos^2 \theta}$ (۴)

$\cos \theta$ (۳)

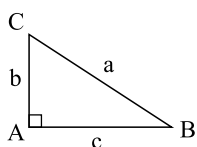
$\frac{1}{\sin^2 \theta}$ (۲)

$\sin \theta$ (۱)

$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

پاسخ: گزینه ۴

$$\tan^2 \theta + \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\cos \theta} = \tan^2 \theta + \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\cos \theta} \times \frac{1}{1 + \frac{\sin \theta}{\cos \theta}} = \tan^2 \theta + \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\cos \theta} \times \frac{\cos \theta}{\cos + \sin \theta} = \tan^2 \theta + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$



۱۴۹ * مثلث قائم‌الزاویه ABC در رأس A قائمه است؛ حاصل $\frac{\tan^2 C}{\frac{1}{\sin B} \times \cot B}$ کدام است؟

$\cos C$ (۲)

$\sin C$ (۱)

$\cot C$ (۴)

$\tan C$ (۳)

پاسخ: گزینه ۱

$$\tan^2 C = \frac{c^2}{b^2}$$

$$\sin B = \frac{b}{a} \rightarrow \frac{1}{\sin B} = \frac{a}{b}$$

$$\cot B = \frac{c}{b}$$

$$\frac{\tan^2 C}{\frac{1}{\sin B} \times \cot B} = \frac{\frac{c^2}{b^2}}{\frac{a}{b} \times \frac{c}{b}} = \frac{\frac{c^2}{b^2}}{\frac{ac}{b^2}} = \frac{c^2}{ac} = \frac{c}{a} = \sin C$$

۵۰. مثلث قائم الزاویہ ی ABC در رأس A قائمہ است؛ حاصل $\frac{\sin\left(\frac{2(B+C)}{3}\right)}{\cos\left(\frac{(B+C)}{3}\right)}$ کدام است؟

$\frac{1}{2}$ (۴)

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳)

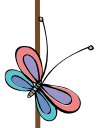
$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۱
 $A + B + C = 180^\circ \xrightarrow{\hat{A}=90^\circ} B + C = 90^\circ \Rightarrow \frac{B+C}{3} = 30^\circ$

$\frac{2(B+C)}{3} = 60^\circ$

$\frac{\sin\left(\frac{2(B+C)}{3}\right)}{\cos\left(\frac{(B+C)}{3}\right)} = \frac{\sin 60^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 1$



پاسخنامه تشریحی

۱ ☆ گزینه ۴ بررسی‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$۱) Z^- \cup Z = \{\dots, -4, -3, -2, -1\} \cup \{1, 2, 3, 4, \dots\} = Z - \{0\}$$

$$۲) Z \cup Q = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\} \cup Q = Q$$

دقت کنید که چون Z زیر مجموعه‌ای از Q است، اجتماع آن‌ها برابر با مجموعه‌ی بزرگ‌تر (Q) است.

$$۳) W \cup N = \{0, 1, 2, 3, \dots\} \cup \{1, 2, 3, \dots\} = \{0, 1, 2, 3, \dots\} = W$$

$$۴) Z - W = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\} - \{0, 1, 2, 3, \dots\} = Z^-$$

۲ ☆ گزینه ۴ بررسی‌ها

۱) شرط $\frac{a}{b}$ برای اعداد گویا کافی نیست؛ مثلاً $\frac{\sqrt{2}}{3}$ عددی گنگ است اما در این تعریف مجاز شمرده شده است. نمایش ریاضی مجموعه اعداد گویا به شکل $\left\{\frac{a}{b} \mid a, b \in Z, b \neq 0\right\}$ است.

۲) $R - Z$ اعداد حقیقی به جز اعداد صحیح را مشخص می‌کند؛ حال آن‌که می‌دانیم اعداد صحیح خودشان گویا نیز هستند.

۳) فقط کسره‌های با صورت و مخرج مثبت را به عنوان عدد گویا در نظر گرفته که این تعریف ناقص است و بخشی از اعداد مانند $-\frac{2}{5}$ را دربر نمی‌گیرد.

۴) $R - Q'$ یعنی همه‌ی اعداد به جز اعداد گنگ یعنی اعداد گویا

۳ ☆ گزینه ۲ گزینه‌های اول و سوم مجموعه‌هایی تک‌عضوی هستند و در نتیجه نمی‌توانند با مجموعه‌ی تهی برابر باشند. گزینه‌ی ۲ مجموعه‌ای بدون عضو است و این یعنی مجموعه‌ی \emptyset .

دقت: \emptyset به تنهایی یعنی مجموعه‌ی تهی و $\{\emptyset\}$ مجموعه‌ی تک‌عضوی شامل حرف \emptyset (فی) در الفبای لاتین است.

۴ ☆ گزینه ۴ بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) مجموعه‌ی A شامل عضو $\{1, 6\}$ است، و این عضویت را باید با $\{1, 6\} \in A$ نشان داد نه با $\{1, 6\} \subseteq A$ (نماد \subseteq به معنای زیرمجموعه بودن است).

۲) با توجه به آن‌چه که در گزینه‌ی ۱ گفتیم، مجموعه‌ی $\{\{7, 11\}\}$ زیرمجموعه‌ی A است و برای بیان آن باید از نماد \subseteq استفاده کرد.

۳) عدد ۷ به تنهایی در مجموعه‌ی A حضور ندارد، بلکه به همراه عدد ۱۱ ($\{7, 11\}$) یک از عضو از A را تشکیل می‌دهند.

۵ ☆ گزینه ۲

مجموعه‌ی A را با اعضایش می‌نویسیم:

$$\{x \mid x \in Z, x \leq 11\} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, 11\}$$

$$\{\text{اعداد طبیعی زوج}\} = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$$

اشتراک دو مجموعه عبارت است از $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ که ۵ عضو دارد.

۶ ☆ گزینه ۲ الف مجموعه‌ی A ، عضوی به صورت a (به تنهایی) ندارد. پس $a \in A$ صحیح نیست.

ب) تهی، زیرمجموعه‌ی تمام مجموعه‌هاست.

ج) $\{\{a\}\}$ زیرمجموعه‌ی A نیست، چون عضوی به صورت $\{a\}$ به تنهایی در A وجود ندارد. پس این رابطه هم صحیح نیست.

د) مثل موارد الف و ج، A عضوی به صورت $\{\emptyset\}$ ندارد. دقت کنید که $\{\emptyset\}$ تهی نیست و به معنای مجموعه‌ی تک‌عضوی شامل \emptyset است.

۷ ☆ گزینه ۱ مجموعه‌ی B را با اعضایش می‌نویسیم:

$$B = \{4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, \dots\}$$

$A \cap B$ را تشکیل می‌دهیم:

$$A \cap B = \{4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28\}$$

۹ عضو دارد.

۸ ☆ گزینه ۴ بررسی‌ها:

$$۱) N - E = \{1, 2, 3, \dots\} - \{2, 4, 6, \dots\} = \{1, 3, 5, \dots\}$$

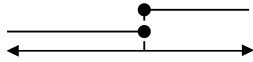
$$۲) Z - N = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} - \{1, 2, 3, \dots\} = \{\dots, -2, -1, 0\}$$

$$۳) E - O = \{2, 4, 6, \dots\} - \{1, 3, 5, \dots\} = \{2, 4, 6, \dots\}$$

$$۴) W - Z = \{0, 1, 2, \dots\} - \{\dots - 1, 0, 1, \dots\} = \{\}$$

۹ ☆ گزینه ۳ مضارب ۵ اعدادی هستند به فرم $5k$ ، از طرفی می‌دانیم که قرار نیست اعداد مضرب ۵ فقط مثبت باشند و مثلاً -۲۵ نیز مضرب ۵ به شمار می‌رود. بنابراین k باید عددی صحیح باشد. پس گزینه ی ۳ صحیح است.
گزینه ی ۱ فقط مضارب نامنفی ۵ را مشخص می‌کند.

۱۰ ☆ گزینه ۳ مجموعه‌ای که x ها از آن انتخاب می‌شوند، اعضای از بازه $(-۲, ۴]$ هستند که در N هم باشند. پس x ها عبارتند از $۱, ۲, ۳, ۴$. پس A عبارت است از:
 $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\}$ که ۴ عضو دارد.



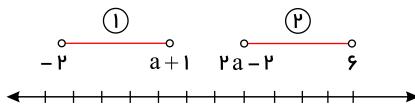
۱۱ ☆ گزینه ۳ برای تک عضوی شدن اشتراک دو بازه، بازه‌ها باید به این شکل باشند:

یعنی پایان بازه ی اول، آغاز بازه ی دوم باشد؛

$$\frac{a}{2} = \frac{2a-1}{3} \Rightarrow 3a = 4a-2 \Rightarrow a=2$$

۱۲ ☆ گزینه ۳ برای برقرار شدن رابطه ی فوق، دو بازه باید به شکل باشد. بنابراین اولاً باید $m \leq 3$ باشد تا شروع بازه ی دوم در بدنه ی بازه ی اول باشد؛

ثانیاً باید $m < 2$ باشد تا حاصل اشتراک بازه‌ها از -۲ آغاز شود (وگرنه باید از m آغاز شود). بنابراین به $-۲ < m \leq 3$ می‌رسیم.



۱۳ ☆ گزینه ۴ بازه‌ها به این شکل باشند تا عضو مشترکی نداشته باشند:

(۱) بازه سمت راست از جایی که بازه اول و پایان می‌پذیرد (به بعد) آغاز شود. یعنی:

$$a+1 \leq 2a-2 \Rightarrow 1+2 \leq 2a-a \Rightarrow 3 \leq a$$

(۲) در بازه دوم، شروع بازه از پایان آن کوچک تر باشد یا حداکثر با آن مساوی باشد:

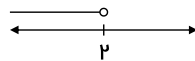
$$2a-2 \leq 6 \Rightarrow 2a \leq 8 \Rightarrow a \leq 4$$

$$\xrightarrow{1,2} 3 \leq a \leq 4$$

۱۴ ☆ گزینه ۱ برای آن که ۱۱ عضو این بازه باشد، باید نامساوی $11 < 2a + 13 \leq 11$ برقرار باشد:

$$(I) \frac{2a-3}{3} \leq 11 \xrightarrow{\times 3} 2a-3 \leq 33 \Rightarrow 2a \leq 36 \xrightarrow{\div 2} a \leq 18$$

$$(II) 11 < 2a + 13 \Rightarrow 11 - 13 < 2a \Rightarrow -2 < 2a \xrightarrow{\div 2} -1 < a \xrightarrow{I, II} -1 < a \leq 18$$



۱۵ ☆ گزینه ۴ بازه ی $(-\infty, 2)$ را روی محور در نظر بگیرید:

بازه ی $\left[\frac{a-6}{2}, +\infty\right)$ باید از $x=2$ به قبل آغاز شود تا اجتماع هر دو بازه، کل محور اعداد را شامل شود؛ یعنی آغاز آن باید کوچک تر یا مساوی ۲ باشد.

$$\frac{a-6}{2} \leq 2 \xrightarrow{\times 2} a-6 \leq 4 \Rightarrow a \leq 10$$

۱۶ ☆ گزینه ۴ مجموعه را با اعضایش می‌نویسیم: $A = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$

دقت کنید که x ها باید از مجموعه ی Z انتخاب شوند؛ بنابراین مجموعه ی A فقط شامل اعضای صحیح است و این مجموعه، نمایش بازه‌ای ندارد.
نکته: $[-۳, ۲]$ شامل تمام اعداد حقیقی در بازه ی $۲ < x \leq -۳$ می‌شود.

۱۷ ☆ گزینه ۱

$$A_1 = [-1, 4], A_2 = [-2, 3, 5], A_3 = [-5, 2], A_4 = [-7, 1]$$

$$\begin{cases} A_2 \cap A_5 = [-2, 2] \\ A_1 \cap A_7 = [-1, 1] \end{cases} \Rightarrow (A_2 \cap A_5) - (A_1 \cap A_7) = [-2, -1) \cup (1, 2]$$

۱۸ ☆ گزینه ۳ از میان چهار گزینه فقط بزرگ ترین عدد صحیح کوچک تر از ۲ وجود دارد که آن هم ۱ است. در بقیه ی گزینه ها، عدد خواسته شده قابل تعیین نیست.

۱۹ ☆ گزینه ۱ اعداد طبیعی و معکوس آن ها را ببینید:

$$1 \xrightarrow{\text{معکوس}} 1, \quad 2 \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{1}{2}, \quad 3 \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{1}{3}, \quad \dots$$

همان طور که می بینید، در میان اعداد طبیعی، ۱ با معکوس خود برابر است و بقیه از معکوس خود بزرگ ترند. بنابراین مجموعه ی اعداد طبیعی که از معکوس خود کوچک ترند، تهی است؛ و تهی مجموعه ای متناهی است.

۲۰ ☆ گزینه ۱ همه ی اعداد حسابی (اعضای W)، گویا هم هستند. بنابراین اگر از W اعداد گویا را حذف کنیم، تهی می شود و تهی مجموعه ای متناهی است. در نتیجه گزینه ی ۱ صحیح است.

