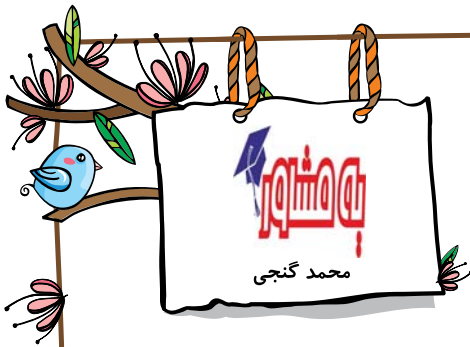
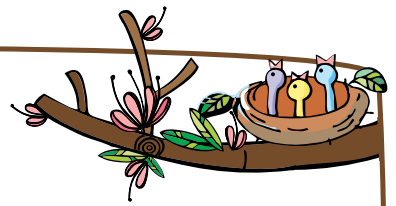


تاریخ آزمون: ۱۳۹۸/۰۱/۰۲
 زمان برگزاری: ۱۸۰۰۰ دقیقه



نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: ریاضی دهم ساده

۱ ☆ اگر $\{x + 2, 2y - 5\} = \{1\}$ باشد، حاصل $x + y$ کدام است؟

- ۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینه ۳

یادآوری: عضو تکراری یک مجموعه را، بیش از یک بار نمی‌نویسیم:

$$\{1, 1, 1, 2, 3, 3, 3\} = \{1, 2, 3\}$$

اگر $x + 2, 2y - 5$ هر دو برابر با ۱ باشند، مجموعه‌ی ۲ عضو $\{x + 2, 2y - 5\}$ به یک مجموعه‌ی تک عضوی با تنها عضو ۱ مبدل می‌شود. بنابراین:

$$\begin{cases} x + 2 = 1 \Rightarrow x = 1 - 2 = -1 \\ 2y - 5 = 1 \Rightarrow 2y = 1 + 5 = 6 \Rightarrow y = \frac{6}{2} = 3 \end{cases} \Rightarrow x + y = -1 + 3 = 2$$

۲ ☆ کدام یک صحیح است؟

- ۱) $N \subseteq Z \subseteq R$ ۲) $R \subseteq Z \subseteq N$ ۳) $Z \subseteq R \subseteq N$ ۴) $N \subseteq R \subseteq Z$

پاسخ: گزینه ۱

مجموعه‌ی اعداد طبیعی، زیرمجموعه‌ای از اعداد صحیح و مجموعه‌ی اعداد صحیح زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی است.

۳ ☆ کدام توصیف برای مجموعه‌ی $\{x | x > 1\}$ مناسب است؟

- ۱) مجموعه‌ی اعداد کسری و صحیح بزرگ‌تر از ۱ ۲) مجموعه‌ی اعداد حقیقی و بزرگ‌تر از ۱
 ۳) مجموعه‌ی اعداد کسری بزرگ‌تر از ۱ ۴) مجموعه‌ی اعداد صحیح و بزرگ‌تر از ۱

پاسخ: گزینه ۲

هرگاه در تعریف یک مجموعه، دقیقاً اشاره نشد که x ها باید از کدام مجموعه انتخاب شوند، مجموعه اعداد حقیقی در نظر گرفته می‌شود.

۴ ☆ مجموعه‌ی $A = \left\{ \frac{x+5}{2x^2+1} \mid x \in N, -2 < x < 2 \right\}$ چند عضو دارد؟

- ۱) بی‌شمار ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

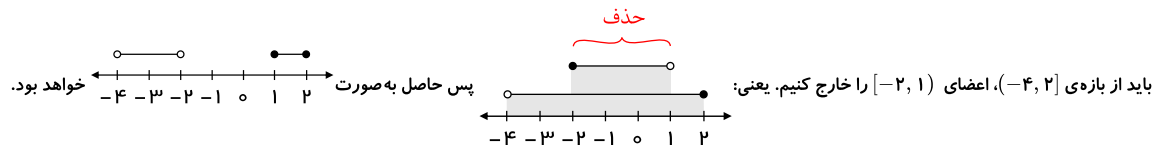
پاسخ: گزینه ۲

از آن‌جا که x عددی طبیعی است و از طرفی بین $-2, 2$ واقع است، پس $x = 1$ است و مجموعه‌ی A فقط شامل عضو $\frac{1+5}{2+1} = 2$ خواهد بود. یعنی: $A = \{2\}$

۵ ☆ نمودار مجموعه‌ی $(-2, 1) - (-4, 2)$ کدام است؟



پاسخ: گزینه ۳



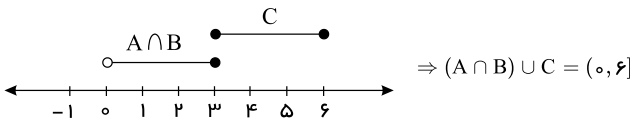
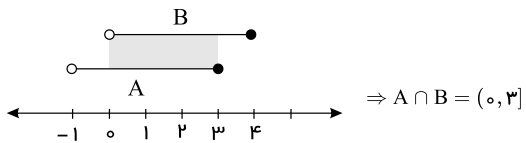
۶ ☆ اگر $A = (-1, 3]$ ، $B = (0, 4)$ و $C = [3, 6]$ باشد حاصل $(A \cap B) \cup C$ کدام است؟

- ۱) $(-1, 4]$ ۲) $(-1, 4)$ ۳) $[0, 3]$ ۴) $(0, 6]$

پاسخ: گزینه ۴

بهترین روش برای حل این تپ سؤالات آن است که از نمودار استفاده کنیم:

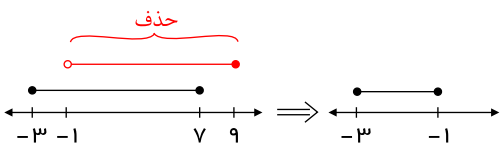




۷ ☆ حاصل $[-3, 7] - (-1, 9]$ کدام است؟

- ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶

پاسخ: گزینه ۲



۸ ☆ کدام یک از مجموعه های زیر متناهی نیست؟

- ۱ مجموعه ای تمام مولکول های آب های دریا های کره ای زمین
 ۲ مجموعه ای تمام مورچه های کره ای زمین
 ۳ مجموعه ای تمام خیابان های دو طرفه ای جهان
 ۴ مجموعه ای قطره های یک دایره

پاسخ: گزینه ۴

هر دایره بی شمار قطر دارد، بنابراین مجموعه قطره های یک دایره متناهی نیست. تعداد اعضای سایر مجموعه های فوق برابر با یک عدد حسابی است و متناهی هستند. دقت: بزرگ بودن یک عدد به معنای نامتناهی بودن آن نیست.

۹ ☆ اگر Z را به عنوان مجموعه ای مرجع در نظر بگیریم و $A' = \{1, 2, 3\}$, $B' = \{2, 3, 4\}$, آن گاه مجموعه ای $(A \cap B)'$ کدام است؟

- ۱ $\{2, 3\}$ ۲ $\{3, 4\}$ ۳ $\{1, 2, 3, 4\}$ ۴ $\{1, 2, 3\}$

پاسخ: گزینه ۳

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B' = \{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

۱۰ ☆ اگر A و B دو مجموعه ای غیر تهی باشند، مجموعه ای $(B - A)'$ برابر با کدام مجموعه است؟

- ۱ $A - B$ ۲ $A \cup B'$ ۳ $A' \cup B$ ۴ $A \cap B$

پاسخ: گزینه ۲

$$B - A = B \cap A'$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

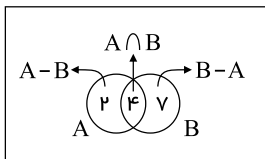
$$(B - A)' = (B \cap A')' = B' \cup A = A \cup B'$$

۱۱ ☆ مجموعه ای $A \cap B$ دارای ۴ عضو، $A - B$ دارای ۲ عضو و $B - A$ دارای ۷ عضو است. $A \cup B$ چند عضو دارد؟

- ۱ ۹ ۲ ۱۱ ۳ ۱۳ ۴ ۱۵

پاسخ: گزینه ۳

با توجه به نمودار ون:



$$\rightarrow n(A \cup B) = 2 + 4 + 7 = 13$$

۱۲ ☆ اگر مجموعه A دارای ۹ عضو و مجموعه B دارای ۳ عضو باشد، تعداد اعضای مجموعه $A \cap B$ کدام است؟

۱۲ (۴)

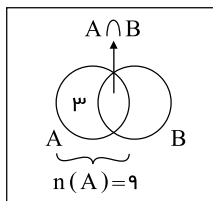
۶ (۳)

۳ (۲)

صفر (۱)

پاسخ: گزینه ۳

با توجه به نمودار ون:



$$\rightarrow n(A \cap B) = 9 - 3 = 6$$

۱۳ ☆ در یک الگوی خطی، هر جمله از رابطه $t_n = 2n + 5$ به دست می آید. فاصله دو جمله متوالی در این الگو چقدر است؟

نمی توان تعیین کرد. (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

روش اول: دو جمله دلخواه از این الگو را می یابیم و فاصله آن ها را تعیین می کنیم:

$$\left. \begin{aligned} t_1 &= 2 \times 1 + 5 = 7 \\ t_2 &= 2 \times 2 + 5 = 9 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{فاصله} = 9 - 7 = 2$$

روش دوم: در جمله عمومی یک الگوی خطی، ضریب n برابر با مقداری است که باید با هر جمله جمع شود تا جمله بعدی به دست آید:

$$t_n = 2n + 5 \Rightarrow \text{ضریب} = n \text{ فاصله دو جمله متوالی} = 2$$

۱۴ ☆ در یک الگوی خطی، جمله اول ۲ و جمله چهارم -۷ است. جمله بیست و دوم این الگو کدام است؟

-۳۱ (۴)

-۴۱ (۳)

-۵۱ (۲)

-۶۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

$$t_n = an + b \text{ : جمله عمومی دنباله خطی}$$

$$t_n = an + b \Rightarrow \begin{cases} t_1 = a \times 1 + b = 2 \Rightarrow a + b = 2 \\ t_4 = a \times 4 + b = -7 \Rightarrow 4a + b = -7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a - b = -2 \\ 4a + b = -7 \end{cases}$$

$$3a = -9 \Rightarrow a = -3$$

$$a + b = 2 \xrightarrow{a=-3} -3 + b = 2 \Rightarrow b = 2 + 3 = 5 \rightarrow t_n = -3n + 5$$

$$t_{22} = -3 \times 22 + 5 = -66 + 5 = -61$$

۱۵ ☆ در یک الگوی خطی، جمله سوم برابر با ۲ و جمله نهم ۲۶ است. جمله عمومی این الگو کدام است؟

$t_n = 2n + 9$ (۴)

$t_n = 4n + 2$ (۳)

$t_n = 9n + 2$ (۲)

$t_n = 4n - 10$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

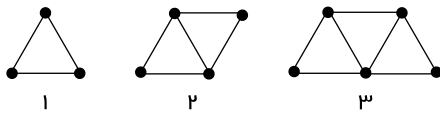
$$t_n = an + b \text{ : الگوی خطی}$$

$$t_n = an + b \Rightarrow \begin{cases} a_3 = a \times 3 + b = 2 \Rightarrow 3a + b = 2 \\ a_9 = a \times 9 + b = 26 \Rightarrow 9a + b = 26 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a - b = -2 \\ 9a + b = 26 \end{cases} \Rightarrow 6a = 24 \Rightarrow a = 4$$

$$3a + b = 2 \xrightarrow{a=4} 3 \times 4 + b = 2 \Rightarrow b = 2 - 12 = -10 \Rightarrow t_n = 4n - 10$$

۱۶ ☆ در الگوی مثلثی به فرم زیر، تعداد گلوله های توپ در شکل چهاردهم چند تا است؟



- ۱۶ (۲)
۱۸ (۴)

- ۱۵ (۱)
۱۷ (۳)

پاسخ: گزینه ۲

شکل اول سه گلوله ی توپ دارد و در هر مرحله، یکی به تعداد گلوله ها افزوده می شود. پس یک الگوی خطی داریم به صورت

$$t_n = an + b$$

$$t_1 = 3 \Rightarrow a \times 1 + b = 3 \Rightarrow a + b = 3$$

$$t_2 = 6 \Rightarrow a \times 2 + b = 6 \Rightarrow 2a + b = 6$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a - b = -3 \\ 2a + b = 6 \end{cases} \Rightarrow a = 1$$

$$a + b = 3 \xrightarrow{a=1} 1 + b = 3 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow t_n = 1 \times n + 2 \Rightarrow t_n = n + 2$$

تعداد گلوله ها در شکل چهاردهم $t_{14} = 14 + 2 = 16$

۱۷ ☆ جمله ی عمومی الگوی ۳، ۸، ۱۵، ۲۴، ... کدام است؟

$t_n = \frac{2n+1}{n}$ (۴)

$t_n = n^2 + 2n$ (۳)

$t_n = (-1)^n \times \frac{-3}{n}$ (۲)

$t_n = 2^n + 1$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

جملات الگو را با استفاده از گزینه های سؤال، تشکیل می دهیم. فقط گزینه ی ۳ می تواند اعداد مورد نظر را تولید کند:

$t_1 = 1^2 + 2 \times 1 = 3$

$t_2 = 2^2 + 2 \times 2 = 8$

$t_3 = 3^2 + 2 \times 3 = 15$

$t_4 = 4^2 + 2 \times 4 = 24$

۱۸ ☆ کدام جمله از دنباله ی $\frac{2n^2 + 5n + 2}{n^2 + 16}$ برابر با ۲ است؟

(۴) هفتم

(۳) ششم

(۲) پنجم

(۱) چهارم

پاسخ: گزینه ۳

$$t_n = 2 \Rightarrow \frac{2n^2 + 5n + 2}{n^2 + 16} = 2 \Rightarrow 2n^2 + 5n + 2 = 2n^2 + 32$$

$$\Rightarrow 5n = 32 - 2 = 30 \Rightarrow n = \frac{30}{5} = 6$$

روش دیگر آن است که گزینه ها را آزمایش کنیم و t_4, t_5, t_6, t_7 را به دست آوریم.

۱۹ ☆ جمله ی عمومی دنباله ی حسابی ۱، ۴، ۷، ۱۰، ۱۳، ... کدام است؟

$t_n = 5n - 16$ (۴)

$t_n = n - 12$ (۳)

$t_n = 2n - 13$ (۲)

$t_n = -n - 11$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

جمله ی اول ۱۱ - است و قدر نسبت دنباله برابر با اختلاف دو جمله ی متوالی یعنی ۵ + است:

$$t_n = t_1 + (n - 1)d = -11 + (n - 1) \times 5 = -11 + 5n - 5 \Rightarrow a_n = 5n - 16$$

$$t_n = 5n + b$$

راه دوم: جمله ی عمومی یک دنباله ی حسابی به صورت $t_n = an - b$ است که در آن a برابر با قدر نسبت دنباله است. بنابراین:

برای یافتن b ، جمله ی اول را در t_n قرار می دهیم:

$$t_1 = 5 \times 1 + b = -11 \Rightarrow b = -11 - 5 = -16 \Rightarrow t_n = 5n - 16$$

۲۰ ☆ جمله ی عمومی دنباله ی ۲، -۲، -۶، -۱۰، ... کدام است؟

$t_n = 3n + 1$ (۴)

$t_n = 3n - 1$ (۳)

$t_n = 3 - 4n$ (۲)

$t_n = 6 - 4n$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

جمله ی اول دنباله ی ۲ است و قدر نسبت برابر است با $-4 = -2 - 2 = d$ (اختلاف دو جمله متوالی) بنابراین:

$$t_n = t_1 + (n - 1)d = 2 + (n - 1)(-4) = 2 - 4n + 4 \Rightarrow t_n = 6 - 4n$$

۲۱ ☆ در یک دنباله ی حسابی $a_{15} - a_{10} = 10$ ، در این دنباله ی $a_{31} - a_{21}$ چقدر است؟

۱۸ (۴)

۱۶ (۳)

۱۴ (۲)

۱۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

$$t_n = a_1 + (n-1)d \quad \text{جمله‌ی عمومی دنباله‌ی حسابی}$$

$$a_{20} - a_{15} = 10 \Rightarrow (a_1 + 19d) - (a_1 + 14d) = 10 \\ = 5d = 10 \Rightarrow d = 2$$

حال $a_{31} - a_{22}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$a_{31} - a_{22} = (a_1 + 30d) - (a_1 + 21d) = a_1 + 30d - a_1 - 21d = 9d = 9 \times 2 = 18$$

۲۲ ☆ در یک دنباله‌ی هندسی، جمله‌ی اول ۳ و جمله‌ی عمومی $t_n = \frac{1}{2} t_{n+1}$ است. t_n کدام است؟

$$\frac{3}{2^{n-1}} \quad \text{۴}$$

$$\frac{3}{2^n} \quad \text{۳}$$

$$\frac{1}{3^n} \quad \text{۲}$$

$$\frac{2}{3^n} \quad \text{۱}$$

پاسخ: گزینه ۴

$t_{n+1} = \frac{1}{2} t_n$ نشان می‌دهد که هر جمله از ضرب شدن $\frac{1}{2}$ در جمله‌ی قبل از آن به دست آمده و این یعنی یک دنباله‌ی هندسی با قدر نسبت $\frac{1}{2}$. از طرفی جمله‌ی اول برابر ۳ است. پس:

$$t_n = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow t_n = 3 \times \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{3}{2^{n-1}}$$

۲۳ ☆ اگر N به عنوان مجموعه مرجع باشد، متمم مجموعه $A = \{x \in N \mid x^2 < 100\}$ کدام است؟

$$\{x \in N \mid x > 9\} \quad \text{۴}$$

$$\{x \in N \mid x > 11\} \quad \text{۳}$$

$$\{11, 12, 13, 14, \dots\} \quad \text{۲}$$

$$\{100, +\infty\} \quad \text{۱}$$

پاسخ: گزینه ۴

مجموعه‌ی A شامل اعضای است که هم طبیعی هستند و هم مجذور آنها از ۱۰۰ کوچکتر است؛ پس A عبارتست از: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

اگر N را مرجع بدانیم، A' برابر است با مجموعه‌ای شامل اعضای N که در A نیستند؛ یعنی: $A' = \{10, 11, 12, \dots\} = \{x \in N \mid x > 9\}$

دقت: $x > 9$ در مجموعه اعداد طبیعی، یعنی اعداد طبیعی پس از ۹، یعنی از ۱۰ به بعد (و خود ۱۰)

۲۴ ☆ اگر $U = \{-2, -1, 1, 2, 4, 7\}$ مجموعه‌ی مرجع باشد و $A = \{-2, 1, 7\}$ و $B = \{-1, 1, 2, 4, 7\}$ و $C = \{-2, 1, 4\}$

باشد، حاصل $(A \cup B)' \cap C$ کدام است؟

$$\{-2, 1, 0, 4\} \quad \text{۴}$$

$$\{-2, -1, 1, 2, 4, 7\} \quad \text{۳}$$

$$\{\} \quad \text{۲}$$

$$\{-2, 1, 4\} \quad \text{۱}$$

پاسخ: گزینه ۲

$$A \cup B = \{-2, 1, 7\} \cup \{-1, 1, 2, 4, 7\} = \{-2, -1, 1, 2, 4, 7\}$$

$$U = \{-2, -1, 1, 2, 4, 7\} \quad \text{فرض مسئله}$$

$$\Rightarrow \text{تتمم} = (A \cup B)' = \{\} = \text{تتمم}$$

$$(A \cup B)' \cap C = \text{تتمم} \cap C = \{\} = \{\}$$

دقت: مجموعه تهی، مجموعه‌ای بدون عضو است، بنابراین اشتراک آن با هر مجموعه‌ی دیگر، تهی است.

۲۵ ☆ کدام گزینه‌ی زیر درست است؟

$$(R \cap Q) \subset Q' \quad \text{۴}$$

$$(Q \cap W) \subset Z \quad \text{۳}$$

$$(Z \cup Q) \subset W \quad \text{۲}$$

$$Q \subset (R \cap Z) \quad \text{۱}$$

پاسخ: گزینه ۳

گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

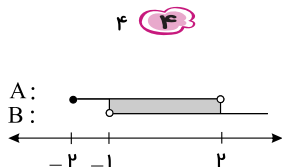
۱) $R \cap Z = Z \Rightarrow Q$ زیر مجموعه Z نیست

۲) $Z \cup Q = Q \Rightarrow Q$ زیرمجموعه W نیست

۳) $Q \cap W = W \Rightarrow W$ زیرمجموعه Z است.

۴) $R \cap Q = Q \Rightarrow Q$ زیرمجموعه Q نیست. نادرست

۲۶ ☆ اگر $A = \{x | x \in \mathbb{R}, -2 \leq x < 2\}$ و $B = \{x | x \in \mathbb{R}, x > -1\}$ باشد، آن گاه مجموعه $A \cap B$ شامل چند عدد صحیح می باشد؟



۴

۲

۱

صفر

پاسخ: گزینه ۳

دو مجموعه را روی محور نمایش می دهیم:

پس اشتراک آن دو عبارتست از $(-1, 2)$ و این بازه شامل اعداد صحیح ۰ و ۱ است.

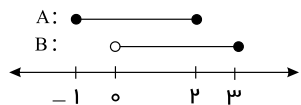
۲۷ ☆ اگر $A = [-1, 2]$ و $B = (0, 3]$ ، آن گاه کدام مجموعه زیر، بازه $(2, 3]$ است؟

$A - B$

$B \cap A$

$B - A$

$A \cup B$



پاسخ: گزینه ۲

بازه ها را روی محور نمایش می دهیم و گزینه ها را بررسی می کنیم:

۱) $A \cup B = [-1, 3]$

۲) $B - A = (2, 3]$

۳) $B \cap A = (0, 2]$

۴) $A - B = [-1, 0]$

۲۸ ☆ کدام مجموعه زیر متناهی نیست؟

۱) مجموعه ی اعداد اول زوج

۲) مجموعه ی گره های کره زمین

۳) مجموعه ی تمام خطوط گذرنده از مبدأ مختصات

۴) مجموعه ی اعداد طبیعی سه رقمی مضرب ۴

پاسخ: گزینه ۳

۱) تنها عدد اول زوج ۲ است. پس مجموعه اعداد اول زوج تک عضوی و متناهی است.

۲) تعداد گره های روی کره زمین عدد حسابی است (هر چند که ما آن را ندانیم). پس مجموعه گره های متناهی است.

۳) از هر نقطه بیشمار خط راست می گذرد، پس مجموعه خطوط گذرنده از مبدأ مختصات نامتناهی است.

۴) مجموعه اعداد طبیعی سه رقمی مضرب ۴ عبارتست از $\{100, 104, 108, \dots, 996\}$ ؛ پس متناهی است.

۲۹ ☆ در یک دنباله ی هندسی با جمله ی عمومی $\frac{2}{5^n}$ ، قدرنسبت کدام است؟

$\frac{2}{25}$

$\frac{2}{5}$

$\frac{1}{25}$

$\frac{1}{5}$

پاسخ: گزینه ۱

در هر دنباله ی هندسی، قدرنسبت برابر است با خارج قسمت دو جمله ی متوالی (فقطی بعدی)

$$t_1 = \frac{2}{5^1} = \frac{2}{5} \quad t_2 = \frac{2}{5^2} = \frac{2}{25}$$

$$r = \frac{t_2}{t_1} = \frac{\frac{2}{25}}{\frac{2}{5}} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$$

۳۰ ☆ در یک دنباله هندسی با قدرنسبت ۲، حاصل $\frac{t_1 t_7}{t_2^2}$ کدام است؟

۴ (۴)

$\frac{1}{4}$ (۳)

۱۶ (۲)

$\frac{1}{16}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

$$\frac{t_1 t_7}{t_2^2} = \frac{t_1 \times t_1 r^6}{(t_1 r)^2} = \frac{t_1^2 \times r^6}{t_1^2 \times r^2} = r^4 = 2^4 = 16$$

۳۱ ☆ هر کدام از مجموعه‌های A, B, C و D یکی از مجموعه‌های اعداد طبیعی، گویا، حقیقی و حسابی هستند. اگر گزاره‌ی $B \subseteq D \subseteq A \subseteq C$ برقرار باشد، کدام یک از مجموعه‌های زیر متناهی است؟

D - B (۴)

C - A (۳)

A - D (۲)

C - D (۱)

پاسخ: گزینه ۴

می‌دانیم که: $N \subseteq W \subseteq Q \subseteq R$

اگر آن را با $B \subseteq D \subseteq A \subseteq C$ مقایسه کنیم، نتیجه می‌شود که:

$$B = N, D = W, A = Q, C = R$$

بررسی گزینه‌ها:

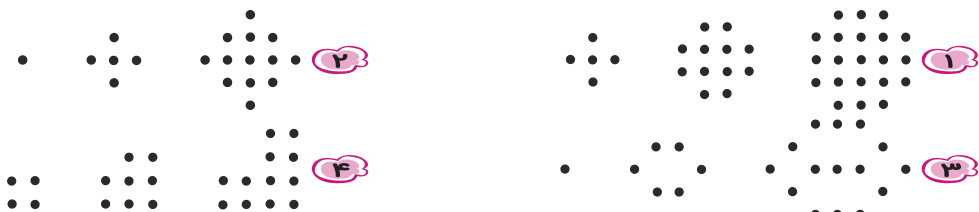
۱) $C - D = R - W$ (نامتناهی)

۲) $A - D = Q - W$ (نامتناهی)

۳) $C - A = R - Q = Q'$ (نامتناهی)

۴) $D - B = W - N = \{0\}$ (متناهی)

۳۲ ☆ تعداد نقاط در کدام یک از الگوهای زیر، یک الگوی خطی است؟



پاسخ: گزینه ۴

در مورد الگوی خطی دو چیز می‌دانیم:

۱- جمله عمومی آن به صورت $t_n = an + b$ است.

