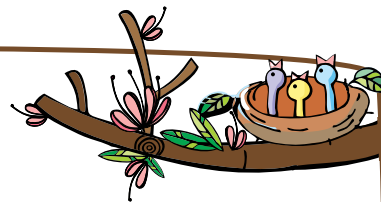


تاریخ آزمون: ۱۳۹۸/۰۱/۰۲
 زمان برگزاری: ۱۸۰۰۰ دقیقه



نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: ریاضی یازدهم ساده

۱ ☆ در توزیع فراوانی داده های پیوسته، کدام نمودار مناسب است؟

- ۱ مستطیلی ۲ چند بر فراوانی ۳ میله ای ۴ دایره ای
- پاسخ: گزینه ۲ در توزیع فراوانی داده های پیوسته، نمودار چند بر فراوانی مناسب است.

۲ ☆ در تابع با ضابطه $f(x) = (x+a)[x]$ اگر $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3$ باشد، عدد حقیقی a کدام است؟

- ۱ ۱ ۲ ۲ ۳ -۱ ۴ ۰

پاسخ: گزینه ۱

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3 \Rightarrow (2+a)[2^+] - (2+a)[2^-] = 3$$

$$\Rightarrow (2+a)(2) - (2+a)(1) = 3 \Rightarrow 4 + 2a - 2 - a = 3 \Rightarrow a = 1$$

۳ ☆ تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{x - \sqrt{2x}}{2 - x} & ; x \neq 2 \\ a & ; x = 2 \end{cases}$ ، به ازای کدام مقدار a ، در نقطه $x = 2$ پیوسته است؟

- ۱ -۲ ۲ -۱ ۳ $-\frac{1}{2}$ ۴ ۱

پاسخ: گزینه ۳

شرط پیوستگی تابع f در $x = a$ این است که حد راست و حد چپ و مقدار تابع در موجود و متناهی و باهم برابر باشند.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{2x}}{2 - x} \stackrel{\text{Hop}}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - \frac{1(2)}{2\sqrt{2x}}}{-1} = -\frac{1}{2}$$

پس $f(2) = a = -\frac{1}{2}$ است

۴ ☆ اگر $4^a = 2\sqrt{2}$ ، لگاریتم $(4a + 1)$ در پایه ۴ کدام است؟

- ۱ ۱ ۲ $\sqrt{2}$ ۳ ۲ ۴ $\frac{3}{2}$

پاسخ: گزینه ۱

$$4^a = 2\sqrt{2} \Rightarrow 2^{2a} = 2^{\frac{3}{2}} \Rightarrow 2a = \frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{3}{4}$$

$$\log_4^{(4a+1)} = \log_4^{(4 \times \frac{3}{4} + 1)} = \log_4^4 = 1$$

۵ ☆ از بین ۵ مهره ی سفید و ۳ مهره ی سیاه سه مهره به تصادف انتخاب می کنیم چقدر احتمال دارد هر سه مهره هم رنگ باشند؟

- ۱ $\frac{11}{28}$ ۲ $\frac{11}{112}$ ۳ $\frac{11}{56}$ ۴ $\frac{11}{168}$

پاسخ: گزینه ۳

$$n(S) = \binom{8}{3} = \frac{8 \times 7 \times 6}{6} = 56$$

هر ۳ مهره هم رنگ باشند یعنی هر ۳ سفید یا هر ۳ سیاه باشند.



$$n(A) = \binom{5}{3} + \binom{3}{3} = 10 + 1 = 11$$

پس $P(A) = \frac{11}{56}$ است.

۶ ☆ اگر $\sin x + \cos x = -\sqrt{2}$ باشد حاصل $\sin^4 x + \cos^4 x$ چقدر است؟

$\frac{1}{8}$ (۴)

$\frac{1}{4}$ (۳)

$\frac{1}{2}$ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

با کمی دقت متوجه می‌شویم که زاویه $x = \frac{-3\pi}{4}$ است. زیرا $\sin(-\frac{3\pi}{4}) + \cos(-\frac{3\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$ (زیرا است)

$$\sin^4 x + \cos^4 x \stackrel{x = -\frac{3\pi}{4}}{=} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

دقت کنید که $\sin(-\frac{3\pi}{4}) = -\sin \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\cos(-\frac{3\pi}{4}) = \cos \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ است.

۷ ☆ در پرتاب دو تاس احتمال آنکه هر دو تاس فرد ظاهر شوند چقدر است؟

$\frac{3}{8}$ (۴)

$\frac{1}{4}$ (۳)

$\frac{1}{8}$ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

$$n(S) = 6^2 = 36$$

$$A = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (5, 1), (5, 3), (5, 5)\} \Rightarrow n(A) = 9$$

پس $P(A) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$ است.

۸ ☆ از سه دانش آموز رشته‌ی ریاضی و دو دانش آموز رشته‌ی تجربی، دو نفر به تصادف انتخاب می‌کنیم چقدر احتمال دارد هر دو هم رشته باشند؟

$\frac{1}{10}$ (۴)

$\frac{1}{2}$ (۳)

$\frac{3}{10}$ (۲)

$\frac{2}{5}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

$$n(S) = \binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$$

$$n(A) = \binom{3}{2} + \binom{2}{2} = 3 + 1 = 4$$

هر دو هم رشته باشند یعنی هر دو ریاضی یا هر دو تجربی باشند.

پس $P(A) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ است.

۹ ☆ اگر $\tan x = 2$ باشد حاصل کسر $\frac{3 \sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x}$ کدام است؟

۱۳ (۴)

۵ (۳)

۱۲ (۲)

۷ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

$$\frac{3 \sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{3 \sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 3 \tan^2 x + 1 = 12 + 1 = 13$$

۱۰. اگر $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 5}{x^2 + 4x + 7}$ باشد، $f(\sqrt{3} - 2)$ کدام است؟

- ۱ $\frac{5}{7}$ ۲ $\frac{3}{5}$ ۳ $\frac{2}{3}$ ۴ $\frac{1}{3}$

پاسخ: گزینه ۳

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x + 5}{x^2 + 4x + 7} \rightarrow f(x) = \frac{x^2 + 4x + 4 + 1}{x^2 + 4x + 4 + 3}$$

$$\rightarrow f(x) = \frac{(x+2)^2 + 1}{(x+2)^2 + 3} \Rightarrow f(\sqrt{3} - 2) = \frac{(\sqrt{3})^2 + 1}{(\sqrt{3})^2 + 3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

۱۱. حاصل $\log_{\sqrt{r}}^{\sqrt{r}} + \log_{\sqrt{r}}^r$ چقدر است؟

- ۱ $\frac{11}{12}$ ۲ $\frac{7}{12}$ ۳ $\frac{19}{24}$ ۴ $\frac{7}{4}$

پاسخ: گزینه ۱

می‌دانیم: $\log_{k^m}^n = \frac{n}{m} \log_k^a$

$$\log_{\sqrt{r}}^{\sqrt{r}} + \log_{\sqrt{r}}^r = \log_{\sqrt{r}}^{\sqrt{r}} + \log_{\sqrt{r}}^{\sqrt{r}^2} = \frac{1}{\sqrt{r}} + \log_{\sqrt{r}}^{\sqrt{r}^2} = \frac{1}{\sqrt{r}} + \frac{2}{\sqrt{r}} = \frac{3}{\sqrt{r}} = \frac{3+8}{12} = \frac{11}{12}$$

۱۲. اگر تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x}} + 2 & x > 0 \\ 3x - a & x \leq 0 \end{cases}$ در $x = 0$ پیوسته باشد a کدام است؟

- ۱ ۰ ۲ -۲ ۳ ۲ ۴ ۱

پاسخ: گزینه ۲

کافی است که حد راست و حد چپ و مقدار تابع را در $x = 0$ بدست آوریم.

$$\left. \begin{aligned} f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (3x - a) = (3 \times 0) - a = -a \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x}{\sqrt{x}} + 2 \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt{x} + 2) = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -a = 2 \Rightarrow a = -2$$

۱۳. اگر $f = \{(1, 3), (2, 5)\}$ و $g = \{(2, 3), (5, 1)\}$ مجموعه $f + 2g$ کدام است؟

- ۱ $\{(2, 11)\}$ ۲ $\{(2, 7)\}$ ۳ $\{(1, 4), (2, 7)\}$ ۴ $\{(1, 4), (2, 11)\}$

پاسخ: گزینه ۱

تمام عملیات جبری، روی مولفه‌ی دوم انجام می‌شود.

$$f = \{(1, 3), (2, 5)\} \\ 2g = \{(2, 6), (5, 2)\} \Rightarrow f + 2g = \{(2, 11)\}$$

۱۴. تابع $f(x) = \begin{cases} a \sin 3x & ; 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ b \cos 2x & ; \frac{\pi}{2} < x \leq 2\pi \end{cases}$ با شرط $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$ در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ پیوسته است. مقدار $a - b$ کدام است؟

- ۱ -۵ ۲ ۰ ۳ ۴ ۴ -۴

پاسخ: گزینه ۲

چون تابع داده شده در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ پیوسته است پس در هر نقطه‌ی بین 0 و 2π نیز باید پیوسته باشد، بنابراین کافی است شرط پیوستگی را (تساوی حد راست و حد چپ و مقدار تابع) را در $x = \frac{\pi}{2}$ اعمال کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} f(x) = a \sin \frac{3\pi}{2} = -a = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} f(x) = b \cos \pi = -b = 2 \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -2 \end{cases} \Rightarrow a - b = 0$$

۱۵ ☆ گروه خونی افراد کدام نوع متغیر است؟

- ۱ کمی - گسسته ۲ کیفی - ترتیبی ۳ کمی - پیوسته ۴ کیفی - اسمی

پاسخ: گزینه ۴ گروه خونی، قابل اندازه گیری نیست و ترتیب خاصی در آن وجود ندارد، بنابراین کیفی اسمی است.

۱۶ ☆ در ۶۰ داده‌ی آماری، میانگین ۳ و انحراف معیار ۱٫۲ محاسبه شده است. اگر به تمام داده‌ها ۹ واحد اضافه شود، ضریب تغییرات داده‌های جدید کدام است؟

- ۱ ۰٫۱ ۲ ۰٫۲ ۳ ۰٫۳ ۴ ۰٫۴

پاسخ: گزینه ۱

$$C_{V_{\text{قدیم}}} = \frac{\sigma}{\bar{x}} \rightarrow C_{V_{\text{جدید}}} = \frac{\sigma}{\bar{x} + 9} \Rightarrow \frac{1,2}{3+9} = \frac{1,2}{12} = \frac{1}{10}$$

به داده‌ها ۹ واحد اضافه کنیم انحراف معیار تغییر نمی‌کند ولی به میانگین ۹ واحد اضافه می‌شود.

۱۷ ☆ حاصل $\log_{\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} + \log_{\sqrt{3}}^9$ کدام است؟

- ۱ $\frac{17}{4}$ ۲ $\frac{5}{2}$ ۳ ۴ ۴ $\frac{5}{4}$

پاسخ: گزینه ۱

$$\log_{km}^a = \frac{n}{m} \log_k^a \quad \text{می‌دانیم:}$$

$$\log_{\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} + \log_{\sqrt{3}}^9 = \log_{\sqrt{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \log_{\sqrt{3}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \log_{\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{3}} \log_{\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = \frac{1}{4} + 4 = \frac{17}{4}$$

۱۸ ☆ به داده‌های ۸ و ۷ و ۶ و ۳ کدام داده را اضافه کنیم تا میانگین داده‌های حاصل یک واحد اضافه گردد؟

- ۱ ۸ ۲ ۹ ۳ ۱۰ ۴ ۱۱

پاسخ: گزینه ۴

$$3 + 6 + 7 + 8 = 24 \rightarrow \bar{x} = \frac{24}{4} = 6$$

$$6 + 1 = \frac{24 + x}{5} \rightarrow 35 = 24 + x \rightarrow x = 11$$

فرض می‌کنیم داده‌ی x را اضافه کرده‌ایم پس داریم:

۱۹ ☆ در پرتاب دو تاس احتمال آن که مجموع دو تاس بیشتر از چهار باشد، کدام است؟

- ۱ $\frac{1}{6}$ ۲ $\frac{1}{2}$ ۳ $\frac{1}{3}$ ۴ $\frac{5}{6}$

پاسخ: گزینه ۴

$$n(S) = 6^2 = 36$$

متمم پیشامد این که مجموع دو تاس بیش تر از ۴ باشد، این است که مجموع دو تاس کوچک تر یا مساوی ۴ باشد:

$$A' = \left\{ \overbrace{(1,3)(2,2)(3,1)}^4, \overbrace{(1,2)(2,1)}^3, \overbrace{(1,1)}^2 \right\} \Rightarrow n(A') = 6$$

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{6}{36} = \frac{5}{6}$$

۲۰ ☆ حاصل $\log_6 \sqrt[2]{3} + \log_6 \sqrt[3]{2}$ کدام است؟

- ۱ $\frac{1}{2}$ ۲ ۳ ۳ $\frac{3}{2}$ ۴ $\frac{3}{2}$

پاسخ: گزینه ۳

می‌دانیم: $\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}$, $\log_k^{a^n} = n \log_k^a$

$$\log_6 \sqrt[2]{3} + \log_6 \sqrt[3]{2} = \log_6 \sqrt[6]{6} = \log_6^{6 \times \frac{1}{6}} = \log_6^1 = \frac{1}{1} = 1$$