بررسی سایر گزینه ها:

۲) $R - Q' = Q$ نامتناهی

۳) $Q \cap Z = Z$ نامتناهی

۴) $Q \cap N = N$ نامتناهی

۲۱ ☆ گزینه ۲ B مجموعه ای متناهی است و A قسمتی از آن است؛ بنابراین در بزرگ ترین حالت برابر با خود B است و در کوچک ترین حالت تهی است. مجموعه هایی که در حد فاصل تهی تا B قرار می گیرند نیز جواب مسئله هستند؛ اما خاصیت مشترک همه این مجموعه ها، متناهی بودن آن ها است یعنی گزینه ی ۲.

دقت کنید که چون A بخشی از یک مجموعه ی متناهی است، خودش نمی تواند نامتناهی باشد و گزینه ی ۱ صحیح نیست.

۲۲ ☆ گزینه ۴ گزینه ها را ببینید:

۱) متناهی $\rightarrow \{2, 3, 5, 7\}$ = مجموعه ی اعداد اول یک رقمی

۲) متناهی \rightarrow مجموعه ای که تعداد اعضای آن قابل شمارش است = مجموعه ی انسان های روی زمین

۳) متناهی $\rightarrow \{2\}$: مجموعه ی اعداد اول زوج

دقت: تنها عدد اول زوج، ۲ است. اعداد زوج دیگر چون بر ۲ بخش پذیرند، اول نیستند.

۴) نامتناهی $\rightarrow \left\{ \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \right\}$ = مجموعه ی کسره های مثبت با صورت یک

۲۳ ☆ گزینه ۲ A را با اعضایش می نویسیم: $A = \{1, 2, 3, \dots, n, n+1\}$

در نتیجه تعداد اعضای A معلوم و برابر با عدد طبیعی $n+1$ است. پس متناهی است.

۲۴ ☆ گزینه ۱

$$\left. \begin{aligned} 2x - \frac{1}{2} \leq 3x &\Rightarrow \frac{-1}{2} \leq 3x - 2x \Rightarrow \frac{-1}{2} \leq x \\ 3x \leq \frac{2x+3}{3} &\Rightarrow 9x \leq 2x+3 \Rightarrow 7x \leq 3 \Rightarrow x \leq \frac{3}{7} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{7}$$

$$\rightarrow A = \left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{7} \right] \Rightarrow A' = R - A = \left(-\infty, -\frac{1}{2} \right) \cup \left(\frac{3}{7}, +\infty \right)$$

۲۵ ☆ گزینه ۲ $(A \cup B)' = A' \cap B'$

مجموعه ی مرجع عبارت است از: $U = \{1, 2, 3, 4, \dots, 14\}$

$$A' \cap B' = (A \cup B)' = (\{1, 2, 3, 4, 11, 13, 14\})' = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 12\}$$

$$C' = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 14\}$$

$$\Rightarrow (A' \cap B') \cup C' = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14\} \Rightarrow \text{تعداد اعضا} = 11$$

$$U = \{1, 2, 3, \dots, 19\}$$

۲۶ ☆ گزینه ۳ مجموعه ی مرجع عبارت است از:

$$\begin{cases} A_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\ A_2 = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\} \Rightarrow A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \\ A_3 = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\} \end{cases}$$

مجموعه های A_1, A_2, A_3 را نیز تشکیل می دهیم:

A ۸ عضو دارد. تعداد اعضای متمم آن برابر $11 - 8 = 19$ است.

$$U = (0, +\infty)$$

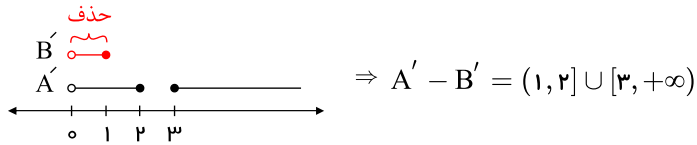
☆ ۲۷ گزینه ۲ مجموعه مرجع عبارت است از:

از طرفی:

$$A' = (0, +\infty) - (2, 3) = (0, 2] \cup [3, +\infty)$$

$$B' = (0, +\infty) - (1, +\infty) = (0, 1]$$

$A' - B'$ را روی نمودار تعیین می‌کنیم.



$$\Rightarrow A' - B' = (1, 2] \cup [3, +\infty)$$

☆ ۲۸ گزینه ۴ متمم مجموعه مرجع، \emptyset است.

بررسی گزینه‌ها:

$$۱) U \cup U' = U \cup \emptyset = U$$

$$۲) U \cap U' = U \cap \emptyset = \emptyset$$

$$۳) U - U' = U - \emptyset = U$$

$$۴) U' - U = \emptyset - U = \emptyset$$

☆ ۲۹ گزینه ۴ بررسی گزینه‌ها:

۱) اجتماع هر مجموعه با مجموعه مرجع، برابر با مجموعه مرجع است.

۲) این گزینه، همان تعریف مجموعه متمم است.

۳) هر مجموعه با متمم خود، هیچ اشتراکی ندارد. بنابراین حاصل اشتراک، مجموعه تهی است.

۴) اعضای A در A' نیستند. بنابراین اگر A را از A' کم کنیم، در $A' - A = A'$ تغییری حاصل نمی‌شود و $A' - A = A'$.

☆ ۳۰ گزینه ۳

$$A = \{-25, -24, \dots, 24, 25\} \Rightarrow A' = Z - A = \{\dots, -27, -26\} \cup \{26, 27, \dots\}$$

مشخص است که A' مجموعه‌ای نامتناهی است. اجتماع یک مجموعه نامتناهی با هر مجموعه دیگر (اعم از نامتناهی و متناهی)، مجموعه‌ای نامتناهی خواهد بود. بنابراین گزینه‌های ۲ و ۴ نامتناهی هستند. و اما گزینه ۱:

$$A \cap B' = A - B$$

و این یعنی تعداد قابل شمارشی از اعضا، باید از A حذف شوند و این نامتناهی بودن A را نقض نمی‌کند.

☆ ۳۱ گزینه ۳

$$B - A' = B \cap A'$$

$$A \subseteq B \Rightarrow \begin{cases} A \cup B = B \\ A \cap B = A \end{cases}$$

$$B - A' = B \cap (A')' = B \cap A = A$$

☆ ۳۲ گزینه ۴ مجموعه‌ای است که هم زیرمجموعه B است و هم زیرمجموعه متمم آن. اگر A دارای عضو باشد، آن عضو باید هم متعلق به B باشد و هم متعلق به B' و این

امکان‌پذیر نیست. (چون B و B' عضو مشترک ندارند و گرنه متمم هم نیستند) بنابراین A نمی‌تواند حاوی هیچ عضوی باشد. پس تهی است که تهی زیرمجموعه همه مجموعه‌هاست.

☆ ۳۳ گزینه ۲

$$A - B = A \cap B'$$

$$A \cap (A - B) = A \cap (A \cap B') = \overbrace{A \cap A}^A \cap B' = A \cap B' = A - B$$

☆ ۳۴ گزینه ۲

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow n(B) = n(A \cup B) - n(A) + n(A \cap B)$$

$$\Rightarrow n(B) = 29 - 14 + 3 = 18$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \quad \text{گزینه ۱} \quad \star 35$$

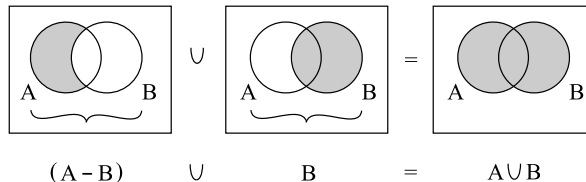
اگر مجموعه افرادی که برای المپیاد ریاضی ثبت نام کرده اند را A و مجموعه افرادی که برای المپیاد کامپیوتر ثبت نام کرده اند را B بنامیم آنگاه:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$24 = 12 + 16 - n(A \cap B) \Rightarrow 24 = 28 - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 4$$

$$\star 36 \quad \text{گزینه ۴}$$

با توجه به نمودار ون:



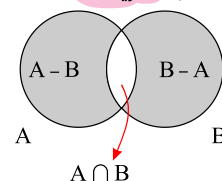
$$\Rightarrow n((A - B) \cup B) = n(A \cup B) = 15$$

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 20 - 8 = 12$$

$$n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = 21 - 8 = 13$$

$$\Rightarrow n((A - B) \cup (B - A)) = n(A - B) + n(B - A) - n((B - A) \cap (A - B)) = 12 + 13 - 0 = 25$$

$$\star 37 \quad \text{گزینه ۱}$$



مجموعه $A - B$ شامل اعدادی است که مضارب ۶ باشند و مضرب ۴ نباشند و از طرفی دو رقمی طبیعی نیز باشند:

$$A - B = \{18, 30, 42, 54, 66, 78, 90\} \Rightarrow n(A - B) = 7$$

$$\star 38 \quad \text{گزینه ۲}$$

$$n(U) = 43 \quad \text{گزینه ۲} \quad \star 39$$

از طرفی:

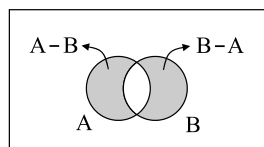
$$n(\text{فوتسال} \cup \text{فوتبال}) = n(\text{فوتسال}) + n(\text{فوتبال}) - n(\text{فوتسال} \cap \text{فوتبال}) = 23 + 27 - 16 = 34$$

تعداد شرکت کنندگان هر دو رشته

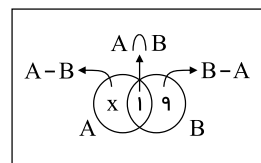
پس در مجموع ۳۴ نفر در تمرین ها شرکت می کنند و تعداد افرادی که در هیچ تمرینی حضور ندارند، برابر $43 - 34 = 9$ است.

$$\star 40 \quad \text{گزینه ۱} \quad \text{با توجه به نمودار ون:}$$

$$n((A - B) \cup (B - A)) = n(A \cup B) - n(A \cap B) = 27 - 8 = 19$$



$$\star 41 \quad \text{گزینه ۲}$$



$$n(B \cap A') = n(B - A) = 9$$

$$\Rightarrow n(A \cup B) = x + 1 + 9 \Rightarrow 17 = x + 10 \Rightarrow x = n(A - B) = 7$$

۴۲ ☆ گزینه ۳ اولین شکل ۴ چوب کبریت دارد و بعدی ۳ چوب کبریت بیش تر دارد و این الگو در حال تکرار شدن است. پس عدد ۳ در حال اضافه شدن به شکل قبلی و تولید شکل جدید است. در شکل n ام به تعداد ۱ - n گروه ۳ تایی چوب کبریت به شکل اول اضافه شده است. یعنی تعداد چوب کبریت های شکل n ام، $3(n-1) + 4$ است:

$$n = 25 \Rightarrow 3(25-1) + 4 = 76 = 4 + 72 = 4 + 24 \times 3 = 4 + 72 = 76$$

۴۳ ☆ گزینه ۲ اولین شکل ۳ چوب کبریت دارد و در الگو، هر شکل ۲ چوب کبریت بیش تر از شکل قبل دارد. بنابراین شکل n ام به تعداد $2(n-1) + 3$ چوب کبریت خواهد داشت:

$$n = 17 \rightarrow 2(17-1) + 3 = 35 = 3 + 32 = 3 + 16 \times 2 = 3 + 32 = 35$$

۴۴ ☆ گزینه ۲ شکل اول ۴ گلوله دارد و در شکل های بعدی، به هر کدام ۴ گلوله نسبت به شکل قبل اضافه می شود. بنابراین:

$$n \text{ ام شکل} = 4 + (n-1) \times 4 = 4 + 4n - 4 = 4n$$

۴۵ ☆ گزینه ۱ شکل اول الگو ۵ چوب کبریت دارد و در ادامه، هر شکل ۳ چوب کبریت بیش تر از شکل قبل از خودش دارد. پس:

$$n \text{ ام شکل} = 5 + (n-1) \times 3 = 5 + 3n - 3 = 2 + 3n$$

۴۶ ☆ گزینه ۴ تعداد هر یک از دایره های هر شکل برابر با n^2 است. (n: شماره ی هر شکل) پس:

$$100 = 10^2 = 100$$

۴۷ ☆ گزینه ۲ تعداد دایره های هر شکل برابر با شماره ی شکل به علاوه یک به توان ۲ است، یعنی $(n+1)^2$

$$169 = 13^2 = (12+1)^2 = 169$$

۴۸ ☆ گزینه ۳

$$\begin{cases} t_4 = a \times 4 + b = -11 \Rightarrow 4a + b = -11 \\ t_{10} = a \times 10 + b = 7 \Rightarrow 10a + b = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4a - b = 11 \\ 10a + b = 7 \end{cases} \Rightarrow 6a = 18 \Rightarrow a = \frac{18}{6} = 3$$