۲- اختلاف دو جمله‌ی متوالی آن، عددی ثابت است.

حال تعداد جملات هر یک از گزینه‌ها را می‌نویسیم و اختلاف جملات متوالی آن‌ها را به دست می‌آوریم:

۱) $\begin{matrix} +7 & +9 \\ \hline 5, & 12, & 21, & \dots \end{matrix}$ غیرخطی

۲) $\begin{matrix} +4 & +8 \\ \hline 1, & 5, & 13, & \dots \end{matrix}$ غیرخطی

۳) $\begin{matrix} +5 & +9 \\ \hline 1, & 6, & 15, & \dots \end{matrix}$ غیرخطی

۴) $\begin{matrix} +4 & +4 \\ \hline 4, & 8, & 12, & \dots \end{matrix}$ خطی

۳۳ ☆ در مسابقات جهانی وزنه برداری، در هر وزن یک مدال طلا برای حرکت یک ضرب و یک مدال طلا برای حرکت دوضرب توزیع می‌شود.

اگر تعداد اوزان مسابقات برابر ۸ باشد و ۱۲ نفر در این مسابقات مدال گرفته باشند، چند نفر دو مدال طلا کسب کرده‌اند؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

ا را برابر با مجموعه‌ی مدال‌آوران یک ضرب و B را به عنوان مجموعه‌ی مدال‌آوران دوضرب در نظر می‌گیریم. طبق گفته مسئله $n(A) = n(B) = 8$ است. داریم:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

مدال‌آوران هر دو نقطه

$$\Rightarrow 12 = 8 + 8 - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 8 + 8 - 12 = 4$$

۳۴ ☆ اگر A و B دو مجموعه ی جدا از هم باشند، حاصل $(A \cup B)' \cap B$ کدام است؟

∅ (۴)

A ∪ B (۳)

B (۲)

A (۱)

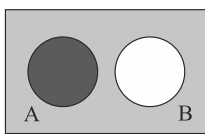
پاسخ: گزینه ۴

دو مجموعه جدا از هم A و B را روی نمودار ون ببینید.



حال مراحل زیر را طی می کنیم:

$$\Rightarrow A \cup B' = B'$$



و در نتیجه:

$$(A \cup B') \cup B = B' \cup B = \emptyset$$

۳۵ ☆ کدام یک از گزینه ها نشانگر یک بازه بسته است؟

$[-3, 3) - [2, 7)$ (۴)

$(-\infty, -1] \cup [-2, 3]$ (۳)

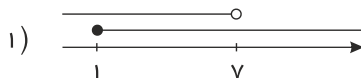
$[-3, 5) - (1, 6)$ (۲)

$(-\infty, 7) \cap [1, +\infty)$ (۱)

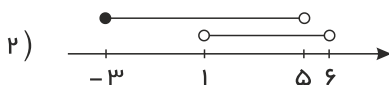
پاسخ: گزینه ۲

حاصل هر گزینه را به کمک محور بدست می آوریم:

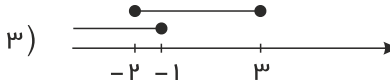
$$[1, 7) = \text{اشتراک دو بازه}$$



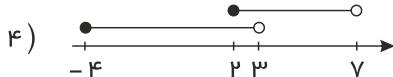
$$[-3, 5) - (1, 6) = [-3, 1]$$



$$(-\infty, 3] = \text{اجتماع دو بازه}$$



$$[-4, 3) - [2, 7) = [-4, 2)$$



۳۶ ☆ اگر داشته باشیم $[A' \cup (C - B)]' = A$ ، در این صورت کدام یک از گزینه ها نمی تواند مجموعه های A، B و C باشد؟ (R مجموعه مرجع می باشد).

$A = R, B = Q, C = W$ (۲)

$A = W, B = W, C = N$ (۱)

$A = Q, B = Q', C = R$ (۴)

$A = Q, B = Z, C = W$ (۳)

پاسخ: گزینه ۴

بررسی گزینه ها:

$$1) \left[W' \cup \overbrace{(N - W)}^{\emptyset} \right]' = [W']' = W = A \text{ (صحیح)}$$

$$2) \left[\overbrace{R'}^{\emptyset} \cup \overbrace{(W - Q)}^{\emptyset} \right]' = [\emptyset]' = R = A \text{ (صحیح)}$$

$$3) [Q' \cup \overbrace{(W - Z)}^{\emptyset}]' = [Q']' = Q = A \text{ (صحیح)}$$

۴) $[Q' \cup (R - Q)]' = [Q' \cup Q]' = [R]' = \emptyset \neq A$ (نادرست)

۳۷ ☆ به ازای چند مقدار صحیح n عبارت $n \in (3n - 14, 5n + 16]$ برقرار است؟

۱۳ ۴

۱ ۳

۱۱ ۲

۱۰ ۱

پاسخ: گزینه ۲

$n \in (3n - 14, 5n + 16] \Rightarrow 3n - 14 < n \leq 5n + 16$

۱) $3n - 14 < n \Rightarrow 2n < 14 \Rightarrow n < 7$
 ۲) $n \leq 5n + 16 \Rightarrow -4n \leq 16 \xrightarrow{\div(-4)} x \geq -4$

اشتراک

$\rightarrow -4 \leq n < 7$

باید دو نامعادله زیر هم زمان برقرار باشند:

اعداد صحیح موجود در بازه فوق عبارتند از:

-۳, -۲, -۱, ۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷

پس تعداد آن‌ها ۱۱ تا است.

۳۸ ☆ کدام گزینه نادرست است؟

۱) هر مجموعه و متمم اش، دو مجموعه‌ی جدا از هم هستند.

۲) اگر A و B دو مجموعه مجزا از هم باشند، آن‌گاه $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

۳) اگر A مجموعه‌ای متناهی و B مجموعه‌ی نامتناهی باشد، آن‌گاه $A \cup B$ متناهی است.

۴) مجموعه اعداد گویا و متمم آن، هر دو مجموعه‌های نامتناهی هستند.

پاسخ: گزینه ۳

گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) A و A' هیچ عضو مشترکی ندارند. پس دو مجموعه جدا از هم هستند. (درست)

۲) اگر A و B جدا از هم باشند، اشتراک آنها هیچ عضوی ندارد و رابطه‌ی تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه برابر خواهد بود با:

$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ (درست)

۳) اجتماع هر مجموعه‌ی متناهی با یک مجموعه‌ی نامتناهی، نامتناهی است. بنابراین $A \cup B$ نامتناهی است. (نادرست)

۴) هر دو نامتناهی‌اند. (درست)

۳۹ ☆ اگر $A \subset B \subset N$ و U مجموعه مرجع باشد، کدام رابطه همواره برقرار است؟

$B \subset A'$ ۴

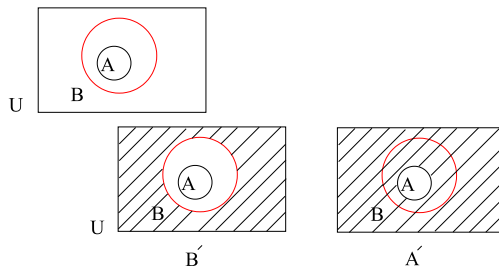
$A' \subset B'$ ۳

$B' \subset A$ ۲

$B' \subset A'$ ۱

پاسخ: گزینه ۱

U را روی نمودار ون ببینید:



نمودار A' و B' عبارتست از:

A' همه‌ی B' را در بر گرفته است. پس $B' \subseteq A'$

۴۰ ☆ کدام یک از مجموعه‌های زیر با سایر مجموعه‌ها متفاوت است؟

$Q' - R$ ۴

$Q' \cap Q$ ۳

$W - N$ ۲

$Z - R$ ۱

پاسخ: گزینه ۲

گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) $Z - R = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} - \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} = \emptyset$

۲) $W - N = \{0, 1, 2, 3, \dots\} - \{1, 2, 3, \dots\} = \{0\} \Rightarrow$ با بقیه متفاوت است

۳) $Q' \cap Q = \text{اعداد گنگ} \cap \text{اعداد گنگ} = \emptyset$

۴) $Q' - R = \text{همه اعداد} - \text{اعداد گنگ} = \emptyset$

۴۱ ☆ اگر $A = R - [-2, 3]$ و $B = (-4, 6)$ باشد، کدام گزینه صحیح است؟

$B - A = (-2, 3)$ (۲)

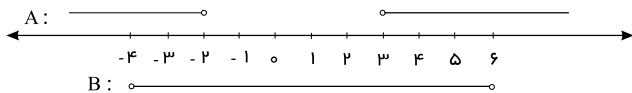
$A - B = R - [-2, 3]$ (۱)

$A \cup B = (-9, 6)$ (۴)

$A \cap B = (-4, 6) - [-2, 3]$ (۳)

پاسخ: گزینه ۳

بازه های A و B را روی محور نمایش می دهیم و حاصل گزینه ها را محاسبه می کنیم:



$A - B = R - (-4, 6)$ (۱)

$B - A = [-2, 3]$ (۲)

$A \cap B = (-4, 6) - [-2, 3]$ (۳)

$A \cup B = R$ (۴)

۴۲ ☆ اگر $A = \{x \in R \mid -4 \leq x < 6\}$ و $B = A \{x \in R \mid x < 3\}$ ، نمایش $(B - A) \cap (A \cup B)$ به صورت بازه کدام است؟

$(-4, 6)$ (۴)

$(-\infty, -4]$ (۳)

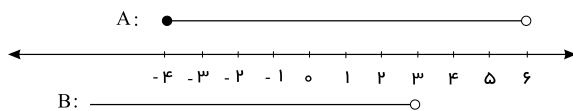
$(-\infty, -4)$ (۲)

$(-\infty, 3)$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

بازه های A و B را روی محور نمایش می دهیم:

$$\Rightarrow \begin{cases} B - A = (-\infty, -4) \\ A \cup B = (-\infty, 6) \end{cases}$$



حال این دو بازه را روی محور نشان می دهیم:

$\Rightarrow (B - A) \cap (A \cup B) = (-\infty, -4)$

۴۳ ☆ چند تا از مجموعه های زیر، نامتناهی هستند؟

الف) مجموعه مقسوم علیه های طبیعی عدد ۳۶

ب) بازه $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$

پ) مجموعه مضرب های طبیعی عدد ۱۰۰

ت) $\{x \in W \mid 1 < x < 2\}$

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

متناهی: $A = ۳۶ =$ مجموعه مقسوم علیه های طبیعی $\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$ (الف)

نامتناهی $B = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ (ب)

نامتناهی $C = \{100, 200, 300, \dots\}$ (پ)

متناهی $D = \{x \in W \mid 1 < x < 2\} = \emptyset$ (ت)

۴۴ ☆ در مجموعه ی مرجع اعداد طبیعی یک رقمی، متمم مجموعه اعداد اول یک رقمی چند عضو دارد؟

۳ عضو (۴)

۶ عضو (۳)

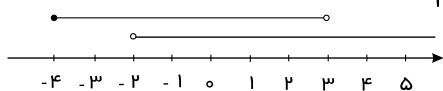
۵ عضو (۲)

۴ عضو (۱)

پاسخ: گزینه ۲

$u = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ = مجموعه ی اعداد طبیعی یک رقمی متمم $\rightarrow A' = \{1, 4, 6, 8, 9\}$
 $A = \{2, 3, 5, 7\}$ = مجموعه ی اعداد اول یک رقمی

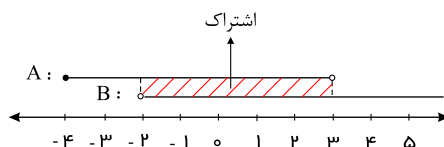
۴۵ ☆ نمایش هندسی دو بازه در محور زیر نمایش داده شده است، اشتراک این دو بازه کدام است؟



- ۱) $[-2, 3]$
۲) $[-2, 3)$
۳) $(-2, 3]$
۴) $(-2, 3)$

- ۱) $[-4, -2]$
۲) $[-4, 3]$
۳) $[-4, 3)$
۴) $(-4, 3]$

پاسخ: گزینه ۴



$$A \cap B = (-2, 3)$$

۴۶ ☆ اگر مجموعه مقسوم علیه‌های طبیعی دو عدد ۲۸ و ۳۰ را به ترتیب A و B بنامیم، مجموعه $A \cup B$ چند عضو دارد؟

۱) ۸

۲) ۱۰

۳) ۱۲

۴) ۱۴

پاسخ: گزینه ۳

$$A = \{1, 2, 4, 7, 14, 28\}$$

$$B = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$$

$$\Rightarrow A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 14, 15, 28, 30\} \Rightarrow n(A \cup B) = 12$$

۴۷ ☆ چند تا از مجموعه‌های زیر، نامتناهی هستند؟

الف) مجموعه مقسوم علیه‌های طبیعی عدد ۳۶

ب) بازه $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$

پ) مجموعه مضرب‌های طبیعی عدد ۱۰۰

ت) $\{x \in \mathbb{W} \mid 1 < x < 2\}$

۱) ۴

۲) ۳

۳) ۲

۴) ۱

پاسخ: گزینه ۲

الف) متناهی: $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$

ب) نامتناهی $B = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$

پ) نامتناهی $C = \{100, 200, 300, \dots\}$

ت) متناهی $D = \{x \in \mathbb{W} \mid 1 < x < 2\} = \emptyset$

۴۸ ☆ اگر مجموعه $A = \{x \mid -3 < x \leq 2\}$ باشد، کدام گزینه صحیح نیست؟

۱) اگر مجموعه مرجع را اعداد طبیعی در نظر بگیریم، مجموعه A متناهی خواهد شد.

۲) اگر مجموعه مرجع را اعداد گویا در نظر بگیریم، مجموعه A نامتناهی خواهد شد.

۳) اگر مجموعه مرجع را اعداد گنگ در نظر بگیریم، مجموعه A متناهی خواهد شد.

۴) اگر مجموعه مرجع را اعداد صحیح کوچک‌تر از ۳- در نظر بگیریم، مجموعه A متناهی خواهد شد.

پاسخ: گزینه ۳

گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) مرجع = $\mathbb{N} \Rightarrow A = \{1, 2\} \Rightarrow$ درست \Rightarrow متناهی

۲) مرجع = $\mathbb{Q} \Rightarrow A = 2, -3 \Rightarrow$ اعداد گویای بین $-3, 2 \Rightarrow$ نامتناهی

۳) مرجع = $\mathbb{R} \Rightarrow A = 2, -3 \Rightarrow$ اعداد گنگ بین $-3, 2 \Rightarrow$ نامتناهی

۴) مرجع = $\mathbb{Z} \Rightarrow A = \emptyset \Rightarrow$ اعداد کوچکتر از $-3 \Rightarrow$ متناهی

۴۹ ☆ کدام یک از گزینه‌های زیر درست است؟

۱) هر دنباله یا حسابی است یا هندسی.

۲) هیچ دنباله‌ای وجود ندارد که هم حسابی باشد، هم هندسی.

۳) تنها یک دنباله وجود دارد که هم حسابی است، هم هندسی.

۴) بی‌شمار دنباله وجود دارد که هم حسابی هستند، هم هندسی.

پاسخ: گزینه ۴

گزینه ۱: دنباله‌ای مثل $t_n = \frac{1}{n}$ ، نه هندسی است و نه حسابی؛ پس این گزینه صحیح نیست.
اما: دنباله ثابت، دنباله‌ای است شامل جملات مساوی به فرم: $t_n = c$ یعنی:

$$C, C, C, \dots$$

این دنباله را می‌توان یک دنباله هندسی با قدر نسبت ۱ و یک دنباله حسابی با قدر نسبت صفر دانست. یعنی هر دنباله ثابت هم هندسی است و هم حسابی؛ از آنجا که بیشمار دنباله ثابت وجود دارد، پس بیشمار دنباله وجود دارد که هم حسابی هستند و هم هندسی

۵۰ ☆ حاصل عبارت $\frac{2\cos^2 45^\circ + 4\sin^2 60^\circ}{2 - 3\cot 30^\circ \times \tan 30^\circ}$ کدام است؟

- ۱ -۴ ۲ ۵ ۳ $-\frac{1}{2}$ ۴ $\frac{4}{3}$

پاسخ: گزینه ۱

می‌دانیم: $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\frac{2\cos^2 45^\circ + 4\sin^2 60^\circ}{2 - 3\cot 30^\circ \times \tan 30^\circ} = \frac{2 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 4 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2 - 3 \times 1} = \frac{2 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{3}{4}}{-1} = \frac{1 + 3}{-1} = -4$$

۵۱ ☆ کدام مجموعه نامتناهی است؟

- ۱ اعداد طبیعی مکعب کامل کوچک‌تر از ۱۰۰۰ ۲ اعداد صحیح نامثبت و مربع کامل
۳ اعداد حقیقی نامنفی و کوچک‌تر از ۵ ۴ اعداد صحیحی که قدر مطلق کوچک‌تر از ۵ دارند.

پاسخ: گزینه ۳

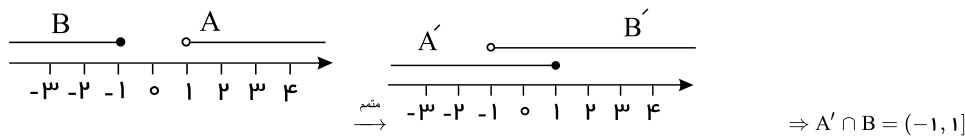
در گزینه ۱ تعداد اعضا معلوم است پس متناهی است. گزینه ۲ برابر است با مجموعه‌ی $\{0\}$ و متناهی است. گزینه ۴ برابر است با $\{-4, -3, \dots, 3, 4\}$ و متناهی است. گزینه ۳ برابر با بازه $(0, 5)$ است و نامتناهی است.

۵۲ ☆ اگر $A = \{x \in \mathbb{R} | x > 1\}$ ، $B = \{x \in \mathbb{R} | x \leq -1\}$ باشد، آن‌گاه $A' \cap B'$ کدام است؟

- ۱ $[-1, 1]$ ۲ $(-1, 1)$ ۳ $(-1, 1]$ ۴ $[-1, 1)$

پاسخ: گزینه ۳

چون \mathbb{R} مجموعه‌ی مرجع است، بهتر است بازه‌ها را روی محور ببینیم:



۵۳ ☆ بین دو عدد $\frac{2}{3}$ و $\frac{22}{3}$ ، هفت واسطه حسابی درج می‌کنیم. عدد وسطی کدام است؟

- ۱ ۴ ۲ $\frac{16}{3}$ ۳ ۲ ۴ $\frac{19}{6}$

پاسخ: گزینه ۱

راه اول: می‌خواهیم دنباله‌ای به صورت زیر تشکیل دهیم:

$$\frac{2}{3}, \underbrace{\frac{2}{3} + d, \frac{2}{3} + 2d, \dots, \frac{2}{3} + 14d}_{\text{جمله وسط}}, \frac{22}{3}$$

برای محاسبه قدر نسبت چنین عمل می‌کنیم:

$$\frac{22}{3} = \frac{2}{3} + 14d \Rightarrow 14d = \frac{22}{3} - \frac{2}{3} = \frac{20}{3} \Rightarrow d = \frac{20}{3 \times 14} = \frac{10}{21}$$

$$\text{جمله وسط} = \frac{2}{3} + 7d = \frac{2}{3} + 7 \times \frac{10}{21} = \frac{2}{3} + \frac{70}{21} = \frac{2}{3} + \frac{10}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

راه دوم:

نکته: در هر دنباله حسابی با تعداد جملات فرد، جمله وسط برابر است با میانگین جملات متساوی الفاصله از دو طرف آن:

$$\text{جمله وسط} = \frac{\frac{2}{3} + \frac{22}{3}}{2} = \frac{\frac{24}{3}}{2} = \frac{24}{6} = 4$$

۵۴ ☆ حاصل عبارت $A = \frac{2 \tan 30^\circ}{1 - \cot^2 60^\circ} + 4 \cos^2 45^\circ \sin 30^\circ - \tan 60^\circ$ کدام است؟

$\sqrt{3}$ (۴)

۱ (۳)

$1 - \sqrt{3}$ (۲)

$1 + \sqrt{3}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

می دانیم: $\cot 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$

$$A = \frac{2 \times \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} + 4 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right) - \sqrt{3} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{\frac{2}{3}} + 4 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - \sqrt{3} = \sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} = 1$$

۵۵ ☆ واسطه‌ی حسابی بین دو عدد $\frac{1}{1 + \sqrt{2}}$ و $\frac{1 - 2\sqrt{2}}{2}$ کدام است؟

$-\frac{1}{2}$ (۴)

$\sqrt{2}$ (۳)

$-\frac{1}{4}$ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

واسطه‌ی حسابی یعنی عددی که بین دو عدد $\frac{1}{1 + \sqrt{2}}$ و $\frac{1 - 2\sqrt{2}}{2}$ قرار گیرد و با آنها یک دنباله‌ی حسابی تشکیل دهد؛ و می‌دانیم که در هر دنباله‌ی حسابی، جمله‌ی وسط میانگین جملات طرفین خود است:

$$\text{واسطه‌ی حسابی} = x = \frac{\frac{1}{1 + \sqrt{2}} + \frac{1 - 2\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{\frac{2 + 1 - 2\sqrt{2} + \sqrt{2} - 4}{2(1 + \sqrt{2})}}{2} = \frac{-1 - \sqrt{2}}{2(1 + \sqrt{2})}$$

$$= \frac{-(1 + \sqrt{2})}{2(1 + \sqrt{2})} = -\frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

۵۶ ☆ حاصل $(\sin 45^\circ - \cos 60^\circ)(\sin 30^\circ + \cos 45^\circ)$ کدام است؟

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۴)

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳)

$\frac{1}{4}$ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{2 - 1}{4} = \frac{1}{4}$$

۵۷ ☆ حاصل عبارت $\sin 45^\circ + \cos 30^\circ + \sqrt{2} \sin 90^\circ + \tan 60^\circ$ کدام است؟

$\frac{2\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{2}$ (۴)

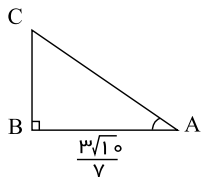
$\frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{2}$ (۳)

$\frac{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}}{2}$ (۲)

$\frac{3\sqrt{3} + 3\sqrt{2}}{2}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

$$\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{2} + \sqrt{3} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{2} + 3\sqrt{3}}{2}$$



۵۸ ☆ اندازه وتر مثلث مقابل کدام است؟ $(\sin A = \frac{2}{5})$

$\sqrt{2}$ (۲)

۱ (۱)

۲ (۴)

$\sqrt{3}$ (۳)

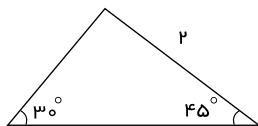
پاسخ: گزینه ۲

$$\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A} = \sqrt{1 - \frac{4}{25}} = \sqrt{\frac{21}{25}} = \frac{\sqrt{21}}{5}$$

$$\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{3\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \frac{3\sqrt{10}}{5} = \frac{3\sqrt{5}}{5} \Rightarrow 3\sqrt{10} = 3\sqrt{5}AC$$

$$\Rightarrow AC = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}} = \sqrt{2}$$

۵۹ ☆ ارتفاع نظیر بزرگترین ضلع مثلث مقابل کدام است؟



$\sqrt{2}$ (۲)

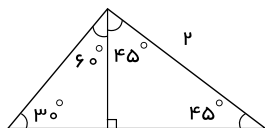
۱ (۱)

۲ (۴)

$\sqrt{3}$ (۳)

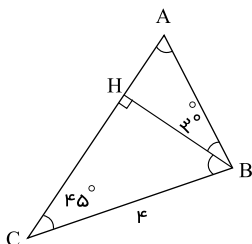
پاسخ: گزینه ۲

با رسم ارتفاع خواهیم داشت:



$$\sin 45 = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\text{ارتفاع}}{2} \Rightarrow h = \sqrt{2}$$

۶۰ ☆ در مثلث مقابل، طول ضلع AC چه قدر است؟



$\frac{2\sqrt{6}}{3}$ (۲)

$2(\frac{\sqrt{6}}{3} + \sqrt{2})$ (۱)

$\frac{\sqrt{2}}{3}$ (۴)

$\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (۳)

پاسخ: گزینه ۱

$$\sin 45 = \frac{BH}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow BH = 2\sqrt{2}$$

$$\cos 45 = \frac{CH}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow CH = 2\sqrt{2}$$

$$\tan 30 = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{AH}{2\sqrt{2}} \Rightarrow AH = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

$$AC = AH + HC = \frac{2\sqrt{6}}{3} + 2\sqrt{2} = 2(\frac{\sqrt{6}}{3} + \sqrt{2})$$

۶۱ ☆ کدام یک از زوایای زیر، در ناحیه ای متفاوت با زوایای سایر گزینه ها واقع است؟

۱۹۰ (۴)

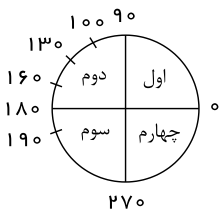
۱۶۰ (۳)

۱۳۰ (۲)

۱۰۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

در دایره ی مثلثاتی می بینیم که گزینه های ۱ و ۲ و ۳ همگی در بازه ی ۹۰° تا ۱۸۰° هستند و در ربع دوم قرار می گیرند اما گزینه ی ۴ در این بازه نیست.