۲۱ ☆ در پرتاب دو تاس احتمال آنکه مجموع دو تاس ۶ باشد چقدر است؟

- ۱ $\frac{5}{36}$ ۲ $\frac{6}{36}$ ۳ $\frac{4}{36}$ ۴ $\frac{3}{36}$

پاسخ: گزینه ۱

$$n(S) = 6^2 = 36$$

$$A = \{(1, 5), (5, 1), (2, 4), (4, 2), (3, 3)\} \Rightarrow n(A) = 5$$

$$P(A) = \frac{5}{36}$$

۲۲ ☆ دامنه‌ی تعریف تابع $y = \sqrt{|x|-1} + \sqrt{|x|+1}$ کدام است؟

- ۱ $R - [-1, 1]$ ۲ R ۳ $[-1, 1]$ ۴ $R - (-1, 1)$

پاسخ: گزینه ۴ زیر رادیکال دوم همواره مثبت است، فقط کافی است زیر رادیکال اول را بزرگ‌تر مساوی صفر قرار دهیم.

$$|x| - 1 \geq 0 \Rightarrow |x| \geq 1 \Rightarrow x \geq 1 \text{ یا } x \leq -1 \Rightarrow D_f = R - (-1, 1)$$

۲۳ ☆ اگر $f(\sqrt{x}) = x + \sqrt{x}$ باشد حاصل $f(2) + f(1)$ کدام است؟

- ۱ ۶ ۲ ۸ ۳ ۴ ۴ ۲

پاسخ: گزینه ۲

$$f(\sqrt{x}) = x + \sqrt{x}$$

$$x = 1 \Rightarrow f(1) = 1 + \sqrt{1} = 2$$

$$x = 4 \Rightarrow f(2) = 4 + \sqrt{4} = 6$$

$$\Rightarrow 2 + 6 = 8$$

۲۴ ☆ اگر $\sin x + \cos x = 1$ باشد حاصل $\sin^2(x - \frac{\pi}{4}) + \cos^2(x + \frac{\pi}{4})$ کدام است؟

- ۱ $\frac{1}{2}$ ۲ $\sqrt{2}$ ۳ ۲ ۴ ۱

پاسخ: گزینه ۴

$$\sin x + \cos x = 1 \Rightarrow x = 0 \text{ داریم}$$

$$\sin^2(x - \frac{\pi}{4}) + \cos^2(x + \frac{\pi}{4}) \stackrel{x=0}{=} \sin^2(-\frac{\pi}{4}) + \cos^2(\frac{\pi}{4}) = \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

۲۵ ☆ در پرتاب دو تاس احتمال آنکه مجموع دو تاس از ۷ کمتر باشد کدام است؟

- ۱ $\frac{1}{3}$ ۲ $\frac{1}{2}$ ۳ $\frac{7}{12}$ ۴ $\frac{5}{12}$

پاسخ: گزینه ۴

$$n(S) = 6^2 = 36$$

$$\begin{aligned} 6 &\Rightarrow (1, 5), (5, 1), (2, 4), (4, 2), (3, 3) \\ 5 &\Rightarrow (1, 4), (4, 1), (2, 3), (3, 2) \\ 4 &\Rightarrow (1, 3), (3, 1), (2, 2) \\ 3 &\Rightarrow (1, 2), (2, 1) \\ 2 &\Rightarrow (1, 1) \end{aligned} \Rightarrow n(A) = 15$$

پس $P(A) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$ است.

۲۶ ☆ خطی که از نقاط $(-1, 1)$ و $(2, 2)$ می گذرد با محورهای مختصات چه مساحتی می سازد؟

$\frac{8}{3}$ (۴)

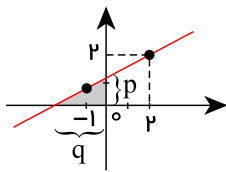
$\frac{4}{3}$ (۳)

$\frac{16}{3}$ (۲)

$\frac{2}{3}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

ابتدا معادله ی خطی که از دو نقطه ی $A \left| \begin{matrix} -1 \\ 1 \end{matrix} \right.$ و $B \left| \begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} \right.$ می گذرد را می نویسیم.



$$AB: \frac{y - y_A}{x - x_A} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} \rightarrow \frac{y - 1}{x + 1} = \frac{1 - 2}{-1 - 2} = \frac{1}{3} \rightarrow 3y - 3 = x + 1 \rightarrow 3y = x + 4$$

حال عرض از مبدا و طول از مبدا خط را حساب می کنیم.

$$x = 0 \rightarrow y = \frac{4}{3} : q, \quad y = 0 \rightarrow x = -4 : p$$

$$S = \frac{1}{2} |pq| = \frac{1}{2} \left| -\frac{16}{3} \right| = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$$

۲۷ ☆ اگر $\log_b^a = \frac{3}{2}$ آنگاه $\log_{\sqrt{b}}^{ab^2}$ کدام است؟

۷ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

می دانیم: $\log_k^{ab} = \log_k^a + \log_k^b, \quad \log_{km}^a = \frac{n}{m} \log_k^a$

$$\log_{\sqrt{b}}^{ab^2} = \log_{\sqrt{b}}^a + \log_{\sqrt{b}}^{b^2} = \log_{\frac{1}{b}}^a + \log_{\frac{1}{b}}^{b^2} = 2 \log_b^a + 4 = 2 \left(\frac{3}{2} \right) + 4 = 7$$

۲۸ ☆ تابع با ضابطه ی $f(x) = \begin{cases} \sin x + 2 \cos x & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ -\cos 2x & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$ با تعریف $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ از نظر پیوستگی در نقطه ی $x = \frac{\pi}{2}$ چگونه است؟

(۲) از چپ پیوسته - از راست ناپیوسته

(۱) از چپ ناپیوسته - از راست پیوسته

(۴) از چپ پیوسته - از راست پیوسته

(۳) از چپ ناپیوسته - از راست ناپیوسته

پاسخ: گزینه ۴

کافی است که حد راست و حد چپ و مقدار تابع را در $x = \frac{\pi}{2}$ بدست آوریم.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} (-\cos 2x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} (\sin x + 2 \cos x) = 1 \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{تابع در } x = \frac{\pi}{2} \text{ پیوسته است.}$$

۲۹ ☆ در آزمایشگاهی ۵ موش سالم و ۳ موش دیابتی نگهداری می شوند، اگر دو موش از محفظه گریخته باشند، با کدام احتمال فقط یکی از موش های فراری دیابتی است؟

$\frac{15}{28}$ (۴)

$\frac{3}{8}$ (۳)

$\frac{5}{14}$ (۲)

$\frac{15}{56}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

$n(S) = \binom{8}{2} = \frac{8 \times 7}{2} = 28$

$n(A) = \binom{3}{1} \times \binom{5}{1} = 3 \times 5 = 15$
 یک دیابتی یک سالم

پس $P(A) = \frac{15}{28}$ است.

۳۰ ☆ اندازه‌ی قد ۱۲۰ دانش آموز، در جدول زیر دسته بندی شده است. فراوانی دسته‌ی چهارم کدام است؟

مرکز دسته	۱۵۵	۱۵۸	۱۶۱	۱۶۴	۱۶۷	۱۷۰
درصد فراوانی نسبی	۱۰	۱۵	۱۸	x	۲۰	۱۲

۳۰ (۴)

۲۵ (۳)

۲۴ (۲)

۲۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۴ مجموع درصد فراوانی‌های نسبی برابر ۱۰۰ است بنابراین داریم:

$10 + 15 + 18 + x + 20 + 12 = 100 \Rightarrow x = 25$

فراوانی مطلق $\times 100 =$ درصد فراوانی نسبی \Rightarrow درصد فراوانی نسبی $= \frac{\text{فراوانی مطلق}}{\text{تعداد کل داده ها}} \times 100$

$\Rightarrow 25 = \frac{F_f}{120} \times 100 \Rightarrow F_f = 30$

۳۱ ☆ دسته خطوطی که از نقطه‌ی $A|_p^1$ می گذرند کدامشان بر خط $y = x + 1$ عمود است؟

$y = -x + 3$ (۴)

$y = x - 1$ (۳)

$y = x + 1$ (۲)

$y = -x - 1$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴ گزینه‌ای درست است که نقطه‌ی $A|_p^1$ در آن صدق کند و در ضمن شیب خط برابر -1 باشد زیرا:

$y = x + 1 \rightarrow m = 1 \xrightarrow{\text{عمود}} m' = -1$

۳۲ ☆ دامنه‌ی تعریف تابع $y = \frac{x}{[x] + 1}$ کدام است؟

$R - [0, 1]$ (۴)

$R - (-1, 0]$ (۳)

$R - (-1, 0)$ (۲)

$R - [-1, 0)$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

مخرج $= 0 \Rightarrow [x] + 1 = 0 \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow -1 \leq x < 0 \Rightarrow D_f = R - [-1, 0)$

۳۳ ☆ اگر میانگین داده های a و b و c و d برابر 5 و واریانس آن ها برابر صفر باشد میانگین داده های a و b و c و d و $(c + d)$ و $(a + b)$ کدام است؟ (با کمی تغییر)

۸ (۴)

$\frac{40}{3}$ (۳)

$\frac{20}{3}$ (۲)

۱۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ چون واریانس داده ها صفر است پس تمام داده ها برابرند از طرفی چون میانگین ۵ است بنابراین: $a = b = c = d = 5$

$\bar{x} = \frac{a + b + c + d + c + d + a + b}{6} = \frac{40}{6} = \frac{20}{3}$



محمد گنجی

۳۴ ☆ اگر در یک خانواده احتمال به دنیا آمدن فرزند دختر ۶۰٪ و پسر ۴۰٪ باشد احتمال آنکه هر سه فرزند این خانواده پسر باشد چقدر است؟

۰,۰۰۸ (۴)

۰,۰۰۸ (۳)

۰,۰۶۴ (۲)

۰,۰۶۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۱ چون جنسیت تولد نوزاد پیشامدی مستقل است لذا احتمال به دنیا آمدن هر پسر برابر $\frac{۴}{۱۰}$ است.

$$P(\text{هر سه فرزند پسر}) = \frac{۴}{۱۰} \times \frac{۴}{۱۰} \times \frac{۴}{۱۰} = ۰,۰۶۴$$

۳۵ ☆ در معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2 + 3x - 1 = 0$ حاصل $x_1^3 + 3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2 + x_2^3$ کدام است؟

۲۷ (۴)

-۲۷ (۳)

-۹ (۲)

۹ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

توجه کنید که $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -3$ است.

$$\text{پس: } x_1^3 + 3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 = (-3)^3 = -27$$

توجه کنید $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$ می باشد.

۳۶ ☆ حاصل $\log_{\frac{1}{9}} \sqrt[3]{\frac{3}{9}}$ کدام است؟

$-\frac{3}{2}$ (۴)

$\frac{3}{2}$ (۳)

$-\frac{3}{4}$ (۲)

$\frac{3}{4}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

$$\log_{\frac{1}{9}}^n = \frac{n \log_k a}{m \log_k a}$$

$$\log_{\frac{1}{9}} \sqrt[3]{\frac{3}{9}} = \log_{\frac{1}{9}} \frac{3^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{2}{3}}} = \log_{\frac{1}{9}} 3^{-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \times \left(-\frac{1}{3}\right) \log_{\frac{1}{9}} 3 = -\frac{3}{4}$$

۳۷ ☆ در کدام بررسی، اندازه‌ی نمونه برابر اندازه‌ی جامعه است؟

با متغیر کیفی (۴)

نمونه تصادفی (۳)

دسته بندی (۲)

سرشماری (۱)

پاسخ: گزینه ۱ در سرشماری، تمام افراد جامعه را مورد مطالعه قرار می دهیم.

۳۸ ☆ نه عدد گوی یکسان با شماره های ۱ تا ۹ داخل ظرفی قرار دارند. به طور تصادفی دو گوی از ظرف بیرون می آوریم احتمال آن که شماره های هر دو گوی عدد زوج باشد کدام است؟

$\frac{1}{6}$ (۴)

$\frac{3}{8}$ (۳)

$\frac{1}{4}$ (۲)

$\frac{1}{3}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

$$n(S) = \binom{9}{2} = \frac{9 \times 8}{2} = 36$$

$$n(A) = \binom{4}{2} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$$

اعداد زوج ۲, ۴, ۶, ۸ هستند بنابراین داریم:

$$\text{پس } P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \text{ است.}$$

۳۹ ☆ تاسی را دوبار می اندازیم. احتمال آن که عددی که بار دوم ظاهر می شود از عدد بار اول کوچک تر باشد چقدر است؟

$\frac{1}{3}$ (۴)

$\frac{5}{12}$ (۳)

$\frac{1}{2}$ (۲)

$\frac{11}{36}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

$$n(S) = 6^2 = 36$$

تاس اول	تاس دوم
۲	۱
۳	۱, ۲
۴	۱, ۲, ۳
۵	۱, ۲, ۳, ۴
۶	۱, ۲, ۳, ۴, ۵

$\Rightarrow n(A) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$

پس $P(A) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$ است.