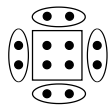
$$4a + b = -11 \xrightarrow{a=3} 4 \times 3 + b = -11 \Rightarrow b = -12 - 11 = -23 \Rightarrow t_n = 3n - 23$$

$$t_n = 19 \Rightarrow 3n - 23 = 19 \Rightarrow 3n = 42 \Rightarrow n = \frac{42}{3} = 14$$

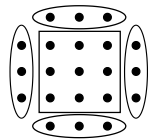
۴۹ ☆ گزینه ۴ جمله ی عمومی این الگو عبارت است از $t_n = \frac{n^2}{2} + 1 (n \geq 2)$ ، بنابراین:

$$t_{14} = \frac{14^2}{2} + 1 = \frac{196}{2} + 1 = 98 + 1 = 99$$

۵۰ ☆ گزینه ۱ شکل های دوم و سوم را ببینید:



$$\text{تعداد نقاط شکل دوم} = 2^2 + 4 \times 2$$



$$\text{تعداد نقاط شکل سوم} = 3^2 + 4 \times 3$$

$$\text{تعداد نقاط شکل n ام} = n^2 + 4 \times n$$

$$\Rightarrow \text{تعداد نقاط شکل نهم} = 9^2 + 4 \times 9 = 81 + 36 = 117$$

☆ ۵۱ گزینه ۲ روش اول: از میان گزینه ها، فقط گزینه ی ۲ می تواند اعداد حاضر در الگو را تولید کند:

$$t_n = \frac{1}{n^2 + n} \Rightarrow \begin{aligned} t_1 &= \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} & t_2 &= \frac{1}{4+2} = \frac{1}{6} \\ t_3 &= \frac{1}{9+3} = \frac{1}{12} & t_4 &= \frac{1}{16+4} = \frac{1}{20} \end{aligned}$$

روش دوم: مخرج همه ی اعداد حاضر در دنباله، حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی هستند:

$$\frac{1}{1 \times 2}, \frac{1}{2 \times 3}, \frac{1}{3 \times 4}, \frac{1}{4 \times 5}, \dots \Rightarrow t_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n^2 + n}$$

☆ ۵۲ گزینه ۲

$$t_n = an^2 + bn \Rightarrow \begin{cases} t_2 = a \times 4 + b \times 2 = 2 \Rightarrow 4a + 2b = 2 \xrightarrow{\div 2} 2a + b = 1 \xrightarrow{\times 2} 4a + 2b = 2 \\ t_3 = a \times 9 + b \times 3 = -2 \Rightarrow 9a + 3b = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -4a - 2b = -2 \\ 9a + 3b = -2 \end{cases} \xrightarrow{a=-1} \begin{cases} 4a + 2b = 2 \\ 9a + 3b = -2 \end{cases} \Rightarrow 3a = -3 \Rightarrow a = -1$$

$$2a + b = 1 \xrightarrow{a=-1} -2 + b = 1 \Rightarrow b = 3$$

$$\Rightarrow t_n = -n^2 + 3n \Rightarrow t_{10} = -100 + 3 \times 10 = -70$$

☆ ۵۳ گزینه ۴ دنباله ی اعداد طبیعی زوج به صورت ۲, ۴, ۶, ۸, ... بوده و جمله عمومی آن $t_n = 2n$ است. بنابراین:

$$t_n + t_{n+1} = 2n + 2(n+1) = 2n + 2n + 2 = 4n + 2$$

☆ ۵۴ گزینه ۱

$$a_n = b_n \Rightarrow \frac{n+3}{n^2+9} = \frac{1}{n} \Rightarrow n^2 + 3n = n^2 + 9 \Rightarrow 3n = 9 \Rightarrow n = 3$$

☆ ۵۵ گزینه ۳ راه اول: نامعادله ی $t_n < 0$ را حل می کنیم:

$$\frac{n+3}{2n-5} < 0 \Rightarrow \begin{cases} n+3 = 0 \Rightarrow n = -3 \\ 2n-5 = 0 \Rightarrow n = \frac{5}{2} \end{cases}$$

n	-3	$\frac{5}{2}$	
n+3	-	+	+
2n-5	-	-	+
$\frac{n+3}{2n-5}$	+	-	+

تعریف نشده

پس مجموعه ی جواب نامعادله عبارت است از: $(-3, \frac{5}{2})$ اما از آن جا که n فقط می تواند مقادیر طبیعی داشته باشد، مقادیر $n = 1, n = 2$ برای آن به دست می آیند. پس این دنباله دو جمله منفی دارد.

راه دوم: صورت کسر عددی مثبت است. مخرج به ازای $n = 1, n = 2$ منفی است و از $n = 3$ به بعد، $2n$ بزرگ تر از ۵ است و حاصل مخرج نیز مثبت می شود و t_n را مثبت می کند. پس جملات منفی، فقط t_1, t_2 هستند.

☆ ۵۶ گزینه ۴ معادله ی $t_n > 0$ را حل می کنیم:

$$34n - 2n^2 > 0 \Rightarrow 2n(17-n) > 0 \Rightarrow \begin{cases} 2n = 0 \Rightarrow n = 0 \\ 17-n = 0 \Rightarrow n = 17 \end{cases}$$

n	0	17	
2n	-	+	+
17-n	+	+	-
2n(17-n)	-	+	-

جواب

در این بازه ۱۶ عدد طبیعی $n \in (0, 17)$ وجود دارد. پس این دنباله ۱۶ جمله مثبت دارد.

☆ ۵۷ گزینه ۳ جمله مشترک یعنی جمله ای که در معادله $a_n = b_n$ صدق کند.

$$\Rightarrow \frac{n-3}{n+1} = \frac{n-2}{n+6}$$

طرفین وسطین

$$\rightarrow n^2 + 3n - 18 = n^2 - n - 2 \Rightarrow 3n + n = 18 - 2 \Rightarrow 4n = 16 \Rightarrow n = 4$$

حال با استفاده از $n = 4$ مقدار جمله مشترک را محاسبه می‌کنیم:

$$a_4 = \frac{4-3}{4+1} = \frac{1}{5} \quad b_4 = \frac{4-2}{4+6} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

☆ ۵۸ گزینه ۱ معنی رابطه‌ی $a_n = a_{n-1} + 4$ آن است که هر جمله از اضافه شدن عدد ثابت ۴ به جمله قبلی به دست می‌آید. پس قدرنسبت برابر ۴ است؛ جمله‌ی اول هم برابر

۲- است. جمله‌ی عمومی را تشکیل می‌دهیم:

$$t_n = t_1 + (n-1)d = -2 + (n-1) \times 4 = -2 + 4n - 4 = 4n - 6$$

$$t_{10} = 4 \times 10 - 6 = 34$$

جمله‌ی دهم:

نسبت جمله‌ی دهم به قدرنسبت:

$$\frac{t_{10}}{d} = \frac{34}{4} = \frac{17}{2} = 8,5$$

☆ ۵۹ گزینه ۲ جمله‌ی اول دنباله‌ی ۳ و قدرنسبت دنباله‌ی حسابی برابر با: $d = 7 - 3 = 4$ است. جمله‌ی عمومی را تشکیل می‌دهیم:

$$t_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow t_n = 3 + 4n - 4 \Rightarrow t_n = 4n - 1$$

حال نامعادله‌ی $t_n < 100$ را حل می‌کنیم:

$$4n - 1 < 100 \Rightarrow 4n < 101 \xrightarrow{\div 4} n < \frac{101}{4} \Rightarrow n < 25,25 \dots \Rightarrow n \leq 25$$

nهای طبیعی کم‌تر از ۲۵ عبارتند از:

$$n = 1, 2, 3, \dots, 25$$

پس این دنباله‌ی ۲۵ جمله‌ی کوچک‌تر از ۱۰۰ دارد.

☆ ۶۰ گزینه ۱

$$\begin{cases} t_7 = 24 \Rightarrow t_1 + 6d = 24 \\ t_{27} = 64 \Rightarrow t_1 + 26d = 64 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -t_1 - 6d = -24 \\ t_1 + 26d = 64 \end{cases} \Rightarrow 20d = 40 \Rightarrow d = 2$$

$$t_1 + 6d = 24 \xrightarrow{d=2} t_1 + 6 \times 2 = 24 \Rightarrow t_1 = 24 - 12 = 12$$

جمله‌ی عمومی:

$$t_n = 12 + (n-1) \times 2 = 12 + 2n - 2 \Rightarrow t_n = 2n + 10$$

$$t_{80} = 2 \times 80 + 10 = 160 + 10 = 170$$

جمله‌ی هشتماد:

☆ ۶۱ گزینه ۳ در دنباله‌ی حسابی، هر جمله (غیر از جمله اول) میانگین جملات طرفین خود است:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{-3+5}{2} = \frac{2}{2} = 1 \\ 5 &= \frac{x+y}{2} \xrightarrow{x=1} 5 = \frac{1+y}{2} \Rightarrow 10 = 1+y \Rightarrow y = 9 \\ y &= \frac{5+z}{2} \xrightarrow{y=9} 9 = \frac{5+z}{2} \Rightarrow 18 = 5+z \Rightarrow z = 13 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x+y+z = 1+9+13 = 23$$

☆ ۶۲ گزینه ۴ باید دنباله‌ای به صورت $4, \dots, x, \dots, 58$ و جمله‌ی وسط آن را تعیین کنیم. از آن‌جا که در هر دنباله، هر جمله‌ی برابر است با میانگین جملات متساوی‌فاصله از

طرفین آن، داریم:

$$x = \frac{4+58}{2} = \frac{62}{2} = 31$$

روش دوم:

$$\Rightarrow 4 + 4d = 58 \Rightarrow 4d = 54 \Rightarrow d = \frac{54}{4} = \frac{27}{2}$$

$$\text{وسط جمله‌ی} = 4 + 2d = 4 + 2 \times \frac{27}{2} = 4 + 27 = 31$$

☆ ۶۳ گزینه ۲

دنباله‌ی حسابی به فرم مقابل خواهد بود:

$$32, \dots, \dots, \dots, 84$$

$$\Rightarrow 32 + 4d = 84 \Rightarrow 4d = 52 \Rightarrow d = \frac{52}{4} = 13$$

$$\Rightarrow 32 \overset{+13}{\curvearrowright}, 45, 58, 71, 84$$

$$\text{مجموع سه جمله: } 45 + 58 + 71 = 174$$

۶۴ ☆ گزینه ۳ نکته: برای نمایش جملات متوالی یک دنباله حسابی، آن هم وقتی مجموع آن‌ها در دسترس باشد، دنباله را به صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$\dots, x - 2d, x - d, x, x + d, x + 2d, \dots$$

$$\text{مجموع ۵ جمله ی متوالی} = 70 \Rightarrow (x - 2d) + (x - d) + x + (x + d) + (x + 2d) = 70$$

$$\Rightarrow 5x = 70 \Rightarrow x = \frac{70}{5} = 14 = \text{جمله ی وسط} = t_p$$

از طرفی $t_p = 10$ و می‌توانیم قدرنسبت را به دست آوریم:

$$d = t_p - t_1 = 14 - 10 = 4$$

۶۵ ☆ گزینه ۴ دنباله‌ی جملات مشترک عبارت است از: $3, 9, 15, \dots$

جمله ی اول این دنباله ی ۳ و قدرنسبت آن ۶ است. جمله ی عمومی را تشکیل می‌دهیم:

$$t_n = a_1 + (n - 1)d = 3 + (n - 1) \times 6 = 3 + 6n - 6 \Rightarrow t_n = 6n - 3$$

$$t_{p_0} = 6 \times 20 - 3 = 120 - 3 = 117$$

۶۶ ☆ گزینه ۱

$$a_n = a_1 + (n - 1)d = 5 + (n - 1) \times 3 = 5 + 3n - 3 = 3n + 2$$

$$a'_n = a'_1 + (n - 1)d' = 4 + (n - 1) \times 3 = 4 + 3n - 3 = 3n + 1$$

$$a'_n, a_n \text{ اختلاف} = (3n + 2) - (3n + 1) = 1$$

۶۷ ☆ گزینه ۴

$$t_{p_1} - t_{p_6} = (t_1 + 20d) - (t_1 + 15d) = 20d - 15d = 5d$$

$$t_{p_9} - t_{p_3} = (t_1 + 38d) - (t_1 + 33d) = 38d - 33d = 5d$$

۶۸ ☆ گزینه ۲ دنباله ی حسابی یک الگوی خطی است و جمله ی عمومی آن به شکل $t_n = an + b$ (یعنی برحسب n از درجه ی ۱) است. پس تنها گزینه ی ۲ صحیح است.