۶۲ ☆ باتوجه به دایره مثلثاتی مقابل، مقدار $\cos^2 33^{\circ}$ کدام است؟

$\frac{3}{4}$ (۲)

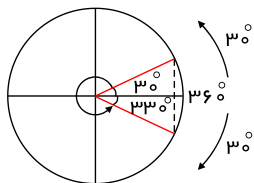
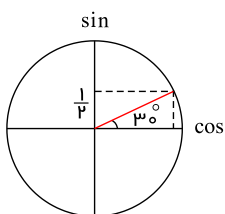
$\frac{1}{2}$ (۱)

$\frac{1}{4}$ (۴)

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳)

پاسخ: گزینه ۲

با نمایش 33° روی دایره مثلثاتی می بینیم که 33° و 33° کسینوس های مشابه دارند.



$$\cos 33^{\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos^2 33^{\circ} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

۶۳ ☆ علامت کدام یک از گزینه های زیر با سایر گزینه ها متفاوت است؟

$\cot 13^{\circ}$ (۴)

$\tan 195^{\circ}$ (۳)

$\cos 345^{\circ}$ (۲)

$\sin 75^{\circ}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

باتوجه به ناحیه هر یک از زوایا و دایره مثلثاتی:

الف) ربع اول $\sin 75^{\circ} > 0$

ب) ربع چهارم $\cos 345^{\circ} > 0$

ج) ربع سوم $\frac{\sin 195^{\circ}}{\cos 195^{\circ}} \Rightarrow \tan 195^{\circ} > 0$

د) ربع دوم $\frac{\cos 13^{\circ}}{\sin 13^{\circ}} \Rightarrow \cot 13^{\circ} < 0$

۶۴ ☆ صرفنظر از علامت، مقدار کدام گزینه کمتر است؟

$\cos 1^{\circ}$ (۴)

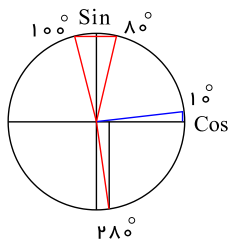
$\cos 28^{\circ}$ (۳)

$\sin 10^{\circ}$ (۲)

$\sin 8^{\circ}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

باتوجه به دایره مثلثاتی مقادیر گزینه های ۱ و ۲ و ۴ یکسان اند و $\cos 28^{\circ}$ مقدار کوچکتری دارد.



۶۵ ☆ اگر α در ربع دوم باشد و $\cos \alpha = \frac{m+2}{3}$ باشد، حدود m کدام است؟

- ۱ $-5 < m < -2$ ۲ $-3 < m < 0$ ۳ $-1 \leq m \leq 1$ ۴ $-5 \leq m \leq -2$

پاسخ: گزینه ۱

در ربع دوم باتوجه به دایره مثلثاتی: $-1 < \cos \alpha < 0$

$$-1 < \frac{m+2}{3} < 0 \xrightarrow{\times 3} -3 < m+2 < 0 \xrightarrow{-2} -5 < m < -2$$

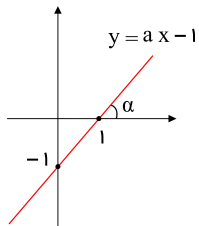
۶۶ ☆ خطی که از نقطه $(2, 5)$ می‌گذرد و عرض از مبدأ آن ۳ است، با جهت مثبت محور طول‌ها چه زاویه‌ای می‌سازد؟

- ۱ 30° ۲ 45° ۳ 60° ۴ 90°

پاسخ: گزینه ۲

$$y = ax + b \rightarrow y = ax + 3 \xrightarrow{(2,5)} 5 = 2a + 3$$

$$2a = 2 \Rightarrow a = 1 \rightarrow \tan \alpha = 1 \rightarrow \alpha = 45^\circ$$



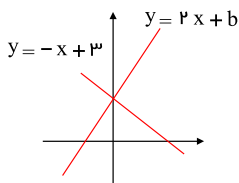
۶۷ ☆ در شکل زیر $\sin \alpha$ کدام است؟

- ۱ $\frac{1}{2}$ ۲ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۳ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴ $\frac{1}{4}$

پاسخ: گزینه ۳

$$y = ax - 1 \xrightarrow{(1,0)} 0 = a - 1 \rightarrow a = 1 \rightarrow \tan \alpha = 1 \rightarrow \alpha = 45^\circ$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



۶۸ ☆ در شکل زیر b کدام است؟

- ۱ ۱ ۲ ۲ ۳ ۳ ۴ ۴

پاسخ: گزینه ۳

مختصات محل تلاقی در هر دو معادله صدق می‌کند.

$$\left. \begin{array}{l} \nearrow y = 3 \\ \searrow y = b \end{array} \right\} \Rightarrow b = 3$$

۶۹ ☆ اگر $\sin \alpha = -\frac{6}{10}$ باشد و α زاویه‌ای در ربع سوم باشد، آنگاه حاصل $\tan \alpha - \cot^2 \alpha$ کدام است؟

- ۱ $-\frac{6}{13}$ ۲ $\frac{6}{13}$ ۳ $\frac{36}{91}$ ۴ $-\frac{37}{36}$

پاسخ: گزینه ۴

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \frac{36}{100}} = \pm \sqrt{\frac{64}{100}} = \pm \sqrt{\left(\frac{8}{10}\right)^2} = \pm \frac{8}{10}$$

در ربع سوم $\cos \alpha < 0$

$$\tan \alpha = \frac{-\frac{6}{10}}{-\frac{8}{10}} = \frac{3}{4}$$

$$\cot \alpha = \frac{-\frac{8}{10}}{-\frac{6}{10}} = \frac{4}{3} \rightarrow \cot^2 \alpha = \frac{16}{9}$$

$$\tan \alpha - \cot^2 \alpha = \frac{3}{4} - \frac{16}{9} = \frac{27 - 64}{36} = \frac{-37}{36}$$

۷۰. حاصل $\frac{1 + \sin^2 2^\circ + \sin^2 7^\circ}{1 + \tan 2^\circ \tan 7^\circ}$ کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

سینوس و کسینوس زوایای متمم با یکدیگر برابر است. پس: $\sin 7^\circ = \cos 2^\circ$, $\cos 7^\circ = \sin 2^\circ$

$$\frac{1 + \sin^2 2^\circ + \sin^2 7^\circ}{1 + \tan 2^\circ \tan 7^\circ} = \frac{1 + \sin^2 2^\circ + \cos^2 2^\circ}{1 + \frac{\sin 2^\circ}{\cos 2^\circ} \times \frac{\sin 7^\circ}{\cos 7^\circ}} = \frac{1 + 1}{1 + 1} = 1$$

۷۱. اگر α در ربع دوم باشد حاصل $\tan \alpha - \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1}$ کدام است؟

$\cos^2 \alpha$ (۴)

$\sin \alpha$ (۳)

$2 \tan \alpha$ (۲)

صفر (۱)

پاسخ: گزینه ۲

$$\tan \alpha - \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1} = \tan \alpha - \sqrt{1 + \tan^2 \alpha - 1}$$

$$= \tan \alpha - \sqrt{\tan^2 \alpha} = \tan \alpha - |\tan \alpha| \xrightarrow{\text{ربع دوم } \alpha} \tan \alpha - (-\tan \alpha) = \tan \alpha + \tan \alpha = 2 \tan \alpha$$

۷۲. مقدار عددی عبارت مثلثاتی $A = 2 \sin^2 3^\circ - \cos 6^\circ + \tan 45^\circ \sin^2 6^\circ$ کدام است؟

۰٫۸ (۴)

۰٫۷۵ (۳)

۱٫۲۵ (۲)

صفر (۱)

پاسخ: گزینه ۳

مقادیر $\sin 3^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 6^\circ = \frac{1}{2}$, $\tan 45^\circ = 1$ و $\sin 6^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ را در A جایگزین می‌کنیم:

$$A = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + 1 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 2 \times \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{3}{4} = 0,75$$

۷۳. در کدام یک از گزینه‌ها، همه‌ی مقادیر داده شده تعریف شده هستند؟

$\cot 27^\circ$, $\frac{1}{\sin 18^\circ}$, $\tan 0^\circ$ (۲)

$\cot 18^\circ$, $\frac{1}{\cos 0^\circ}$, $\tan 36^\circ$ (۱)

$\cot 9^\circ$, $\frac{1}{\cos 18^\circ}$, $\tan 9^\circ$ (۴)

$\cot 9^\circ$, $\frac{1}{\cos 0^\circ}$, $\tan 18^\circ$ (۳)

پاسخ: گزینه ۳

مقادیر 18° و 9° تعریف نشده‌اند و $\sin 18^\circ = 0$ بوده و در نتیجه $\frac{1}{\sin 18^\circ}$ تعریف نشده است.

۷۴. اگر $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ و α زاویه‌ای در ناحیه‌ی دوم مثلثاتی باشد، مقدار $\tan \alpha$ کدام است؟

$\frac{2}{5}$ (۴)

$-\frac{4}{3}$ (۳)

۳ (۲)

$-\frac{4}{5}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

راه اول: می‌دانیم: ۱- بین سینوس و کسینوس رابطه‌ی $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ برقرار است.

۲- در ناحیه‌ی دوم، سینوس مثبت و کسینوس منفی است؛ در نتیجه تانژانت منفی خواهد بود.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{25 - 9}{25} = \frac{16}{25}$$

$$\sqrt{\sin \alpha} = \pm \sqrt{\frac{16}{25}} = \pm \frac{4}{5} \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \frac{4}{5} \checkmark \\ \sin \alpha = -\frac{4}{5} \text{ غیر قابل قبول} \end{cases}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\left(-\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{1}{\frac{9}{25}} \Rightarrow \tan^2 \alpha = \frac{25}{9} - 1 = \frac{25-9}{9} = \frac{16}{9}$$

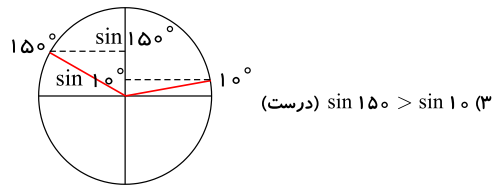
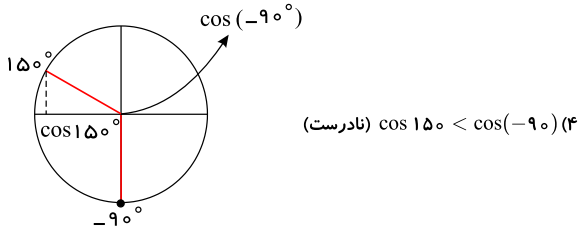
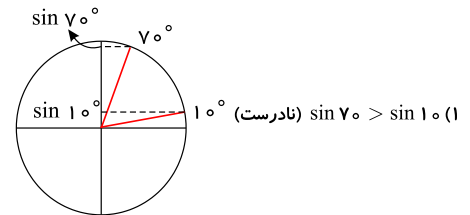
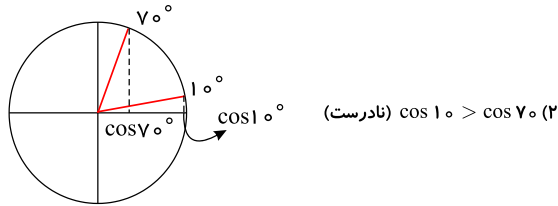
$$\sqrt{\tan \alpha} = \begin{cases} \tan \alpha = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3} \text{ غیر قابل قبول} \\ \tan \alpha = -\sqrt{\frac{16}{9}} = -\frac{4}{3} \checkmark \end{cases}$$

راه دوم: $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$

۷۵ ☆ کدام یک از نامساوی‌های زیر درست است؟

- $\cos(-90^\circ) < \cos 150^\circ$ (۴)
 $\sin 150^\circ > \sin 10^\circ$ (۳)
 $\cos 10^\circ < \cos 70^\circ$ (۲)
 $\sin 10^\circ > \sin 70^\circ$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳
گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:



۷۶ ☆ حاصل عبارت $A = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + (\sqrt{2} \sin \alpha \cos \alpha)^2$ همواره کدام است؟

- $1 + \tan^2 \alpha$ (۴)
 ۱ (۳)
 صفر (۲)
 -۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

برای هر زاویه‌ی x داریم: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$$A = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$$

$$\Rightarrow A = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 = 1^2 = 1$$

۷۷ ☆ بین دو عدد ۴ و ۳۲۴، سه واسطه‌ی هندسی درج کرده‌ایم. جمله‌ی سوم این دنباله کدام است؟

- ۶۳ (۴)
 ۵۴ (۳)
 ۴۵ (۲)
 ۳۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

در هر دنباله هندسی: $t_n = t_1 q^{n-1}$

دنباله‌ی هندسی حاصل عبارتست از:

$$3, \dots, \dots, \dots, 324$$

$$\Rightarrow 324 = 4 \times q^f \Rightarrow q^f = \frac{324}{4} = 81 \rightarrow q = \pm \sqrt[f]{81} = \pm 3$$

$$t_7 = t_1 q^6 = 4 \times (\pm 3)^6 = 36$$

۷۸ ☆ در نامعادله‌ی $-3 \leq \sqrt[3]{x} \leq 5$ به جای x چند مقدار صحیح متمایز می توان قرار داد؟

۱۵۳ (۴)

۱۵۲ (۳)

۱۵۴ (۲)

۱۵۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

$$-3 \leq \sqrt[3]{x} \leq 5 \xrightarrow{(\quad)^3} -27 \leq x \leq 125$$

$$125 - (-27) + 1 = 153$$

تعداد اعداد صحیح این بازه عبارتست از:

۷۹ ☆ اگر $k < \sqrt{-53} < k + 1$ و $k \in Z$ باشد، k کدام است؟

-۵ (۴)

-۲ (۳)

-۳ (۲)

-۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

نزدیکترین اعداد مکعب کامل به ۵۳، عبارتند از ۲۷ و ۶۴:

$$27 < 53 < 64 \xrightarrow{\times(-1)} -27 > -53 > -64$$

$$\sqrt[3]{-27} > \sqrt[3]{-53} > \sqrt[3]{-64} \Rightarrow \underbrace{-3}_{k+1} > \sqrt[3]{-53} > \underbrace{-4}_k \Rightarrow k = -4$$

۸۰ ☆ معادله‌ی خطی که با جهت مثبت محور xها زاویه‌ی 60° می سازد و عرض از مبدأ آن ۲ است، کدام است؟

$y = 3 + \sqrt{3}x$ (۴)

$y + \sqrt{3}x = 3$ (۳)

$y - \sqrt{3}x = 2$ (۲)

$y = 2 - \sqrt{3}x$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

شیب خطی که باجهت مثبت محور xها زاویه‌ی θ بسازد برابر $\tan \theta$ است

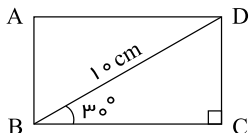
معادله‌ی خطی که با شیب m از نقطه (x_0, y_0) بگذرد، عبارتست از $y - y_0 = m(x - x_0)$

شیب خط $= \tan 60^\circ = \sqrt{3}$

عرض از مبدأ ۲ است. یعنی خط از نقطه‌ی $(0, 2)$ می گذرد.

معادله‌ی خط $y - 2 = \sqrt{3}(x - 0)$

$y = \sqrt{3}x + 2 \Rightarrow y - \sqrt{3}x = 2$



۸۱ ☆ در شکل زیر، محیط مستطیل ABCD کدام است؟

$5(1 + \sqrt{3})$ (۲)

$10\sqrt{3}$ (۱)

$10(1 + \sqrt{3})$ (۴)

$5\sqrt{3}$ (۳)

پاسخ: گزینه ۴

$\sin 30^\circ = \frac{CD}{BD} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{CD}{10} \Rightarrow CD = 10 \times \frac{1}{2} = 5 \text{ cm}$

$\cos 30^\circ = \frac{BC}{BD} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BC}{10} \Rightarrow BC = \frac{10 \times \sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$

محیط مستطیل $= 2(CD + BC) = 2(5 + 5\sqrt{3}) = 2 \times 5(1 + \sqrt{3}) = 10(1 + \sqrt{3})$



۸۲ ☆ اگر معادله‌ی درجه دوم $(2m + 1)x^2 + (m + 2)x + 1 = 0$ ریشه‌ی مضاعف داشته باشد، این ریشه کدام می‌تواند باشد؟

$\frac{2}{3}$ (۴)

$-\frac{2}{3}$ (۳)

$\frac{1}{3}$ (۲)

$-\frac{1}{3}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

معادله‌ی درجه‌ی ۲ ریشه‌ی مضاعف دارد، هرگاه $\Delta = 0$ باشد.

$\Delta = 0 \rightarrow b^2 - 4ac = 0 \rightarrow (m + 2)^2 - 4(2m + 1) \times 1 = 0$

$\Rightarrow m^2 + 4m + 4 - 8m - 4 = 0 \Rightarrow m(m - 4) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} m = 0 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x + 1)^2 = 0 \Rightarrow x = -1 \\ m = 4 \Rightarrow 9x^2 + 6x + 1 = 0 \Rightarrow (3x + 1)^2 = 0 \Rightarrow 3x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3} \end{cases}$

۸۳ ☆ اگر $x < 0$ ، آنگاه حاصل $\sqrt[3]{3x} \times \sqrt{\frac{1}{9x^2}}$ همواره کدام است؟

$-\frac{1}{3x}$ (۴)

$\frac{1}{x}$ (۳)

-1 (۲)

1 (۱)

پاسخ: گزینه ۲

$\sqrt{x^2} = |x|$

$\sqrt[3]{3x} \sqrt{\frac{1}{9x^2}} = \sqrt[3]{3x} \left| \frac{1}{3x} \right| \stackrel{x < 0}{=} \sqrt[3]{3x} \times \left(-\frac{1}{3x}\right) = \sqrt[3]{3x} \times \frac{-1}{3x} = \sqrt[3]{-1} = -1$

۸۴ ☆ چه تعداد از تساوی‌های زیر صحیح است؟

$\sqrt[5]{\frac{7}{16a^5}} \times \sqrt[5]{\frac{243}{14}} = \frac{7}{2a}$ (پ)

$\sqrt[5]{72} \times \sqrt[5]{108} = 6$ (ب)

$\sqrt[6]{4} \times \sqrt[6]{80} = 2\sqrt[6]{5}$ (الف)

صفر (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

درست $\sqrt[6]{4} \times \sqrt[6]{80} = \sqrt[6]{4 \times 80} = \sqrt[6]{320} = \sqrt[6]{2^6 \times 5} = \sqrt[6]{2^6} \times \sqrt[6]{5} = 2 \times \sqrt[6]{5}$ (الف)

ب) $\sqrt[5]{72} \times \sqrt[5]{108} = \sqrt[5]{72 \times 108} = \sqrt[5]{(3^3 \times 2^3) \times (3^3 \times 2^3)} = \sqrt[5]{3^6 \times 2^6} = \sqrt[5]{3^5 \times 3 \times 2^5 \times 2} = \sqrt[5]{3^5} \times \sqrt[5]{2^5} = 3 \times 2 = 6$ درست

پ) $\sqrt[5]{\frac{7}{16a^5}} \times \sqrt[5]{\frac{243}{14}} = \sqrt[5]{\frac{7 \times 243}{16a^5 \times 14}} = \sqrt[5]{\frac{7 \times 3^5}{2^4 \times a^5 \times 2 \times 7}} = \sqrt[5]{\frac{3^5}{2^5 \times a^5}}$
 نادرست $\frac{\sqrt[5]{3^5}}{\sqrt[5]{2^5 \times a^5}} = \frac{3}{\sqrt[5]{2^5 \times a^5}} = \frac{3}{2 \times a} = \frac{3}{2a} \neq \frac{7}{2a}$

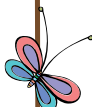
۸۵ ☆ کدام گزینه برابر با کسر $A = \frac{1}{\sqrt[3]{\sqrt{54} + \sqrt{250}}}$ است؟

$\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$ (۴)

$\frac{\sqrt[3]{2}}{4}$ (۳)

$\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$ (۲)

$\frac{\sqrt[3]{4}}{4}$ (۱)



ریاضی دهم ساده

پاسخ: گزینه ۱

$$x^a \times x^b = x^{a+b} \quad \text{و} \quad \sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\sqrt[3]{3^3 \times 2} + \sqrt[3]{5^3 \times 2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3^3 \times 2^3} + \sqrt[3]{5^3 \times 2^3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8 \times 2^3}} \\ &= \frac{1}{\sqrt[3]{2^3 \times 2^3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^{3+3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^6}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^2 \times 2^2 \times 2^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^2 \times 2^2 \times 2^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt[3]{2^6}} = \frac{1}{2^{\frac{6}{3}}} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

۸۶ ☆ چه تعداد اعداد صحیح در هر دو نامساوی زیر صدق می کنند؟

I) $2 < \sqrt[3]{x} < 3$ II) $3 \leq \sqrt{x} \leq 5$

۱۹ (۴)

۱۸ (۳)

۱۷ (۲)

۱۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

$$\left. \begin{aligned} \text{I) } 2 < \sqrt[3]{x} < 3 &\xrightarrow{(\cdot)^3} 8 < x < 27 \\ \text{II) } 3 \leq \sqrt{x} \leq 5 &\xrightarrow{(\cdot)^2} 9 \leq x \leq 25 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} 9 \leq x \leq 25$$

تعداد اعداد صحیح در این بازه عبارتست از: $25 - 9 + 1 = 17$

۸۷ ☆ حاصل عبارت زیر کدام است؟

$$A = \sqrt[5]{\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)^{-5}} - \sqrt{\left(\left(\frac{4}{3}\right)^{-1}\right)^4}$$

۱ (۴)

$\frac{4}{3}$ (۳)

۲ (۲)

$\frac{3}{2}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-x} = \left(\frac{b}{a}\right)^x$$

$$A = \sqrt[5]{\left(\frac{4}{9}\right)^{-5}} - \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^4} = \sqrt[5]{\left(\frac{9}{4}\right)^5} - \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^4}$$

$$= \frac{9}{4} - \frac{3}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

۸۸ ☆ کسر $\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}$ با کدام گزینه ی زیر برابر است؟

$\sqrt[3]{2}-1$ (۴)

$\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1$ (۳)

$\sqrt[3]{2} + 1$ (۲)

$\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

$$(a-b)(a^3+ab+b^3) = a^3 - b^3$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1} \times \frac{\sqrt[3]{2^3} + \sqrt[3]{2} + 1}{\sqrt[3]{2^3} + \sqrt[3]{2} + 1}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1}{(\sqrt[3]{2})^3 - 1^3} = \frac{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1}{2 - 1} = \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1$$

۸۹ ☆ حاصل عبارت زیر به ازای $n = 4$ کدام است؟

$$4 \times \underbrace{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\dots \sqrt{2^n}}}}}_{n}$$

۴ $\sqrt[4]{2}$ (۴)

$\sqrt[4]{2}$ (۳)

۲ (۲)

$\sqrt[4]{8}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

می‌دانیم: $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$

$$4 \times \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2^4}}}} = 4 \times \sqrt{\sqrt{\sqrt{2^2}}} = 4 \times \sqrt{\sqrt{2}} = 4 \sqrt[4]{2} = 4 \sqrt[4]{2^1} = 4 \times 2^{\frac{1}{4}} = 4 \times \sqrt[4]{2}$$

۹۰ ☆ اگر $0 < a < 1$ ، حاصل عبارت $A = |a - \sqrt{a}| - |a - \sqrt[3]{a}| + |\sqrt{a} - \sqrt[3]{a}|$ کدام است؟

صفر (۴)

$2\sqrt{a}$ (۳)

$2\sqrt[3]{a}$ (۲)

$2a$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

اعداد بازه $(0, 1)$ هر چه به فرجه بیشتری برسند بزرگتر می‌شوند.

$$0 < a < 1 \Rightarrow 0 < a < \sqrt{a} < \sqrt[3]{a} < 1$$

$$A = \underbrace{|a - \sqrt{a}|}_{-} - \underbrace{|a - \sqrt[3]{a}|}_{-} + \underbrace{|\sqrt{a} - \sqrt[3]{a}|}_{+}$$

$$\Rightarrow (-a + \sqrt{a}) - (-a + \sqrt[3]{a}) + (-\sqrt{a} + \sqrt[3]{a})$$

$$\Rightarrow A = 0$$

۹۱ ☆ در کدام گزینه، معادله‌ی درجه‌ی دوم ریشه‌ی مضاعف دارد؟

$-5x^2 + 10x - 5 = 0$ (۴)

$5x^2 - 8x + 3 = 0$ (۳)

$2x^2 + x - 2 = 0$ (۲)

$3x^2 - 2x + 1 = 0$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

اگر $\Delta = 0$ معادله‌ی درجه‌ی ۲ ریشه‌ی مضاعف دارد.