۴۰. اگر A و B دو پیشامد ناسازگار و $P(A) = \frac{1}{5}$ و $P(A \cup B) = \frac{3}{5}$ ، $P(B)$ کدام است؟

$\frac{1}{2}$ (۴)

$\frac{1}{3}$ (۳)

$\frac{4}{5}$ (۲)

$\frac{2}{5}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱ چون A و B ناسازگارند $P(A \cap B) = 0$ می باشد پس:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{1}{5} + P(B) \Rightarrow P(B) = \frac{2}{5}$$

۴۱. اگر A و B دو پیشامد باشند $P(B) + P(A - B)$ برابر است با:

$P(A \cap B)$ (۴)

$P(B)$ (۳)

$P(A \cup B)$ (۲)

$P(A)$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

می دانیم: $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

$$P(B) + P(A - B) = P(B) + P(A) - P(A \cap B) = P(A \cup B)$$

۴۲. دو تاس را می ریزیم اگر مجموع دو عدد رو شده ۷ باشد احتمال آن که یکی از آن ها ۵ باشد چقدر است؟

$\frac{1}{4}$ (۴)

$\frac{1}{5}$ (۳)

$\frac{1}{6}$ (۲)

$\frac{1}{3}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

$$S_{جدید} = \{(1, 6)(6, 1)(2, 5)(5, 2)(3, 4)(4, 3)\} \Rightarrow n(S) = 6$$

$$A = \{(2, 5)(5, 2)\} \Rightarrow n(A) = 2$$

پس $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ است.

۴۳. در آزمایش ریختن دو تاس همگن اگر حاصلضرب دو عدد رو شده برابر ۶ باشد احتمال آن که مجموع آن ها ۵ باشد چقدر است؟

$\frac{1}{4}$ (۴)

$\frac{1}{3}$ (۳)

$\frac{1}{2}$ (۲)

$\frac{2}{3}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

$$S_{جدید} = \{(1, 6)(6, 1)(2, 3)(3, 2)\} \Rightarrow n(S) = 4$$

$$A = \{(2, 3)(3, 2)\} \Rightarrow n(A) = 2$$

پس $P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ است.



۴۴ ☆ اگر A و B دو پیشامد مستقل بوده و $P(A) = \frac{2}{3}$ و $P(B) = \frac{1}{4}$ باشد $P(A \cup B)$ کدام است؟

$\frac{5}{12}$ (۴)

$\frac{2}{12}$ (۳)

$\frac{11}{12}$ (۲)

$\frac{9}{12}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{1}{4} - \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{4}\right) = \frac{11}{12} - \frac{2}{12} = \frac{9}{12}$$

۴۵ ☆ اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند و $P(A) = 0.2$ و $P(A \cup B) = 0.4$ باشد $P(B)$ کدام است؟

0.15 (۴)

0.2 (۳)

0.25 (۲)

0.3 (۱)

پاسخ: گزینه ۲ اگر $P(B) = x$ باشد.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)$$

$$0.4 = 0.2 + x - 0.2x \Rightarrow 0.2 = 0.8x \Rightarrow x = \frac{1}{4} = 0.25$$

۴۶ ☆ اگر A و B دو پیشامد مستقل از یک آزمون تصادفی باشند و $P(A) = 0.8$ و $P(B) = 0.2$ آنگاه $P(A' \cap B')$ کدام است؟

0.2 (۴)

0.12 (۳)

0.32 (۲)

0.88 (۱)

پاسخ: گزینه ۳

$$\begin{cases} P(B) = 0.8 \\ P(A) = 0.2 \end{cases}$$

چون A و B مستقلند A' و B' نیز مستقلند پس:

$$P(A' \cap B') = P(A') \times P(B') = 0.6 \times 0.2 = 0.12$$

۴۷ ☆ عددی به تصادف از فضای نمونه ای $\{1, 2, \dots, 9\}$ انتخاب می کنیم. احتمال آن که عدد انتخاب شده زوج یا مضرب ۳ باشد کدام است؟

$\frac{5}{9}$ (۴)

$\frac{4}{9}$ (۳)

$\frac{2}{3}$ (۲)

$\frac{1}{3}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

$$n(S) = 9, A = \{2, 3, 4, 6, 8, 9\} \Rightarrow n(A) = 6$$

$$\text{پس } P(A) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

۴۸ ☆ اگر $S = \{a, b, 1, 2\}$ یک فضای نمونه ای باشد کدام مجموعه زیر مجموعه یک پیشامد از این فضا می باشد؟

$\{a, 1, 2\}$ (۴)

$\{a, b, c\}$ (۳)

$\{1, a, 3\}$ (۲)

$\{1, 2, c\}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴ پیشامد باید زیرمجموعه ای از فضای نمونه ای باشد.

۴۹ ☆ یک صندوق محتوی ۱۰ عدد ساعت مچی است. چهار عدد از این ساعت ها در حالی که هیچ نوع علائم ظاهری ندارند. خراب می باشند.

شخصی از این صندوق ۳ ساعت به طور تصادفی با هم بیرون می آورد. احتمال آن که هر سه ساعت خراب باشد برابر است با:

$\frac{\binom{4}{3}}{\binom{10}{3}}$ (۴)

$\frac{\binom{10}{3}}{\binom{10}{4}}$ (۳)

$\frac{\binom{7}{3}}{\binom{10}{4}}$ (۲)

$\frac{\binom{4}{3}}{\binom{7}{3}}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴ ۴ ساعت خراب و ۶ ساعت سالم داریم.

$$\begin{cases} n(S) = \binom{10}{3} \\ n(A) = \binom{4}{3} \end{cases} \Rightarrow P(A) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{10}{3}}$$

۵۰ ☆ اگر احتمال آمدن باران به نیامدنش $\frac{2}{3}$ باشد آنگاه احتمال آمدن باران چقدر است؟

$\frac{2}{5}$ (۴)

$\frac{3}{4}$ (۳)

$\frac{1}{2}$ (۲)

$\frac{1}{3}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

احتمال آمدن باران: $P(A)$ ، احتمال نیامدن باران: $P(A')$

$$\frac{P(A)}{P(A')} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{P(A)}{1 - P(A)} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3P(A) = 2 - 2P(A) \Rightarrow 5P(A) = 2 \Rightarrow P(A) = \frac{2}{5}$$

۵۱ ☆ در آزمایش ریختن دو تاس همگن اگر مجموع دو عدد روشده برابر ۸ باشد احتمال آن که شماره ها مساوی نباشند کدام است؟

$\frac{4}{5}$ (۴)

$\frac{3}{5}$ (۳)

$\frac{2}{5}$ (۲)

$\frac{1}{5}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

$$S_{\text{جدید}} = \{(2, 6), (6, 2), (3, 5), (5, 3), (4, 4)\} \Rightarrow n(S) = 5$$

$$A = \{(2, 6), (6, 2), (3, 5), (5, 3)\} \Rightarrow n(A) = 4$$

پس $P(A) = \frac{4}{5}$ است.

۵۲ ☆ کدام طریق برای جمع آوری داده ها مناسب نیست؟

آزمایش (۴)

مشاهده (۳)

الگوی خاص (۲)

مصاحبه (۱)

پاسخ: گزینه ۲ استفاده از الگویی خاص برای جمع آوری داده ها مناسب نیست.

۵۳ ☆ شرکتی ۱۶۰ کارمند دارد که مدارک تحصیلی آنان با ۶ کد متمایز مشخص شده اند. در نمودار دایره ای، زاویه ی مرکزی هر گروه با

کد	۱	۲	۳	۴	۵	۶
زاویه ی مرکزی	۲۷	۴۵	۹۹	α	۵۴	۱۸

واحد درجه مطابق جدول روبه رو است. تعداد کارکنان با کد ۴ کدام است؟

۵۴ (۲)

۵۲ (۱)

۵۸ (۴)

۵۶ (۳)

پاسخ: گزینه ۱ مجموع همه ی زوایای مرکزی برابر با 360° است، پس داریم:

$$27 + 45 + 99 + \alpha + 54 + 18 = 360 \Rightarrow 243 + \alpha = 360 \Rightarrow \alpha = 117^\circ$$

مجموع فراوانی ها برابر با $N = 160$ می باشد، اگر $F_{\%}$ فراوانی مطلق گروه چهارم باشد داریم:

$$d_i = \frac{360}{N} \times F_i \Rightarrow 117 = \frac{360}{160} F_{\%} \Rightarrow F_{\%} = \frac{160 \times 117}{360} = 52$$

۵۴ ☆ حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x}$ کدام است؟

۲ (۴)

۱ (۳)

$\frac{1}{2}$ (۲)

$\frac{1}{4}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴ می دانیم: $\lim_{u \rightarrow 0} (1 - \cos u) \sim \frac{u^2}{2}$ ، $\lim_{u \rightarrow 0} \sin u \sim u$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x)^2}{x \times x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2}{2x^2} = \frac{4}{2} = 2$$

۵۵ ☆ اگر $(16)^x = 64$ باشد x کدام است؟

۴

۳

۲

۱

پاسخ: گزینه ۲

$$16^x = 64 \Rightarrow (2^4)^x = 2^6 \Rightarrow 2^{4x} = 2^6 \Rightarrow 4x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{4}$$

۵۶ ☆ مقدار x از معادله $\left(\frac{1}{8}\right)^{3x} = 32^{x+1}$ برابر است با:

۴

۳

۲

۱

پاسخ: گزینه ۴

$$\left(\frac{1}{8}\right)^{3x} = 32^{x+1} \Rightarrow (2^{-3})^{3x} = (2^5)^{x+1} \Rightarrow 2^{-9x} = 2^{5x+5}$$

$$\Rightarrow -9x = 5x + 5 \Rightarrow 14x = -5 \Rightarrow x = -\frac{5}{14}$$

۵۷ ☆ به عدد ۳۰۰ چند واحد بیفزاییم تا لگاریتم آن در مبنای ۸ برابر ۳ گردد؟

۴

۳

۲

۱

پاسخ: گزینه ۱

می‌دانیم: $\log_b^N = x \rightarrow N = b^x$

تعریف

$$\log_8^{x+300} = 3 \rightarrow x + 300 = 8^3 = 512 \rightarrow x = 512 - 300 = 212$$

۵۸ ☆ به عدد ۲۲۹ چند واحد بیفزاییم تا لگاریتم عدد حاصل در مبنای ۳ برابر ۶ گردد؟

۴

۳

۲

۱

پاسخ: گزینه ۳

می‌دانیم: $\log_b^N = x \rightarrow N = b^x$

تعریف

$$\log_3^{x+229} = 6 \rightarrow x + 229 = 3^6 = 729 \Rightarrow x = 729 - 229 = 500$$

۵۹ ☆ دامنه‌ی تعریف تابع $f(x) = \log(|x| - 3)$ کدام است؟

۴

۳

۲

۱

پاسخ: گزینه ۲

جلوی لگاریتم باید مثبت باشد.

$$|x| - 3 > 0 \Rightarrow |x| > 3 \Rightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x < -3 \end{cases} \Rightarrow D_f = R - [-3, 3]$$

۶۰ ☆ حاصل $\log_8 \sqrt[4]{2}$ کدام است؟

۴

۳

۲

۱

پاسخ: گزینه ۳

$$\log_{km}^a = \frac{n}{m} \log_k^a$$

می دانیم:

$$\log_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}} = \log_{\frac{1}{2}} \frac{2^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}} = \log_{\frac{1}{2}} 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

۶۱ ☆ حاصل \log_8^x کدام است؟

x^3 (۴)

\sqrt{x} (۳)

$\sqrt[2]{x^2}$ (۲)

x^2 (۱)

پاسخ: گزینه ۳

$$a \log_b^x = x \log_b^a, \log_{km}^a = \frac{n}{m} \log_k^a$$

می دانیم:

$$2 \log_8^x = x \log_8^2 = x \frac{\log_2^2}{\log_2^8} = x \frac{1}{3} = \frac{x}{3} = \sqrt[3]{x}$$

۶۲ ☆ حاصل $\log_{\sqrt{5}}(\sqrt{125})^3$ کدام است؟

۵٫۵ (۴)

۹ (۳)

۴٫۵ (۲)

۸ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

$$\log_{km}^a = \frac{n}{m} \log_k^a$$

می دانیم:

$$\log_{\sqrt{5}}(\sqrt{5^3})^3 = \log_{\sqrt{5}}(5^{\frac{3}{2}})^3 = \log_{\sqrt{5}} 5^{\frac{9}{2}} = \frac{\frac{9}{2}}{\frac{1}{2}} = 9$$

۶۳ ☆ اگر $\log_8^3 = a$ باشد حاصل $\log_{\sqrt{2}}^3$ کدام است؟

a^2 (۴)

$\frac{1}{4}a$ (۳)

\sqrt{a} (۲)

$-a$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

$$\log_{km}^a = \frac{n}{m} \log_k^a$$

می دانیم:

$$\log_{\sqrt{2}}^3 = \log_{\sqrt{2}} \frac{2^{\frac{3}{2}}}{2^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{4} \log_2^3 = \frac{1}{4} a$$

۶۴ ☆ اگر $\log 2 = 0.301$ و $\log 3 = 0.5$ باشد. $\log 6000$ برابر است با:

۳٫۰۰۲ (۴)

۴٫۷۷۸ (۳)