۶۹ ☆ گزینه ۱ قدرنسبت دنباله ی $3, 8, 13, 18, \dots$ برابر است با ۵

از طرفی:

$$\Rightarrow \text{قدرنسبت دنباله ی جدید} = 4d = 4 \times 5 = 20$$

$$+4d + 4d$$

$$t_p \curvearrowright, t_p \curvearrowright, t_{11}, \dots$$

۷۰ ☆ گزینه ۴

$$t_p = 4t_p \Rightarrow t_1 + 6d = 4(t_1 + 2d)$$

$$\Rightarrow t_1 + 6d = 4t_1 + 8d \Rightarrow 3t_1 = -2d \Rightarrow t_1 = -\frac{2}{3}d$$

$$\frac{d}{t_p} = \frac{d}{t_1 + d} = \frac{d}{-\frac{2}{3}d + d} = \frac{d}{\frac{1}{3}d} = 3$$

۷۱ ☆ گزینه ۳

$$t_n = t_1 \times r^{n-1}$$

$$\frac{t_3}{t_1} = \frac{t_1 \times r^2}{t_1} = r^2 = \sqrt{5}$$

$$\frac{t_9}{t_5} = \frac{t_1 \times r^8}{t_1 \times r^4} = r^4 = (r^2)^2 = (\sqrt{5})^2 = 5$$

- ۷۲ ☆ گزینه ۲ (۱) از هر نقطه بیشمار خط راست می‌گذرد، بنابراین مجموعه خطوط گذرنده از نقطه‌ای به مختصات $(0, 2)$ نامتناهی است.
 (۲) تعداد اعداد اول بین ۱۰۰ تا ۱۰۰۰ معلوم و برابر با یک عدد حسابی است؛ پس یک مجموعه متناهی را تشکیل می‌دهند.
 (۳) بین هر دو عدد حقیقی، بیشمار عدد حقیقی وجود دارد. (به نقاط روی محور اعداد که بین ۲ و ۳ وجود دارند، فکر کنید).
 (۴)

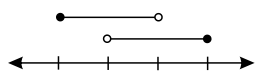
$$Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\} \Rightarrow Z - W = \{\dots, -3, -2, -1\}$$

$$W = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

پس نامتناهی است.

دقت: برای متناهی بودن یک مجموعه، فقط کافیست که تعداد اعضای آن قابل شمارش باشد؛ حتی اگر شمارش آن مشکل باشد یا تعداد اعضای آن زیاد باشد.

- ۷۳ ☆ گزینه ۴ برای آنکه اشتراک بازه‌های $[-2, a]$ و $(b, 4]$ برابر با $(-\frac{2}{3}, 1)$ باشد، باید روی محور چنین وضعیتی داشته باشند:



بنابراین اشتراک آنها (b, a) است:

$$(b, a) = \left(-\frac{2}{3}, 1\right) \Rightarrow \begin{cases} b = -\frac{2}{3} \\ a = 1 \end{cases}$$

$$(-2a - 1, b) = (-2 \times 1 - 1, -\frac{2}{3}) = (-3, -\frac{2}{3})$$

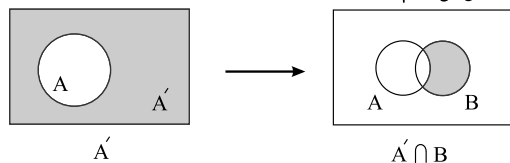
$$(b - a) = \left(-\frac{2}{3}, 1\right)$$

پس:

$$(-2a - 1, b) \cup (b, a) = (-3, -\frac{2}{3}) \cup \left(-\frac{2}{3}, 1\right)$$

$$= (-3, 1) - \left\{-\frac{2}{3}\right\}$$

- ۷۴ ☆ گزینه ۳ مسئله $n(A' \cap B)$ یعنی تعداد اعضای $A' \cap B$ را خواسته است. آن را روی نمودار ون نمایش می‌دهیم:



پس تعداد اعضای $A' \cap B$ عبارتست از:

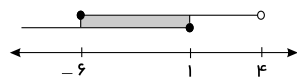
$$n(A' \cap B) = n(B) - n(A \cap B)$$

فرض‌های مسئله را ببینید:

$$\left. \begin{aligned} n(B) &= 10 \\ 2n(A \cap B) &= 10 \Rightarrow n(A \cap B) = 5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow n(A' \cap B) = 10 - 5 = 5$$

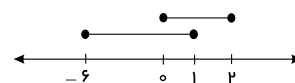
- ۷۵ ☆ گزینه ۳ از متناهی بودن مجموعه A نتیجه می‌گیریم که تعداد اعضای آن قابل شمارش و محدود است؛ پس تعداد اعضای اشتراک A با مجموعه $B \cup C$ نمی‌تواند نامحدود باشد (یعنی از تعداد اعضای A بیشتر باشد)؛ پس مجموعه $A \cap (B \cup C)$ متناهی است.
 A متناهی و C نامتناهی است، پس $A \cap C$ است (اشتراک هر مجموعه متناهی و نامتناهی، خودش متناهی است). از طرفی برای تعیین $B - (A \cap C)$ باید اعضای $A \cap C$ را از B خارج کنیم؛ یعنی تعداد قابل شمارشی عضو را از B که نامتناهی است، خارج کرده‌ایم؛ در نتیجه تعداد اعضای باقیمانده در B نامحدود است و $B - (A \cap C)$ نامتناهی خواهد بود.

- ۷۶ ☆ گزینه ۱ ابتدا حاصل $(-\infty, 1) \cap (-6, 4]$ را با استفاده از محور بدست می‌آوریم:



حال، اعضای بازه $[0, 2)$ را از این بازه کم می‌کنیم:

$$[-6, 1] - [0, 2) = [-6, 0)$$



باز هم استفاده از محور، بهترین راه حل است.

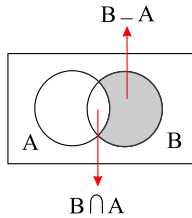
دقت: چون خود صفر را از بازه $[-6, 1]$ خارج کرده ایم، جای خالی آن باقیمانده و انتهای بازه، باز است.

۷۷ ☆ گزینه ۱ باید تعداد اعضای مجموعه $(A \cup B)'$ را بیابیم؛ یعنی متمم $A \cup B$ را؛ برای این کار تعداد اعضای $A \cup B$ را تعیین می کنیم و اختلاف آن را از ۱۰۰ (تعداد اعضای مرجع) بدست می آوریم:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

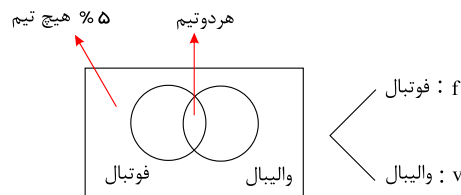
در این رابطه: $n(A)$ و $n(B)$ معلوم است؛ می ماند $n(A \cap B)$ که برای آن داریم:

$$\begin{aligned} n(B - A) &= n(B) - n(A \cap B) \\ \Rightarrow 50 &= 70 - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 70 - 50 = 20 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= 45 + 70 - 20 = 95 \\ n((A \cup B)') &= n(u) - n(A \cup B) = 100 - 95 = 5 \end{aligned}$$

۷۸ ☆ گزینه ۲ به نمودار ون توجه کنید:



$$\begin{aligned} n(f \cup v) &= 100 - 5 = 95 \\ \Rightarrow n(f) + n(v) - n(f \cap v) &= 95 \Rightarrow 60 + 50 - n(f \cap v) = 95 \\ \Rightarrow n(f \cap v) &= 60 + 50 - 95 = 15 \end{aligned}$$

۷۹ ☆ گزینه ۳

(a) دقت کنید که شکل مستطیل است) $2 \times 5 + 2 \times 1.5x = 10 + 3x$

(b) محیط شکل $= 1.5x + (x + 2) + (x + 2) + 1.5x + x = 6x + 4$

حکم مسئله: (a) محیط شکل > (b) محیط شکل $\Rightarrow 10 + 3x > 6x + 4 \Rightarrow 10 - 4 > 6x - 3x$

$$\Rightarrow 3x < 6 \xrightarrow{\div 3} x < 2$$

اما: x ها باید مثبت باشند که طول ضلع منفی تولید نکنند. پس: $0 < x < 2$

۸۰ ☆ گزینه ۳ A_1 مجموعه همه اعداد طبیعی است که مربع آنها از ۲۰ بیشتر است؛ یعنی: $\{6, 7, 8, \dots\}$ پس نامتناهی است.

A_2 مجموعه اعداد اول بیشتر از ۱۰۰۰ است. پس مجموعه ای بی انتها است و نامتناهی است.

A_3 مجموعه اعداد طبیعی بیش از ۹ و کمتر از ۱۰۰ است. یعنی: $\{10, 11, \dots, 99\}$ پس متناهی است. (اعضای آن قابل شمارش هستند)

A_4 مجموعه اعداد حقیقی کوچکتر از ۱۰۰ هستند؛ پس تعداد آن بی شمار است. (به تعداد نقاط روی محور اعداد و قبل از ۱۰۰ فکر کنید)

۸۱ ☆ گزینه ۱ می دانیم: $(A \cup B)' = A' \cap B'$

بنابراین:

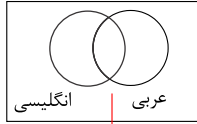
$$n((A \cup B)') = n(A' \cap B')$$

$$A' \cap B' = \{5, 6, 7, 8\} \cap \{7, 8, 9, 10\} = \{7, 8\}$$

$$\Rightarrow n(A' \cap B') = n((A \cup B)') = 2$$

حال $A' \cap B'$ را بدست می آوریم:

۸۲ ☆ گزینه ۲ دانش آموزانی که هر دو زبان را می خوانند، کسانی هستند که در ناحیه مشترک بین دو مجموعه زیر حضور دارند. پس تعداد آنها را برابر با x قرار می دهیم و در



آخر x را محاسبه می کنیم: E : انگلیسی

A : عربی

پس تعداد کسانی که لااقل یکی از دو زبان را می خوانند $34 = 6 - 40 = 34$ نفر خواهد بود؛ یعنی:

۶ نفر = کسانی که هیچ زبانی را نمیخوانند

$$n(E \cup A) = 34 \Rightarrow n(A) + n(E) - n(A \cap E) = 34 \\ \Rightarrow 32 + 25 - x = 34 \Rightarrow x = 57 - 34 = 23$$

۸۳ ☆ گزینه ۲

$$t_n = t_1 \times r^{n-1}$$

$$\left. \begin{aligned} t_1 &= a \\ t_3 &= \frac{a}{3} \\ t_3 &= t_1 r^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{a}{3} = a \times r^2 \Rightarrow r^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow r = \pm \sqrt{\frac{1}{3}} \xrightarrow{\text{همه ی جملات مثبت هستند}} r = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$t_{10} = t_1 r^9 = a \times \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right)^9 = a \times \frac{3^4 \sqrt{3}}{3^9} = \frac{a \sqrt{3}}{3^5}$$

۸۴ ☆ گزینه ۴

با توجه به آن که در سه جمله ی متوالی هر دنباله ی هندسی، مربع جمله ی وسط برابر با حاصل ضرب دو جمله ی طرفین خود است، داریم:

$$(3x)^2 = (x+1)(9x-6) \Rightarrow 9x^2 = 9x^2 + 9x - 6x - 6 \\ \Rightarrow 9x^2 = 9x^2 + 3x - 6 \Rightarrow 3x - 6 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2$$

و دنباله ی هندسی به صورت زیر است:

۳, ۶, ۱۲, ...

$$t_8 = t_1 q^7 = 3 \times (2)^7 = 48$$

۸۵ ☆ گزینه ۱

$$t_1 \times t_2 \times t_3 = 216 \Rightarrow t_1 \times t_1 r \times t_1 r^2 = 216 \Rightarrow t_1^3 r^3 = 216$$

$$\sqrt[3]{t_1^3 r^3} = \sqrt[3]{216} \Rightarrow t_1 r = 6 \xrightarrow{t_1=2} 2r = 6 \Rightarrow r = 3$$

$$\frac{t_3}{r} = \frac{t_1 r^2}{r} = t_1 r = 2 \times 3 = 6$$

۸۶ ☆ گزینه ۴ دنباله ی حاصل به صورت زیر است: $2, \dots, 200, \dots$ جمله ۹، $2, \dots, 200, \dots$ جمله ۹

در هر دنباله ی هندسی، مربع جمله ی وسط، برابر با حاصل ضرب حالت متساوی الفاصله از طرفین خود است:

$$(200)^2 = 2 \times 200 = 400 \Rightarrow \text{جمله ی وسط} = \sqrt{400} = 20$$

۸۷ ☆ گزینه ۳ قدر نسبت این دنباله ی m است:

$$\begin{matrix} \times m & \times m \\ \times m & \times m \\ \times m & \times m \\ \times m & \times m \\ \times m & \times m \end{matrix} \\ m, m^2, 27, \dots$$

از طرفی ۲۷ جمله سوم است و داریم:

$$t_3 = t_1 r^2 = m \times m^2 = 27 \Rightarrow m^3 = 27 \Rightarrow 3$$

$$t_4 = t_1 r^3 = 3 \times 3^3 = 3^4 = 81$$

۸۸ ☆ گزینه ۴ برای جمله ی سوم این دنباله داریم: $9 = 4r^2 \Rightarrow r^2 = \frac{9}{4}$

در دنباله‌ی هندسی، اگر قدرنسبت بزرگ‌تر از ۱ باشد، دنباله‌ی صعودی است پس $r = \frac{3}{2}$ قابل قبول است.