۱) $\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4 \times 3 \times 1 \neq 0$

۲) $\Delta = 1 - 4(2)(-2) \neq 0$

۳) $\Delta = 64 - 4 \times 5 \times 3 \neq 0$

۴) $\Delta = 100 - 4(-5)(-5) = 100 - 100 = 0$

۹۲ ☆ حاصل عبارت $\frac{\sqrt{0,16} - \sqrt[3]{0,27}}{\sqrt[4]{0,0016} - \sqrt[5]{0,00001}}$ کدام است؟

۱ (۴)

۱,۲ (۳)

۰,۲ (۲)

۰,۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

$$\frac{\sqrt{0,16} - \sqrt{0,27}}{\sqrt[4]{0,0016} - \sqrt[5]{0,00001}} = \frac{0,4 - 0,3}{0,2 - 0,1} = \frac{0,1}{0,1} = 1$$

۲ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۹۳ ☆ حاصل عبارت $\sqrt[6]{0,000064} \times \sqrt[4]{(0,00081)^{-1}}$ کدام است؟

پاسخ: گزینه ۲

$$\sqrt[6]{0,000064} \times \sqrt[4]{\frac{1}{0,00081}} = 0,2 \times \frac{1}{0,3} = \frac{0,2}{0,3} = \frac{2}{3}$$

۳ (۴)

۲ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۹۴ ☆ حاصل عبارت $\sqrt{27} + \sqrt[4]{9}$ کدام است؟

پاسخ: گزینه ۱

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

$a, b \geq 0$, زوج n

I) $\sqrt{27} = \sqrt{3 \times 3^2} = \sqrt{3} \times \sqrt{3^2} = 3\sqrt{3}$

II) $\sqrt[4]{9} = \sqrt[4]{3^2} = \sqrt{3}$

$\xrightarrow{I, II} \sqrt{27} + \sqrt[4]{9} = 3\sqrt{3} + \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

۲ (۴)

۴ (۳)

۵ (۲)

۶ (۱)

۹۵ ☆ اگر $\sqrt[n]{2} \times \sqrt[n]{2^2} = \sqrt{2}$ باشد، آنگاه n کدام است؟

پاسخ: گزینه ۱

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

اگر n زوج $\leftarrow a, b \geq 0$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad a \geq 0$$

$$\sqrt[n]{2} \times \sqrt[n]{2^2} = \sqrt[n]{2^2 \times 2} = \sqrt[n]{2^3} = \sqrt{2}$$

$$\sqrt[n]{2^3} = \sqrt{2} \Rightarrow 2^{\frac{3}{n}} = 2^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{3}{n} = \frac{1}{2} \Rightarrow n = 6$$

۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)

۹۶ ☆ حاصل عبارت $\frac{(0,0016)^{0,25}}{(0,04)^{0,5}}$ کدام است؟

پاسخ: گزینه ۴

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad a \geq 0$$

$$\frac{(0,0016)^{\frac{25}{100}}}{(0,04)^{\frac{5}{10}}} = \frac{(0,0016)^{\frac{1}{4}}}{(0,04)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt[4]{0,0016}}{\sqrt{0,04}} = \frac{0,2}{0,2} = 1$$

۲ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۹۷ ☆ حاصل عبارت $\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3} \times \sqrt{3}}$ کدام است؟

پاسخ: گزینه ۳

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad a \geq 0$$

$$\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

اگر زوج n ← $a, b \geq 0$

$$\sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{(9^2)} = 9^{\frac{2}{3}} = (3^2)^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{4}{3}}$$

$$\left. \begin{aligned} \sqrt[3]{3} &= 3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{2}{6}} \\ \sqrt[3]{3} &= 3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{2}{6}} \end{aligned} \right\} \rightarrow \sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{3} = 3^{\frac{2}{6}} \times 3^{\frac{2}{6}} = 3^{\frac{4}{6}}$$

$$\frac{3^{\frac{4}{3}}}{3^{\frac{4}{6}}} = 3^{\frac{4}{6} - \frac{4}{6}} = 3^{\frac{0}{6}} = 3^0 = 1 = \sqrt[3]{3}$$

۹۸ ☆ حاصل عبارت $\left(a^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{4}{3}} \times (b^{-3})^{\frac{2}{3}}$ کدام است؟

$\frac{1}{a^2 b^2}$ (۴)

$\frac{1}{ab}$ (۳)

$a^2 b^2$ (۲)

ab (۱)

پاسخ: گزینه ۴

$$a^{-b} = \frac{1}{a^b} \quad a \geq 0$$

$$\left. \begin{aligned} \left(a^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{4}{3}} &= a^{-\frac{2}{3} \times \frac{4}{3}} = a^{-\frac{8}{9}} \\ (b^{-3})^{\frac{2}{3}} &= b^{-3 \times \frac{2}{3}} = b^{-2} \end{aligned} \right\} \rightarrow a^{-\frac{8}{9}} \times b^{-2} = \frac{1}{a^{\frac{8}{9}}} \times \frac{1}{b^2} = \frac{1}{a^{\frac{8}{9}} b^2}$$

۹۹ ☆ اگر $|a| = a$ و $a \neq 0$, حاصل $\left(\frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[2]{a^3}}\right)^{-\frac{6}{5}}$ کدام است؟

a^2 (۴)

a (۳)

\sqrt{a} (۲)

1 (۱)

پاسخ: گزینه ۳

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$a \geq 0, \frac{m}{n} \notin \mathbb{Z}$

$$\sqrt[3]{3^6} = 3^{\frac{6}{3}} = 3^2$$

$$|a| = a \rightarrow a > 0$$

$$\frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[2]{a^3}} = \frac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{3}{2}}} = a^{\frac{2}{3} - \frac{3}{2}} = a^{\frac{4-9}{6}} = a^{-\frac{5}{6}}$$

$$\left(a^{-\frac{5}{6}}\right)^{-\frac{6}{5}} = a^{-\frac{5}{6} \times -\frac{6}{5}} = a^1 = a$$



محمد گنجی

۱۰۰ ☆ اگر $3 = x^{0.246}$ باشد، حاصل $x^{0.738}$ کدام است؟

۸۱ (۴)

۲۷ (۳)

۹ (۲)

۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

$$x^{0.738} = (x^{0.246})^3 = (3)^3 = 27$$

۱۰۱ ☆ عبارت $\frac{1}{3^{25}}$ با کدام عبارت زیر مساوی است؟

$3^{-0.4n}$ (۴)

$3^{0.4n}$ (۳)

3^{-4n} (۲)

3^{4n} (۱)

پاسخ: گزینه ۴

$$a^{-b} = \frac{1}{a^b}$$

$$\frac{1}{3^{25}} = 3^{-\frac{25}{100}} = 3^{-0.25} = 3^{-0.4n}$$

۱۰۲ ☆ به ازای چه مقادیری از x ، عبارت $\sqrt[6]{-x} = (-x)^{\frac{1}{6}}$ تعریف شده است؟

$x \geq 0$ (۴)

$x \leq 0$ (۳)

$x > 0$ (۲)

$x < 0$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

می دانیم که در زیر رادیکال با فرجه ی زوج، تنها اعداد نامنفی قرار می گیرند تا عبارت معنادار باشد. پس:

$$\sqrt[6]{-x} \Rightarrow -x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0$$

دقت کنید که استفاده از واژه ی مثبت در تعریف بالا نادرست است چرا که صفر هم در زیر رادیکال با فرجه ی زوج قرار می گیرد و معنادار است. پس یا باید بگوییم بزرگتر مساوی صفر یا به اصطلاح بگوییم نامنفی.

همچنین در نوشتن اعداد با توان گویا، پایه حتما باید نامنفی باشد پس: $-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0$

۱۰۳ ☆ حاصل عبارت $\frac{a^2 + 2ab + b^2}{a + b}$ کدام است؟

۱ (۴)

$a^2 - b^2$ (۳)

$a - b$ (۲)

$a + b$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

$$\frac{a^2 + 2ab + b^2}{a + b} = \frac{(a + b)^2}{a + b} = a + b$$

۱۰۴ ☆ اگر $A = \cos^2 15^\circ + \cos^2 25^\circ + \cos^2 35^\circ + \cos^2 45^\circ + \cos^2 55^\circ + \cos^2 65^\circ + \cos^2 75^\circ$ باشد، مقدار عددی $2A$ کدام است؟

۱۱ (۴)

۹ (۳)

۷ (۲)

۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

می دانیم زوایای متمم، سینوس و کسینوس برابر هم دارند.

$$\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$$

اگر طرفین را به توان دو برسانیم نتیجه می شود که $\sin^2 \alpha = \cos^2(90^\circ - \alpha)$ و خواهیم داشت:

$$A = \cos^2 15^\circ + \cos^2 25^\circ + \cos^2 35^\circ + \cos^2 45^\circ + \sin^2 35^\circ + \sin^2 25^\circ + \sin^2 15^\circ =$$

$$\underbrace{\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ}_1 + \underbrace{\sin^2 25^\circ + \cos^2 25^\circ}_1 + \underbrace{\sin^2 35^\circ + \cos^2 35^\circ}_1 + \cos^2 45^\circ =$$

$$1 + 1 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2} \Rightarrow 2A = 7$$

۱۰۵ ☆ حاصل عبارت $\frac{1 + \sin^2 25^\circ + \sin^2 65^\circ}{\cot 35^\circ \cot 55^\circ}$ کدام است؟

۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

$$\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$$

$$\frac{1 + \sin^2 25^\circ + \sin^2 65^\circ}{\cot 35^\circ \cot 55^\circ} = \frac{1 + \sin^2 25^\circ + \cos^2 25^\circ}{\frac{\cos 35^\circ}{\sin 35^\circ} \times \frac{\cos 55^\circ}{\sin 55^\circ}} = \frac{1 + 1}{\frac{\cos 35^\circ}{\sin 35^\circ} \times \frac{\sin 35^\circ}{\cos 35^\circ}} = \frac{2}{1} = 2$$

۱۰۶ ☆ حاصل $\sin^2 30^\circ + \cos 60^\circ - \sin 90^\circ$ کدام است؟

$\frac{-1}{2}$ (۴)

$\frac{-1}{4}$ (۳)

۴ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

$$\begin{aligned} \sin 30^\circ &= \frac{1}{2} \rightarrow \sin^2 30^\circ = \frac{1}{4} \\ \cos 60^\circ &= \frac{1}{2} \\ \sin 90^\circ &= 1 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1 = \frac{1 + 2 - 4}{4} = \frac{-1}{4}$$

۱۰۷ ☆ اگر $x + y = 7$ و $xy = 5$ باشد، $x^3 + y^3$ کدام است؟

۲۶۴ (۴)

۲۴۴ (۳)

۲۳۸ (۲)

۲۱۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

$$(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2$$

$$(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$$

$$7^3 = x^3 + y^3 + 3 \times 5(7)$$

$$7^3 = x^3 + y^3 + 105 \Rightarrow x^3 + y^3 = 238$$

۱۰۸ ☆ حاصل ضرب دو عدد حقیقی ۱ و مجموع آنها ۳ است. مجموع توان‌های سوم آنها کدام است؟

۲۷ (۴)

۲۴ (۳)

۱۸ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

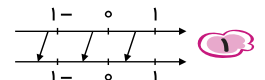
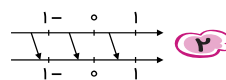
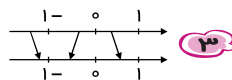
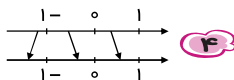
$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$x^3 + y^3 = ? \quad xy = 1 \quad x + y = 3$$

$$(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$$

$$(3)^3 = x^3 + y^3 + 3(1)(3) \Rightarrow 27 = x^3 + y^3 + 9 \Rightarrow x^3 + y^3 = 18$$

۱۰۹ ☆ در کدام گزینه هر یک از اعداد روی محور بالا به درستی به عدد متناظر با ریشه‌ی سوم خود روی محور پایین وصل شده است؟



پاسخ: گزینه ۳

اعداد بازه‌ی $(0, 1)$ و $(-1, 0)$ هر چه به توان بزرگ‌تر برسند به صفر نزدیک‌تر می‌شوند و هر چه ریشه‌ی بزرگ‌تری از آن‌ها گرفته شود، از صفر دورتر می‌شوند. با توجه به نکته‌ی فوق، گزینه‌ی ۳ صحیح است.

۱۱۰ ☆ اگر a عدد طبیعی و بزرگ‌تر از ۱ باشد، کدام یک از گزینه‌های زیر، عبارتی همواره درست است؟

$(\sqrt[n]{a})^n = a$ (۴)

$\sqrt[n]{a+b} = \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$ (۳)

$\sqrt[n]{a^n} = |a|$ (۲)

$\sqrt[n]{a^n} = a$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{a^n} &= |a| : \text{برای هر } n \text{ زوج} \\ \sqrt[n]{a^n} &= a : \text{برای هر } n \text{ فرد} \\ (\sqrt[n]{a})^n &= a : \text{برای هر } n \text{ طبیعی} \end{aligned}$$

با توجه به نکات فوق، گزینه‌ی ۴ همواره صحیح است.

۱۱۱ ★ اگر n عددی صحیح باشد و $n < \sqrt[4]{475} < n + 1$ ، در این صورت n کدام است؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

عدد 475 بین دو عدد توان دار کامل از نوع 4 قرار دارد که عبارتند از:

$$4^4 < 475 < 5^4 \rightarrow 4 < \sqrt[4]{475} < 5$$

$$\Rightarrow n = 4$$

۱۱۲ ★ اگر $\cos x = \frac{1}{10}$ و x در ربع اول باشد، $\sin x$ کدام است؟

$\frac{9\sqrt{11}}{10}$ (۴)

$\frac{1}{10}$ (۳)

$\frac{3\sqrt{11}}{10}$ (۲)

$\frac{9}{10}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100}$$

$$\sin x = \pm \sqrt{\frac{99}{100}} \xrightarrow{\text{ربع اول}} \sin x = \sqrt{\frac{99}{100}} = \frac{3\sqrt{11}}{10}$$

۱۱۳ ★ ساده شده‌ی عبارت $\tan^2 \theta \cos^2 \theta + \cot^2 \theta \sin^2 \theta$ کدام است؟

$\tan^2 \theta$ (۴)

$\cos^2 \theta$ (۳)

$\sin^2 \theta$ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

$$\tan^2 \theta \cos^2 \theta + \cot^2 \theta \sin^2 \theta =$$

$$\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \cos^2 \theta + \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \sin^2 \theta = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

۱۱۴ ★ مساحت مستطیلی ۱ واحد مربع و عرض آن $2 - \sqrt{3}$ است، طول آن چند واحد است؟

$3 - \sqrt{3}$ (۴)

$2 + \sqrt{3}$ (۳)

$4 - \sqrt{3}$ (۲)

$1 + \sqrt{3}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

$$\text{طول مستطیل} = \frac{\text{مساحت مستطیل}}{\text{عرض مستطیل}} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} \times \frac{2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4 - 3} = 2 + \sqrt{3}$$

۱۱۵ ★ حاصل $\frac{1}{\sqrt[4]{5}}$ با کدام گزینه برابر است؟

$\frac{\sqrt[4]{125}}{5}$ (۴)

$5\sqrt[4]{125}$ (۳)

$\sqrt[4]{125}$ (۲)

$\sqrt[4]{625}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

$$\frac{1}{\sqrt[4]{5}} \times \frac{\sqrt[4]{5^3}}{\sqrt[4]{5^3}} = \frac{\sqrt[4]{5^3}}{\sqrt[4]{5^4}} = \frac{\sqrt[4]{125}}{5}$$

۱۱۶ ★ حاصل عبارت $\frac{2}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$ بعد از گویا کردن کدام است؟

$\sqrt{2} - 3$ (۴)

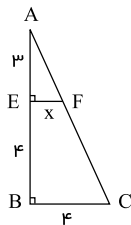
$2 - \sqrt{3}$ (۳)

$\sqrt{2} + \sqrt{3}$ (۲)

$-2\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

$$\frac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{2(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{2-3} = -2\sqrt{2}-2\sqrt{3}$$



۱۱۷ ★ با توجه به اندازه‌های داده شده در شکل، x کدام است؟

۳
۷

۱۲
۷

۱

۳

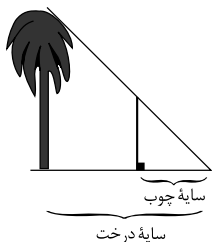
پاسخ: گزینه ۴

دو مثلث AEF و ABC باهم متشابهند و داریم:

$$\frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BC} \Rightarrow \frac{3}{3+4} = \frac{x}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{7} = \frac{x}{4} \Rightarrow x = \frac{4 \times 3}{7} = \frac{12}{7}$$

۱۱۸ ★ برای محاسبه ارتفاع یک درخت، از یک قطعه چوب به طول یک متر که به صورت عمودی موازی درخت قرار دارد استفاده کرده‌ایم، به طوری که سایه‌ی چوب مطابق شکل منطبق بر سایه‌ی درخت است. در صورتی که طول سایه‌ی چوب ۴ متر و طول سایه‌ی درخت ۳۲ متر باشد، ارتفاع درخت چند متر است؟



۱

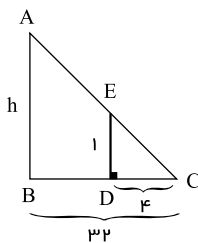
۲

۳

۴

پاسخ: گزینه ۲

به شکل مقابل توجه کنید:



دو مثلث ABC و CDE متشابهند و داریم:

$$\frac{CD}{BC} = \frac{DE}{AB} \Rightarrow \frac{4}{32} = \frac{1}{h} \Rightarrow h = \frac{32}{4} = 8$$

۱۱۹ ★ اگر $\tan x = \frac{3}{4}$ باشد، آنگاه حاصل $A = \frac{4}{\cos x} - \frac{3}{\sin x}$ کدام است؟

۳
۴

۲

۱

پاسخ: گزینه ۱

$$\tan x = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{3}{\sin x} = \frac{4}{\cos x}$$

$$\frac{4}{\cos x} - \frac{3}{\sin x} = 0$$

۱۲۰ ★ حاصل $\frac{\tan \theta}{1 + \tan^2 \theta}$ کدام است؟

- ۱ $\sin \theta$
 ۲ $\cos \theta$
 ۳ $\sin \theta \times \cos \theta$
 ۴ $\sin \theta + \cos \theta$

پاسخ: گزینه ۳

$$\frac{\tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{\tan \theta}{\frac{1}{\cos^2 \theta}} = \tan \theta \times \cos^2 \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \times \cos^2 \theta = \sin \theta \cos \theta$$

۱۲۱ ★ حاصل $(1 - \sin^2 \theta)(1 + \tan^2 \theta)$ کدام است؟

- ۱ صفر
 ۲ ۱
 ۳ $\cos^2 \theta$
 ۴ $\cot^2 \theta$

پاسخ: گزینه ۲

$$(1 - \sin^2 \theta)(1 + \tan^2 \theta) = (\cos^2 \theta) \left(\frac{1}{\cos^2 \theta} \right) = 1$$

۱۲۲ ★ اگر $\tan x = \frac{-1}{2}$ و $\cos x < 0$ ، مقدار $\sin x$ کدام است؟

- ۱ $\frac{\sqrt{2}}{2}$
 ۲ $-\frac{\sqrt{5}}{5}$
 ۳ $-\frac{\sqrt{3}}{3}$
 ۴ $\frac{\sqrt{5}}{5}$

پاسخ: گزینه ۴

$$\tan x = \frac{-1}{2} \rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-1}{2} \rightarrow 2 \sin x = -\cos x$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \rightarrow \sin^2 x + 4 \sin^2 x = 1 \rightarrow 5 \sin^2 x = 1$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{5} \rightarrow \sin^2 x = \pm \frac{1}{\sqrt{5}} = \pm \frac{\sqrt{5}}{5} \rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$* : \tan x < 0 \rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} < 0 \xrightarrow{\cos x < 0} \sin x > 0$$

۱۲۳ ★ با فرض $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ، حاصل عبارت $\sin^4 \theta - \cos^4 \theta + \frac{1}{1 + \tan^2 \theta}$ کدام است؟

- ۱ $\frac{1}{3}$
 ۲ $\frac{4}{9}$
 ۳ $\frac{1}{2}$
 ۴ $\frac{2}{3}$

پاسخ: گزینه ۴

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \rightarrow \sin^2 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

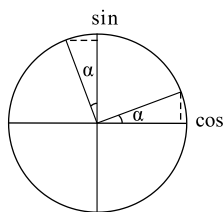
$$\sin^4 \theta - \cos^4 \theta + \frac{1}{1 + \tan^2 \theta} = \sin^4 \theta - \cos^4 \theta + \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 \theta}}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right)^4 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right)^4 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2 = \frac{4}{9} - \frac{9}{81} + \frac{1}{3} = \frac{4}{9} - \frac{1}{9} + \frac{1}{3} = \frac{4-1+3}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

۱۲۴ ★ مقدار $\cos 2^\circ$ برابر است با:

- ۱ $\sin 1^\circ$
 ۲ $\cos 1^\circ$
 ۳ $\sin 2^\circ$
 ۴ $\cos 2^\circ$

پاسخ: گزینه ۱
طبق دایره مثلثاتی داریم:



$$\cos \alpha = \sin(90^\circ + \alpha)$$

$$\cos 2^\circ = \sin 11^\circ$$

۱۲۵ ☆ اگر $0 < a < 1$ باشد، ریشه‌ی پنجم a از ریشه‌ی ششم a است و اگر $a > 1$ باشد، ریشه‌ی چهارم a از ریشه‌ی پنجم a است.