۳٫۸۰۱ (۲)

۳٫۲۲۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

$$\log_k^{ab} = \log_k^a + \log_k^b, \log_k^{a^n} = n \log_k^a$$

می دانیم:

$$\log 6000 = \log \underbrace{6}_{2 \times 3} \times \underbrace{1000}_{10^3} = \log 2 + \log 3 + \log 10^3 = 0.301 + 0.5 + 3 = 3.801$$

۶۵ ☆ معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌هایش $2 + \sqrt{4-a}$ و $2 - \sqrt{4-a}$ باشد. کدام است؟

$x^2 - ax + 4 = 0$ (۴)

$x^2 + 4x - a = 0$ (۳)

$x^2 + ax - 4 = 0$ (۲)

$x^2 - 4x + a = 0$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

$$S = x_1 + x_2 = 2 + \sqrt{4-a} + 2 - \sqrt{4-a} = 4$$

$$P = x_1 \times x_2 = (2 + \sqrt{4-a})(2 - \sqrt{4-a}) = 4 - (4-a) = a$$

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + a = 0$$

۶۶ ☆ معادله‌ی درجه‌ی دومی با ضرایب گویا که یکی از ریشه‌های آن $3 - \sqrt{5}$ باشد. کدام است؟

۱ $x^2 - 6x - 4 = 0$ ۲ $x^2 - 6x + 4 = 0$ ۳ $x^2 - 6x + 5 = 0$ ۴ $x^2 - 3x + 1 = 0$

پاسخ: گزینه ۲ در یک معادله‌ی درجه‌ی دوم با ضرایب گویا اگر یک ریشه‌ی معادله، $\alpha + \sqrt{\beta}$ باشد ریشه‌ی دیگر $\alpha - \sqrt{\beta}$ است پس ریشه‌ی دیگر معادله $3 + \sqrt{5}$ باشد. در نتیجه:

$$x_1 = 3 - \sqrt{5}, x_2 = 3 + \sqrt{5} \Rightarrow \begin{cases} S = x_1 + x_2 = 6 \\ P = x_1 \times x_2 = (3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5}) = 9 - 5 = 4 \end{cases}$$

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 4 = 0$$

۶۷ ☆ مجموع ریشه‌های معادله‌ی $(x-1)^2 = (1-\sqrt{2})^2$ برابر است با:

۱ -۲ ۲ ۲ ۳ $2\sqrt{2}$ ۴ $-2\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه ۲
روش اول:

$$x^2 - 2x + 1 = (1 - \sqrt{2})^2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 - (1 - \sqrt{2})^2 = 0 \Rightarrow S = \frac{-b}{a} = 2$$

روش دوم:

$$(x-1)^2 = (1-\sqrt{2})^2 \Rightarrow x-1 = \pm(1-\sqrt{2})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-1 = 1-\sqrt{2} \Rightarrow x_1 = 2-\sqrt{2} \\ x-1 = -1+\sqrt{2} \Rightarrow x_2 = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 = 2$$

۶۸ ☆ در معادله‌ی $x^2 + ax + b = 0$ اگر بین ریشه‌ها رابطه‌ی $|x_1 - x_2| = 1$ برقرار باشد آنگاه:

۱ $a^2 = 4b + 1$ ۲ $a^2 = 4b$ ۳ $a^2 = 4b - 1$ ۴ $a^2 = b^2$

پاسخ: گزینه ۱

$$|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \Rightarrow 1 = \frac{\sqrt{\Delta}}{1} \Rightarrow \Delta = 1 \xrightarrow{b^2 - 4ac = 1} a^2 - 4b = 1 \Rightarrow a^2 = 4b + 1$$

۶۹ ☆ مجموع مربعات ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2 - (\sqrt{3} + \sqrt{2})x + \sqrt{6} = 0$ چقدر است؟

۱ $5 + 2\sqrt{6}$ ۲ ۵ ۳ $\sqrt{5} + 2$ ۴ ۶

پاسخ: گزینه ۲

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \sqrt{3} + \sqrt{2}, P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \sqrt{6}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 - 2\sqrt{6} = 3 + 2 + 2\sqrt{6} - 2\sqrt{6} = 5$$

۷۰ ☆ اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 + x - 3 = 0$ باشند. حاصل $\alpha^3 + \beta^3 + \alpha^2 + \beta^2$ برابر است با:

۱ -۳ ۲ -۶ ۳ ۳ ۴ ۶

پاسخ: گزینه ۱

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -1, P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = -3$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = -1 + 2(-3) = -7$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = (-1)^2 - 2(-3) = 7$$

$$\alpha^3 + \beta^3 + \alpha^2 + \beta^2 = -1 + 7 = 6$$

۷۱ ☆ معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه هایش عکس ریشه‌های معادله‌ی $5x^2 - 13x - 1 = 0$ باشد. کدام است؟

$x^2 - 13x + 5 = 0$ (۴) $x^2 + 13x - 5 = 0$ (۳) $5x^2 + 13x - 1 = 0$ (۲) $-5x^2 + 13x + 1 = 0$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

روش اول: اگر ریشه‌ی معادله‌ی جدید را y و ریشه‌ی معادله‌ی قدیم را x در نظر بگیریم داریم:

$$y = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{y}$$

$$\xrightarrow{\text{معادله}} 5\left(\frac{1}{y}\right)^2 - 13\left(\frac{1}{y}\right) - 1 = 0 \Rightarrow \frac{5}{y^2} - \frac{13}{y} - 1 = 0$$

$$\times y^2 \rightarrow 5 - 13y - y^2 = 0 \Rightarrow y^2 + 13y - 5 = 0$$

روش دوم: کافی است فقط جای a و c را عوض کنید. (ریشه‌های معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ و $cx^2 + bx + a = 0$ عکس یکدیگر می‌باشند)

$$-x^2 - 13x + 5 = 0 \Rightarrow x^2 + 13x - 5 = 0$$

۷۲ ☆ معادله درجه دومی که ریشه هایش ۹ برابر ریشه‌های معادله‌ی $x^2 + x - 3 = 0$ باشد. کدام است؟

$x^2 + 18x - 27 = 0$ (۴) $x^2 + 18x - 243 = 0$ (۳) $x^2 + 9x - 27 = 0$ (۲) $x^2 + 9x - 243 = 0$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱ روش اول: اگر y ریشه‌ی معادله‌ی جدید و x ریشه‌های معادله‌ی قدیم باشد. آنگاه $y = 9x$ پس: $x = \frac{y}{9}$ لذا:

$$x^2 + x - 3 = 0 \Rightarrow \left(\frac{y}{9}\right)^2 + \frac{y}{9} - 3 = 0 \Rightarrow y^2 + 9y - 243 = 0$$

روش دوم: کافی است b را در ۹ و c را در 9^2 ضرب کنید.

$$x^2 + x - 3 = 0 \Rightarrow x^2 + 9x - 243 = 0$$

(ریشه‌های معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ برابر ریشه‌های معادله‌ی $kax^2 + b kx + ck^2 = 0$ می‌باشند.)

۷۳ ☆ معادله‌ی درجه دومی که ریشه هایش به ترتیب دو واحد از ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - mx + m - 1 = 0$ بیش تر باشند کدام است؟

$x^2 - (m+4)x + m+3 = 0$ (۲) $x^2 - (m-4)x + 3m+4 = 0$ (۱)

$x^2 + (m-4)x + 3m+3 = 0$ (۴) $x^2 - (m+4)x + 3m+3 = 0$ (۳)

پاسخ: گزینه ۳ معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه هایش k واحد بیشتر از ریشه‌های معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ می‌باشد به صورت زیر است:

$$a(x-k)^2 + b(x-k) + c = 0$$

پس کافی است x را به $x-2$ تبدیل کنیم.

$$(x-2)^2 - m(x-2) + m - 1 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 - mx + 2m + m - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - (4+m)x + 3m+3 = 0$$

۷۴ ☆ در معادله‌ی $\sqrt{3} + \sqrt{x-x^3} = \sqrt{3}$ مجموع ریشه‌ها چقدر است؟

2 (۴) 0 (۳) -1 (۲) 1 (۱)

پاسخ: گزینه ۳

$$\sqrt{3 + \sqrt{x - x^2}} = \sqrt{3} \Rightarrow 2 \text{ توان} \Rightarrow 3 + \sqrt{x - x^2} = 3$$

$$\Rightarrow \sqrt{x - x^2} = 0 \Rightarrow x - x^2 = 0 \Rightarrow x(1 - x)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

هر سه x بدست آمده در معادله صدق می کنند و مجموع ریشه ها صفر است.

۷۵ ☆ محور تقارن منحنی تابع با ضابطه $y = \frac{2x-1}{4x}$ منحنی $f(x) = x^2 + x + 1$ را در کدام نقطه قطع می کند؟

- ۱ $(-\frac{1}{2}, -1)$ ۲ $(-\frac{1}{2}, 1)$ ۳ $(\frac{1}{2}, 0)$ ۴ $(\frac{1}{2}, 1)$

پاسخ: گزینه ۲

$$x \text{ محور تقارن} = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2}$$

x بدست آمده را در تابع $y = \frac{2x-1}{4x}$ قرار داده y را بدست می آوریم.

$$x = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{2(-\frac{1}{2}) - 1}{4(-\frac{1}{2})} = \frac{-2}{-2} = 1$$

۷۶ ☆ به ازای کدام مقدار a، عبارت $y = x^2 - ax + 2a$ به صورت مربع کامل یک دو جمله ای درمی آید؟

- ۱ -۸ ۲ ۸ ۳ -۴ ۴ ۴

پاسخ: گزینه ۲ شرط آن که یک عبارت درجه ی دوم، مربع کامل باشد آن است که $\Delta = 0$ باشد.

$$\Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow a^2 - 8a = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 8 \end{cases} \rightarrow \text{غ ق ق} \rightarrow \text{عبارت به صورت } y = x^2 \text{ می شود.}$$

۷۷ ☆ در معادله $x^2 - 4x + 1 = 0$ حاصل $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ کدام است؟

- ۱ ۳ ۲ ۸ ۳ ۴ ۴ ۲

پاسخ: گزینه ۳

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 4, \quad P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = 1$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 x_2} = \frac{4}{1} = 4$$

۷۸ ☆ در معادله $x^2 - 3x + 2 = 0$ حاصل $x_1^8 + x_2^8$ کدام است؟

- ۱ ۲۵۷ ۲ ۱۵۸ ۳ ۱۶۴ ۴ ۶۸

پاسخ: گزینه ۱ چون مجموع ضرایب برابر صفر است یکی از ریشه ها ۱ و دیگری $\frac{c}{a}$ یعنی ۲ است.

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow 1^8 + 2^8 = 1 + 256 = 257$$

۷۹ ☆ معادله ی محور تقارن $x + y = x^2$ کدام است؟

- ۱ $2x + 1 = 0$ ۲ $2y - 1 = 0$ ۳ $2x - 1 = 0$ ۴ $2y + 1 = 0$

پاسخ: گزینه ۳

$$y = x^2 - x, x = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow 2x - 1 = 0$$

۸۰ ☆ کدام تابع ماکسیمم دارد و مینیمم ندارد؟

$y = x - x^3$ (۴) $y = x^3 - 2x$ (۳) $y = 4x - 2x^2$ (۲) $y = x^2 - 4x$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ در تابع درجه‌ی دوم وقتی ضریب x^2 منفی است تابع فقط Max دارد.

۸۱ ☆ کدام تابع مینیمم دارد و ماکسیمم ندارد؟

$y = x - x^2$ (۴) $y = -\sqrt{6}x^2 + 2$ (۳) $y = 3x^2 + 2x + 1$ (۲) $y = -2x^2 + 2$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ در تابع درجه‌ی دوم وقتی ضریب x^2 مثبت است تابع فقط Min دارد.