$$\Rightarrow \begin{cases} r = \frac{3}{2} \\ r = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

جملات دنباله را تشکیل می‌دهیم:

$$t_1 = 4, \quad t_2 = 4 \times \frac{3}{2} = 6, \quad t_3 = 9$$

$$t_4 = 9 \times \frac{3}{2} = \frac{27}{2}, \quad t_5 = \frac{27}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{81}{4}, \quad t_6 = \frac{81}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{243}{8}$$

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6 = 83 \frac{1}{8}$$

☆ ۸۹ گزینه ۴

$$\frac{t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6}{t_1 + t_2 + t_3} = \frac{t_1 + t_1 r + t_1 r^2 + t_1 r^3 + t_1 r^4 + t_1 r^5}{t_1 + t_1 r + t_1 r^2}$$

$$\stackrel{r=2}{=} \frac{t_1 + 2t_1 + 4t_1 + 8t_1 + 16t_1 + 32t_1}{t_1 + 2t_1 + 4t_1} = \frac{63t_1}{7t_1} = \frac{63}{7} = 9$$

☆ ۹۰ گزینه ۲

$$\begin{matrix} \times r & \times r & \times r & \times r & \times r \\ \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright \\ \frac{3}{2}, & \dots, & \dots, & \dots, & \dots, & 48 \end{matrix}$$

دنباله‌ی حاصل به صورت مقابل است: ۴۸، ...، ...، ...، ...، ...

$$48 = \frac{3}{2} \times r^5 \Rightarrow r^5 = \frac{48}{3} = \frac{2 \times 48}{3} = 32 \Rightarrow r = 2$$

$$\text{جمله‌ی سوم} = t_3 = t_1 r^2 = \frac{3}{2} \times 2^2 = 3 \times 2 = 6$$

☆ ۹۱ گزینه ۳

$$t_1 t_3 t_5 = 8 t_2 t_4 t_6 \Rightarrow t_1 \times t_1 r^2 \times t_1 r^4 = 8 t_1 r^2 \times t_1 r^4 \times t_1 r^6$$

$$\Rightarrow \cancel{t_1}^3 r^6 = 8 \cancel{t_1}^3 r^{15} \Rightarrow r^6 = 8 r^{15} \Rightarrow \frac{r^6}{r^{15}} = 8 \Rightarrow \frac{1}{r^9} = 8$$

$$\xrightarrow{\sqrt[9]{\quad}} \frac{1}{r} = \sqrt[9]{8} = \sqrt[9]{2^3} \Rightarrow \frac{1}{r} = \sqrt[3]{2} \Rightarrow r = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

☆ ۹۲ گزینه ۱

قدرنسبت این دنباله عبارت است از:

$$r = \frac{9}{3\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$$

$$b = 9r = 9\sqrt{3}$$

از طرفی b از ضرب شدن r در ۹ به دست آمده:

3^a نیز وقتی در r ضرب شده، $3\sqrt{3}$ را ساخته است:

$$3^a \times \sqrt{3} = 3\sqrt{3} \Rightarrow 3^a = 3 \Rightarrow a = 1$$

پس $a\sqrt{3}$ برابر است با $\sqrt{3}$ و واسطه‌ی هندسی $\sqrt{3}$ و $9\sqrt{3}$ عبارت است از:

$$\text{واسطه‌ی هندسی} = \sqrt{a\sqrt{3} \times b} = \sqrt{\sqrt{3} \times 9\sqrt{3}} = \sqrt{9 \times 3} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

دقت: واسطه‌ی هندسی دو عدد هم علامت، برابر است با جذر حاصل ضرب آن‌ها.

☆ ۹۳ گزینه ۱ در دنباله‌ی هندسی مربع جمله‌ی وسط برابرست با حاصل ضرب جملات طرفین:

$$(4\sqrt{2})^2 = 2^a \times 2^b \Rightarrow 32 = 2^{a+b} \Rightarrow 2^5 = 2^{a+b} \Rightarrow a + b = 5$$

از طرفی در دنباله‌ی حسابی، جمله‌ی وسط برابر است با میانگین جملات طرفین:

$$a, x, b, \dots \Rightarrow x = \frac{a+b}{2} = \frac{a+b=5}{2} = \frac{5}{2}$$

☆ ۹۴ گزینه ۲

$$Z - W = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} - \{0, 1, 2, \dots\} = \{\dots, -2, -1\}$$

$$(Z - W)' = \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$Z \text{ با فرض مرجع بودن } N' = \{\dots, -2, -1, 0\}$$

$$\Rightarrow (Z - W)' \cap N' = \{0, 1, 2, \dots\} \cap \{\dots, -2, -1, 0\} = \{0\}$$

☆ ۹۵ گزینه ۲ دنباله t_n را برای تعداد کاشی‌های تیره می‌نویسیم:

$$\begin{matrix} +2+2 \\ \underbrace{\quad} \quad \underbrace{\quad} \\ 6, 8, 10, \dots \end{matrix}$$

چون این یک الگوی خطی است (به دلیل برابر بودن قدر نسبت)، جمله عمومی آن $t_n = an + b$ است. حال a و b را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} t_1 = 6 &\Rightarrow a \times 1 + b = 6 \Rightarrow a + b = 6 \\ t_2 = 8 &\Rightarrow a \times 2 + b = 8 \Rightarrow 2a + b = 8 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 6 \\ -2a - b = -8 \\ \hline -a = -2 \Rightarrow a = 2 \end{cases}$$

$$a + b = 6 \xrightarrow{a=2} 2 + b = 6 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow t_n = 2n + 4$$

حالا ببینیم که در کدام مرحله، تعداد کاشی‌های تیره، ۷۲ تا می‌شود:

$$t_n = 72 \Rightarrow 2n + 4 = 72 \Rightarrow 2n = 68 \Rightarrow n = 34$$

از طرفی: دنباله t'_n را به عنوان تعداد کاشی‌های سفید در نظر می‌گیریم:

$$t'_n : 1, 2, 3, \dots$$

به سادگی معلوم است که $t'_n = n$ است؛ و می‌دانیم که مرحله ۳۴ام، مورد سؤال مسئله است. پس: $t'_{34} = 34$

☆ ۹۶ گزینه ۳ بررسی گزینه‌ها:

(۱) C نامتناهی و B متناهی است. پس $B - C$ قطعاً نامتناهی است. از طرفی A نیز نامتناهی است و (نامتناهی - A) ممکن است متناهی یا نامتناهی باشد.

(۲) $A - C$ تفاضل دو مجموعه نامتناهی است و ممکن است متناهی یا نامتناهی باشد؛ بنابراین اجتماع آن با مجموعه‌ی متناهی B نیز ممکن است متناهی یا نامتناهی باشد.

(۳) $B - C$ (تفاضل یک مجموعه نامتناهی از یک مجموعه متناهی) قطعاً متناهی است؛ پس $A - (B - C)$ یعنی (متناهی - A) حتماً نامتناهی خواهد بود.

(۴) $B \cap C$ اشتراک یک مجموعه متناهی با یک مجموعه نامتناهی است و حتماً متناهی است؛ پس $(B \cap C) - A$ متناهی خواهد بود.

☆ ۹۷ گزینه ۱ یادآوری ۱: اگر $A \subseteq B$ ، آن‌گاه اجتماع آن‌ها برابر با B و اشتراکشان برابر با A است.

یادآوری ۲: $A - B = A \cap B'$ (این طوری تفاضل را با اشتراک بیان می‌کنیم).

$$((A \cup B) - C)' \stackrel{A \cup B = B}{=} (B - C)' = (B \cap C)'$$

$$\stackrel{B \subseteq C'}{=} (B)' = B'$$

$$\Rightarrow n((A \cup B) - C)' = n(B') = n(V) - n(B) = 30 - 6 = 24$$

☆ ۹۸ گزینه ۲ تعداد دایره‌های مشکی، دنباله‌ای به صورت زیر تشکیل می‌دهند:

$$\begin{matrix} +4+4 \\ \underbrace{\quad} \quad \underbrace{\quad} \\ 7, 11, 15, \dots \end{matrix}$$

چون اختلاف هر دو جمله متوالی ۴ است، یک الگوی خطی داریم و می‌دانیم که جمله عمومی آن به صورت $t_n = an + b$ است. حال به کمک دنباله فوق، a و b را می‌یابیم:

$$t_1 = 7 \Rightarrow a \times 1 + b = 7 \Rightarrow a + b = 7$$

$$t_2 = 11 \Rightarrow a \times 2 + b = 11 \Rightarrow 2a + b = 11$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b = 7 \\ -2a - b = -11 \\ \hline -a = -4 \Rightarrow a = 4 \\ \hline a + b = 7 \xrightarrow{a=4} 4 + b = 7 \Rightarrow b = 3 \end{cases} \Rightarrow t_n = 4n + 3$$

حال ببینیم که در کدام مرحله، تعداد آن‌ها به ۱۰۳ می‌رسد:

$$t_n = 103 \Rightarrow 4n + 3 = 103 \Rightarrow 4n = 100 \Rightarrow n = 25$$

☆ ۹۹ گزینه ۲ جمله‌ی عمومی یک الگوی خطی به صورت $t_n = a_n + b$ است:

$$\begin{cases} t_x = 7 \Rightarrow a \times 3 + b = 7 \Rightarrow 3a + b = 7 \\ t_y = 3 \Rightarrow a \times 7 + b = 3 \Rightarrow 7a + b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3a - b = -7 \\ 7a + b = 3 \end{cases}$$

$$4a = -4 \Rightarrow a = -1$$

$$3a + b = 7 \xrightarrow{a=-1} -3 + b = 7 \Rightarrow b = 10$$

پس t_n به صورت زیر به دست می آید:

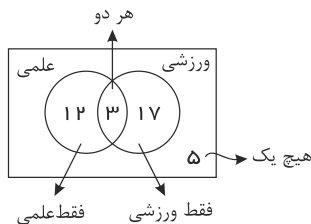
$$t_n = -n + 10$$

حال نامعادله $t_n > 0$ را حل می کنیم:

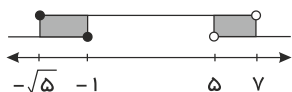
$$t_n > 0 \Rightarrow -n + 10 > 0 \Rightarrow n < 10 \Rightarrow n \in \{1, 2, 3, 4, \dots, 9\}$$

☆ ۱۰۱ گزینه ۳ نمودار زیر را برای این مسئله رسم می کنیم:

$$12 + 3 + 17 + 5 = 37 = \text{کل کلاس}$$



☆ ۱۰۱ گزینه ۳



اشتراک $[-\sqrt{5}, 7]$ و A' روی محور به صورت زیر است: (دقت: $\sqrt{5}$ برابر است با ۲ و خرده ای. پس قرینه آن بین ۲- و ۳- قرار دارد).

و بخش های هاشور خورده شامل اعداد صحیح ۱- و ۲- و ۶ خواهد بود.

☆ ۱۰۲ گزینه ۴ دنباله t_n را برای تعداد چوب کبریت های هر مرحله می نویسیم:

$$t_n : 4, 10, 18, \dots$$

حال تلاش می کنیم که رابطه ای بین شماره مرحله و تعداد چوب کبریت ها بیابیم:

$$t_n = 1 \times 4, 2 \times 5, 3 \times 6, 4 \times 7, \dots$$

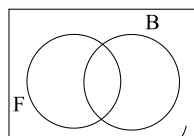
در هر یک از حاصل ضرب های بالا، اختلاف دو عدد که در هم ضرب شده اند، ۳ است. پس:

$$t_n = n(n + 3)$$

تعداد چوب کبریت های مرحله هفتم عبارتست از:

$$t_7 = 7 \times (7 + 3) = 7 \times 10 = 70$$

☆ ۱۰۳ گزینه ۳



A: فوتبال B: بسکتبال

$$n(A) = 11 \quad n(B) = 15$$

$$n(A \cup B) = \text{کل کلاس} - 5 = 25 - 5 = 20$$

۵ نفر: عضو هیچ تیم

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - \underbrace{n(A \cap B)}_{\text{تعداد اعضای هر دو تیم}} \Rightarrow 20 = 15 + 11 - n(A \cap B)$$

$$\Rightarrow n(A \cap B) = 15 + 11 - 20 = 6$$

$$+5 \quad +5$$

☆ ۱۰۴ گزینه ۲ دنباله ی تعداد پاره خط های هر مرحله را می نویسیم: ۶, ۱۱, ۱۶, ...