- ۱) بزرگ‌تر - بزرگ‌تر ۲) بزرگ‌تر - کوچک‌تر ۳) کوچک‌تر - بزرگ‌تر ۴) کوچک‌تر - کوچک‌تر

پاسخ: گزینه ۳

اعداد بازه‌ی $(0, 1)$ ، هر چه به توان بزرگتری برسند کوچکتر می‌شوند و هر چه از آنها ریشه‌ی بیشتری بگیریم، بزرگتر می‌شوند، این امر برای اعداد بزرگتر از ۱ برعکس است.

$$0 < a < 1 \rightarrow \sqrt[5]{a} < \sqrt[6]{a}$$

$$1 < a \rightarrow \sqrt[5]{a} > \sqrt[6]{a}$$

۱۲۶ ☆ در حل معادله‌ی $2x^2 + 3x - 5 = 0$ به روش مربع کامل به تساوی $(x + a)^2 = k$ می‌رسیم. مقدار $a + k$ کدام است؟

۱) $\frac{61}{16}$

۲) $\frac{52}{16}$

۳) $\frac{49}{16}$

۴) $\frac{73}{16}$

پاسخ: گزینه ۱

برای مربع کامل کردن، مربع نصف ضریب x را به طرفین معادله اضافه می‌کنیم.

$$2x^2 + 3x - 5 = 0 \xrightarrow{\div 2} x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{5}{2} = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{3}{2}x = \frac{5}{2}$$

$$\xrightarrow{+\left(\frac{3}{4}\right)^2} x^2 + \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{5}{2} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \Rightarrow \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{5}{2} + \frac{9}{16}$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{40+9}{16} \Rightarrow \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{49}{16} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{4} \\ k = \frac{49}{16} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a + k = \frac{3}{4} + \frac{49}{16} = \frac{12+49}{16} = \frac{61}{16}$$

۱۲۷ ☆ اگر m و n دو عدد صحیح متوالی باشند که در رابطه‌ی $n < \sqrt[4]{25} < m$ صدق کنند، آنگاه $m^2 - n^2$ کدام است؟

۱) ۵

۲) ۴

۳) -۵

۴) -۴

پاسخ: گزینه ۳

نزدیکترین اعداد توان چهار کامل به عدد $\sqrt[4]{25}$ ، ۲۵، ۸۱ و ۱۶ هستند:

$$16 < 25 < 81 \Rightarrow 2^4 < 25 < 3^4 \xrightarrow{\sqrt[4]{\quad}} 2 < \sqrt[4]{25} < 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = 3 \\ n = 2 \end{cases} \Rightarrow m^2 - n^2 = 9 - 4 = 5$$

۱۲۸ ☆ کدام یک از معادلات زیر جواب حقیقی ندارند؟

۱) $x^2 - 3x + 1 = 0$

۲) $3x^2 - 7x + 2 = 0$

۳) $-2x^2 - 3x + 4 = 0$

۴) $x^2 + 3x + 10 = 0$

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ: می‌دانیم وقتی $\Delta < 0$ باشد معادله جواب حقیقی نخواهد داشت.

۱) $\Delta = 9 - 4(1)(1) = 9 - 4 = 5 > 0$ دو جواب

۲) $\Delta = 49 - 4(3)(2) = 49 - 24 = 25 > 0$ دو جواب

۳) $\Delta = 9 - 4(-2)(4) = 9 + 32 = 41 > 0$ دو جواب

۴) $\Delta = 9 - 4(1)(10) = 9 - 40 = -31 < 0$ جواب ندارد

۱۲۹* کدام یک از معادله‌های زیر ریشه مضاعف دارد؟

۱) $4x^2 - 12x + 9 = 0$ ۲) $3x^2 + 4x - 2 = 0$ ۳) $x^2 - 2x + 3 = 0$ ۴) $x^2 + 3x - 2 = 0$

پاسخ: گزینه ۱

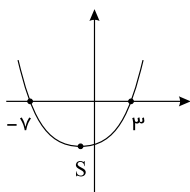
پاسخ: وقتی $\Delta = 0$ شود معادله ریشه مضاعف خواهد داشت.

۱) $\Delta = 144 - 4(4)(9) = 144 - 144 = 0 \rightarrow$ ریشه مضاعف: $(2x - 3)^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

۲) $\Delta = 16 - 4(3)(-2) = 16 + 24 = 40 > 0$ دو جواب

۳) $\Delta = 4 - 4(1)(3) = 4 - 12 = -8 < 0$ جواب ندارد

۴) $\Delta = 9 - 4(1)(-2) = 9 + 8 = 17 > 0$ دو جواب



۱۳۰* معادله‌ی خط تقارن سهمی روبرو کدام است؟

۱) $x = -2$ ۲) $x = 3$
۳) $x = -5$ ۴) $x = \frac{3}{7}$

پاسخ: گزینه ۱

می‌دانیم سهمی متقارن است و طول رأس سهمی در وسط ریشه‌ها قرار دارد و محور تقارن نیز از رأس می‌گذرد:

$S = (x, y) \Rightarrow x = \frac{-7 + 3}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \Rightarrow x = -2$

۱۳۱* اگر شکل روبرو نمایشی از سهمی $y = 2x^2 + bx + c$ باشد، حاصل $b + c$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۱۲
۳) ۱۶ ۴) ۲۰

پاسخ: گزینه ۳

باتوجه به نقطه‌ی رأس و $(0, 4)$ داریم:

$y = 2x^2 + bx + c \xrightarrow{(0,4)} 4 = 0 + 0 + c \Rightarrow c = 4$
طول رأس: $\frac{-b}{2a} = \frac{-b}{4} = -3 \Rightarrow -b = -12 \Rightarrow b = 12 \Rightarrow b + c = 16$

۱۳۲* اگر $(0, 2)$ و $(2, 0)$ دو نقطه از سهمی $y = ax^2 + bx + c$ باشد، عرض نقطه $(1, y)$ کدام است؟

۱) $1 - a$ ۲) $1 - b$ ۳) $1 - c$ ۴) صفر

پاسخ: گزینه ۱

$y = ax^2 + bx + c \begin{cases} \xrightarrow{(0,2)} 2 = 0 + 0 + c \Rightarrow c = 2 \\ \xrightarrow{(2,0)} 0 = 4a + 2b + 2 \Rightarrow 2(2a + b + 1) = 0 \Rightarrow 2a + b + 1 = 0 \\ \xrightarrow{(1,y)} y = a + b + 2 \xrightarrow{+a} y + a = 2a + b + 2 = 2a + b + 1 + 1 \Rightarrow y + a = 1 \Rightarrow y = 1 - a \end{cases}$

۱۳۳* اگر $1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2} = 0$ باشد، آنگاه مقدار $\frac{2}{x}$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) -۲

پاسخ: گزینه ۲

$1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2} = 0 \Rightarrow 1^2 - 2 \times \frac{2}{x} + \left(\frac{2}{x}\right)^2 = 0 \Rightarrow \left(1 - \frac{2}{x}\right)^2 = 0 \Rightarrow 1 - \frac{2}{x} = 0 \Rightarrow \frac{2}{x} = 1$



محمد گنجی

۱۳۴* مجموعه جواب نامعادله $-1 \leq 3x - 2 \leq 1$ کدام است؟

$-2 \leq x \leq 1$ (۴)

$-1 \leq x \leq \frac{1}{3}$ (۳)

$-1 \leq x \leq 1$ (۲)

$\frac{1}{3} \leq x \leq 1$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

$$-1 \leq 3x - 2 \leq 1 \xrightarrow{+2} 1 \leq 3x \leq 3 \xrightarrow{\div 3} \frac{1}{3} \leq x \leq 1$$

۱۳۵* تعداد اعداد اول موجود در مجموعه جواب نامعادله $3 - \frac{x}{2} > 1$ کدام است؟

بی‌شمار (۴)

۱ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

$$3 - \frac{x}{2} > 1 \Rightarrow 2 > \frac{x}{2} \Rightarrow x < 4$$

فقط دو عدد اول ۲ و ۳ از ۴ کوچکترند.

۱۳۶* مجموعه جواب نامعادله $3x - 3 < 2x - 2 < x - 1$ کدام است؟

$x > 1$ (۴)

$x < 1$ (۳)

$x \leq 1$ (۲)

$x \geq 1$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

$$3x - 3 < 2x - 2 < x - 1 \Rightarrow \begin{cases} 3x - 3 < 2x - 2 \Rightarrow x < 1 \\ 2x - 2 < x - 1 \Rightarrow x < 1 \end{cases} \Rightarrow x < 1$$

۱۳۷* مجموع ضرایب معادله $ax^2 + bx + c = 0$ درجه دومی صفر است؛ یکی از جواب‌های معادله کدام است؟

۱ (۴)

$\frac{1}{2}$ (۳)

صفر (۲)

-۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

اگر مجموع ضرایب یک عبارت درجه دوم برابر با صفر باشند، یکی از ریشه‌ها $x = 1$ است.

$ax^2 + bx + c = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} x = 1$ یکی از ریشه‌ها!

۱۳۸* در معادله $x^2 + bx + c = 0$ درجه دوم با شرط $b = c + 1$ یکی از ریشه‌های آن کدام است؟

c (۴)

$\frac{b}{2}$ (۳)

$2b - 1$ (۲)

-c (۱)

پاسخ: گزینه ۱

$$x^2 + bx + c = 0 \xrightarrow{b=c+1} x^2 + (c+1)x + c = 0 \xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}} (x+1)(x+c) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+1=0 \Rightarrow x=-1 \\ x+c=0 \Rightarrow x=-c \end{cases}$$

۱۳۹* عددی مثبتی با ۳ جمع شده و حاصل آن نصف شده و به توان ۲ رسیده است. اگر جواب ۴ شده باشد، آن عدد کدام است؟

۷ (۴)

۵ (۳)

۱ (۲)

۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

$$\left(\frac{x+3}{2}\right)^2 = 4 \xrightarrow{\sqrt{\quad}} \frac{x+3}{2} = \pm\sqrt{4} \Rightarrow \frac{x+3}{2} = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{x+3}{2} = 2 \Rightarrow x=1 \\ \frac{x+3}{2} = -2 \Rightarrow x=-7 \text{ غنق } (-7 < 0) \end{cases}$$

۱۴۰* جواب‌های معادله $x^2 + 6x + 4 = -3x^2 + 6x + 5$ کدام‌اند؟

$\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ (۴)

$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ (۳)

$1, \frac{-1}{2}$ (۲)

$-1, \frac{1}{2}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

$$x^2 + 6x + 4 = -3x^2 + 6x + 5 \Rightarrow 4x^2 = 5 - 4 \Rightarrow 4x^2 = 1$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{4}} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{2}$$

۱۴۱ ★ در معادله $x(6x + 5) = 4$ کوچکترین جواب کدام است؟

$\frac{-4}{3}$ ۴

$\frac{-1}{6}$ ۳

$\frac{-1}{2}$ ۲

$\frac{1}{2}$ ۱

پاسخ: گزینه ۴

$$x(6x + 5) = 4 \Rightarrow 6x^2 + 5x = 4 \Rightarrow 6x^2 + 5x - 4 = 0 \xrightarrow{x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}}$$

$$x_1, x_2 = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - (4 \times 6 \times -4)}}{2 \times 6} = \frac{-5 \pm \sqrt{121}}{12} = \frac{-5 \pm 11}{12}$$

جواب کوچک: $\frac{-5 - 11}{12} = \frac{-16}{12} = -\frac{4}{3}$

۱۴۲ ★ به ازای کدام یک از مقادیر حقیقی a ، معادله $x^2 + ax + 1 = 0$ ریشه‌ی مضاعف دارد؟

$-2 < a < 2$ ۴

$a \leq -2$ یا $a \geq 2$ ۳

$a < -2$ یا $a > 2$ ۲

$a = -2$ یا $a = 2$ ۱

پاسخ: گزینه ۱

برای داشتن ریشه‌ی مضاعف باید $\Delta = 0$ باشد، بنابراین:

$$x^2 + ax + 1 = 0$$

$$\Delta = 0 \rightarrow b^2 - 4ac = 0 \rightarrow a^2 - (4 \times 1 \times 1) = 0 \Rightarrow a^2 - 4 = 0 \Rightarrow (a - 2)(a + 2) = 0$$

$$\begin{cases} a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2 \\ a + 2 = 0 \Rightarrow a = -2 \end{cases} \Rightarrow a = 2 \text{ یا } a = -2$$

۱۴۳ ★ کدام یک از گزینه‌ها، نشانگر یک مجموعه‌ی نامتناهی است؟

مجموعه‌ی اعداد اول دورقمی ۴

بازه‌ی $(1, 2)$ ۳

$\{N\}$ ۲

\emptyset ۱

پاسخ: گزینه ۳

گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) \emptyset = متناهی \Rightarrow مجموعه‌ی بدون عضو

۲) $\{N\} = N$ شامل حرف N = متناهی \Rightarrow مجموعه‌ی تک عضوی شامل حرف N

۳) $(1, 2)$ نامتناهی \Rightarrow بازه‌ای شامل بی‌شمار نقطه

۴) متناهی \Rightarrow مجموعه‌ای با تعداد اعضای مشخص = مجموعه اعداد اول دو رقمی

۱۴۴ ★ خط $3y - \sqrt{3}x = 5$ با جهت مثبت محور افقی چه زاویه‌ای می‌سازد؟

90° ۴

60° ۳

45° ۲

30° ۱

پاسخ: گزینه ۱

شیب هر خط برابر است با تانژانت زاویه‌ای که آن خط با جهت مثبت محور x می‌سازد.

$$3y = \sqrt{3}x + 5 \Rightarrow y = \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{3}}_{\text{شیب}} x + \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow \tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

۱۴۵* در مقایسه‌ی دو عدد $\sqrt[3]{0,125}$ و $\sqrt{0,25}$ ، کدام یک از گزینه‌های زیر درست است؟

$\sqrt{0,25} < \sqrt[3]{0,125}$ (۲)

$\sqrt{0,25} > \sqrt[3]{0,125}$ (۱)

(۴) نمی‌توان مشخص کرد کدام بزرگ‌تر است.

$\sqrt{0,25} = \sqrt[3]{0,125}$ (۳)

پاسخ: گزینه ۳

$$\sqrt{0,25} = \sqrt{\frac{25}{100}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt[3]{0,125} = \sqrt[3]{\frac{125}{1000}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

⇒ با هم برابرند

۱۴۶* اگر معادله‌ی درجه دوم $9x^2 - 12x + c = 0$ تنها یک ریشه‌ی مضاعف داشته باشد، مقدار این ریشه کدام است؟

$\frac{4}{3}$ (۴)

$-\frac{4}{3}$ (۳)

$\frac{2}{3}$ (۲)

$-\frac{2}{3}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

هر معادله‌ی درجه دو با شرط $\Delta = 0$ یک ریشه‌ی مضاعف دارد که مقدار آن برابر با $-\frac{b}{2a}$ است.

راه اول:

$$9x^2 - 12x + c = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 12^2 - 4 \times 9 \times c = 0$$

$$\Rightarrow 144 - 36c = 0 \Rightarrow 36c = 144 \Rightarrow c = \frac{144}{36} = 4$$

$$\text{معادله: } 9x^2 - 12x + 4 = 0 \Rightarrow (3x - 2)^2 = 0 \Rightarrow 3x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

راه دوم:

$$\text{ریشه‌ی مضاعف} = -\frac{b}{2a} = -\frac{-12}{2 \times 9} = \frac{2}{3}$$

دقت: در روش دوم نیازی به محاسبه‌ی c نیست.

۱۴۷* اگر R مجموعه‌ی مرجع، $A = \{-1, 6\}$ ، $B' = (-1, 6)$ و $C = (-\infty, 7)$ باشد، آنگاه بزرگ‌ترین عدد صحیح عضو مجموعه‌ی

$(B \cap C) - A$ کدام است؟

۵ (۴)

۶ (۳)

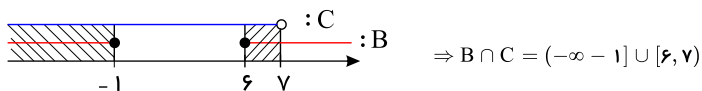
-۲ (۲)

-۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

$$B = (-1, 6) \Rightarrow B = R - B' = R - (-1, 6) = (-\infty, -1] \cup [6, +\infty)$$

$B \cap C$ را به صورت زیر بدست می‌آوریم:



$$(B \cap C) - \{-1, 6\} = \underbrace{(-\infty, -1)}_{\text{بزرگترین عدد صحیح این بازه -۲ است}} \cup \underbrace{(6, 7)}_{\text{فقط عدد صحیح است}}$$

۱۴۸* اگر $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ مجموعه مرجع، $A = \{1, 2, 4\}$ ، $B = \{1, 3\}$ و $C = \{1\}$ باشند، $A' \cup B'$ کدام است؟

$(A - C)'$ (۴)

$(B - C)'$ (۳)

$A' \cap C$ (۲)

C' (۱)

پاسخ: گزینه ۱

$$\left. \begin{aligned} A' &= \{3, 5\} \\ B' &= \{2, 4, 5\} \end{aligned} \right\} \Rightarrow A' \cup B' = \{2, 3, 4, 5\} = C'$$

۱۴۹* در دنباله‌ی هندسی ...، ۶۴، ۳۲، ... کدام جمله برابر 16^{-1} است؟

دوازدهم (۴)

یازدهم (۳)

دهم (۲)

نهم (۱)

پاسخ: گزینه ۳

$$a_1 = 64$$

$$q = \frac{a_r}{a_1} = \frac{32}{64} = \frac{1}{2}$$

$$a_n = a_1 q^{n-1} \Rightarrow 16^{-1} = 64 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow (2^4)^{-1} = 2^6 \times 2^{-(n-1)}$$

$$\Rightarrow 2^{-4} = 2^6 \times 2^{-n+1} \Rightarrow 2^{-4} = 2^{6-n+1} \Rightarrow 2^{-4} = 2^{7-n}$$

$$\Rightarrow -4 = 7 - n \Rightarrow n = 7 + 4 = 11$$

۱۵. حدود x کدام می‌تواند باشد تا $\sin x \cdot \cos x < 0$ باشد؟

$90^\circ < x < 180^\circ$ یا $270^\circ < x < 360^\circ$ ۲

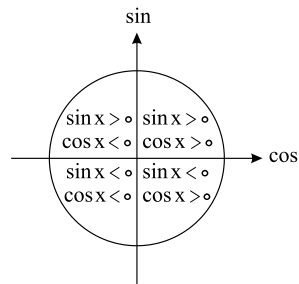
$180^\circ < x < 360^\circ$ ۱

$90^\circ < x < 270^\circ$ ۴

$0^\circ < x < 90^\circ$ یا $180^\circ < x < 270^\circ$ ۳

پاسخ: گزینه ۲

$\sin x \cos x < 0 \Rightarrow$ در ربع دوم یا چهارم واقع است $\Rightarrow \sin x, \cos x$ مختلف علامت اند \Rightarrow



پاسخنامه تشریحی

☆ ۱ گزینه ۳

یادآوری: عضو تکراری یک مجموعه را، بیش از یک بار نمی‌نویسیم:

$$\{1, 1, 1, 2, 3, 3, 3\} = \{1, 2, 3\}$$

اگر $x + 2 = 1$ ، $2y - 5 = 1$ هر دو برابر با ۱ باشند، مجموعه‌ی ۲ عضو $\{x + 2, 2y - 5\}$ به یک مجموعه‌ی تک عضوی با تنها عضو ۱ مبدل می‌شود. بنابراین:

$$\begin{cases} x + 2 = 1 \Rightarrow x = 1 - 2 = -1 \\ 2y - 5 = 1 \Rightarrow 2y = 1 + 5 = 6 \Rightarrow y = \frac{6}{2} = 3 \Rightarrow x + y = -1 + 3 = 2 \end{cases}$$

☆ ۲ گزینه ۱

مجموعه‌ی اعداد طبیعی، زیرمجموعه‌ای از اعداد صحیح و مجموعه‌ی اعداد صحیح زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی است.

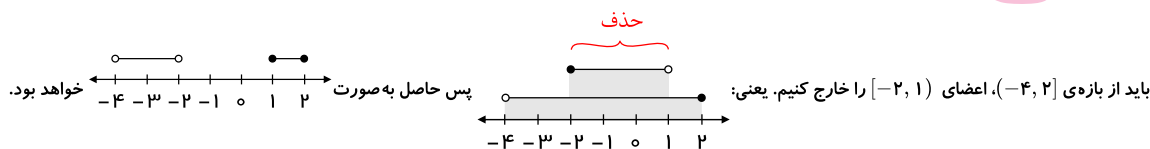
☆ ۳ گزینه ۲

هرگاه در تعریف یک مجموعه، دقیقاً اشاره نشد که x ها باید از کدام مجموعه انتخاب شوند، مجموعه اعداد حقیقی در نظر گرفته می‌شود.

☆ ۴ گزینه ۲

از آن‌جا که x عددی طبیعی است و از طرفی بین ۲، -2 واقع است، پس $x = 1$ است و مجموعه‌ی A فقط شامل عضو $2 = \frac{1+5}{2+1}$ خواهد بود. یعنی: $A = \{2\}$

☆ ۵ گزینه ۳

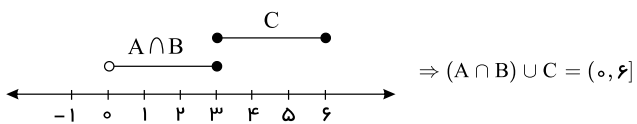
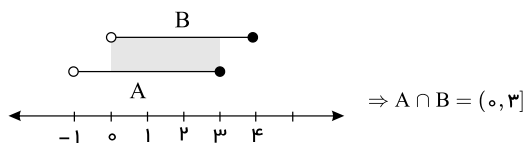


دقت: عضو $x = -2$ از بازه‌ی x فوق خارج شده و جای خالی آن باقی می‌ماند (توخالی).

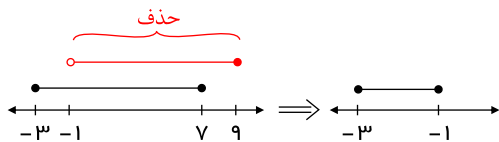
عضو $x = 1$ از بازه خارج نمی‌شود، $x = 1$ نقطه‌ای توپر است.

☆ ۶ گزینه ۴

بهترین روش برای حل این تیپ سوالات آن است که از نمودار استفاده کنیم:



☆ ۷ گزینه ۲



☆ ۸ گزینه ۴

هر دایره بی‌شمار قطر دارد، بنابراین مجموعه قطره‌های یک دایره متناهی نیست. تعداد اعضای سایر مجموعه‌های فوق برابر با یک عدد حسابی است و متناهی هستند.

دقت: بزرگ بودن یک عدد به معنای نامتناهی بودن آن نیست.