۸۲ ☆ نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = x^2 + bx + 1$ روی محور oy دارای می‌نیمم است، b کدام است؟

۳ (۴) ۲ (۳) ۱ (۲) ۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

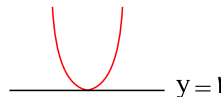
هر نقطه‌ای روی محور عرض قرار دارد طولش صفر است یعنی طول نقطه‌ی S برابر صفر می‌باشد.

$$x = \frac{-b}{2a} = 0 \Rightarrow b = 0$$

۸۳ ☆ نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = x^2 + ax + 1$ روی خط $y = 1$ دارای می‌نیمم است. a کدام است؟

۲ (۴) -۲ (۳) ۱ (۲) ۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۱ با توجه به شکل



عرض نقطه‌ی S برابر یک می‌باشد.

$$y_s = 1 \Rightarrow \frac{4ac - b^2}{4a} = 1 \Rightarrow \frac{4 - a^2}{4} = 1 \Rightarrow 4 - a^2 = 4 \Rightarrow a = 0$$

۸۴ ☆ به ازای چه مقادیری از m و n ، معادله‌ی $7x^2 + (m + 2n + 1)x + (m - 2n + 5) = 0$ دارای ریشه‌ی مضاعف صفر است؟

$n = 3, m = -1$ (۴) $n = -3, m = 1$ (۳) $n = 1, m = -3$ (۲) $n = -1, m = 3$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ شرط آنکه یک معادله‌ی درجه‌ی دوم دارای ریشه‌ی مضاعف صفر باشد آن است که c و b هر دو صفر باشند.

$$\begin{cases} b = 0 \Rightarrow m + 2n + 1 = 0 \Rightarrow m = -3, n = 1 \\ c = 0 \Rightarrow m - 2n + 5 = 0 \end{cases}$$

۸۵ ☆ اگر مجموع ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - (a + 3)x + 3a = 0$ مساوی ۴ باشد. حاصل ضرب ریشه‌ها کدام است؟

۹ (۴) ۶ (۳) ۴ (۲) ۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

$$S = \text{مجموع ریشه‌ها} = \frac{-b}{a} = \frac{a+3}{1} = 4 \Rightarrow a = 1$$

$$P = \text{ضرب ریشه‌ها} = \frac{c}{a} = \frac{3a}{1} \xrightarrow{a=1} P = 3$$

۸۶ ☆ مجموع ریشه‌های معادله‌ی $(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 = (x - 1)^2$ برابر است با:

$-2\sqrt{2}$ (۴) $2\sqrt{3}$ (۳) ۲ (۲) -۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

$$(x-1)^2 = (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2$$

$$\Rightarrow x-1 = \pm(\sqrt{2} - \sqrt{3}) \begin{cases} x-1 = \sqrt{2} - \sqrt{3} \Rightarrow x = 1 + \sqrt{2} - \sqrt{3} \\ x-1 = -\sqrt{2} + \sqrt{3} \Rightarrow x = 1 - \sqrt{2} + \sqrt{3} \end{cases}$$

حاصل جمع دو ریشه برابر ۲ می شود.

۸۷ ☆ به ازای چه مقدار m ، دو ریشه ی معادله ی $3x^2 + 11x - 2m = 7$ عکس و قرینه اند؟

۵ (۴)

-۵ (۳)

-۲ (۲)

۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

معادله را به صورت $3x^2 + 11x - 2m - 7 = 0$ مرتب می کنیم.

$$x_1 = \frac{-1}{x_2} \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = -1 \Rightarrow \frac{c}{a} = -1 \Rightarrow \frac{-2m-7}{3} = -1 \Rightarrow -2m-7 = -3 \Rightarrow m = -2$$

۸۸ ☆ به ازای کدام مقدار m معادله ی درجه ی دوم $(m^2 + 1)x^2 - 3mx + m - 2 = 0$ دارای دو ریشه ی مختلف علامت است؟

$m \in \emptyset$ (۴)

$m > 0$ (۳)

$m > 2$ (۲)

$m < 2$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

شرط آنکه معادله ی درجه ی دوم دارای دو ریشه ی متمایز مختلف علامت باشد آن است که $\frac{c}{a}$ منفی باشد.

$$\text{علامت} \Rightarrow \frac{c}{a} < 0 \Rightarrow \frac{m-2}{\underbrace{m^2+1}_{\text{مثبت}}} < 0 \Rightarrow m-2 < 0 \Rightarrow m < 2$$

۸۹ ☆ معادله ی $-6x^2 + 2x + k^2 + 3 = 0$ دارای:

دو ریشه ی مثبت است. (۱)

دو ریشه ی مختلف علامت است. (۳)

دو ریشه ی منفی است. (۲)

ریشه ی حقیقی نیست. (۴)

پاسخ: گزینه ۳ چون $\frac{c}{a}$ منفی است ($0 < \frac{k^2+3}{-6}$) پس دلتا حتماً مثبت است و معادله ی درجه ی دوم دارای دو ریشه ی متمایز مختلف علامت است.

۹۰ ☆ کمترین مقدار عبارت $y = x^2 - x + 2$ کدام است؟

$\frac{7}{4}$ (۴)

$\frac{5}{4}$ (۳)

$\frac{3}{4}$ (۲)

$\frac{1}{4}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴ کمترین یا بیشترین مقدار تابع درجه ی دوم همان عرض نقطه ی S است.

$$\frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4 - 1}{4} = \frac{3}{4}$$

۹۱ ☆ بیشترین مقدار عبارت $y = -x^2 - x + 2$ کدام است؟

$\frac{9}{4}$ (۴)

$\frac{5}{4}$ (۳)

$\frac{3}{4}$ (۲)

$\frac{7}{4}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

کمترین یا بیشترین مقدار تابع درجه ی دوم همان عرض نقطه ی S است.

$$\frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{-4 - 1}{-4} = \frac{5}{4}$$

۹۲ ☆ سهمی به معادله $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$ محور تقارن خود را با کدام عرض قطع می کند؟

۳ (۴)

$\frac{3}{2}$ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

عرض محل تلاقی سهمی با محور تقارنش همان عرض رأس سهمی (S) است.

$$\frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{6 - 4}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

۹۳ ☆ حاصل ضرب یک عدد مثبت در خودش از سه برابر آن عدد ۴ واحد بزرگ تر است آن عدد کدام است؟

۳ (۴)

۴ (۳)

۸ (۲)

۱۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

عدد مورد نظر را x در نظر می گیریم.

$$x \times x = 3x + 4 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow (x - 4)(x + 1) = 0 \begin{cases} x = 4 & \checkmark \\ x = -1 & \times \end{cases}$$

۹۴ ☆ اگر یکی از ریشه های معادله ی درجه ی دوم $x^2 + x + k^2 - 1 = 0$ صفر باشد. ریشه ی دیگر کدام است؟

$\sqrt{3}$ (۴)

۰ (۳)

-۱ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ اگر یک ریشه ی معادله ی درجه ی دوم صفر باشد ریشه ی دیگر $-\frac{b}{a}$ است. پس $x = -\frac{b}{a} = -1$ است.

۹۵ ☆ دامنه ی تعریف تابع با ضابطه ی $y = \sqrt{x^3 - x^2}$ کدام است؟

$[0, 1]$ (۴)

$[1, +\infty) \cup \{0\}$ (۳)

$[0, +\infty)$ (۲)

$[1, +\infty)$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ زیرا رادیکال باید بزرگ تر مساوی صفر باشد.

$$x^3 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2(x - 1) \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow D_f = [1, +\infty) \cup \{0\}$$

۹۶ ☆ مقادیر مجاز برای ورودی تابع $g(x) = \frac{4}{[x] + [-x]}$ کدام است؟

$R \geq 0$ (۴)

$R - Z$ (۳)

Z (۲)

R (۱)

پاسخ: گزینه ۳

می دانیم:

$$[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in Z \\ -1 & x \notin Z \end{cases}$$

مخرج کسر نباید صفر باشد پس:

$$D_g = R - \{\text{ریشه یا ریشه های مخرج}\} \Rightarrow D_g = R - Z$$

۹۷ ☆ اگر $f(x^2 - 3) = \frac{2}{3}x$ آن گاه ضابطه ی $f(x)$ کدام است؟

$2x - 3$ (۴)

$2\sqrt{x}$ (۳)

\sqrt{x} (۲)

$\frac{2}{3}\sqrt{x+3}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

$$x^2 - 3 = t \Rightarrow x^2 = t + 3 \xrightarrow{x = \pm\sqrt{t+3}} f(t) = \pm\frac{2}{3}\sqrt{t+3} \Rightarrow f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x+3}$$

$f(x) = -\frac{2}{3}\sqrt{x+3}$ هم صحیح است اما در گزینه ها مطرح نشده است.

۹۸ ☆ سهمی $y = x^2 - 2$ را ۲ واحد به سمت راست و ۱ واحد به سمت بالا منتقل می‌کنیم. معادله‌ی سهمی در دستگاه جدید به فرم $y = x^2 - cx + d$ است. دوتایی (c, d) کدام است؟

۱. $(4, 3)$ ۲. $(3, 1)$ ۳. $(4, 2)$ ۴. $(4, -1)$

پاسخ: گزینه ۱

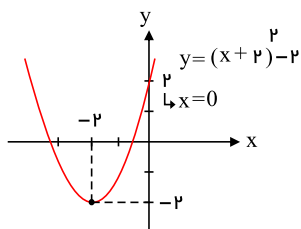
$$y = x^2 - 2 \xrightarrow{\text{یک واحد به سمت بالا}} y = (x - 2)^2 - 2 \xrightarrow{\text{۲ واحد به سمت راست}} y = (x - 2)^2 - 2 + 1$$

$$\Rightarrow y = x^2 - 4x + 3 \Rightarrow (c, d) = (4, 3)$$

۹۹ ☆ نمودار $y = (x + 2)^2 - 2$ از کدام ناحیه‌ی دستگاه مختصات عبور نمی‌کند؟

۱. اول ۲. دوم ۳. سوم ۴. چهارم

پاسخ: گزینه ۴ کافی است نمودار $y = x^2$ را دو واحد به سمت چپ و دو واحد به پایین انتقال دهیم.



۱۰۰ ☆ با توجه به ماشین $x \rightarrow f \rightarrow g \rightarrow x$ اگر $f(x) = 3x - 4$ آنگاه $g(2)$ کدام است؟

۱. ۲ ۲. ۰ ۳. ۱ ۴. $\frac{3}{2}$

پاسخ: گزینه ۱ ماشین داده شده تعریف $g(f(x))$ می‌باشد.

$$g(f(x)) = x \Rightarrow g(3x - 4) = x \xrightarrow{3x - 4 = 2 \Rightarrow x = 2} g(2) = 2$$

۱۰۱ ☆ اگر $\sin \alpha \cos \alpha > 0$ و $\sin \alpha \tan \alpha < 0$ باشد انتهای α در کدام ناحیه مثلثاتی است؟

۱. اول ۲. دوم ۳. سوم ۴. چهارم

پاسخ: گزینه ۳

ناحیه‌ی اول یا سوم \Rightarrow سینوس و کسینوس هم علامتند $\Rightarrow \sin \alpha \cdot \cos \alpha > 0$
 ناحیه‌ی سوم \Rightarrow سینوس و تانژانت غیر هم علامتند $\Rightarrow \sin \alpha \cdot \tan \alpha < 0$

۱۰۲ ☆ اگر $\sin x - \cos x = \frac{1}{2}$ آنگاه $2 \sin x \cos x$ کدام است؟

۱. $\frac{3}{4}$ ۲. $-\frac{3}{2}$ ۳. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۴. $\frac{2}{\sqrt{2}}$

پاسخ: گزینه ۱

هرگاه مجموع یا تفاضل سینوس و کسینوس را داشتید و حاصل ضرب سینوس و کسینوس را خواستید دو طرف را به توان ۲ برسانید.

$$\sin x - \cos x = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{توان ۲}} \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_1 - 2 \sin x \cos x = \frac{1}{4} \Rightarrow 2 \sin x \cos x = \frac{3}{4}$$

۱۰۳ ☆ حاصل عبارت $\frac{2 \sin^3 \alpha}{\cos \alpha - \cos^3 \alpha}$ کدام است؟

۱. $2 \tan \alpha$ ۲. $\cot \alpha$ ۳. $2 \cot \alpha$ ۴. $\tan \alpha$

پاسخ: گزینه ۱

$$\frac{2\sin^2\alpha}{\cos\alpha - \cos^2\alpha} = \frac{2\sin^2\alpha}{\cos\alpha(1 - \cos^2\alpha)} = \frac{2\sin^2\alpha}{\cos\alpha\sin^2\alpha} = \frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha} = 2\tan\alpha$$

۴. حاصل $\cos^2 x - \sin^2 x + 1$ کدام است؟

۰ (۴)

۱ (۳)

$2\sin^2 x$ (۲)

$2\cos^2 x$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

$$\underbrace{\cos^2 x - \sin^2 x}_{\text{مزدوج}} + 1 = (\cos^2 x - \sin^2 x) \underbrace{(\cos^2 x + \sin^2 x)}_1 + 1 = \cos^2 x - \sin^2 x + 1$$

$$= \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) + 1 = 2\cos^2 x$$

۵. پیوستگی تابع $f(x) = \begin{cases} 3x + \frac{|2x|}{x} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a برقرار است؟

هیچ مقدار (۴)

$a = 4$ (۳)

$a = -2$ (۲)

$a = 2$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴ کافی است حد راست و حد چپ و مقدار تابع را در $x = 0$ بدست آوریم.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (3x + \frac{|2x|}{x}) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (3x + 2) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (3x + \frac{|2x|}{x}) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (3x - 2) = -2$$

تابع در $x = 0$ حد ندارد پس نمی تواند پیوسته باشد.