این یک الگوی خطی (دنباله حسابی) با قدر نسبت ۵ است و می دانیم که جمله عمومی دنباله حسابی عبارتست از:

$$t_n = 5n + b \text{ یعنی } t_n = an + b$$

$$t_1 = 5 \times 1 + b = 6 \text{ برای محاسبه } b, \text{ جمله اول را در } t_n \text{ قرار می دهیم:}$$

$$\Rightarrow b = 6 - 5 = 1 \Rightarrow t_n = 5n + 1$$

و مرحله ی دهم عبارتست از:

$$t_{10} = 5 \times 10 + 1 = 51$$

☆ ۱۰۵ گزینه ۲ جمله‌ی عمومی یک الگوی خطی بصورت $c_n = an + b$ است:

$$\begin{aligned} c_4 = 17 &\Rightarrow 4a + b = 17 \\ c_{10} = 41 &\Rightarrow 10a + b = 41 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} -4a - b = -17 \\ 10a + b = 41 \end{cases}$$

$$6a = 24 \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow c_n = 4n + 1$$

☆ ۱۰۶ گزینه ۳ اگر دنباله‌ی $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ حسابی باشد (مطابق اشاره سوال)، تفاضل جمله دوم و اول، قدر نسبت آن را تشکیل خواهد داد:

$$d = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{2-3}{6} = -\frac{1}{6}$$

می‌دانیم جمله عمومی دنباله حسابی بصورت $t_n = t_1 + (n-1)d$ است؛ مقادیر $t_1 = \frac{1}{2}$ و $d = -\frac{1}{6}$ را در آن قرار می‌دهیم:

$$t_n = \frac{1}{2} + (n-1)\left(-\frac{1}{6}\right)$$

و جمله بیستم عبارتست از:

$$t_{20} = \frac{1}{2} + (20-1)\left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{2} - \frac{19}{6} = \frac{3-19}{6} = -\frac{16}{6} = -\frac{8}{3}$$

☆ ۱۰۷ گزینه ۱ گزینه‌ها را ببینید: الف) دو مجموعه‌ی متناهی، تعداد اعضای قابل شمارش دارند. پس تعداد اعضای اجتماع آنها نیز قابل شمارش است و متناهی است.

ب) اشتراک یک مجموعه‌ی متناهی با یک مجموعه‌ی نامتناهی، حداکثر می‌تواند به اندازه‌ی تمام مجموعه‌ی متناهی باشد. پس متناهی است و این گزینه نادرست است.

پ) این جمله به مضارب مشترک ۵ و ۷ اشاره دارد؛ یعنی مضارب ۳۵ و مجموعه مضارب ۳۵ نامتناهی است. پس این گزینه نیز نادرست است.

ت) اگر از مجموعه‌ای متناهی مثل A، مجموعه‌ای نامتناهی مثل B را کم کنیم، حاصل این کار مجموعه‌ای است که زیرمجموعه A است و نمی‌تواند نامتناهی باشد. پس این گزینه نیز نادرست است.

☆ ۱۰۸ گزینه ۳ مجموعه‌های A، M، B' را با اعضایشان می‌نویسیم:

$$M = \{1, 2, 3, \dots, 50\}$$

$$A = \{1, 2, 3, \dots, 15\} \Rightarrow A' = \{16, 17, 18, \dots, 50\}$$

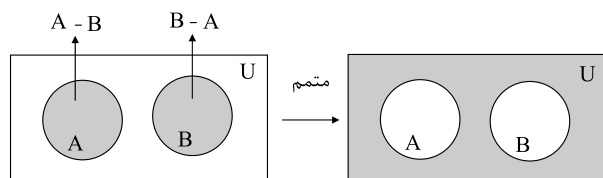
$$B' = \{1, 2, 3, \dots, 24\} \Rightarrow B = \{25, 26, \dots, 50\}$$

$$\Rightarrow A' - B = \{16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24\}$$

و اینها اعدادی هستند که جذر آنها از ۴ بیشتر یا مساوی و از ۵ کمتر است. یعنی: $4 \leq \sqrt{x} < 5$

$$\Rightarrow A' - B = \{x | x \in M, 4 \leq \sqrt{x} < 5\}$$

☆ ۱۰۹ گزینه ۴ با توجه به نمودار ون: (A و B جدا از هم هستند)



$$(A - B) \cup (B - A)$$

$$[(A - B) \cup (B - A)]' = (A \text{ بیرون}) \cap (B \text{ بیرون}) = A' \cap B'$$

☆ ۱۱۰ گزینه ۳ جمله عمومی یک الگوی خطی به فرم $t_n = an + b$ است. بنابراین:

$$t_{13} = 13a + b$$

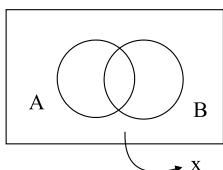
حال ببینیم حاصل کدامیک از گزینه‌ها، برابر با عبارت فوق نیست:

$$1) \Delta a_2 - 3a_3 = \Delta(\Delta a + b) - 3(\Delta a + b) = 13a + b = t_{13}$$

$$2) \frac{a_4 + a_{14}}{2} = \frac{(\Delta a + b) + (14\Delta a + b)}{2} = \frac{15\Delta a + 2b}{2} = \frac{2(13a + b)}{2} = 13a + b = t_{13}$$

$$3) \frac{\Delta a_{10} - a_{10}}{4} = \frac{\Delta(10\Delta a + b) - (10\Delta a + b)}{4} = \frac{9\Delta a + b}{4} = 13a + b \neq t_{13}$$

$$4) \frac{\Delta a_6 + a_{18}}{6} = \frac{\Delta(6\Delta a + b) + (18\Delta a + b)}{6} = \frac{24\Delta a + 2b}{6} = 13a + b = t_{13}$$



$$x = \text{کل مسافران} - n(A \cup B) = 72 - (n(A) + n(B) - n(A \cap B))$$

$$= 72 - (23 + 12 - 8) = 72 - 27 = 45$$

☆ 111 گزینه ۲

$$A \cap B: \text{تاجران} \Rightarrow n(A \cap B) = 23$$

$$B: \text{نوسفرها} \Rightarrow n(B) = 12$$

$$A \cap B: \text{تاجر و نوسفر} \Rightarrow n(A \cap B) = 8$$

☆ 112 گزینه ۳

$$\text{نفر} = 0.7 \times 2000000 = 1400000$$

$$\text{نرخ بیکاری} = \frac{\text{جمعیت بیکار}}{1400000} = \frac{150000}{1400000} \approx 0.1$$

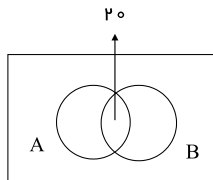
☆ 113 گزینه ۳

$$a_7^2 - a_6^2 = -160 \Rightarrow \underbrace{(a_7 + a_6)}_{16}(a_7 - a_6) = -160 \Rightarrow a_7 - a_6 = \frac{-160}{16} = -10$$

جمله عمومی دنباله حسابی به فرم $a_n = a_1 + (n-1)d$ است. پس:

$$\begin{cases} a_7 = a_1 + 6d \\ a_6 = a_1 + 5d \end{cases} \Rightarrow a_7 - a_6 = (a_1 + 6d) - (a_1 + 5d) = d = -10 \Rightarrow d = -10$$

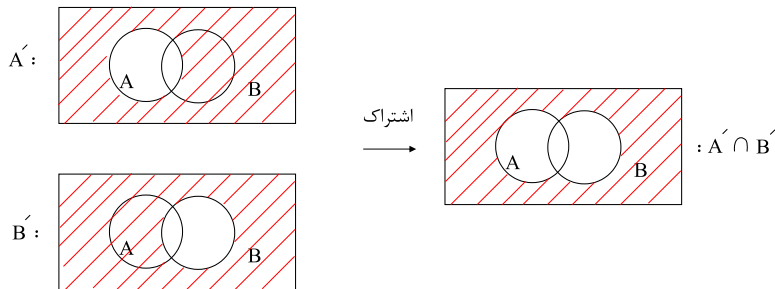
☆ 114 گزینه ۳



$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$= 60 + 40 - 20 = 80$$

حال، A' و B' و اشتراک آنها را با استفاده از نمودار تعیین می‌کنیم:



$$\Rightarrow n(A' \cap B') = n(U) - n(A \cup B) = 100 - 80 = 20$$

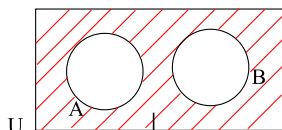
۱۱۵ ☆ گزینه ۴ $\pi(1)$ عددی گنگ است. پس $\frac{\pi}{3}$ نیز گنگ است.

(۲) $\sqrt{50}$ عددی گنگ است. پس $-\sqrt{50}$ نیز گنگ است.

(۳) π گنگ است؛ جذر آن هم گنگ است.

(۴) $1/817817 \dots$ را می توان بصورت $1/\overline{817}$ نوشت و اعداد اعشاری متناوب گنگ نیستند.

۱۱۶ ☆ گزینه ۱



$B \text{ بیرون } A \text{ و } A \text{ بیرون } B = A' \cap B'$

$$\Rightarrow n(A' \cap B') = n(u) - n(A \cup B) = 100 - 60 = 40$$

۱۱۷ ☆ گزینه ۴ دو مجموعه ی مجزا، مجموعه هایی بدون اشتراک هستند:

(۱) اعداد یا اول اند، یا مرکب و یا یک. پس اعداد اول و مرکب، مجزا هستند.

(۲) در بین شماره های عدد ۵۰، هیچ مضربی از ۶ وجود ندارد. پس این دو مجموعه مجزا هستند.

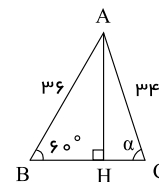
(۳) مجموعه دخترها و پسرها در همه جای دنیا، مجزا هستند!

(۴) می توان عددی مثل 11×67 را یافت که هم مضرب ۱۱ باشد و هم مضرب ۶۷

۱۱۸ ☆ گزینه ۴

ارتفاع AH را رسم می کنیم و در مثلث قائم الزاویه $\triangle AHC$ ، سینوس α را تشکیل می دهیم:

$$\triangle AHC : \sin \alpha = \frac{AH}{AC} = \frac{AH}{34}$$



برای محاسبه ی سینوس α ، مقدار AH باید معلوم شود؛ به سراغ مثلث $\triangle AHB$ می رویم:

$$\triangle AHB : \sin 60^\circ = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AH = AB \times \sin 60^\circ = 36 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{3} \approx 18 \times 1,7$$

حال با این مقدار بدست آمده برای AH، سینوس α را محاسبه می کنیم:

$$\sin \alpha = \frac{18 \times \cancel{1,7}}{\cancel{34} \times 20} = \frac{18}{20} = 0,9$$

۱۱۹ ☆ گزینه ۲

نامتناهی A' \Rightarrow متناهی A
 نامتناهی یا نامتناهی A' \Rightarrow نامتناهی A

از طرفی: اجتماع یک مجموعه نامتناهی با هر مجموعه دیگر، نامتناهی است. بنابراین BUA' و $A'UB'$ (بدلیل نامتناهی بودن A')، نامتناهی هستند.

از آنجا که B متناهی است، اگر اعضای آن را از A' حذف کنیم، حاصل نامتناهی خواهد بود. در گزینه ۲ مشخص نیست که A متناهی است یا نامتناهی، پس $B' \cap A$ ممکن است متناهی یا نامتناهی باشد.

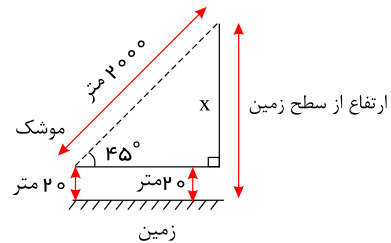
۱۲۰ ☆ گزینه ۲

برای یافتن ارتفاع از سطح زمین، باید X را در شکل مقابل محاسبه کنیم و با ۲۰ متر جمع کنیم. برای محاسبه X به نسبت مثلثاتی زاویه می رویم که در آن و تر و X (ضلع مقابل) حضور داشته باشند و آن نسبت مثلثاتی، چیزی نیست جز سینوس:

$$\cos 45^\circ = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{x}{2000} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{x}{2000}$$

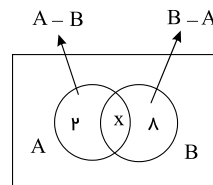
$$\Rightarrow x = 2000 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1000\sqrt{2}$$

$$\text{ارتفاع از سطح زمین} = 1000\sqrt{2} + 20$$



☆ ۱۲۱ گزینه ۴

نمودار زیر را رسم می‌کنیم و تعداد اعضای $A \cap B$ را x می‌نامیم.