☆ ۹ گزینه ۳

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B' = \{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

گزینه ۲ ☆ ۱۰

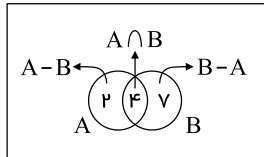
$$B - A = B \cap A'$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

$$(B - A)' = (B \cap A')' = B' \cup A = A \cup B'$$

گزینه ۳ ☆ ۱۱

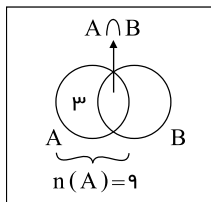
با توجه به نمودار ون:



$$\rightarrow n(A \cup B) = 2 + 4 + 7 = 13$$

گزینه ۳ ☆ ۱۲

با توجه به نمودار ون:



$$\rightarrow n(A \cap B) = 9 - 3 = 6$$

گزینه ۳ ☆ ۱۳

روش اول: دو جمله‌ی دلخواه از این الگو را می‌یابیم و فاصله آن‌ها را تعیین می‌کنیم:

$$\left. \begin{aligned} t_1 &= 2 \times 1 + 5 = 7 \\ t_7 &= 2 \times 7 + 5 = 19 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{فاصله} = 19 - 7 = 12$$

روش دوم: در جمله‌ی عمومی یک الگوی خطی، ضریب n برابر با مقداری است که باید با هر جمله جمع شود تا جمله‌ی بعدی به دست آید:

$$t_n = 2n + 5 \Rightarrow \text{ضریب } n = \text{فاصله‌ی دو جمله‌ی متوالی} = 2$$

گزینه ۱ ☆ ۱۴

$$t_n = an + b \text{ : جمله‌ی عمومی دنباله‌ی خطی}$$

$$t_n = an + b \Rightarrow \begin{cases} t_1 = a \times 1 + b = 2 \Rightarrow a + b = 2 \\ t_7 = a \times 7 + b = -7 \Rightarrow 7a + b = -7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a - b = -2 \\ 7a + b = -7 \end{cases}$$

$$3a = -9 \Rightarrow a = -3$$

$$a + b = 2 \xrightarrow{a=-3} -3 + b = 2 \Rightarrow b = 2 + 3 = 5 \Rightarrow t_n = -3n + 5$$

$$t_{22} = -3 \times 22 + 5 = -66 + 5 = -61$$

گزینه ۱ ☆ ۱۵

$$t_n = an + b \text{ : الگوی خطی}$$

$$t_n = an + b \Rightarrow \begin{cases} a_7 = a \times 7 + b = 2 \Rightarrow 7a + b = 2 \\ a_9 = a \times 9 + b = 26 \Rightarrow 9a + b = 26 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a - b = -2 \\ 9a + b = 26 \end{cases} \Rightarrow 6a = 24 \Rightarrow a = 4$$

$$7a + b = 2 \xrightarrow{a=4} 3 \times 7 + b = 2 \Rightarrow b = 2 - 21 = -19 \Rightarrow t_n = 4n - 19$$

گزینه ۲ ☆ ۱۶

شکل اول سه گلوله‌ی توپر دارد و در هر مرحله، یکی به تعداد گلوله‌ها افزوده می‌شود. پس یک الگوی خطی داریم به صورت

$$t_n = an + b$$

$$t_1 = 3 \Rightarrow a \times 1 + b = 3 \Rightarrow a + b = 3 \Rightarrow \begin{cases} -a - b = -3 \\ 2a + b = 4 \end{cases} \Rightarrow a = 1$$

$$a + b = 3 \xrightarrow{a=1} 1 + b = 3 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow t_n = 1 \times n + 2 \Rightarrow t_n = n + 2$$

تعداد گلوله‌ها در شکل nام: $t_n = n + 2$

تعداد گلوله‌ها در شکل چهاردهم $t_{14} = 14 + 2 = 16$

☆ ۱۷ گزینه ۳

جملات الگو را با استفاده از گزینه‌های سؤال، تشکیل می‌دهیم. فقط گزینه ی ۳ می‌تواند اعداد مورد نظر را تولید کند:

$$\begin{aligned} t_1 &= 1^2 + 2 \times 1 = 3 & t_3 &= 3^2 + 2 \times 3 = 15 \\ t_2 &= 2^2 + 2 \times 2 = 8 & t_4 &= 4^2 + 2 \times 4 = 24 \end{aligned}$$

☆ ۱۸ گزینه ۳

$$t_n = 2 \Rightarrow \frac{2n^2 + 5n + 2}{n^2 + 16} = 2 \Rightarrow 2n^2 + 5n + 2 = 2n^2 + 32$$

$$\Rightarrow 5n = 32 - 2 = 30 \Rightarrow n = \frac{30}{5} = 6$$

روش دیگر آن است که گزینه‌ها را آزمایش کنیم و t_4, t_5, t_6, t_7 را به دست آوریم.

☆ ۱۹ گزینه ۴

جمله‌ی اول ۱۱- است و قدر نسبت دنباله برابر با اختلاف دو جمله‌ی متوالی یعنی ۵+ است:

$$t_n = t_1 + (n-1)d = -11 + (n-1) \times 5 = -11 + 5n - 5 \Rightarrow a_n = 5n - 16$$

$$t_n = 5n + b$$

راه دوم: جمله‌ی عمومی یک دنباله‌ی حسابی به صورت $t_n = an - b$ است که در آن a برابر با قدر نسبت دنباله است. بنابراین:

برای یافتن b ، جمله‌ی اول را در t_n قرار می‌دهیم:

$$t_1 = 5 \times 1 + b = -11 \Rightarrow b = -11 - 5 = -16 \Rightarrow t_n = 5n - 16$$

☆ ۲۰ گزینه ۱

جمله‌ی اول دنباله‌ی ۲ است و قدر نسبت برابر است با $-4 = -2 - 2 = d$ (اختلاف دو جمله متوالی) بنابراین:

$$t_n = t_1 + (n-1)d = 2 + (n-1)(-4) = 2 - 4n + 4 \Rightarrow t_n = 6 - 4n$$

☆ ۲۱ گزینه ۴

$$t_n = a_1 + (n-1)d \quad \text{جمله‌ی عمومی دنباله‌ی حسابی}$$

$$\begin{aligned} a_{20} - a_{15} &= 10 \Rightarrow (a_1 + 19d) - (a_1 + 14d) = 10 \\ &= 5d = 10 \Rightarrow d = 2 \end{aligned}$$

حال $a_{22} - a_{23}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$a_{21} - a_{22} = (a_1 + 20d) - (a_1 + 21d) = a_1 + 20d - a_1 - 21d = -d = -2 = 18$$

☆ ۲۲ گزینه ۴

$t_{n+1} = \frac{1}{2}t_n$ نشان می‌دهد که هر جمله از ضرب شدن $\frac{1}{2}$ در جمله‌ی قبل از آن به دست آمده و این یعنی یک دنباله‌ی هندسی با قدر نسبت $\frac{1}{2}$. از طرفی جمله‌ی اول برابر ۳ است. پس:

$$t_n = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow t_n = 3 \times \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{3}{2^{n-1}}$$

☆ ۲۳ گزینه ۴

مجموعه‌ی A شامل اعضای است که هم طبیعی هستند و هم مجذور آنها از ۱۰۰ کوچکتر است؛ پس $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ عبارتست از:

اگر N را مرجع بدانیم، A' برابر است با مجموعه‌ای شامل اعضای N که در A نیستند؛ یعنی: $A' = \{10, 11, 12, \dots\} = \{x \in N \mid x > 9\}$

دقت: $x > 9$ در مجموعه اعداد طبیعی، یعنی اعداد طبیعی پس از ۹، یعنی از ۱۰ به بعد (و خود ۱۰)

☆ ۲۴ گزینه ۲

$$A \cup B = \{-2, 1, 7\} \cup \{-1, 1, 2, 4, 7\} = \{-2, -1, 1, 2, 4, 7\}$$

$$U = \{-2, -1, 1, 2, 4, 7\} \quad \text{مرجع: فرض مسئله}$$

$$\Rightarrow \text{متمم} = (A \cup B)' = \{ \}$$

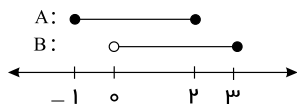
$$(A \cup B)' \cap C = \text{تهی} \cap C = \text{تهی} = \{ \}$$

دقت: مجموعه تهی، مجموعه‌ای بدون عضو است، بنابراین اشتراک آن با هر مجموعه‌ی دیگر، تهی است.

☆ ۲۵ گزینه ۳

گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

- ۱) $R \cap Z = Z \Rightarrow$ نادرست Q زیر مجموعه Z نیست
 ۲) $Z \cup Q = Q \Rightarrow$ نادرست Q زیر مجموعه Z نیست
 ۳) $Q \cap W = W \Rightarrow$ درست W زیر مجموعه Z است.
 ۴) $R \cap Q = Q \Rightarrow$ نادرست Q زیر مجموعه Q' نیست.



- ۱) $A \cup B = [-1, 3]$
 ۲) $B - A = (2, 3]$
 ۳) $B \cap A = (0, 2]$
 ۴) $A - B = [-1, 0]$

☆ ۲۶ گزینه ۳

دو مجموعه را روی محور نمایش می‌دهیم:
 پس اشتراک آن دو عبارتست از $(-1, 2)$ و این بازه شامل اعداد صحیح ۰ و ۱ است.

☆ ۲۷ گزینه ۲

بازه‌ها را روی محور نمایش می‌دهیم و گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

☆ ۲۸ گزینه ۳

- ۱) تنها عدد اول زوج ۲ است. پس مجموعه اعداد اول زوج تک عضوی و منتهای است.
 ۲) تعداد گره‌های روی کره زمین عدد حسابی است (هر چند که ما آن را ندانیم). پس مجموعه گره‌ها منتهای است.
 ۳) از هر نقطه بیشمار خط راست می‌گذرد. پس مجموعه خطوط گذرنده از مبدأ مختصات نامنتهای است.
 ۴) مجموعه اعداد طبیعی سه رقمی مضرب ۴ عبارتست از $\{100, 104, 108, \dots, 996\}$; پس منتهای است.

☆ ۲۹ گزینه ۱

در هر دنباله هندسی، قدرنسبت برابر است با خارج قسمت دو جمله‌ی متوالی (بعدي فعلی)

$$t_1 = \frac{2}{5^1} = \frac{2}{5} \quad t_2 = \frac{2}{5^2} = \frac{2}{25}$$

$$r = \frac{t_2}{t_1} = \frac{\frac{2}{25}}{\frac{2}{5}} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{t_1 t_2}{t_2^2} = \frac{t_1 \times t_1 r^2}{(t_1 r)^2} = \frac{t_1^2 \times r^2}{t_1^2 \times r^2} = r^2 \stackrel{r=1/5}{=} \frac{1}{25} = 16$$

☆ ۳۰ گزینه ۲

☆ ۳۱ گزینه ۴

می‌دانیم که: $N \subseteq W \subseteq Q \subseteq R$
 اگر آن‌ها را با $A \subseteq C \subseteq B$ مقایسه کنیم، نتیجه می‌شود که:

$$B = N, D = W, A = Q, C = R$$

بررسی گزینه‌ها:

- ۱) $C - D = R - W$ (نامنتهای)
 ۲) $A - D = Q - W$ (نامنتهای)
 ۳) $C - A = R - Q = Q'$ (نامنتهای)
 ۴) $D - B = W - N = \{0\}$ (مناهای)

☆ ۳۲ گزینه ۴

در مورد الگوی خطی دو چیز می‌دانیم:
 ۱- جمله عمومی آن به صورت $t_n = an + b$ است.
 ۲- اختلاف دو جمله‌ی متوالی آن، عددی ثابت است.
 حال تعداد جملات هریک از گزینه‌ها را می‌نویسیم و اختلاف جملات متوالی آن‌ها را به دست می‌آوریم:

$$+7 +9$$

1) 5, 12, 21, ... غیر خطی

$$+5 +9$$

3) 1, 6, 15, ... غیر خطی

$$+4 +8$$

2) 1, 5, 13, ... غیر خطی

$$+4 +4$$

4) 4, 8, 12, ... خطی

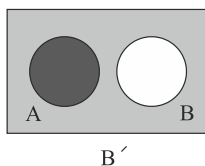
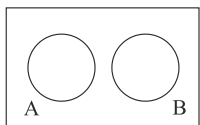
گزینه ۴ ☆ ۳۳

A را برابر با مجموعه‌ی مدال‌آوران یک ضرب و B را به عنوان مجموعه‌ی مدال‌آوران دو ضرب در نظر می‌گیریم. طبق گفته مسئله $n(A) = n(B) = 8$ است. داریم:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

همه مدال‌آوران هر دو نقطه

$$\Rightarrow 12 = 8 + 8 - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 8 + 8 - 12 = 4$$



گزینه ۴ ☆ ۳۴

دو مجموعه جدا از هم A و B را روی نمودار ون ببینید.

حال مراحل زیر را طی می‌کنیم:

$$\Rightarrow A \cup B' = B'$$

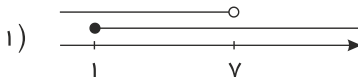
و در نتیجه:

$$(A \cup B') \cup B = B' \cup B = \emptyset$$

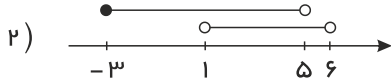
گزینه ۲ ☆ ۳۵

حاصل هر گزینه را به کمک محور بدست می‌آوریم:

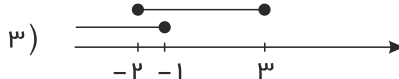
$$[1, 7] = \text{اشتراک دو بازه}$$



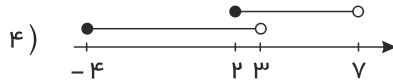
$$[-3, 5] - (1, 6) = [-3, 1]$$



$$(-\infty, 3] = \text{اجتماع دو بازه}$$



$$[-4, 3] - [2, 7] = [-4, 2)$$



گزینه ۴ ☆ ۳۶

بررسی گزینه‌ها:

$$1) \left[W' \cup \underbrace{(N - W)}_{\emptyset} \right]' = [W']' = W = A \text{ (صحیح)}$$

$$2) \left[\underbrace{R'}_{\emptyset} \cup \underbrace{(W - Q)}_{\emptyset} \right]' = [\emptyset]' = R = A \text{ (صحیح)}$$

$$3) \left[Q' \cup \underbrace{(W - Z)}_{\emptyset} \right]' = [Q']' = Q = A \text{ (صحیح)}$$

$$4) \left[Q' \cup \underbrace{(R - Q')}_{Q} \right]' = [Q' \cup Q]' = [R]' = \emptyset \neq A \text{ (نادرست)}$$

☆ ۳۷ گزینه ۲

$$n \in (3n - 14, 5n + 16] \Rightarrow 3n - 14 < n \leq 5n + 16$$

$$\left. \begin{array}{l} 1) 3n - 14 < n \Rightarrow 2n < 14 \Rightarrow n < 7 \\ 2) n \leq 5n + 16 \Rightarrow -4n \leq 16 \xrightarrow{\div(-4)} n \geq -4 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} -4 \leq n < 7$$

$$-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$$

باید دو نامعادله زیر هم زمان برقرار باشند:

اعداد صحیح موجود در بازه فوق عبارتند از:

پس تعداد آن‌ها ۱۱ تا است.

☆ ۳۸ گزینه ۳

گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) A و A' هیچ عضو مشترکی ندارند. پس دو مجموعه جدا از هم هستند. (درست)

۲) اگر A و B جدا از هم باشند، اشتراک آن‌ها هیچ عضوی ندارد و رابطه‌ی تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه برابر خواهد بود با:

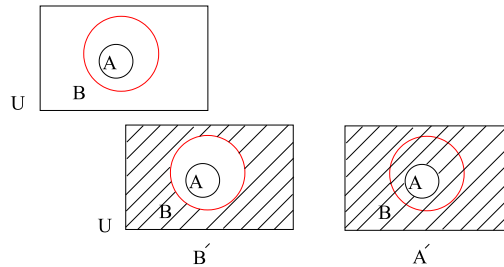
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) \quad (\text{درست})$$

۳) اجتماع هر مجموعه‌ی منتهای با یک مجموعه‌ی نامنتهای، نامنتهای است. بنابراین $A \cup B$ نامنتهای است. (نادرست)

۴) Q و Q' هر دو نامنتهای‌اند. (درست)

☆ ۳۹ گزینه ۱

$A \subseteq B \subseteq U$ را روی نمودار ون ببینید:



نمودار A' و B' عبارتست از:

A' همه‌ی B' را در بر گرفته است. پس $B' \subseteq A'$

☆ ۴۰ گزینه ۲

گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) $Z - R = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} = \emptyset$ همه اعداد = \emptyset

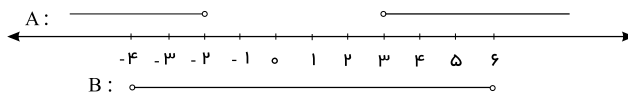
۲) $W - N = \{0, 1, 2, 3, \dots\} - \{1, 2, 3, \dots\} = \{0\}$ با بقیه متفاوت است \Rightarrow

۳) $Q' \cap Q = \emptyset$ اعداد گویا \cap اعداد گنگ = \emptyset

۴) $Q' - R = \emptyset$ همه اعداد - اعداد گنگ = \emptyset

☆ ۴۱ گزینه ۳

بازه‌های A و B را روی محور نمایش می‌دهیم و حاصل گزینه‌ها را محاسبه می‌کنیم:



$$A - B = R - (-4, 6) \quad (1)$$

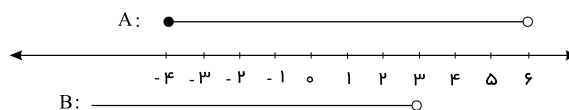
$$B - A = [-2, 3] \quad (2)$$

$$A \cap B = (-4, 6) - [-2, 3] \quad (3)$$

$$A \cup B = R \quad (4)$$

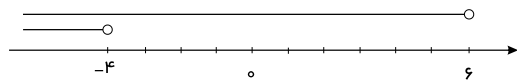
☆ ۴۲ گزینه ۲

بازه‌های A و B را روی محور نمایش می‌دهیم:



$$\Rightarrow \begin{cases} B - A = (-\infty - 4) \\ A \cup B = (-\infty, 6) \end{cases}$$

حال این دو بازه را روی محور نشان می‌دهیم:



$$\Rightarrow (B - A) \cap (A \cup B) = (-\infty, -4)$$

☆ ۴۳ گزینه ۲

الف) $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$ = مجموعه مقسوم علیه های طبیعی 36

ب) $B = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ نامتناهی

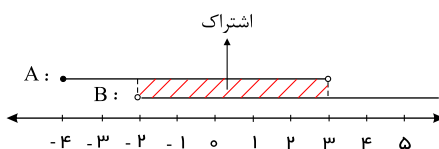
پ) $C = \{100, 200, 300, \dots\}$ نامتناهی

ت) $D = \{x \in W \mid 1 < x < 2\} = \emptyset$ متناهی

مجموعه ی اعداد طبیعی یک رقمی $u = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ متمم $\rightarrow A' = \{1, 4, 6, 8, 9\}$
 مجموعه ی اعداد اول یک رقمی $A = \{2, 3, 5, 7\}$

☆ ۴۴ گزینه ۲

☆ ۴۵ گزینه ۴



$$A \cap B = (-2, 3)$$

☆ ۴۶ گزینه ۳

$A = \{1, 2, 4, 7, 14, 28\}$ = مجموعه مقسوم علیه های طبیعی 28

$B = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ = مجموعه مقسوم علیه های طبیعی 30

$$\Rightarrow A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 14, 15, 28, 30\} \Rightarrow n(A \cup B) = 12$$

☆ ۴۷ گزینه ۲

الف) $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$ = مجموعه مقسوم علیه های طبیعی 36

ب) $B = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ نامتناهی

پ) $C = \{100, 200, 300, \dots\}$ نامتناهی

ت) $D = \{x \in W \mid 1 < x < 2\} = \emptyset$ متناهی

☆ ۴۸ گزینه ۳

گزینه ها را بررسی می کنیم:

۱) مرجع $= N \Rightarrow A = \{1, 2\} \Rightarrow$ متناهی \Rightarrow درست

۲) مرجع $= Q \Rightarrow A = 2, -3$ اعداد گویای بین -3 و 2 نامتناهی \Rightarrow نامتناهی \Rightarrow درست

۳) $= Q' \Rightarrow A = 2, -3$ اعداد گنگ \Rightarrow نامتناهی \Rightarrow نامتناهی \Rightarrow نادرست

۴) مرجع $= \Rightarrow A = \emptyset$ اعداد کوچکتر از -3 \Rightarrow متناهی \Rightarrow درست

☆ ۴۹ گزینه ۴

گزینه ی ۱: دنباله ای مثل $t_n = \frac{1}{n}$ ، نه هندسی است و نه حسابی؛ پس این گزینه صحیح نیست.

اما: دنباله ثابت، دنباله ای است شامل جملات مساوی به فرم: $t_n = c$ یعنی:

C, C, C, \dots

این دنباله را می توان یک دنباله هندسی با قدر نسبت ۱ و یک دنباله حسابی با قدر نسبت صفر دانست. یعنی هر دنباله ثابت هم هندسی است و هم حسابی؛ از آنجا که بیشمار دنباله ثابت وجود دارد، پس بیشمار دنباله وجود دارد که هم حسابی هستند و هم هندسی

☆ ۵۰ گزینه ۱

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ و } \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{2 \cos^2 45^\circ + 4 \sin^2 60^\circ}{2 - 3 \cot 30^\circ \times \tan 30^\circ} = \frac{2 \times (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + 4 \times (\frac{\sqrt{3}}{2})^2}{2 - 3 \times 1} = \frac{2 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{3}{4}}{-1} = \frac{1 + 3}{-1} = -4$$

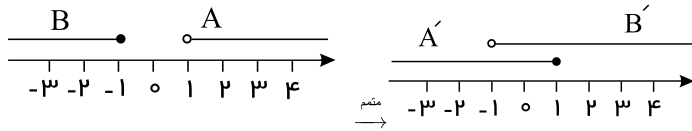
☆ ۵۱ گزینه ۳

در گزینه ی ۱ تعداد اعضا معلوم است پس متناهی است. گزینه ی ۲ برابر است با مجموعه ی $\{0\}$ و متناهی است. گزینه ی ۴ برابر است با $\{-4, -3, \dots, 3, 4\}$ و متناهی است. گزینه ی ۳

برابر با بازه $(5, 0]$ است و نامتناهی است.

☆ ۵۲ گزینه ۳

چون R مجموعه‌ی مرجع است، بهتر است بازه‌ها را روی محور ببینیم:



$$\Rightarrow A' \cap B = (-1, 1]$$

☆ ۵۳ گزینه ۱

راه اول: می‌خواهیم دنباله‌ای به صورت زیر تشکیل دهیم:

$$\frac{\begin{matrix} +d & +d & +d & +d & +d & +d & +d & +d \\ \hline \frac{22}{3}, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \frac{22}{3} \end{matrix}}{\text{جمله وسط}} = \frac{22}{3}$$

برای محاسبه قدر نسبت چنین عمل می‌کنیم:

$$\frac{22}{3} = \frac{2}{3} + 8d \Rightarrow 8d = \frac{22}{3} - \frac{2}{3} = \frac{20}{3} \Rightarrow d = \frac{20}{8 \times 3} = \frac{5}{6}$$

$$\text{جمله وسط} = \frac{2}{3} + 4d = \frac{2}{3} + 4 \times \frac{5}{6} = \frac{2}{3} + \frac{20}{6} = \frac{4 + 20}{6} = \frac{24}{6} = 4$$

راه دوم:

نکته: در هر دنباله حسابی با تعداد جملات فرد، جمله وسط برابر است با میانگین جملات متساوی‌فاصله از دو طرف آن:

$$\text{جمله وسط} = \frac{\frac{2}{3} + \frac{22}{3}}{2} = \frac{\frac{24}{3}}{2} = \frac{24}{6} = 4$$

☆ ۵۴ گزینه ۳

$$\text{می‌دانیم: } \cot 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}, \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}, \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$A = \frac{2 \times \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} + 4 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right) - \sqrt{3} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{\frac{2}{3}} + 4 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - \sqrt{3}$$

$$= \sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} = 1$$

☆ ۵۵ گزینه ۲

واسطه‌ی حسابی یعنی عددی که بین دو عدد $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$ و $\frac{1-2\sqrt{2}}{2}$ قرار گیرد و با آنها یک دنباله‌ی حسابی تشکیل دهد؛ و می‌دانیم که در هر دنباله‌ی حسابی، جمله‌ی وسط میانگین جملات طرفین خود است:

$$\text{واسطه‌ی حسابی} = x = \frac{\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1-2\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{\frac{2+1-2\sqrt{2}+\sqrt{2}-2}{2(1+\sqrt{2})}}{2} = \frac{-1-\sqrt{2}}{2(1+\sqrt{2})}$$

$$= \frac{-(1+\sqrt{2})}{2(1+\sqrt{2})} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

☆ ۵۶ گزینه ۲

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\right)$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{2-1}{4} = \frac{1}{4}$$

☆ ۵۷ گزینه ۱

$$\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{2} + \sqrt{3} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{2} + 3\sqrt{3}}{2}$$

☆ ۵۸ گزینه ۲

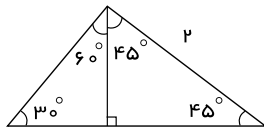
$$\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A} = \sqrt{1 - \frac{4}{49}} = \sqrt{\frac{45}{49}} = \frac{3\sqrt{5}}{7}$$

$$\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{3\sqrt{5}}{7} \Rightarrow \frac{3\sqrt{10}}{AC} = \frac{3\sqrt{5}}{7} \Rightarrow 3\sqrt{10} = 3\sqrt{5}AC$$

$$\Rightarrow AC = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}} = \sqrt{2}$$

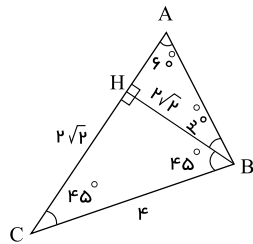
☆ ۵۹ گزینه ۲

با رسم ارتفاع خواهیم داشت:



$$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\text{ارتفاع}}{2} \Rightarrow h = \sqrt{2}$$

☆ ۶۰ گزینه ۱



$$\sin 45^\circ = \frac{BH}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow BH = 2\sqrt{2}$$

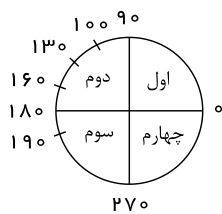
$$\cos 45^\circ = \frac{CH}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow CH = 2\sqrt{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{AH}{2\sqrt{2}} \Rightarrow AH = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

$$AC = AH + HC = \frac{2\sqrt{6}}{3} + 2\sqrt{2} = 2\left(\frac{\sqrt{6}}{3} + \sqrt{2}\right)$$

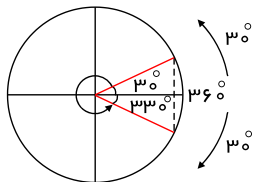
☆ ۶۱ گزینه ۴

در دایره‌ی مثلثاتی می‌بینیم که گزینه‌های ۱ و ۲ و ۳ همگی در بازه‌ی 90° تا 180° هستند و در ربع دوم قرار می‌گیرند اما گزینه‌ی ۴ در این بازه نیست.