۶. اگر تابع $f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x + b & x > 2 \\ 2ax + 3b & x \leq 2 \end{cases}$ در نقطه $x_0 = 2$ حد داشته باشد آنگاه کدام رابطه درست است؟

$2a - 2 = -b$ (۴)

$2a + b = -2$ (۳)

$2a + 2 = -b$ (۲)

$2a - b = 2$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^3 - 2x + b) = 8 - 4 + b = 4 + b \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} (2ax + 3b) = 4a + 3b \end{aligned} \right\} \Rightarrow 4 + b = 4a + 3b \Rightarrow 4a + 3b = 4 \Rightarrow 2a + b = 2$$

۷. حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2\sin(x + \frac{\pi}{6})\cos 3x}{\tan^2 x}$ کدام است؟

۱ (۴)

۰ (۳)

$-\frac{2}{3}$ (۲)

۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2\sin(x + \frac{\pi}{6})\cos 3x}{\tan^2 x} = \frac{2\sin(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6})\cos(\pi)}{\tan^2 \frac{\pi}{3}} = \frac{2(1)(-1)}{3} = -\frac{2}{3}$$

۸. اگر تابع f در نقطه $x_0 = 1$ حد داشته باشد و $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3f(x) - 2}{f(x) + 8} = 1$ باشد آنگاه $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ کدام است؟

-۱ (۴)

۱ (۳)

-۵ (۲)

۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۱ فرض می کنیم در تابع $f(x)$ وقتی $x \rightarrow 1$ حد تابع برابر a است.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3f(x) - 2}{f(x) + 8} = \frac{3a - 2}{a + 8} = 1 \Rightarrow 3a - 2 = a + 8 \Rightarrow 2a = 10 \Rightarrow a = 5$$

پس $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5$ است.

$$109 \star \text{ اگر } \begin{cases} ax - 3 & x < 2 \\ x^2 + 3a & x \geq 2 \end{cases} \text{ و } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -2 \text{ باشد، مقدار } a \text{ کدام است؟}$$

$a = -9$ (۴)

هیچ مقدار (۳)

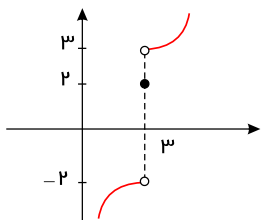
$a = 5$ (۲)

$a = 9$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

تابع وقتی حد دارد که حد راست و حد چپ آن در آن نقطه، موجود و با هم برابر باشند.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + 3a) = 4 + 3a \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (ax - 3) = 2a - 3 \end{cases} \Rightarrow 4 + 3a - 2a + 3 = -2 \Rightarrow a = -9$$



۱۱۰ شکل زیر نمودار تابع f می باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) + f(3)$ کدام گزینه است؟

۷ (۱)

۵ (۲)

۳ (۳)

۱ (۴)

پاسخ: گزینه ۱

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 3, \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -2, f(3) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) + f(3) = 3 - (-2) + 2 = 7$$

۱۱۱ حاصل حد $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 2\sqrt[3]{x}}{3x + 4\sqrt[3]{x}}$ کدام است؟

$\frac{-2}{3}$ (۴)

$\frac{2}{3}$ (۳)

$\frac{-1}{2}$ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ هرگاه x به سمت عددی میل کند که باعث صفر شدن تمام جملات شود آن گاه هر عبارت، هم ارزش آن جمله ای است که توان کمتری دارد.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 2\sqrt[3]{x}}{3x + 4\sqrt[3]{x}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{جمله ی کم توان}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2\sqrt[3]{x}}{4\sqrt[3]{x}} = \frac{-1}{2}$$

۱۱۲ در تابع $f(x) = \begin{cases} -2 & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} \\ 0 & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$ حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow (\frac{-1}{3})^+} f(x)$ کدام است؟

۱ (۴)

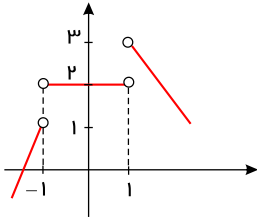
-۴ (۳)

۰ (۲)

۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ وقتی $x \rightarrow a$ یعنی x در یک همسایگی از عدد a قرار دارد بنابراین همواره x غیر صحیح است و هیچ گاه سراغ ضابطه ی صحیح نمی رویم.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow (\frac{-1}{3})^+} f(x) = -2 + (-2) = -4$$



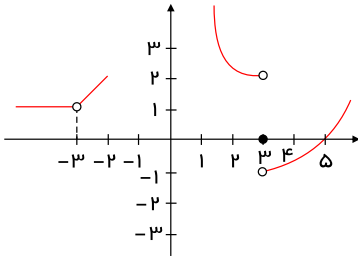
۱۱۳ ✨ با توجه به شکل مقابل حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x)$ کدام است؟

- ۱
- ۲
- ۴
- ۵

پاسخ: گزینه ۲

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3, \quad \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = 3 - 1 = 2$$

۱۱۴ ✨ شکل مقابل نمودار تابع f می باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) - f(3)$ کدام گزینه است؟



- ۱
- ۱
- ۰
- ۲

پاسخ: گزینه ۳

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 1, \quad f(3) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) - f(3) = -1 + 1 + 0 = 0$$

۱۱۵ ✨ فرض کنید $f(x) = \begin{cases} x & x \geq 1 \\ 1 & x < 1 \end{cases}$ می باشد حد تابع $f(x)$ وقتی $x \rightarrow 1^-$ کدام است؟

- $f(3)$
- $f(1)$
- $f(2)$
- $f(0)$

پاسخ: گزینه ۱

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$$

تنها گزینه‌ای که جواب آن عدد یک می شود گزینه‌ی اول است زیرا برای محاسبه‌ی $f(0)$ باید سراغ ضابطه‌ی پایین برویم که جواب یک می شود.

۱۱۶ ✨ مقدار $\lim_{x \rightarrow 0^-} \cot^3 x$ کدام است؟

- میهم
- صفر
- $-\infty$
- $+\infty$

پاسخ: گزینه ۲

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \cot^3 x = (-\infty)^3 = -\infty$$

توجه کنید که 0^- در ناحیه‌ی چهارم است و در این ناحیه کتانژانت، منفی است.

۱۱۷ ✨ به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} (x+a)^2 & x \geq -2 \\ 3x-1 & x < -2 \end{cases}$ در نقطه‌ی $x = -2$ پیوسته است؟

- به ازاء هر مقدار a
- $a = -5$
- $a = 0$
- هیچ مقدار a

پاسخ: گزینه ۴

حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x = -2$ باید با هم برابر باشند.



محمد گنجی

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow (-2)^+} (x+a)^2 = (-2+a)^2 \\ \lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow (-2)^-} (3x-1) = 3(-2)-1 = -7 \Rightarrow (-2+a)^2 = -7 \rightarrow \text{امکان ندارد} \\ f(-2) &= (-2+a)^2 \end{aligned} \right\}$$

۱۱۸ ★ حد کسر $\frac{\sqrt[3]{x}-x}{\sqrt[3]{x}+x}$ وقتی $x \rightarrow 0$ کدام است؟

۱ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

هرگاه x به سمت عددی میل کند که باعث صفر شدن تمام جملات شود آن گاه هر عبارت، هم ارز آن جمله ای است که توان کمتری دارد.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x}-x}{\sqrt[3]{x}+x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{جمله ی کم توان}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}} = 1$$

۱۱۹ ★ حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2 \sin x + \sqrt{2}}{2 \cos x - \sqrt{2}}$ کدام است؟

۱ (۴)

$\sqrt{3}$ (۳)

$\sqrt{2}$ (۲)

-۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2 \sin x + \sqrt{2}}{2 \cos x - \sqrt{2}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2 \cos x}{-2 \sin x} = \frac{2 \frac{\sqrt{2}}{2}}{2 \frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

۱۲۰ ★ اگر $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - a^2}{x^2 + 2ax + a^2} = -1$ باشد a کدام است؟

۲ به ازای هر مقدار a برقرار است

۱ به ازای هیچ مقدار a برقرار نیست

۴ فقط $a = -1$

۳ به ازای هر عدد حقیقی $a \neq 0$ برقرار است

پاسخ: گزینه ۳

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - a^2}{x^2 + 2ax + a^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-a)(x+a)}{(x+a)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-a}{x+a} = \frac{-a}{a} = -1$$

پس به ازای هر مقدار مخالف صفر a برقرار است. چون اگر $a = 0$ باشد جواب حد برابر یک می شود.

۱۲۱ ★ حاصل $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{\tan x}{\cot x}$ کدام است؟

$-\infty$ (۴)

$+\infty$ (۳)

-۱ (۲)

0^+ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{\tan x}{\cot x} = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{\tan x}{\frac{1}{\tan x}} = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \tan^2 x = (-\infty)^2 = +\infty$$

$(\frac{\pi}{2})^+$ در ناحیه ی دوم است و در این ناحیه تانژانت، منفی است.

۱۲۲ ★ حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^6 - 5x^4 + 4x}{3x^2 - 3x}$ کدام است؟

$\frac{-3}{4}$ (۴)

$\frac{-4}{3}$ (۳)

۳ (۲)

$\frac{1}{3}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ هرگاه x به سمت عددی میل کند که باعث صفر شدن تمام جملات شود آن گاه هر عبارت، هم ارز آن جمله ای است که توان کمتری

دارد.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^6 - 5x^4 + 4x}{3x^2 - 3x} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{-3x} = \frac{-4}{3}$$

۱۲۳* در معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2 - (3m - 3)x + m = 0$ ، مجموع ریشه‌ها ۴ برابر حاصل ضرب ریشه‌ها است، مقدار m کدام است؟

- ۱) ۷ ۲) -۴ ۳) -۳ ۴) -۶

پاسخ: گزینه ۳

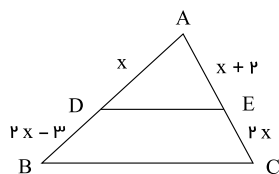
$$S = 4P \Rightarrow -\frac{b}{a} = 4 \times \frac{c}{a} \Rightarrow 4c + b = 0 \Rightarrow 4m + (3 - 3m) = 0 \Rightarrow m = -3$$

۱۲۴* اگر عدد $2x$ واسطه‌ی هندسی بین دو عدد $2x - 2$ و $2x + 3$ باشد، x کدام است؟

- ۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: گزینه ۲ اگر a واسطه‌ی هندسی بین b ، c باشد، یعنی $\frac{a}{b} = \frac{c}{a}$ یا $a^2 = bc$

$$\frac{2x}{2x - 2} = \frac{2x + 3}{2x} \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$$



۱۲۵* در شکل مقابل $DE \parallel BC$ است، طول AB برابر کدام است؟

- ۱) ۱۵ ۲) ۶ ۳) ۱۲ ۴) ۲۱

پاسخ: گزینه ۱

$$DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{x}{2x - 3} = \frac{x + 2}{2x} \Rightarrow x = 6 \Rightarrow AB = 15$$

۱۲۶* اگر $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4}$ عدد a چه کسری از $a + b + c$ است؟

- ۱) $\frac{2}{7}$ ۲) $\frac{2}{9}$ ۳) $\frac{7}{9}$ ۴) $\frac{1}{6}$

پاسخ: گزینه ۲ در تناسب می‌توان صورت‌ها را با هم و مخرج‌ها را با هم جمع کنیم و نسبت تغییر نمی‌کند. داریم:

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} \Rightarrow \frac{a + b + c}{2 + 3 + 4} = \frac{a}{2} \Rightarrow a + b + c = \frac{a}{2} \Rightarrow \frac{a}{a + b + c} = \frac{2}{9}$$

۱۲۷* دو مثلث متشابه‌اند. اگر محیط و مساحت یکی از آن‌ها به ترتیب ۱۲ و ۶ باشد و محیط مثلث دوم ۱۸ باشد، مساحت این مثلث کدام است؟

- ۱) ۱۵ ۲) ۱۴ ۳) ۱۳٫۵ ۴) ۱۷٫۵

پاسخ: گزینه ۳ اگر دو شکل متشابه باشند نسبت محیط آن‌ها برابر نسبت تشابه است و نسبت مساحت آن‌ها مجذور نسبت تشابه آن‌هاست.

$$\frac{(\text{محیط اولی})^2}{(\text{محیط دومی})^2} = \frac{\text{مساحت اولی}}{\text{مساحت دومی}} \Rightarrow \left(\frac{12}{18}\right)^2 = \left(\frac{6}{S}\right)^2 \Rightarrow \frac{4}{9} = \frac{6}{S} \Rightarrow S = 13.5$$

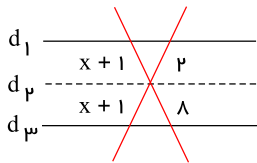
۱۲۸* دو مثلث متشابه‌اند. اگر طول یک میانه مثلث بزرگ‌تر، a و طول میانه نظیر آن در مثلث کوچک‌تر، b باشد، نسبت میانه‌های مثلث

کوچک‌تر به میانه‌های نظیر مثلث بزرگ‌تر چیست؟

- ۱) $\frac{a}{b}$ ۲) $\frac{b}{a}$ ۳) $\frac{b}{a+b}$ ۴) $\frac{a}{a+b}$

پاسخ: گزینه ۲ وقتی دو مثلث متشابه‌اند نسبت تشابه (نسبت اضلاع نظیر) همان نسبت میانه‌های نظیر دو مثلث است، پس نسبت میانه‌های کوچک‌تر به میانه‌های نظیرش در مثلث بزرگ‌تر $\frac{b}{a}$ است.

۱۲۹* در شکل زیر d_1 و d_2 و d_3 موازی‌اند. مقدار x کدام است؟



- ۲ (۲)
۴ (۴)

- ۱ (۱)
۳ (۳)

پاسخ: گزینه ۳ بنابر قضیه‌ی تالس بین خطوط موازی داریم:

$$d_1 \parallel d_2 \parallel d_3 \Rightarrow \frac{2}{x+1} = \frac{x+1}{8} \Rightarrow x^2 + 2x - 16 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -5 \end{cases}$$

که $x = -5$ غیر قابل قبول است.