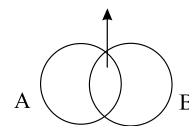
$$\left. \begin{aligned} n(A) &= 2 + x \\ n(B) &= 8 + x \end{aligned} \right\} \Rightarrow 8 + x = 3(2 + x) \Rightarrow 8 + x = 6 + 3x \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$$

$$\Rightarrow n(A \cap B) = 1, \quad n(A) = 3, \quad n(B) = 9$$

$$\text{از طرفی: } n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 3 + 9 - 1 = 11$$

☆ ۱۲۲ گزینه ۱

هم کفش مشکی هم کت قهوه‌ای



$\left\{ \begin{array}{l} A: \text{کفش مشکی} \\ B: \text{کت قهوه‌ای} \end{array} \right.$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$\Rightarrow 45 = 30 + 25 - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 30 + 25 - 45 = 10$$

☆ ۱۲۳ گزینه ۱ تعداد کل دایره‌ها در مرحله n م برابر است با $(n+1)^2$

و از میان این دایره‌ها، $n+1$ تا رنگ شده است. پس تعداد رنگ نشده‌ها عبارتست از:

$$(n+1)^2 - (n+1)$$

$$(11+1)^2 - (11+1) = 144 - 12 = 132$$

و در مرحله‌ی یازدهم داریم:

☆ ۱۲۴ گزینه ۴

جملات دنباله عبارتند از:

$$a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = -\frac{2}{3}, a_3 = \frac{3}{4}, \dots, a_{10} = \frac{-10}{11}$$

و حاصل ضرب آن‌ها:

$$a_1 \times a_2 \times a_3 \times \dots \times a_{10} = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{2}{3}\right) \times \frac{3}{4} \times \dots \times \left(\frac{-10}{11}\right) = -\frac{1}{11}$$

دقت: در این جملات، ۵ جمله‌ی منفی داریم. یعنی ۵ منفی در این حاصل ضرب وجود دارد. پس حاصل منفی است. همچنین، در هر کسر، صورت با مخرج کسر قبل ساده می‌شود و در آخر صورت کسر اول و مخرج کسر آخر باقی می‌ماند.

☆ ۱۲۵ گزینه ۲ - دنباله‌ی سهم‌ها به صورت زیر است:

$$t_1, t_1 + d, t_1 + 2d, t_1 + 3d, t_1 + 4d$$

تعداد کل نان‌ها عبارتست از ۳۰۰ تا؛ یعنی:

$$t_1 + (t_1 + d) + (t_1 + 2d) + (t_1 + 3d) + (t_1 + 4d) = 300$$

$$\Rightarrow 5t_1 + 10d = 300 \xrightarrow{\div 5} t_1 + 2d = 60 \quad (*)$$

از طرفی طبق فرض:

$$\frac{1}{3}((t_1 + 2d) + (t_1 + 3d) + (t_1 + 4d)) = t_1 + (t_1 + d)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}(2t_1 + 9d) = 2t_1 + d \Rightarrow t_1 + 3d = 2t_1 + d \Rightarrow t_1 = 2d$$

این را در رابطه (*) می‌گذاریم:

$$2d + 2d = 60 \Rightarrow d = \frac{60}{4} = 15 \xrightarrow{t=2d} t_1 = 30$$

پس بزرگترین جمله‌ی این دنباله عبارتست از:

$$t_1 + 4d = 30 + 4 \times 15 = 90$$

راه دوم: جملات متوالی یک دنباله‌ی حسابی با تعداد جملات فرد را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم: (جمله وسط را x نامیدیم)

$$x - 2d, x - d, x, x + d, x + 2d$$

$$\text{مجموع عبارت} = (x - 2d) + (x - d) + x + (x + d) + (x + 2d) = 5x = 300 \Rightarrow x = 60$$

$$\text{از طرفی: } \frac{1}{3}(x + (x + d) + (x + 2d)) = (x - 2d) + (x - d)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}(3x + 3d) = 2x - 3d \Rightarrow x + d = 2x - 3d \Rightarrow x = 4d \Rightarrow 60 = 4d \Rightarrow d = \frac{60}{4} = 15$$

$$\text{بزرگترین جمله} = x + 2d = 60 + 2 \times 15 = 90$$

☆ ۱۲۶ گزینه ۱

راه یک الگوی خطی، جمله‌ی عمومی بصورت $a_n = an + b$ است:

$$\frac{1}{2}a_3 = \frac{1}{3}a_4 \Rightarrow 3a_3 = 2a_4 \Rightarrow 3(3a + b) = 2(4a + b) \Rightarrow 9a + 3b = 4a + 2b \Rightarrow 5a + b = 0 \quad (I)$$

$$a_5 = \frac{-1}{4}a_1 + 2 \Rightarrow 5a + b = -\frac{1}{4}(a + b) + 2 \Rightarrow 11a + 3b = 4 \quad (II) \quad \text{از طرفی طبق فرض:}$$

معادله‌های I و II را در یک دستگاه قرار می‌دهیم:

$$\times(-3) \quad \begin{cases} 5a + b = 0 \\ 11a + 3b = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -15a - 3b = 0 \\ 11a + 3b = 4 \end{cases} \Rightarrow \frac{-4a}{-4} = \frac{4}{-4} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 5 \end{cases} \Rightarrow a_n = -n + 5 \Rightarrow a_{11} = -11 + 5 = -6$$

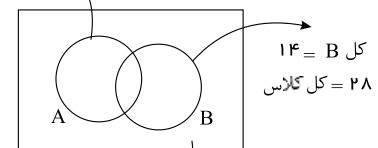
☆ ۱۲۷ گزینه ۳ رشته‌های المپیاد را نامگذاری می‌کنیم:

$\begin{cases} \text{ریاضی: } A \\ \text{فیزیک: } B \end{cases}$

و شکل زیر را ترتیب می‌دهیم:

$$n(A \cup B) = \text{کل} - 5 = 28 - 5 = 23$$

$$16 = A \text{ کل}$$



کل $B = 14$
کل کلاس = 28

5 نفر: هیچ رشته

$$\text{از طرفی: } n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow 23 = 16 + 14 - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 30 - 23 = 7$$

و داریم:

$$\text{فقط ریاضی} = n(A) - n(A \cap B) = 16 - 7 = 9$$

☆ ۱۲۸ گزینه ۳ جملات دنباله را می‌نویسیم:

$$4, 9, 16, \dots$$

اینها اعداد مربع کامل هستند، اما از 3^2 شروع شده‌اند، پس جمله عمومی عبارتست از:

$$t_n = (n + 1)^2$$

پس جمله دوم عبارتست از:

$$t_{10} = (10 + 1)^2 = 11^2 = 121$$

☆ ۱۲۹ گزینه ۲ برای آنکه در بازه A و B جدا از هم باشند، باید یکی از این دو وضعیت اتفاق بیافتد:

$$\left\{ \begin{array}{l} \overset{n-2}{\bullet} \xrightarrow{\quad} \overset{3n+1}{\bullet} \quad \overset{-2}{\bullet} \xrightarrow{\quad} \overset{2}{\bullet} : 3n+1 < -2 \Rightarrow 3n < -3 \Rightarrow n < -1 \\ \overset{-2}{\bullet} \xrightarrow{\quad} \overset{2}{\bullet} \quad \overset{n-2}{\bullet} \xrightarrow{\quad} \overset{3n+1}{\bullet} : 2 < n-2 \Rightarrow 4 < n \end{array} \right.$$

از طرفی، چون n عددی طبیعی است، به ازای $4 < n$ این دو بازه جدا از هم هستند. پس به ازای $n = 1, 2, 3, 4$ ، جدا از هم نیستند.

گزینه ۲ جمله عمومی دنباله هندسی عبارتست از: $t_n = t_1 q^{n-1}$ ؛ پس:

$$\frac{t_7}{t_6} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{t_1 q^7}{t_1 q^6} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{q} = \frac{1}{3} \Rightarrow q^2 = 3 \Rightarrow q = \pm \sqrt{3}$$

چون طبق فرض، همه‌ی جملات دنباله مثبت هستند، فقط $r = \sqrt{3}$ را می‌پذیریم؛ از طرفی:

$$t_1 t_7 = 75 \Rightarrow t_1 \times t_1 q^6 = 75 \Rightarrow t_1^2 (\underbrace{\sqrt{3}^6}_{3^3}) = 75 \Rightarrow t_1^2 \times 27 = 75$$

$$\Rightarrow t_1 = \frac{75}{27} = \frac{25}{9} \xrightarrow{\text{جذر}} t_1 = \pm \frac{5}{3}$$

و باز چون همه جملات مثبت هستند، فقط $t_1 = \frac{5}{3}$ قابل قبول است. پس:

$$t_7 = t_1 r^6 = \frac{5}{3} \times (\sqrt{3})^6 = \frac{5}{3} \times 3 = 5$$

گزینه ۳

$$102n - 6n^2 > 0 \Rightarrow 102n > 6n^2 \xrightarrow{\div 6} 17n > n^2$$

چون n عددی طبیعی (و مثبت) است، می‌توانیم طرفین نامساوی را بر n تقسیم کنیم، بدون آنکه جهت نامساوی تغییر کند:

$$\xrightarrow{\div n} 17 > n$$

یعنی به ازای اعداد طبیعی ۱ تا ۱۶، جملات این دنباله مثبت هستند.

گزینه ۳ جمله‌ی عمومی یک دنباله‌ی حسابی بصورت $t_n = t_1 + (n-1)d$ است:

$$\begin{cases} t_7 = 17 \Rightarrow t_1 + 6d = 17 \\ t_{13} = 41 \Rightarrow t_1 + 12d = 41 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -t_1 - 6d = -17 \\ t_1 + 12d = 41 \end{cases}$$

$$6d = 24 \Rightarrow d = 4$$

$$t_1 + 6d = 17 \xrightarrow{d=4} t_1 + 24 = 17 \Rightarrow t_1 = -7$$

و داریم:

$$t_{10} = t_1 + 9d = -7 + 9 \times 4 = -7 + 36 = 29$$

گزینه ۳ یادآوری: در هر دنباله‌ی حسابی، هر جمله میانگین جملات طرفین خود است:

$$3p + 4 = \frac{(2p + 3) + (5p - 1)}{2} \Rightarrow 6p + 8 = 7p + 2 \Rightarrow p = 6$$

پس دنباله ما به صورت زیر است:

$$\dots, 2 \times 6 + 3, 3 \times 6 + 4, 4 \times 6 - 1, \dots$$

$$\Rightarrow \dots, 15, 22, 29, \dots \Rightarrow \text{قدر نسبت} = d = 22 - 15 = 7$$

از طرفی جمله پنجم این دنباله $2p + 3$ یعنی $15 = 2 \times 6 + 3$ است. برای رسیدن از جمله پنجم به جمله یازدهم، به $6d$ نیاز داریم؛ یعنی:

$$t_{11} = t_5 + 6d = 15 + 6 \times 7 = 57$$

گزینه ۲ نکته: اگر بین a و b به تعداد m واسطه‌ی حسابی قرار دهیم، قدر نسبت دنباله‌ی حسابی حاصل، از رابطه‌ی $d = \frac{b-a}{m+1}$ بدست می‌آید. پس:

$$d = \frac{93 - 17}{18 + 1} = \frac{76}{19} = 4$$

پس یک دنباله‌ی حسابی به فرم زیر تشکیل می‌شود:

$$17 \xrightarrow{+4} 21 \xrightarrow{+4} 25, \dots, 93 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 17 \\ d = 4 \end{cases}$$

یازدهمین واسطه‌ی حسابی، دوازدهمین جمله‌ی این دنباله است:

$$t_n = t_1 + (n-1)d \Rightarrow t_{17} = 17 + 11 \times 4 = 61$$

۱۳۵ * گزینه ۳ نکته: قدر نسبت یک دنباله که جملات a_n, a_m از آن معلوم باشند عبارتست از:

$$d = \frac{a_m - a_n}{m - n}$$

پس داریم:

$$d = \frac{n - m}{m - n} = -1$$

حال خواسته‌ی مسئله را بدست می‌آوریم:

$$a_{m+1} + a_{n+1} = (a_m + d) + (a_n + d) = m - 1 + n - 1 = m + n - 2$$

۱۳۶ * گزینه ۲

$$a_1 + a_7 + a_9 = 4(a_4 + a_5 + a_6)$$

$$\Rightarrow a_1 + (a_1 + 6d) + (a_1 + 8d) = 4((a_1 + 3d) + (a_1 + 4d) + (a_1 + 5d))$$

$$\Rightarrow 3a_1 + 14d = 4(3a_1 + 12d) \Rightarrow 3a_1 + 14d = 12a_1 + 48d$$

$$\Rightarrow 9a_1 + 34d = 0 \Rightarrow \underbrace{a_1 + 3.78d}_{a_6} = 0 \Rightarrow a_6 = 0$$

۱۳۷ * گزینه ۲ در یک دنباله‌ی هندسی، جمله‌ی عمومی به صورت $t_n = t_1 q^{n-1}$ است:

$$t_7 = 9 \Rightarrow t_1 q^6 = 9 \Rightarrow \frac{t_1 q^6}{t_1 q^4} = \frac{9}{12} \Rightarrow \frac{1}{q^2} = \frac{3}{4} \Rightarrow q^2 = \frac{4}{3}$$

جمله‌ی دوازدهم این دنباله، از چهار بار ضرب کردن q در جمله‌ی هشتم بدست می‌آید:

$$t_{12} = t_8 \times q^4 = 12 \times \frac{4}{3} = 16$$

۱۳۸ * گزینه ۱ جمله‌ی هشتم دنباله $1, 3, \dots$ عبارت است از:

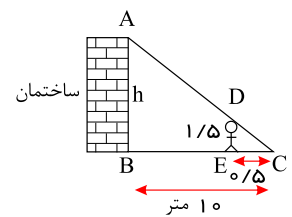
$$t_8 = t_1 + 7d = -1 + 7 \times 4 = 27$$