☆ ۶۲ گزینه ۲

با نمایش 33° روی دایره مثلثاتی می‌بینیم که 3° و 33° کسینوس‌های مشابه دارند.



$$\cos 33^\circ = \cos 3^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos^2 33^\circ = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

☆ ۶۳ گزینه ۴

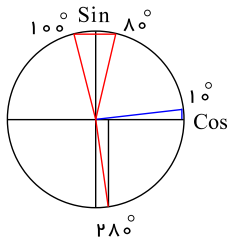
باتوجه به ناحیه هر یک از زوایا و دایره مثلثاتی:

ربع اول الف) $\sin 75^\circ \rightarrow \sin 75^\circ > 0$

ربع چهارم ب) $\cos 345^\circ \rightarrow \cos 345^\circ > 0$

$$\text{ج) } \tan 195^\circ \xrightarrow{\text{ربع سوم}} \frac{\sin 195^\circ}{\cos 195^\circ} \xrightarrow{\text{ربع سوم}} \frac{\sin 195^\circ < 0}{\cos 195^\circ < 0} \Rightarrow \tan 195^\circ > 0$$

$$\text{د) } \cot 13^\circ \xrightarrow{\text{ربع دوم}} \frac{\cos 13^\circ}{\sin 13^\circ} \xrightarrow{\text{ربع دوم}} \frac{\cos 13^\circ < 0}{\sin 13^\circ > 0} \Rightarrow \cot 13^\circ < 0$$



گزینه ۳ ☆ ۶۴

باتوجه به دایره مثلثاتی مقادیر گزینه های ۱ و ۲ و ۴ یکسان اند و $\cos 28^\circ$ مقدار کوچکتری دارد.

گزینه ۱ ☆ ۶۵

در ربع دوم باتوجه به دایره مثلثاتی: $-1 < \cos \alpha < 0$

$$-1 < \frac{m+2}{3} < 0 \xrightarrow{\times 3} -3 < m+2 < 0 \xrightarrow{-2} -5 < m < -2$$

گزینه ۲ ☆ ۶۶

$$y = ax + b \rightarrow y = ax + 3 \xrightarrow{(2,5)} 5 = 2a + 3$$

$$2a = 2 \Rightarrow a = 1 \rightarrow \tan \alpha = 1 \rightarrow \alpha = 45^\circ$$

گزینه ۳ ☆ ۶۷

$$y = ax - 1 \xrightarrow{(1,0)} 0 = a - 1 \rightarrow a = 1 \rightarrow \tan \alpha = 1 \rightarrow \alpha = 45^\circ$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

گزینه ۳ ☆ ۶۸

مختصات محل تلاقی در هر دو معادله صدق می کند.

$$\left. \begin{array}{l} y = 3 \\ y = b \end{array} \right\} \Rightarrow b = 3$$

گزینه ۴ ☆ ۶۹

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \frac{36}{100}} = \pm \sqrt{\frac{64}{100}} = \pm \sqrt{\left(\frac{8}{10}\right)^2} = \pm \frac{8}{10} \xrightarrow{\text{در ربع سوم}} -\frac{8}{10}$$

$$\tan \alpha = \frac{-0.6}{-0.8} = \frac{3}{4}$$

$$\cot \alpha = \frac{-0.8}{-0.6} = \frac{4}{3} \rightarrow \cot^2 \alpha = \frac{16}{9}$$

$$\tan \alpha - \cot^2 \alpha = \frac{3}{4} - \frac{16}{9} = \frac{27 - 64}{36} = \frac{-37}{36}$$

گزینه ۱ ☆ ۷۰

سینوس و کسینوس زوایای متمم با یکدیگر برابر است. پس: $\cos 70^\circ = \sin 20^\circ$, $\sin 70^\circ = \cos 20^\circ$

$$\frac{1 + \sin^2 20^\circ + \sin^2 70^\circ}{1 + \tan 20^\circ \tan 70^\circ} = \frac{1 + \sin^2 20^\circ + \cos^2 20^\circ}{1 + \frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} \times \frac{\sin 70^\circ}{\cos 70^\circ}} = \frac{1 + 1}{1 + 1} = 1$$

گزینه ۲ ☆ ۷۱

$$\tan \alpha - \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1} = \tan \alpha - \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} - 1$$

$$= \tan \alpha - \sqrt{\tan^2 \alpha} = \tan \alpha - |\tan \alpha| \xrightarrow{\text{ربع دوم } \alpha} \tan \alpha - (-\tan \alpha) = \tan \alpha + \tan \alpha = 2 \tan \alpha$$

گزینه ۳ ☆ ۷۲

مقادیر $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\tan 45^\circ = 1$ و $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ را در A جایگزین می کنیم:

$$A = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + 1 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 2 \times \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{3}{4} = 0,75$$

☆ ۷۳ گزینه ۳

مقادیر $\cot 180^\circ$ و $\tan 90^\circ$ تعریف نشده‌اند و $\sin 180^\circ = 0$ بوده در نتیجه $\frac{1}{\sin 180^\circ}$ تعریف نشده است.

☆ ۷۴ گزینه ۳

راه اول: می‌دانیم: ۱- بین سینوس و کسینوس رابطه‌ی $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ برقرار است.

۲- در ناحیه‌ی دوم، سینوس مثبت و کسینوس منفی است؛ در نتیجه تانژانت منفی خواهد بود.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{25-9}{25} = \frac{16}{25}$$

$$\sqrt{\sin \alpha} = \pm \sqrt{\frac{16}{25}} = \pm \frac{4}{5} \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \frac{4}{5} \checkmark \\ \sin \alpha = -\frac{4}{5} \text{ غیر قابل قبول} \end{cases}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$$

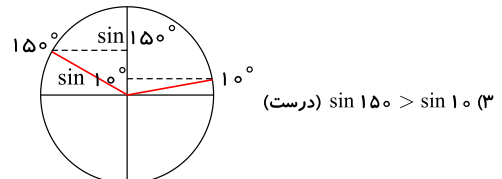
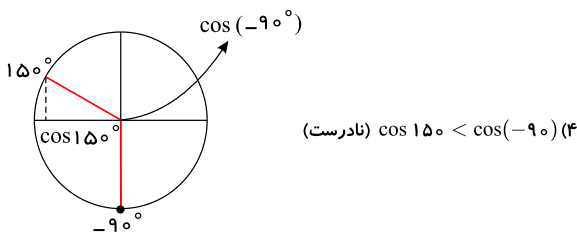
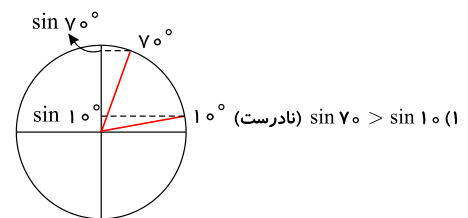
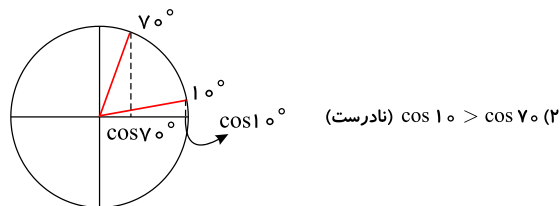
$$\text{راه دوم: } 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\left(-\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{1}{\frac{9}{25}} \Rightarrow \tan^2 \alpha = \frac{25}{9} - 1 = \frac{25-9}{9} = \frac{16}{9}$$

$$\sqrt{\tan \alpha} = \begin{cases} \tan \alpha = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3} \text{ غیر قابل قبول} \\ \tan \alpha = -\sqrt{\frac{16}{9}} = -\frac{4}{3} \checkmark \end{cases}$$

☆ ۷۵ گزینه ۳

گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:



☆ ۷۶ گزینه ۳

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \text{ داریم: } x$$

$$A = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \\ \Rightarrow A = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 = 1^2 = 1$$

☆ ۷۷ گزینه ۱

$$t_n = t_1 q^{n-1}$$

در هر دنباله هندسی: $t_n = t_1 q^{n-1}$

دنباله‌ی هندسی حاصل عبارتست از:

$$\underbrace{\times q}_{\times q} \underbrace{\times q}_{\times q} \underbrace{\times q}_{\times q} \underbrace{\times q}_{\times q}$$

$$۳, \dots, \dots, \dots, ۳۲۴$$

$$\Rightarrow ۳۲۴ = ۴ \times q^r \Rightarrow q^r = \frac{۳۲۴}{۴} = ۸۱ \xrightarrow{\sqrt[4]{\quad}} q = \pm \sqrt[4]{۸۱} = \pm ۳$$

$$t_۳ = t_1 q^r = ۴ \times (\pm ۳)^r = ۳۶$$

☆ ۷۸ گزینه ۴

$$-۳ \leq \sqrt[3]{x} \leq ۵ \xrightarrow{(\quad)^3} -۲۷ \leq x \leq ۱۲۵$$

$$۱۲۵ - (-۲۷) + ۱ = ۱۵۳$$

تعداد اعداد صحیح این بازه عبارتست از:

☆ ۷۹ گزینه ۱

نزدیکترین اعداد مکعب کامل به ۵۳، عبارتند از ۲۷ و ۶۴:

$$۲۷ < ۵۳ < ۶۴ \xrightarrow{\times (-1)} -۲۷ > -۵۳ > -۶۴$$

$$\sqrt[3]{-۲۷} > \sqrt[3]{-۵۳} > \sqrt[3]{-۶۴} \Rightarrow \underbrace{-۳}_{k+1} > \sqrt[3]{-۵۳} > \underbrace{-۴}_k \Rightarrow k = -۴$$

☆ ۸۰ گزینه ۲

شیب خطی که باجهت مثبت محور x ها زاویه‌ی θ بسازد برابر $\tan \theta$ است

$$y - y_0 = m(x - x_0) \quad \left| \begin{array}{l} \text{بگذرد، عبارتست از} \\ \text{معادله‌ی خطی که با شیب } m \text{ از نقطه } \begin{matrix} x_0 \\ y_0 \end{matrix} \end{array} \right.$$

$$\text{شیب خط} = \tan ۶۰^\circ = \sqrt{۳}$$

عرض از مبدأ ۲ است. یعنی خط از نقطه‌ی $\begin{matrix} 0 \\ ۲ \end{matrix}$ می‌گذرد.

$$\text{معادله‌ی خط } y - ۲ = \sqrt{۳}(x - ۰)$$

$$y = \sqrt{۳}x + ۲ \Rightarrow y - \sqrt{۳}x = ۲$$

☆ ۸۱ گزینه ۴

$$\sin ۳۰^\circ = \frac{CD}{BD} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{CD}{10} \Rightarrow CD = 10 \times \frac{1}{2} = ۵ \text{ cm}$$

$$\cos ۳۰^\circ = \frac{BC}{BD} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{2} = \frac{BC}{10} \Rightarrow BC = \frac{10 \times \sqrt{۳}}{2} = ۵\sqrt{۳}$$

$$\text{محیط مستطیل} = ۲(CD + BC) = ۲(۵ + ۵\sqrt{۳}) = ۲ \times ۵(1 + \sqrt{۳}) = 10(1 + \sqrt{۳})$$

☆ ۸۲ گزینه ۱

معادله‌ی درجه‌ی ۲ ریشه‌ی مضاعف دارد، هرگاه $\Delta = ۰$ باشد.

$$\Delta = ۰ \rightarrow b^2 - 4ac = ۰ \rightarrow (m+۲)^2 - ۴(۲m+1) \times ۱ = ۰$$

$$\Rightarrow m^2 + ۴m + ۴ - 4m - ۴ = ۰ \Rightarrow m(m-۴) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = ۰ \Rightarrow x^2 + ۲x + 1 = ۰ \Rightarrow (x+1)^2 = ۰ \Rightarrow x = -1 \\ m = ۴ \Rightarrow 9x^2 + 6x + 1 = 0 \Rightarrow (3x+1)^2 = 0 \Rightarrow 3x+1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

☆ ۸۳ گزینه ۲

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

$$\sqrt[3]{۳x} \sqrt{\frac{1}{9x^2}} = \sqrt[3]{۳x} \left| \frac{1}{۳x} \right| \stackrel{x \leq 0}{\leq} \sqrt[3]{۳x} \times \left(-\frac{1}{۳x}\right) = \sqrt[3]{۳x} \times \frac{-1}{۳x} = \sqrt[3]{-1} = -1$$

گزینه ۲ ☆ ۸۴

$$\text{الف) } \sqrt[6]{4} \times \sqrt[6]{80} = \sqrt[6]{4 \times 80} = \sqrt[6]{320} = \sqrt[6]{2^6 \times 5} = \sqrt[6]{2^6} \times \sqrt[6]{5} = 2 \times \sqrt[6]{5} \text{ درست}$$

$$\begin{aligned} \text{ب) } \sqrt[5]{72} \times \sqrt[5]{108} &= \sqrt[5]{72 \times 108} = \sqrt[5]{(3^2 \times 2^3) \times (3^3 \times 2^2)} = \sqrt[5]{3^5 \times 2^5} \\ &= \sqrt[5]{3^5} \times \sqrt[5]{2^5} = 3 \times 2 = 6 \text{ درست} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{پ) } \sqrt[5]{\frac{7}{16a^5}} \times \sqrt[5]{\frac{243}{14}} &= \sqrt[5]{\frac{7 \times 243}{16a^5 \times 14}} = \sqrt[5]{\frac{7 \times 3^5}{2^4 \times a^5 \times 2 \times 7}} = \sqrt[5]{\frac{3^5}{2^5 \times a^5}} \\ &= \frac{\sqrt[5]{3^5}}{\sqrt[5]{2^5 \times a^5}} = \frac{3}{\sqrt[5]{2^5 \times a^5}} = \frac{3}{2 \times a} = \frac{3}{2a} \neq \frac{7}{2a} \text{ نادرست} \end{aligned}$$

گزینه ۱ ☆ ۸۵

$$x^a \times x^b = x^{a+b} \text{ و } \sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\sqrt[3]{3^3 \times 2} + \sqrt[3]{5^3 \times 2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3^3 \sqrt{2}} + \sqrt[3]{5^3 \sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8 \sqrt{2}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt[3]{2^3 \times 2^{\frac{1}{2}}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^{3+\frac{1}{2}}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^{\frac{10}{2}}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^5}} = \frac{1}{2^{\frac{5}{3}}} = \frac{1}{2 \times 2^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{2 \sqrt[3]{2^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt[3]{2^6 \times 2^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^8}} \times \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^8}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2 \times 2} = \frac{\sqrt[3]{4}}{4} \end{aligned}$$

گزینه ۲ ☆ ۸۶

$$\left. \begin{aligned} \text{I) } 2 < \sqrt{x} < 3 &\xrightarrow{(\cdot)^2} 4 < x < 9 \\ \text{II) } 3 \leq \sqrt{x} \leq 5 &\xrightarrow{(\cdot)^2} 9 \leq x \leq 25 \end{aligned} \right\} \text{اشترک} \rightarrow 9 \leq x \leq 25$$

تعداد اعداد صحیح در این بازه عبارتست از: $25 - 9 + 1 = 17$

گزینه ۱ ☆ ۸۷

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-x} = \left(\frac{b}{a}\right)^x$$

$$\begin{aligned} A &= \sqrt[5]{\left(\frac{4}{9}\right)^{-5}} - \sqrt[5]{\left(\frac{3}{4}\right)^5} = \sqrt[5]{\left(\frac{9}{4}\right)^5} - \sqrt[5]{\left(\frac{3}{4}\right)^5} \\ &= \frac{9}{4} - \frac{3}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

گزینه ۳ ☆ ۸۸

$$(a-b)(a^r+ab+b^r) = a^r - b^r$$

ریاضی دهم ساده

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1} \times \frac{\sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2} + 1}{\sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2} + 1} \\ &= \frac{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1}{(\sqrt[3]{2})^3 - 1^3} = \frac{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1}{2-1} = \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1 \end{aligned}$$

☆ ۸۹ گزینه ۴

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}} \text{ می دانیم:}$$

$$\begin{aligned} 4 \times \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2^{\frac{1}{2}}}}}}} &= 4 \times \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\frac{1}{2}}}}} \\ &= 4 \times \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\frac{1}{2}}}}} \\ &= 4 \times \sqrt{\sqrt{\sqrt{\frac{1}{2}}}} \\ &= 4 \times \sqrt{\sqrt{\frac{1}{2}}} \\ &= 4 \times \sqrt{\frac{1}{2}} \\ &= 4 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

☆ ۹۰ گزینه ۴

اعداد بازه‌ی (۰, ۱) هرچه به فرجه بیشتری برسند بزرگتر می‌شوند.

$$0 < a < 1 \Rightarrow 0 < a < \sqrt{a} < \sqrt[3]{a} < 1$$

$$A = \underbrace{|a - \sqrt{a}|}_{-} - \underbrace{|a - \sqrt[3]{a}|}_{-} + \underbrace{|\sqrt{a} - \sqrt[3]{a}|}_{-}$$

$$\Rightarrow (-a + \sqrt{a}) - (-a + \sqrt[3]{a}) + (-\sqrt{a} + \sqrt[3]{a})$$

$$\Rightarrow A = 0$$

☆ ۹۱ گزینه ۴

اگر $\Delta = 0$ معادله‌ی درجه‌ی ۲ ریشه‌ی مضاعف دارد.

$$1) \Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4 \times 3 \times 1 \neq 0$$

$$2) \Delta = 1 - 4(2)(-2) \neq 0$$

$$3) \Delta = 64 - 4 \times 5 \times 3 \neq 0$$

$$4) \Delta = 100 - 4(-5)(-5) = 100 - 100 = 0$$

$$\frac{\sqrt{0,16} - \sqrt[3]{0,027}}{\sqrt[4]{0,0016} - \sqrt[5]{0,00001}} = \frac{0,4 - 0,3}{0,2 - 0,1} = \frac{0,1}{0,1} = 1$$

$$\sqrt[7]{0,000064} \times \sqrt[3]{\frac{1}{0,0081}} = 0,2 \times \frac{1}{0,3} = \frac{0,2}{0,3} = \frac{2}{3}$$

☆ ۹۲ گزینه ۴

☆ ۹۳ گزینه ۲

☆ ۹۴ گزینه ۱

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

$a, b \geq 0$, زوج n

$$I) \sqrt{27} = \sqrt{3 \times 3^2} = \sqrt{3} \times \sqrt{3^2} = 3\sqrt{3}$$

$$II) \sqrt[4]{9} = \sqrt[4]{3^2} = \sqrt{3}$$

$$\xrightarrow{I, II} \sqrt{27} + \sqrt[4]{9} = 3\sqrt{3} + \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

☆ ۹۵ گزینه ۱

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

اگر زوج n , $a, b \geq 0$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$\sqrt[n]{2} \times \sqrt[n]{2^2} = \sqrt[n]{2^2 \times 2} = \sqrt[n]{2^3} = \sqrt{2}$$

$$\sqrt[n]{2^3} = \sqrt{2} \Rightarrow 2^{\frac{3}{n}} = 2^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{3}{n} = \frac{1}{2} \Rightarrow n = 6$$

گزینه ۴ ☆ ۹۶

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad a \geq 0$$

$$\frac{(0,0016)^{\frac{25}{100}}}{(0,04)^{\frac{5}{100}}} = \frac{(0,0016)^{\frac{1}{4}}}{(0,04)^{\frac{1}{20}}} = \frac{\sqrt[4]{0,0016}}{\sqrt{0,04}} = \frac{0,2}{0,2} = 1$$

گزینه ۳ ☆ ۹۷

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad a \geq 0$$

$$\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

اگر زوج $a, b \geq 0$ ←

$$\sqrt[r]{|a|} = \sqrt[r]{(a^r)} = a^{\frac{r}{r}} = (a^r)^{\frac{r}{r}} = a^r$$

$$\left. \begin{aligned} \sqrt[r]{3} &= 3^{\frac{1}{r}} = 3^{\frac{r}{r}} \\ \sqrt{3} &= 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{r}{2r}} \end{aligned} \right\} \rightarrow \sqrt{3} \times \sqrt[r]{3} = 3^{\frac{r}{2r}} \times 3^{\frac{r}{r}} = 3^{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{3^{\frac{r}{2r}}}{3^{\frac{3}{2r}}} = 3^{\frac{r}{2r} - \frac{3}{2r}} = 3^{\frac{r-3}{2r}} = 3^{\frac{r}{2r}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

گزینه ۴ ☆ ۹۸

$$a^{-b} = \frac{1}{a^b} \quad a \geq 0$$

$$\left. \begin{aligned} \left(a^{-\frac{r}{r}}\right)^{\frac{r}{r}} &= a^{-\frac{r}{r} \times \frac{r}{r}} = a^{-r} \\ \left(b^{-r}\right)^{\frac{r}{r}} &= b^{-r \times \frac{r}{r}} = b^{-r} \end{aligned} \right\} \rightarrow a^{-r} \times b^{-r} = \frac{1}{a^r} \times \frac{1}{b^r} = \frac{1}{a^r b^r}$$

گزینه ۳ ☆ ۹۹

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$a \geq 0, \frac{m}{n} \notin \mathbb{Z}$$

$$\sqrt[r]{r^r} = r^{\frac{r}{r}} = r^r$$

$$|a| = a \rightarrow a > 0$$

$$\frac{\sqrt[r]{a^r}}{\sqrt[r]{a^r}} = \frac{a^{\frac{r}{r}}}{a^{\frac{r}{r}}} = a^{\frac{r}{r} - \frac{r}{r}} = a^{\frac{r-r}{r}} = a^{\frac{-0}{r}} = a^0 = 1$$

$$\left(a^{-\frac{5}{6}}\right)^{-\frac{6}{5}} = a^{-\frac{5}{6} \times -\frac{6}{5}} = a^1 = a$$

$$x^{0,738} = (x^{0,246})^r = (3)^r = 27$$

گزینه ۳ ☆ ۱۰۰

گزینه ۴ ☆ ۱۰۱

$$a^{-b} = \frac{1}{a^b}$$

$$\frac{1}{3^{\frac{11}{25}}} = 3^{-\frac{11}{25}} = 3^{\frac{-11}{25}} = 3^{-0,44}$$

☆ ۱۰۲ گزینه ۳

می دانیم که در زیر رادیکال با فرجه ی زوج، تنها اعداد نامنفی قرار می گیرند تا عبارت معنادار باشد. پس:

$$\sqrt{-x} \Rightarrow -x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0$$

دقت کنید که استفاده از واژه ی مثبت در تعریف بالا نادرست است چرا که صفر هم در زیر رادیکال با فرجه ی زوج قرار می گیرد و معنادار است. پس یا باید بگوییم بزرگتر مساوی صفر یا به اصطلاح بگوییم نامنفی.