۱۳۰* اگر نسبت مساحت دو شکل متشابه سه برابر نسبت محیط آن‌ها باشد، نسبت تشابه آن دو شکل کدام است؟

$\frac{1}{3}$ (۴)

$\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۳)

$\frac{2}{3}$ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

$$\frac{S}{S'} = \frac{P}{P'} \Rightarrow K^2 = \frac{P}{P'} \Rightarrow K = \sqrt{\frac{P}{P'}} = \frac{1}{3}, \frac{P'}{P} = \frac{1}{9}$$

نکته: اگر دو شکل متشابه باشند نسبت محیط آن‌ها همان نسبت تشابه است و نسبت مساحت آن‌ها مجذور نسبت تشابه آن‌هاست.

۱۳۱* نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه $\frac{3}{4}$ است. نسبت دو میانه‌ی نظیر آن‌ها کدام است؟

$\frac{2}{\sqrt{3}}$ (۴)

$\frac{4}{3}$ (۳)

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲)

$\frac{3}{4}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ وقتی دو مثلث متشابه‌اند نسبت مساحت آن‌ها مجذور نسبت تشابه است.

$$\frac{3}{4} = \left(\frac{AM}{A'M'}\right)^2 \Rightarrow \frac{AM}{A'M'} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

۱۳۲* طول ضلع‌های مثلثی ۳ و ۴ و ۵ است، طول ضلع‌های مثلثی که متشابه با این مثلث است و عدد محیط و مساحت آن یکی است، کدام است؟

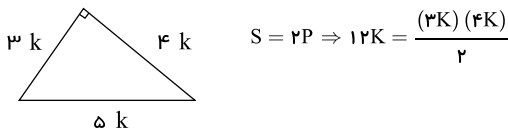
$\frac{5}{4}$ و $\frac{3}{4}$ (۴)

۱۰ و ۸ و ۶ (۳)

۵ و ۴ و ۳ (۲)

$\frac{5}{2}$ و $\frac{4}{2}$ و $\frac{3}{2}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ مثلث مورد نظر به صورت شکل مقابل است که حتماً قائم‌الزاویه است پس



بنابراین $K = 2$

پس اضلاع مثلث ۶ و ۸ و ۱۰ است.

۱۳۳* واسطه‌ی هندسی بین دو عدد $2 \times 5^3 \times 11^2$ و $2^3 \times 5 \times 7^2$ کدام عدد است؟

۸۷۰۰ (۴)

۸۵۰۰ (۳)

۷۸۰۰ (۲)

۷۷۰۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۱ اگر C واسطه‌ی هندسی بین دو عدد a و b باشد خواهیم داشت:

$$C = \sqrt{ab} = \sqrt{2^3 \times 5 \times 7^2 \times 2 \times 5^3 \times 11^2} = \sqrt{2^4 \times 5^4 \times 7^2 \times 11^2} \Rightarrow C = 2^2 \times 5^2 \times 7 \times 11 = 7700$$

۱۳۴* واسطه‌ی هندسی اعداد $\sqrt{3}$ و $\frac{\sqrt{3}}{4}$ کدام عدد است؟

$\frac{3}{4}$ (۴)

$\frac{\sqrt{3}}{4}$ (۳)

$\frac{3}{2}$ (۲)

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱ اگر C واسطه‌ی هندسی a و b باشد، داریم:

$$c = \sqrt{ab} = \sqrt{\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

۱۳۵* اگر نسبت مساحت های دو مثلث متشابه k^2 باشد، آن گاه نسبت محیط های آن ها کدام است؟

۳k (۴)

$k + 3$ (۳)

k (۲)

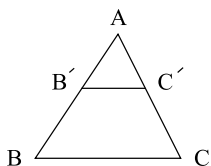
$\frac{k}{3}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

$$\frac{S}{S'} = \left(\frac{rP}{rP'}\right)^2 = k^2 \Rightarrow \frac{rP}{rP'} = k$$

نسبت مساحت دو شکل متشابه مجذور نسبت تشابه آن هاست.

۱۳۶* در شکل زیر $B'C' \parallel BC$ و $AB = 10\text{cm}$ و $AB' = 3\text{cm}$ ، AC' چند برابر CC' است؟



$\frac{4}{10}$ (۲)

$\frac{3}{10}$ (۱)

$\frac{7}{10}$ (۴)

$\frac{3}{7}$ (۳)

پاسخ: گزینه ۳

$$BC' \parallel BC \Rightarrow \frac{AB'}{BB'} = \frac{AC'}{CC'} \Rightarrow \frac{3}{7} = \frac{AC'}{CC'} \Rightarrow AC' = \frac{3}{7}CC'$$

۱۳۷* در مثلث ABC، وسط دو ضلع را به هم وصل کرده ایم تا به یک چهارضلعی و یک مثلث تجزیه شود. نسبت مساحت چهارضلعی به

مثلث چقدر است؟

۳ (۴)

$\frac{2}{5}$ (۳)

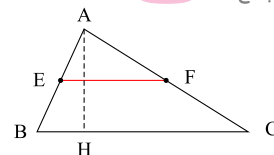
۴ (۲)

$\frac{5}{2}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

$$EF \parallel BC \Rightarrow \Delta AEF \sim \Delta ABC$$

$$\Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{AEF}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow S_{ABC} = 4S_{AEF} \Rightarrow S_{EFCB} = 3S_{AEF}$$



۱۳۸* در دو مثلث متشابه ABC و $A'B'C'$: $\frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'} = 2$ ، اگر AM و $A'M'$ به ترتیب میانه های رأس A و A' باشند،

نسبت $\frac{S_{ABM}}{S_{A'B'M'}}$ چقدر است؟

۴ (۴)

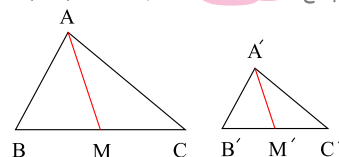
۲ (۳)

۱ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴ در دو مثلث متشابه نسبت میانه ها با نسبت اضلاع برابر است.

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{AM}{A'M'} = 2 \Rightarrow \frac{S_{ABM}}{S_{A'B'M'}} = \left(\frac{AC}{A'C'}\right)^2 = 2^2 = 4$$



۱۳۹* مثلثی به اضلاع ۳ و ۵ و ۷ با مثلثی به اضلاع ۵ و x و y متشابه است. اگر $x, y > 5$ باشند، x + y کدام است؟

۲۱ (۴)

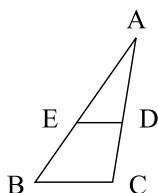
$\frac{61}{3}$ (۳)

۲۰ (۲)

$\frac{58}{3}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

$$\frac{3}{5} = \frac{5}{x} = \frac{7}{y} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{25}{3} \\ y = \frac{35}{3} \end{cases} \Rightarrow x + y = \frac{25 + 35}{3} = 20$$



۱۴۰ در شکل مقابل $\angle B = \angle E$ و $AE = 8$ و $ED = 6$ و $BC = 9$ است. طول BE کدام است؟

۴٫۲

۴

۴٫۶

۴٫۴

پاسخ: گزینه ۱

$$\angle B = \angle E \Rightarrow ED \parallel BC \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{ED}{BC} \Rightarrow \frac{8}{AB} = \frac{6}{9} \Rightarrow AB = 12 \Rightarrow EB = AB - AE = 4$$

۱۴۱ در دو مثلث ABC و $A'M'$ و $A'B'C'$ و $A'M'$ دو میانه متناظر هستند. اگر $AM = 3A'M'$ باشد، نسبت مساحت‌های دو مثلث چقدر است؟

۹

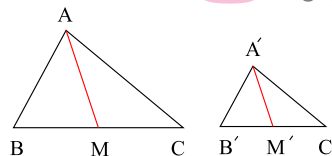
$\sqrt{3}$

$\frac{1}{2}$

۳

پاسخ: گزینه ۴

$$\text{نسبت تشابه} = \frac{AM}{A'M'} = 3 \Rightarrow \frac{S}{S'} = (3)^2 = 9$$



نکته: در دو مثلث متشابه نسبت میانه‌های نظیر همان نسبت تشابه است و نسبت مساحت‌ها مجذور نسبت تشابه است.

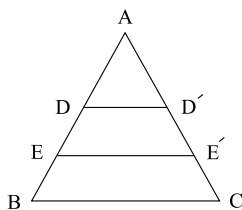
۱۴۲ در شکل روبرو $BC = 8$ و $AD = DE = EB$ و $DD' \parallel EE' \parallel BC$ است. مقدار $DD' + EE'$ کدام است؟

۶

۹

۸

۱۲



پاسخ: گزینه ۳

$$\begin{aligned} DD' \parallel BC &\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{DD'}{BC} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{DD'}{8} \Rightarrow DD' = \frac{8}{3} \\ EE' \parallel BC &\Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{EE'}{BC} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{EE'}{8} \Rightarrow EE' = \frac{16}{3} \\ \Rightarrow DD' + EE' &= \frac{8}{3} + \frac{16}{3} = \frac{24}{3} = 8 \end{aligned}$$

۱۴۳ میانگین هندسی دو عدد ۱۴ است. حاصل ضرب آن دو عدد کدام است؟

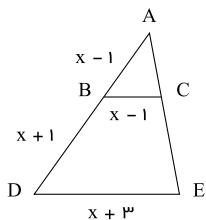
۱۹۶

۱۸۲

۱۷۶

۱۶۹

پاسخ: گزینه ۴ اگر میانگین هندسی b و a عدد c باشد $c^2 = ab$ پس $c = \sqrt{ab}$ یا $c = \sqrt{ab}$ یا $14 = \sqrt{ab}$ یا $196 = ab$



۱۴۴* در شکل مقابل DE || BC است. مقدار x کدام است؟

- ۲,۵ (۲)
۳,۵ (۴)

- ۲ (۱)
۳ (۳)

پاسخ: گزینه ۳

$$BC \parallel DE \Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE} \Rightarrow \frac{x-1}{x+1} = \frac{x-1}{x+3} \Rightarrow 2x = x+3 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow x = 3$$

۱۴۵* اندازه‌ی محیط‌های دو مثلث متشابه به ترتیب ۱۵ و ۸ واحد است. اگر مساحت مثلث بزرگ‌تر ۲۵ واحد مربع باشد، مساحت مثلث

کوچک‌تر کدام است؟

۶ $\frac{2}{9}$ (۴)

۷ $\frac{2}{9}$ (۳)

۶ $\frac{1}{9}$ (۲)

۷ $\frac{1}{9}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

$$\frac{S}{S'} = \left(\frac{15}{8}\right)^2 \Rightarrow \frac{25}{S'} = \left(\frac{15}{8}\right)^2 \Rightarrow S' = \frac{64}{9} = 7\frac{1}{9}$$

۱۴۶* اگر $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$ باشد مقدار $\frac{2a+2b}{a+2b}$ کدام است؟

$\frac{5}{4}$ (۴)

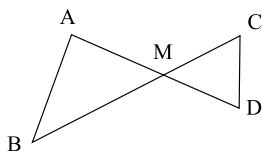
۱ (۳)

$\frac{3}{4}$ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

$$\frac{a}{b} = \frac{2}{3} \Rightarrow \begin{cases} a = 2k \\ b = 3k \end{cases} \Rightarrow \frac{2a+2b}{a+2b} = \frac{4k+6k}{2k+6k} = \frac{10k}{8k} = \frac{5}{4}$$



۱۴۷* در شکل مقابل AB || CD و $\frac{AM}{AD} = \frac{3}{5}$ می‌باشد. نسبت مساحت‌های دو مثلث در شکل کدام است؟

$\frac{2}{5}$ (۲)

$\frac{2}{3}$ (۱)

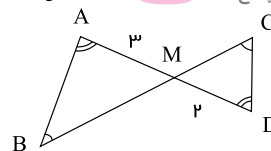
$\frac{9}{25}$ (۴)

$\frac{4}{9}$ (۳)

پاسخ: گزینه ۳ تذکر: وقتی دو مثلث متشابه اند نسبت مساحت آن‌ها مجذور نسبت تشابه آن‌هاست.

$$AB \parallel CD \Rightarrow \triangle ABM \sim \triangle CDM \Rightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{AM}{MD} = \frac{BM}{MC} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{S_{MCD}}{S_{AMB}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$



۱۴۸* طول اضلاع یک مثلث ۱۱ و ۵ و ۷ سانتی‌متر و طول کوچک‌ترین ضلع مثلثی متشابه با مثلث اولی، ۲۲٫۵ سانتی‌متر است. محیط مثلث

دوم کدام است؟

۱۰۳٫۵ (۴)

۱۰۳ (۳)

۱۰۲٫۵ (۲)

۱۰۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۴ در دو مثلث متشابه نسبت محیط‌ها برابر نسبت اضلاع نظیر است.

$$\text{محیط مثلث اول} = 7 + 5 + 11 = 23$$

$$\frac{\text{محیط مثلث اول}}{\text{محیط مثلث دوم}} = \frac{a}{a'} \Rightarrow \frac{۲۳}{۲۲,۵} = \frac{۵}{a'}$$

$$\Rightarrow \text{محیط مثلث دوم} = ۱۰۳,۵$$

۱۴۹ ★ با کدام مجموعه مقادیر a ، تابع با ضابطه ی $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+a} & ; x \geq -1 \\ x^2 + ax & ; x < -1 \end{cases}$ در $x = -1$ پیوسته است؟

- ۱ $\{1, \sqrt{2}\}$ ۲ $\{1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}\}$ ۳ \emptyset ۴ \mathbb{R}

پاسخ: گزینه ۳

برای این که تابع f در نقطه ی مرزی $x = -1$ پیوسته باشد، باید حد راست، حد چپ و مقدار تابع در این نقطه برابر باشند.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{1}{x+a} = \frac{1}{-1+a} = \frac{-1}{1-a} \\ \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (x^2 + ax) = (-1)^2 + a(-1) = 1-a \\ f(-1) &= \frac{1}{-1+a} = \frac{-1}{1-a} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{-1}{1-a} = 1-a \Rightarrow (1-a)^2 = -1 \Rightarrow \text{امکان ندارد}$$

۱۵۰ ★ دو تاس را با هم پرتاب می کنیم. با کدام احتمال مجموع دو عدد رو شده، مضرب ۴ است؟

- ۱ $\frac{2}{9}$ ۲ $\frac{5}{18}$ ۳ $\frac{1}{4}$ ۴ $\frac{5}{12}$

پاسخ: گزینه ۳

$$\left. \begin{aligned} n(S) &= 6^2 = 36 \\ 4 &\Rightarrow (1, 3), (3, 1), (2, 2) \\ 8 &\Rightarrow (2, 6), (6, 2), (3, 5), (5, 3), (4, 4) \\ 12 &\Rightarrow (6, 6) \end{aligned} \right\} \Rightarrow n(A) = 9$$

$$\text{پس } P(A) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} \text{ است.}$$

پاسخنامه تشریحی

۱ ☆ گزینه ۲ در توزیع فراوانی داده‌های پیوسته، نمودار چندبر فراوانی مناسب است.