حال ببینیم جمله‌ی چندم از دنباله‌ی هندسی $a_n = \frac{1}{3} \times 9^{n-1}$ برابر با ۲۷ است:

$$27 = \frac{1}{3} \times 9^{n-1} \Rightarrow 81 = 9^{n-1} \Rightarrow 9^2 = 9^{n-1} \Rightarrow 2 = n - 1 \Rightarrow n = 3$$

۱۳۹ * گزینه ۴ دو مثلث $\triangle ABC$ و $\triangle CDF$ متشابهند:

$$\frac{1.5}{h} = \frac{0.5}{10} \Rightarrow h = \frac{10 \times 1.5}{0.5} = 30$$



۱۴۰ * گزینه ۳

$$1) 2a_n - a_{2n} = 2(a_1 + (n-1)d) - (a_1 + (2n-1)d)$$

$$= 2a_1 + 2nd - 2d - a_1 - 2nd + d = a_1 - d \neq a_p$$

نادرست

$$2) a_{n+1} - a_{n-1} = (a_1 + nd) - (a_1 + (n-2)d)$$

$$= a_1 + nd - a_1 - nd + 2d = 2d \neq a_p$$

نادرست

$$3) 3a_{2n+1} - 2a_{2n} = 3(a_1 + 2nd) - 2(a_1 + (2n-1)d)$$

$$= 3a_1 + 6nd - 2a_1 - 4nd + 2d = a_1 + 2d = a_p$$

درست

$$(۴) a_{r_{n+1}} - a_{r_{n-1}} = (a_1 + r_{n+1}d) - (a_1 + (r_n - 2)d)$$

$$= a_1 + r_{n+1}d - a_1 - r_{n+1}d + 2d = 2d \neq a_p$$

نادرست

☆۱۴۱ گزینه ۴ به گزینه‌ها توجه کنید:

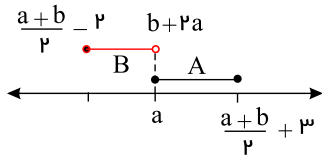
(۱) دو مجموعه‌ی نامتناهی می‌توانند با هم هیچ اشتراکی نداشته باشند؛ یعنی اشتراک آن‌ها تهی باشد که متناهی است. (نادرست)

(۲) دو مجموعه‌ی نامتناهی می‌توانند با هم برابر باشند و تفاضلشان تهی باشد که متناهی است. (نادرست)

(۳) اگر A تهی باشد، A زیرمجموعه‌ی همه‌ی مجموعه‌هاست. یعنی B می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد.

(۴) اگر $A \subseteq B$ ، آنگاه $A \cap B = A$ خواهد بود. طبق متن گزینه‌ی A نامتناهی است و B مجموعه‌ای است که آن را در بر گرفته است؛ پس B الزاماً نامتناهی است.

☆۱۴۲ گزینه ۲ برای آنکه اجتماع دو بازه، یک بازه‌ی بسته باشد، باید روی محور چنین آرایشی را ببینیم:



(دقت کنید که $\frac{a+b}{2} - 2 < \frac{a+b}{2} + 3$ است. پس بازه‌ی B باید قبل از بازه‌ی A قرار گیرد)

داریم:

$$b + 2a = a \Rightarrow a + b = 0 \Rightarrow \begin{cases} A = [a, 3] \\ B = [-2, a] \end{cases} \Rightarrow A \cup B = [-2, 3]$$

$$\xrightarrow{\text{متم}} (A \cup B)' = R - (A \cup B) = R - [-2, 3]$$

پس اعداد $-2, -1, 0, 1, 2, 3$ در آن وجود ندارد.

☆۱۴۳ گزینه ۳

گزینه‌ی (۱) اشتراک یک مجموعه‌ی متناهی با هر مجموعه‌ای، متناهی است.

گزینه‌ی (۲) اجتماع یک مجموعه‌ی متناهی با هر مجموعه‌ای ممکن است نامتناهی یا نامتناهی باشد:

گزینه‌ی (۳)

گزینه‌ی (۴)

$$\underbrace{A}_{\text{متناهی}} \cap (B - C) = \text{متناهی}$$

$$\underbrace{A}_{\text{متناهی}} \cup (B - C) = \text{نامشخص}$$

$$\underbrace{B}_{\text{نامتناهی}} - \underbrace{(A \cap B)}_{\text{متناهی}} = \text{نامتناهی}$$

$$\underbrace{(A \cup C)}_{\text{نامشخص}} \cap \underbrace{(B \cup C)}_{\text{نامتناهی}} = \text{نامشخص}$$

$$\frac{(\sqrt{3})^2 - 2(1)^2}{\frac{1}{2} + \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)} = \frac{3 - 2(1)}{\frac{1}{2} + 1} = \frac{3 - 2}{\frac{1}{2} + 1} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$A = \frac{\sqrt{3} - 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + 1} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2} + 1}{\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + 1} = \frac{1}{\frac{4-3+12}{12}} = \frac{1}{\frac{13}{12}} = \frac{12}{13}$$

$$A = \frac{12}{13} \Rightarrow \frac{13A}{2} = \frac{13}{2} \times \frac{12}{13} = 6$$

☆۱۴۶ گزینه ۴

$$\tan \alpha = \frac{3}{4} \quad \sin \theta = ?$$

$$\tan \alpha = \frac{3}{4} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{4} \Rightarrow AB = 3$$

$$\text{ریاضی دهم متوسط} \quad 3^2 + 4^2 = BC^2 \Rightarrow 9 + 16 = BC^2 \Rightarrow 25 = BC^2 \Rightarrow BC = 5$$

$$\sin \theta = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{3}{5} = \frac{8}{10} = 0.8$$

☆۱۴۷ گزینه ۲

$$\sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \sqrt{1 - \frac{46}{49}} = \sqrt{\frac{3}{49}} = \frac{\sqrt{3}}{7}$$

$$\sin C = \frac{10}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{10} \Rightarrow BC = \frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$S = \frac{1}{2} AB \times BC \times \sin B$$

$$\hat{A} = 90^\circ, \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 90^\circ \Rightarrow \sin B = \cos C$$

$$S = \frac{1}{2} \times 10 \times \frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{36}}{6} = 50 \sqrt{\frac{36}{3}}$$

می‌دانیم سینوس و کسینوس دو زاویه متمم با هم برابرند؛ در مثلث ABC:

$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

☆۱۴۸ گزینه ۴

$$\tan^2 \theta + \frac{\frac{\sin \theta + \cos \theta}{\cos \theta}}{1 + \tan \theta} = \tan^2 \theta + \frac{\frac{\sin \theta + \cos \theta}{\cos \theta}}{1 + \frac{\sin \theta}{\cos \theta}} = \tan^2 \theta + \frac{\frac{\sin \theta + \cos \theta}{\cos \theta}}{\frac{\cos \theta + \sin \theta}{\cos \theta}} = \tan^2 \theta + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

☆۱۴۹ گزینه ۱

$$\tan^2 C = \frac{c^2}{b^2}$$

$$\sin B = \frac{b}{a} \rightarrow \frac{1}{\sin B} = \frac{a}{b}$$

$$\cot B = \frac{c}{b}$$

$$\frac{\tan^2 C}{\frac{1}{\sin B} \times \cot B} = \frac{\frac{c^2}{b^2}}{\frac{a}{b} \times \frac{c}{b}} = \frac{\frac{c^2}{b^2}}{\frac{ac}{b^2}} = \frac{c^2}{ac} = \frac{c}{a} = \sin C$$

$$A + B + C = 180^\circ \xrightarrow{\hat{A}=90^\circ} B + C = 90^\circ \Rightarrow \frac{B+C}{3} = 30^\circ \quad \text{☆۱۵۰ گزینه ۱}$$

$$\frac{(B+C)}{3} = 60^\circ$$

$$\frac{\sin\left(\frac{r(B+C)}{r}\right)}{\cos\left(\frac{(B+C)}{r}\right)} = \frac{\sin 60^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 1$$

پاسخنامه کلیدی

۱ ☆ ۴	۳۱ ☆ ۳	۶۱ ☆ ۳	۹۱ ☆ ۳	۱۲۱ ☆ ۴
۲ ☆ ۴	۳۲ ☆ ۴	۶۲ ☆ ۴	۹۲ ☆ ۱	۱۲۲ ☆ ۱
۳ ☆ ۲	۳۳ ☆ ۲	۶۳ ☆ ۲	۹۳ ☆ ۱	۱۲۳ ☆ ۱
۴ ☆ ۴	۳۴ ☆ ۲	۶۴ ☆ ۳	۹۴ ☆ ۲	۱۲۴ ☆ ۴
۵ ☆ ۲	۳۵ ☆ ۱	۶۵ ☆ ۴	۹۵ ☆ ۲	۱۲۵ ☆ ۲
۶ ☆ ۲	۳۶ ☆ ۴	۶۶ ☆ ۱	۹۶ ☆ ۳	۱۲۶ ☆ ۱
۷ ☆ ۱	۳۷ ☆ ۱	۶۷ ☆ ۴	۹۷ ☆ ۱	۱۲۷ ☆ ۳
۸ ☆ ۴	۳۸ ☆ ۲	۶۸ ☆ ۲	۹۸ ☆ ۲	۱۲۸ ☆ ۳
۹ ☆ ۳	۳۹ ☆ ۲	۶۹ ☆ ۱	۹۹ ☆ ۲	۱۲۹ ☆ ۲
۱۰ ☆ ۳	۴۰ ☆ ۱	۷۰ ☆ ۴	۱۰۰ ☆ ۳	۱۳۰ ☆ ۲
۱۱ ☆ ۳	۴۱ ☆ ۲	۷۱ ☆ ۳	۱۰۱ ☆ ۳	۱۳۱ ☆ ۳
۱۲ ☆ ۳	۴۲ ☆ ۳	۷۲ ☆ ۲	۱۰۲ ☆ ۴	۱۳۲ ☆ ۳
۱۳ ☆ ۳	۴۳ ☆ ۲	۷۳ ☆ ۴	۱۰۳ ☆ ۳	۱۳۳ ☆ ۳
۱۴ ☆ ۱	۴۴ ☆ ۲	۷۴ ☆ ۳	۱۰۴ ☆ ۲	۱۳۴ ☆ ۲
۱۵ ☆ ۴	۴۵ ☆ ۱	۷۵ ☆ ۳	۱۰۵ ☆ ۲	۱۳۵ ☆ ۳
۱۶ ☆ ۴	۴۶ ☆ ۴	۷۶ ☆ ۱	۱۰۶ ☆ ۳	۱۳۶ ☆ ۲
۱۷ ☆ ۱	۴۷ ☆ ۲	۷۷ ☆ ۱	۱۰۷ ☆ ۱	۱۳۷ ☆ ۲
۱۸ ☆ ۳	۴۸ ☆ ۳	۷۸ ☆ ۲	۱۰۸ ☆ ۳	۱۳۸ ☆ ۱
۱۹ ☆ ۱	۴۹ ☆ ۴	۷۹ ☆ ۳	۱۰۹ ☆ ۴	۱۳۹ ☆ ۴
۲۰ ☆ ۱	۵۰ ☆ ۱	۸۰ ☆ ۳	۱۱۰ ☆ ۳	۱۴۰ ☆ ۳
۲۱ ☆ ۲	۵۱ ☆ ۲	۸۱ ☆ ۱	۱۱۱ ☆ ۲	۱۴۱ ☆ ۴
۲۲ ☆ ۴	۵۲ ☆ ۲	۸۲ ☆ ۲	۱۱۲ ☆ ۳	۱۴۲ ☆ ۲
۲۳ ☆ ۲	۵۳ ☆ ۴	۸۳ ☆ ۲	۱۱۳ ☆ ۳	۱۴۳ ☆ ۳
۲۴ ☆ ۱	۵۴ ☆ ۱	۸۴ ☆ ۴	۱۱۴ ☆ ۳	۱۴۴ ☆ ۴
۲۵ ☆ ۲	۵۵ ☆ ۳	۸۵ ☆ ۱	۱۱۵ ☆ ۴	۱۴۵ ☆ ۳
۲۶ ☆ ۳	۵۶ ☆ ۴	۸۶ ☆ ۴	۱۱۶ ☆ ۱	۱۴۶ ☆ ۴
۲۷ ☆ ۲	۵۷ ☆ ۳	۸۷ ☆ ۳	۱۱۷ ☆ ۴	۱۴۷ ☆ ۲
۲۸ ☆ ۴	۵۸ ☆ ۱	۸۸ ☆ ۴	۱۱۸ ☆ ۴	۱۴۸ ☆ ۴
۲۹ ☆ ۴	۵۹ ☆ ۲	۸۹ ☆ ۴	۱۱۹ ☆ ۲	۱۴۹ ☆ ۱
۳۰ ☆ ۳	۶۰ ☆ ۱	۹۰ ☆ ۲	۱۲۰ ☆ ۲	۱۵۰ ☆ ۱