همچنین در نوشتن اعداد با توان گویا، پایه حتما باید نامنفی باشد پس: $-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0$

☆ ۱۰۳ گزینه ۱

$$\frac{a^r + rab + b^r}{a + b} = \frac{(a + b)^r}{a + b} = a + b$$

☆ ۱۰۴ گزینه ۲

می دانیم زوایای متمم، سینوس و کسینوس برابر هم دارند.

$$\sin \alpha = \cos(90 - \alpha)$$

اگر طرفین را به توان دو برسانیم نتیجه می شود که $\sin^2 \alpha = \cos^2(90 - \alpha)$ و خواهیم داشت:

$$A = \cos^2 15 + \cos^2 25 + \cos^2 35 + \cos^2 45 + \sin^2 35 + \sin^2 25 + \sin^2 15 =$$

$$\underbrace{\sin^2 15 + \cos^2 15} + \underbrace{\sin^2 25 + \cos^2 25} + \underbrace{\sin^2 35 + \cos^2 35} + \cos^2 45 =$$

$$1 + 1 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2} \Rightarrow 2A = 7$$

☆ ۱۰۵ گزینه ۳

$$\sin \alpha = \cos(90 - \alpha)$$

$$\frac{1 + \sin^2 25 + \sin^2 65}{\cot 35 \cot 55} = \frac{1 + \sin^2 25 + \cos^2 25}{\frac{\cos 35}{\sin 35} \times \frac{\cos 55}{\sin 55}} = \frac{1 + 1}{\frac{\cos 35}{\sin 35} \times \frac{\sin 35}{\cos 35}} = \frac{2}{1} = 2$$

☆ ۱۰۶ گزینه ۳

$$\sin 30 = \frac{1}{2} \rightarrow \sin^2 30 = \frac{1}{4}$$

$$\cos 60 = \frac{1}{2}$$

$$\sin 90 = 1$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1 = \frac{1 + 2 - 4}{4} = \frac{-1}{4}$$

☆ ۱۰۷ گزینه ۲

$$(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2$$

$$(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$$

$$7^3 = x^3 + y^3 + 3 \times 5(7)$$

$$7^3 = x^3 + y^3 + 105 \Rightarrow x^3 + y^3 = 238$$

☆ ۱۰۸ گزینه ۲

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$x^3 + y^3 = ? \quad xy = 1 \quad x + y = 3$$

$$(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$$

$$(3)^3 = x^3 + y^3 + 3(1)(3) \Rightarrow 27 = x^3 + y^3 + 9 \Rightarrow x^3 + y^3 = 18$$

☆ ۱۰۹ گزینه ۳

اعداد بازه ی $(0, 1)$ و $(-1, 0)$ هرچه به توان بزرگ تر برسند به صفر نزدیک تر می شوند و هرچه ریشه ی بزرگ تری از آن ها گرفته شود، از صفر دور تر می شوند. با توجه به نکته ی فوق، گزینه ی ۳ صحیح است.

☆ ۱۱۰ گزینه ۴

$$\sqrt[n]{a^n} = |a| : \text{ برای هر } n \text{ زوج}$$

$$\sqrt[n]{a^n} = a : \text{ برای هر } n \text{ فرد}$$

$$(\sqrt[n]{a})^n = a : \text{ برای هر } n \text{ طبیعی}$$

با توجه به نکات فوق، گزینه ی ۴ همواره صحیح است.

☆ ۱۱۱ گزینه ۲

عدد ۴۷۵ بین دو عدد توان دار کامل از نوع ۴ قرار دارد که عبارتند از:

$$4^n < 475 < 5^n \rightarrow 4 < \sqrt[n]{475} < 5$$

$$\Rightarrow n = 4$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100}$$

$$\sin x = \pm \sqrt{\frac{99}{100}} \xrightarrow{\text{ربع اول}} \sin x = \sqrt{\frac{99}{100}} = \frac{3\sqrt{11}}{10}$$

$$\tan^2 \theta \cos^2 \theta + \cot^2 \theta \sin^2 \theta =$$

$$\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \cos^2 \theta + \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \sin^2 \theta = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

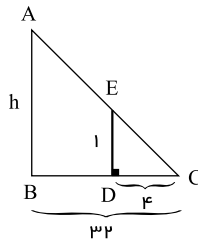
$$\text{طول مستطیل} = \frac{\text{مساحت مستطیل}}{\text{عرض مستطیل}} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} \times \frac{2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4 - 3} = 2 + \sqrt{3}$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5^3}}{\sqrt{5^3}} = \frac{\sqrt{5^3}}{\sqrt{5^4}} = \frac{\sqrt{125}}{5}$$

$$\frac{2}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{2(\sqrt{2} + \sqrt{3})}{2 - 3} = -2\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$$

$$\frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BC} \Rightarrow \frac{3}{3+4} = \frac{x}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{7} = \frac{x}{4} \Rightarrow x = \frac{4 \times 3}{7} = \frac{12}{7}$$



$$\frac{CD}{BC} = \frac{DE}{AB} \Rightarrow \frac{4}{32} = \frac{1}{h} \Rightarrow h = \frac{32}{4} = 8$$

$$\tan x = \frac{3}{4} \rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{3}{4} \rightarrow \frac{3}{\sin x} = \frac{4}{\cos x}$$

$$\frac{4}{\cos x} - \frac{3}{\sin x} = 0$$

☆ 112 گزینه ۲

☆ 113 گزینه ۱

☆ 114 گزینه ۳

☆ 115 گزینه ۴

☆ 116 گزینه ۱

☆ 117 گزینه ۴

دو مثلث $\triangle AEF$ و $\triangle ABC$ با هم متشابهند و داریم:

☆ 118 گزینه ۲

به شکل مقابل توجه کنید:

دو مثلث $\triangle CDE$ و $\triangle ABC$ متشابهند و داریم:

☆ 119 گزینه ۱

$$\frac{\tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{\tan \theta}{\frac{1}{\cos^2 \theta}} = \tan \theta \times \cos^2 \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \times \cos^2 \theta = \sin \theta \cos \theta$$

☆ ۱۲۰ گزینه ۳

$$(1 - \sin^2 \theta)(1 + \tan^2 \theta) = (\cos^2 \theta) \left(\frac{1}{\cos^2 \theta} \right) = 1$$

☆ ۱۲۱ گزینه ۲

$$\tan x = \frac{-1}{2} \rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-1}{2} \rightarrow 2 \sin x = -\cos x$$

☆ ۱۲۲ گزینه ۴

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \rightarrow \sin^2 x + 4 \sin^2 x = 1 \rightarrow 5 \sin^2 x = 1$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{5} \rightarrow \sin^2 x = \pm \frac{1}{\sqrt{5}} = \pm \frac{\sqrt{5}}{5} \rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$* : \tan x < 0 \rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} < 0 \xrightarrow{\cos x < 0} \sin x > 0$$

☆ ۱۲۳ گزینه ۴

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \rightarrow \sin^2 \theta = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

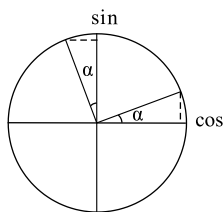
$$\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\sin^2 \theta - \cos^2 \theta + \frac{1}{1 + \tan^2 \theta} = \sin^2 \theta - \cos^2 \theta + \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2 = \frac{2}{9} - \frac{9}{81} + \frac{1}{9} = \frac{2}{9} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2-1+3}{9} = \frac{4}{9} = \frac{2}{3}$$

☆ ۱۲۴ گزینه ۱

طبق دایره مثلثاتی داریم:



$$\cos \alpha = \sin(90^\circ + \alpha)$$

$$\cos 20^\circ = \sin 110^\circ$$

☆ ۱۲۵ گزینه ۳

اعداد بازه $(0, 1)$ ، هر چه به توان بزرگتری برسند کوچکتر می‌شوند و هر چه از آنها ریشه‌ی بیشتری بگیریم، بزرگتر می‌شوند، این امر برای اعداد بزرگتر از ۱ برعکس است.

$$0 < a < 1 \rightarrow \sqrt[5]{a} < \sqrt[4]{a}$$

$$1 < a \rightarrow \sqrt[4]{a} > \sqrt[5]{a}$$

☆ ۱۲۶ گزینه ۱

برای مربع کامل کردن، مربع نصف ضریب x را به طرفین معادله اضافه می‌کنیم.

$$2x^2 + 3x - 5 = 0 \xrightarrow{\div 2} x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{5}{2} = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{3}{2}x = \frac{5}{2}$$

$$\xrightarrow{+\left(\frac{3}{4}\right)^2} x^2 + \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{5}{2} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \Rightarrow \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{5}{2} + \frac{9}{16}$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{40+9}{16} \Rightarrow \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{49}{16} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{49}{16} \\ \text{فرض مسئله } (x+a)^2 = k \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = \frac{3}{4} \\ k = \frac{49}{16} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow a + k = \frac{3}{4} + \frac{49}{16} = \frac{12+49}{16} = \frac{61}{16}$$

☆ ۱۲۷ گزینه ۳

نزدیکترین اعداد توان چهار کامل به عدد ۲۵، ۸۱ و ۱۶ هستند:

$$16 < 25 < 81 \Rightarrow 2^4 < 25 < 3^4 \xrightarrow{\sqrt{\quad}} 2 < \sqrt{25} < 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m=2 \\ n=3 \end{cases} \Rightarrow m^2 - n^2 = 4 - 9 = -5$$

☆ ۱۲۸ گزینه ۴

پاسخ: می دانیم وقتی $\Delta < 0$ باشد معادله جواب حقیقی نخواهد داشت.

۱) $\Delta = 9 - 4(1)(1) = 9 - 4 = 5 > 0$ دو جواب

۲) $\Delta = 49 - 4(3)(2) = 49 - 24 = 25 > 0$ دو جواب

۳) $\Delta = 9 - 4(-2)(4) = 9 + 32 = 41 > 0$ دو جواب

۴) $\Delta = 9 - 4(1)(10) = 9 - 40 = -31 < 0$ جواب ندارد

☆ ۱۲۹ گزینه ۱

پاسخ: وقتی $\Delta = 0$ شود معادله ریشه مضاعف خواهد داشت.

۱) $\Delta = 144 - 4(4)(9) = 144 - 144 = 0 \rightarrow$ ریشه مضاعف: $(2x - 3)^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

۲) $\Delta = 16 - 4(3)(-2) = 16 + 24 = 40 > 0$ دو جواب

۳) $\Delta = 4 - 4(1)(3) = 4 - 12 = -8 < 0$ جواب ندارد

۴) $\Delta = 9 - 4(1)(-2) = 9 + 8 = 17 > 0$ دو جواب

☆ ۱۳۰ گزینه ۱

می دانیم سهمی متقارن است و طول رأس سهمی در وسط ریشه ها قرار دارد و محور تقارن نیز از رأس می گذرد:

$$S = (x, y) \Rightarrow x = \frac{-v + 3}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \Rightarrow x = -2$$

☆ ۱۳۱ گزینه ۳

باتوجه به نقطه ی رأس و $(0, 4)$ داریم:

$$\left. \begin{aligned} y = 2x^2 + bx + c \xrightarrow{(0,4)} 4 = 0 + 0 + c \Rightarrow c = 4 \\ \text{طول رأس: } \frac{-b}{2a} = \frac{-b}{4} = -3 \Rightarrow -b = -12 \Rightarrow b = 12 \end{aligned} \right\} \Rightarrow b + c = 16$$

☆ ۱۳۲ گزینه ۱

$$y = ax^2 + bx + c \begin{cases} \xrightarrow{(0,2)} 2 = 0 + 0 + c \Rightarrow \boxed{c=2} \\ \xrightarrow{(2,0)} 0 = 4a + 2b + 2 \Rightarrow 2(2a + b + 1) = 0 \Rightarrow 2a + b + 1 = 0 \\ \xrightarrow{(1,y)} y = a + b + 2 \xrightarrow{+a} y + a = 2a + b + 2 = \overbrace{2a + b + 1}^0 + 1 \Rightarrow y + a = 1 \Rightarrow y = 1 - a \end{cases}$$

☆ ۱۳۳ گزینه ۲

$$1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2} = 0 \Rightarrow 1^2 - 2 \times \frac{2}{x} + \left(\frac{2}{x}\right)^2 = 0 \Rightarrow \left(1 - \frac{2}{x}\right)^2 = 0 \Rightarrow 1 - \frac{2}{x} = 0 \Rightarrow \frac{2}{x} = 1$$

☆ ۱۳۴ گزینه ۱

$$-1 \leq 3x - 2 \leq 1 \xrightarrow{+2} 1 \leq 3x \leq 3 \xrightarrow{\div 3} \frac{1}{3} \leq x \leq 1$$

☆ ۱۳۵ گزینه ۱

$$3 - \frac{x}{2} > 1 \Rightarrow 2 > \frac{x}{2} \Rightarrow x < 4$$

فقط دو عدد اول ۲ و ۳ از ۴ کوچکترند.

☆ ۱۳۶ گزینه ۳

$$3x - 3 < 2x - 2 < x - 1 \Rightarrow \begin{cases} 3x - 3 < 2x - 2 \Rightarrow x < 1 \\ 2x - 2 < x - 1 \Rightarrow x < 1 \end{cases} \Rightarrow x < 1$$

☆ ۱۳۷ گزینه ۴

اگر مجموع ضرایب یک عبارت درجه دوم برابر با صفر باشند، یکی از ریشه ها $x = 1$ است.

☆ ۱۳۸ گزینه ۱

$$ax^2 + bx + c = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} x = 1 \text{ یکی از ریشه ها}$$

$$x^2 + bx + c = 0 \xrightarrow{b=c+1} x^2 + (c+1)x + c = 0 \xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}} (x+1)(x+c) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+1 = 0 \Rightarrow x = -1 \\ x+c = 0 \Rightarrow x = -c \end{cases}$$

گزینه ۲ ☆۱۳۹

$$\left(\frac{x+3}{2}\right)^2 = 4 \Rightarrow \sqrt{\frac{x+3}{2}} = \pm\sqrt{4} \Rightarrow \frac{x+3}{2} = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{x+3}{2} = 2 \Rightarrow x = 1 \\ \frac{x+3}{2} = -2 \Rightarrow x = -7 \text{ غق } (-7 < 0) \end{cases}$$

گزینه ۴ ☆۱۴۰

$$x^2 + 6x + 4 = -3x^2 + 6x + 5 \Rightarrow 4x^2 = 5 - 4 \Rightarrow 4x^2 = 1$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{2}$$

گزینه ۴ ☆۱۴۱

$$x(6x + 5) = 4 \Rightarrow 6x^2 + 5x = 4 \Rightarrow 6x^2 + 5x - 4 = 0 \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1, x_2 = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - (4 \times 6 \times -4)}}{2 \times 6} = \frac{-5 \pm \sqrt{121}}{12} = \frac{-5 \pm 11}{12}$$

جواب کوچک: $\frac{-5 - 11}{12} = \frac{-16}{12} = -\frac{4}{3}$

گزینه ۱ ☆۱۴۲

برای داشتن ریشه‌ی مضاعف باید $\Delta = 0$ باشد، بنابراین:

$$x^2 + ax + 1 = 0$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow a^2 - (4 \times 1 \times 1) = 0 \Rightarrow a^2 - 4 = 0 \Rightarrow (a - 2)(a + 2) = 0$$

$$\begin{cases} a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2 \\ a + 2 = 0 \Rightarrow a = -2 \end{cases} \Rightarrow a = 2 \text{ یا } a = -2$$

گزینه ۳ ☆۱۴۳

گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) \emptyset متناهی \Rightarrow مجموعه‌ی بدون عضو

۲) $\{N\} = N$ متناهی \Rightarrow مجموعه‌ی تک عضوی شامل حرف N

۳) $(1, 2)$ نامتناهی \Rightarrow بازه‌ای شامل بی‌شمار نقطه

۴) متناهی \Rightarrow مجموعه‌ای با تعداد اعضای مشخص = مجموعه اعداد اول دو رقمی

گزینه ۱ ☆۱۴۴

شیب هر خط برابر است با تانژانت زاویه‌ای که آن خط با جهت مثبت محور x ها می‌سازد.

$$3y = \sqrt{3}x + 5 \xrightarrow{\div 3} y = \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{3}}_{\text{شیب}} x + \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow \tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

گزینه ۳ ☆۱۴۵

$$\sqrt{0,25} = \sqrt{\frac{25}{100}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

با هم برابرند \Rightarrow

$$\sqrt[3]{0,125} = \sqrt[3]{\frac{125}{1000}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

گزینه ۲ ☆۱۴۶

هر معادله‌ی درجه دو با شرط $\Delta = 0$ یک ریشه‌ی مضاعف دارد که مقدار آن برابر با $-\frac{b}{2a}$ است.

راه اول:

$$9x^2 - 12x + c = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 12^2 - 4 \times 9 \times c = 0$$

$$\Rightarrow 144 - 36c = 0 \Rightarrow 36c = 144 \Rightarrow c = \frac{144}{36} = 4$$

$$\text{معادله } 9x^2 - 12x + 4 = 0 \Rightarrow (3x - 2)^2 = 0 \Rightarrow 3x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

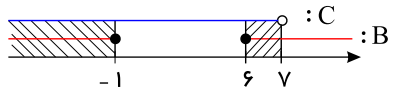
$$\text{ریشه ی مضاعف} = -\frac{b}{2a} = -\frac{-12}{2 \times 9} = \frac{2}{3}$$

راه دوم:

دقت: در روش دوم نیازی به محاسبه ی C نیست.

☆ ۱۴۷ گزینه ۲

$$B = (-1, 6) \Rightarrow B = R - B' = R - (-1, 6) = (-\infty, -1] \cup [6, +\infty)$$



$$\Rightarrow B \cap C = (-\infty - 1] \cup [6, 7)$$

$$(B \cap C) - \{-1, 6\} = \underbrace{(-\infty, -1)}_{\text{بزرگترین عدد صحیح این بازه -۲ است}} \cup \underbrace{(6, 7)}_{\text{فقط عدد صحیح است}}$$

☆ ۱۴۸ گزینه ۱

$$\left. \begin{array}{l} A' = \{3, 5\} \\ B' = \{2, 4, 5\} \end{array} \right\} \Rightarrow A' \cup B' = \{2, 3, 4, 5\} = C'$$

☆ ۱۴۹ گزینه ۳

$$a_1 = 64$$

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{32}{64} = \frac{1}{2}$$

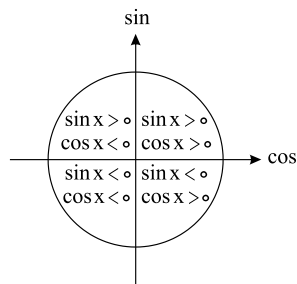
$$a_n = a_1 q^{n-1} \Rightarrow 16^{-1} = 64 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow (2^4)^{-1} = 2^6 \times 2^{-(n-1)}$$

$$\Rightarrow 2^{-4} = 2^6 \times 2^{-n+1} \Rightarrow 2^{-4} = 2^{6-n+1} \Rightarrow 2^{-4} = 2^{7-n}$$

$$\Rightarrow -4 = 7 - n \Rightarrow n = 7 + 4 = 11$$

☆ ۱۵۰ گزینه ۲

در ربع دوم یا چهارم واقع است $\Rightarrow \sin x, \cos x$ مختلف علامت اند $\Rightarrow \sin x \cos x < 0$



پاسخنامه کلیدی

۱ ☆ ۳	۳۱ ☆ ۴	۶۱ ☆ ۴	۹۱ ☆ ۴	۱۲۱ ☆ ۲
۲ ☆ ۱	۳۲ ☆ ۴	۶۲ ☆ ۲	۹۲ ☆ ۴	۱۲۲ ☆ ۴
۳ ☆ ۲	۳۳ ☆ ۴	۶۳ ☆ ۴	۹۳ ☆ ۲	۱۲۳ ☆ ۴
۴ ☆ ۲	۳۴ ☆ ۴	۶۴ ☆ ۳	۹۴ ☆ ۱	۱۲۴ ☆ ۱
۵ ☆ ۳	۳۵ ☆ ۲	۶۵ ☆ ۱	۹۵ ☆ ۱	۱۲۵ ☆ ۳
۶ ☆ ۴	۳۶ ☆ ۴	۶۶ ☆ ۲	۹۶ ☆ ۴	۱۲۶ ☆ ۱
۷ ☆ ۲	۳۷ ☆ ۲	۶۷ ☆ ۳	۹۷ ☆ ۳	۱۲۷ ☆ ۳
۸ ☆ ۴	۳۸ ☆ ۳	۶۸ ☆ ۳	۹۸ ☆ ۴	۱۲۸ ☆ ۴
۹ ☆ ۳	۳۹ ☆ ۱	۶۹ ☆ ۴	۹۹ ☆ ۳	۱۲۹ ☆ ۱
۱۰ ☆ ۲	۴۰ ☆ ۲	۷۰ ☆ ۱	۱۰۰ ☆ ۳	۱۳۰ ☆ ۱
۱۱ ☆ ۳	۴۱ ☆ ۳	۷۱ ☆ ۲	۱۰۱ ☆ ۴	۱۳۱ ☆ ۳
۱۲ ☆ ۳	۴۲ ☆ ۲	۷۲ ☆ ۳	۱۰۲ ☆ ۳	۱۳۲ ☆ ۱
۱۳ ☆ ۳	۴۳ ☆ ۲	۷۳ ☆ ۳	۱۰۳ ☆ ۱	۱۳۳ ☆ ۲
۱۴ ☆ ۱	۴۴ ☆ ۲	۷۴ ☆ ۳	۱۰۴ ☆ ۲	۱۳۴ ☆ ۱
۱۵ ☆ ۱	۴۵ ☆ ۴	۷۵ ☆ ۳	۱۰۵ ☆ ۳	۱۳۵ ☆ ۱
۱۶ ☆ ۲	۴۶ ☆ ۳	۷۶ ☆ ۳	۱۰۶ ☆ ۳	۱۳۶ ☆ ۳
۱۷ ☆ ۳	۴۷ ☆ ۲	۷۷ ☆ ۱	۱۰۷ ☆ ۲	۱۳۷ ☆ ۴
۱۸ ☆ ۳	۴۸ ☆ ۳	۷۸ ☆ ۴	۱۰۸ ☆ ۲	۱۳۸ ☆ ۱
۱۹ ☆ ۴	۴۹ ☆ ۴	۷۹ ☆ ۱	۱۰۹ ☆ ۳	۱۳۹ ☆ ۲
۲۰ ☆ ۱	۵۰ ☆ ۱	۸۰ ☆ ۲	۱۱۰ ☆ ۴	۱۴۰ ☆ ۴
۲۱ ☆ ۴	۵۱ ☆ ۳	۸۱ ☆ ۴	۱۱۱ ☆ ۲	۱۴۱ ☆ ۴
۲۲ ☆ ۴	۵۲ ☆ ۳	۸۲ ☆ ۱	۱۱۲ ☆ ۲	۱۴۲ ☆ ۱
۲۳ ☆ ۴	۵۳ ☆ ۱	۸۳ ☆ ۲	۱۱۳ ☆ ۱	۱۴۳ ☆ ۳
۲۴ ☆ ۲	۵۴ ☆ ۳	۸۴ ☆ ۲	۱۱۴ ☆ ۳	۱۴۴ ☆ ۱
۲۵ ☆ ۳	۵۵ ☆ ۲	۸۵ ☆ ۱	۱۱۵ ☆ ۴	۱۴۵ ☆ ۳
۲۶ ☆ ۳	۵۶ ☆ ۲	۸۶ ☆ ۲	۱۱۶ ☆ ۱	۱۴۶ ☆ ۲
۲۷ ☆ ۲	۵۷ ☆ ۱	۸۷ ☆ ۱	۱۱۷ ☆ ۴	۱۴۷ ☆ ۲
۲۸ ☆ ۳	۵۸ ☆ ۲	۸۸ ☆ ۳	۱۱۸ ☆ ۲	۱۴۸ ☆ ۱
۲۹ ☆ ۱	۵۹ ☆ ۲	۸۹ ☆ ۴	۱۱۹ ☆ ۱	۱۴۹ ☆ ۳
۳۰ ☆ ۲	۶۰ ☆ ۱	۹۰ ☆ ۴	۱۲۰ ☆ ۳	۱۵۰ ☆ ۲