۲ ☆ گزینه ۱

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3 \Rightarrow (2+a)[2^+] - (2+a)[2^-] = 3$$

$$\Rightarrow (2+a)(2) - (2+a)(1) = 3 \Rightarrow 4 + 2a - 2 - a = 3 \Rightarrow a = 1$$

۳ ☆ گزینه ۳

شرط پوشیدگی تابع f در $x = a$ این است که حد راست و حد چپ و مقدار تابع در موجود و متناهی و باهم برابر باشند.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{2x}}{2 - x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{2x}}}{-1} = -\frac{1}{2}$$

پس $f(2) = a = -\frac{1}{2}$ است

۴ ☆ گزینه ۱

$$3^a = 2\sqrt{2} \Rightarrow 2^{2a} = 2^{\frac{3}{2}} \Rightarrow 2a = \frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{3}{4}$$

$$\log_2^{(2a+1)} = \log_2^{(2 \times \frac{3}{4} + 1)} = \log_2^2 = 1$$

۵ ☆ گزینه ۳

$$n(S) = \binom{8}{3} = \frac{8 \times 7 \times 6}{6} = 56$$

هر ۳ مهره هم‌رنگ باشند یعنی هر ۳ سفید یا هر ۳ سیاه باشند.

$$n(A) = \binom{5}{3} + \binom{3}{3} = 10 + 1 = 11$$

پس $P(A) = \frac{11}{56}$ است.

۶ ☆ گزینه ۲

با کمی دقت متوجه می‌شویم که زاویه $x = \frac{-3\pi}{4}$ است. (زیرا $x = -\sqrt{2}$)

$$\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x \stackrel{x = -\frac{3\pi}{4}}{=} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

دقت کنید که $\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \cos\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ است.

۷ ☆ گزینه ۳

$$n(S) = 6^2 = 36$$

$$A = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (5, 1), (5, 3), (5, 5)\} \Rightarrow n(A) = 9$$

پس $P(A) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$ است.

۸ ☆ گزینه ۱

$$n(S) = \binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$$

هر دو هم رشته باشند یعنی هر دو ریاضی یا هر دو تجربی باشند.

$$\log_{\sqrt{r}}^{\sqrt{r}} + \log_{\sqrt{r}}^{\sqrt{r}} = \log_{\sqrt{r}}^{\sqrt{r}} + \log_{\sqrt{r}}^{\sqrt{r}} = \frac{1}{\sqrt{r}} \log_{\sqrt{r}}^{\sqrt{r}} + \frac{1}{\sqrt{r}} \log_{\sqrt{r}}^{\sqrt{r}} = \frac{1}{\sqrt{r}} \log_{\sqrt{r}}^{\sqrt{r}} + \frac{1}{\sqrt{r}} \log_{\sqrt{r}}^{\sqrt{r}} = \frac{1}{\sqrt{r}} + \frac{1}{\sqrt{r}} = \frac{2}{\sqrt{r}}$$

☆ ۱۸ گزینه ۴

$$۳ + ۶ + ۷ + ۸ = ۲۴ \rightarrow \bar{x} = \frac{۲۴}{۴} = ۶$$

فرض می‌کنیم داده‌ی X را اضافه کرده‌ایم پس داریم:

$$۶ + ۱ = \frac{۲۴ + x}{۵} \rightarrow ۳۵ = ۲۴ + x \rightarrow x = ۱۱$$

☆ ۱۹ گزینه ۴

$$n(S) = ۶^۲ = ۳۶$$

متمم پیشامد این که مجموع دو تاس بیش تر از ۴ باشد، این است که مجموع دو تاس کوچک تر یا مساوی ۴ باشد:

$$A' = \left\{ \underbrace{(1, 3), (3, 1)}_۲, \underbrace{(2, 2)}_۱, \underbrace{(1, 1)}_۱ \right\} \Rightarrow n(A') = ۴$$

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{۴}{۳۶} = \frac{۳۲}{۳۶} = \frac{۸}{۹}$$

☆ ۲۰ گزینه ۳

$$\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}, \log_k^{a^n} = n \log_k^a \text{ می‌دانیم:}$$

$$\log_{\sqrt{r}}^{\sqrt{r}} + \log_{\sqrt{r}}^{\sqrt{r}} = \log_{\sqrt{r}}^{\sqrt{r}} = \log_{\sqrt{r}}^{\sqrt{r}} = \log_{\sqrt{r}}^{\sqrt{r}} = \frac{1}{\sqrt{r}} \log_{\sqrt{r}}^{\sqrt{r}} = \frac{1}{\sqrt{r}} + \frac{1}{\sqrt{r}} = \frac{2}{\sqrt{r}}$$

☆ ۲۱ گزینه ۱

$$n(S) = ۶^۲ = ۳۶$$

$$A = \{(1, 5), (5, 1), (2, 4), (4, 2), (3, 3)\} \Rightarrow n(A) = ۵$$

$$\text{پس } P(A) = \frac{۵}{۳۶} \text{ است.}$$

☆ ۲۲ گزینه ۴ زیر رادیکال دوم همواره مثبت است، فقط کافی است زیر رادیکال اول را بزرگ تر مساوی صفر قرار دهیم.

$$|x| - 1 \geq 0 \Rightarrow |x| \geq 1 \Rightarrow x \geq 1 \text{ یا } x \leq -1 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - (-1, 1)$$

☆ ۲۳ گزینه ۲

$$f(\sqrt{x}) = x + \sqrt{x}, \begin{aligned} x = 1 &\Rightarrow f(1) = 1 + \sqrt{1} = ۲ \\ x = ۴ &\Rightarrow f(۲) = ۴ + \sqrt{۴} = ۶ \end{aligned} \Rightarrow ۲ + ۶ = ۸$$

☆ ۲۴ گزینه ۴

به ازای $x = 0$ داریم: $\sin x + \cos x = 1$

$$\sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \stackrel{x=0}{=} \sin^2\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

☆ ۲۵ گزینه ۴

$$n(S) = ۶^۲ = ۳۶$$

$$۶ \Rightarrow (1, 5), (5, 1), (2, 4), (4, 2), (3, 3)$$

$$۵ \Rightarrow (1, 4), (4, 1), (2, 3), (3, 2)$$

$$۴ \Rightarrow (1, 3), (3, 1), (2, 2)$$

$$\Rightarrow n(A) = ۱۵$$

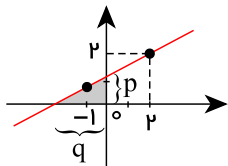
$$۳ \Rightarrow (1, 2), (2, 1)$$

$$۲ \Rightarrow (1, 1)$$

پس $P(A) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$ است.

☆ ۲۶ گزینه ۴

ابتدا معادله ی خطی که از دو نقطه ی $A \left| -1 \right|_2$ و $B \left| 2 \right|_2$ می گذرد را می نویسیم.



$$AB: \frac{y - y_A}{x - x_A} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} \rightarrow \frac{y - 1}{x + 1} = \frac{1 - 2}{-1 - 2} = \frac{1}{3} \rightarrow 3y - 3 = x + 1 \rightarrow 3y = x + 4$$

حال عرض از مبدا و طول از مبدا خط را حساب می کنیم.

$$x = 0 \rightarrow y = \frac{4}{3} : q, \quad y = 0 \rightarrow x = -4 : p$$

$$S = \frac{1}{2} |pq| = \frac{1}{2} \left| -\frac{16}{3} \right| = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$$

☆ ۲۷ گزینه ۴

می دانیم: $\log_k^{ab} = \log_k^a + \log_k^b, \quad \log_{km}^n = \frac{n}{m} \log_k^a$

$$\log_{\sqrt{b}}^{ab^2} = \log_{\sqrt{b}}^a + \log_{\sqrt{b}}^{b^2} = \log_{\frac{1}{2}}^a + \log_{\frac{1}{2}}^{b^2} = 2 \log_{\frac{1}{2}}^a + 4 = 2 \left(\frac{3}{2} \right) + 4 = 7$$

☆ ۲۸ گزینه ۴

کافی است که حد راست و حد چپ و مقدار تابع را در $x = \frac{\pi}{2}$ بدست آوریم.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} (-\cos 2x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} (\sin x + 2 \cos x) = 1 \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{تابع در } x = \frac{\pi}{2} \text{ پیوسته است.}$$

☆ ۲۹ گزینه ۴

$$n(S) = \binom{8}{2} = \frac{8 \times 7}{2} = 28$$

$$n(A) = \underbrace{\binom{3}{1}}_{\text{یک دیابتی}} \times \underbrace{\binom{5}{1}}_{\text{یک سالم}} = 3 \times 5 = 15$$

پس $P(A) = \frac{15}{28}$ است.

☆ ۳۰ گزینه ۴ مجموع درصد فراوانی های نسبی برابر ۱۰۰ است بنابراین داریم:

$$10 + 15 + 18 + x + 20 + 12 = 100 \Rightarrow x = 25$$

$$100 \times \frac{\text{فراوانی مطلق}}{\text{تعداد کل داده ها}} = \text{درصد فراوانی نسبی} \Rightarrow 100 \times \frac{\text{فراوانی نسبی}}{\text{تعداد کل داده ها}} = \text{درصد فراوانی نسبی}$$

$$\Rightarrow 25 = \frac{F_f}{120} \times 100 \Rightarrow F_f = 30$$

☆ ۳۱ گزینه ۴ گزینه ای درست است که نقطه ی $A \left| 1 \right|_2$ در آن صدق کند و در ضمن شیب خط برابر ۱- باشد زیرا:

$$y = x + 1 \rightarrow m = 1 \xrightarrow{\text{عمود}} m' = -1$$

☆ ۳۲ گزینه ۱

$$\text{مخرج} = 0 \Rightarrow [x] + 1 = 0 \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow -1 \leq x < 0 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - [-1, 0)$$

☆ ۳۳ گزینه ۲

$$a = b = c = d = 5: \text{ چون واریانس داده ها صفر است پس تمام داده ها برابرند از طرفی چون میانگین ۵ است بنابراین}$$
$$\bar{x} = \frac{a + b + c + d + c + d + a + b}{6} = \frac{40}{6} = \frac{20}{3}$$

☆ ۳۴ گزینه ۱ چون جنسیت تولد نوزاد پیشامدی مستقل است لذا احتمال به دنیا آمدن هر پسر برابر $\frac{1}{10}$ است.

$$P(\text{هر سه فرزند پسر}) = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = 0,001$$

☆ ۳۵ گزینه ۳

توجه کنید که $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -3$ است.

$$P(x_1^3 + 3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 = (-3)^3 = -27)$$

توجه کنید $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$ باشد.

☆ ۳۶ گزینه ۲

$$\log_k^a m = \frac{n \log_k^a}{m} \text{ می دانیم:}$$

$$\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{\frac{1}{3}} = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{\sqrt[3]{3}} = \log_{\frac{1}{3}} 3^{-\frac{1}{3}} = \log_{\frac{1}{3}} 3^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{-\frac{1}{3}}\right) \log_{\frac{1}{3}} 3 = -\frac{1}{3}$$

☆ ۳۷ گزینه ۱ در سرشماری، تمام افراد جامعه را مورد مطالعه قرار می دهیم.

☆ ۳۸ گزینه ۴

$$n(S) = \binom{9}{2} = \frac{9 \times 8}{2} = 36$$

اعداد زوج ۲، ۴، ۶، ۸ هستند بنابراین داریم:

$$n(A) = \binom{4}{2} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$$

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \text{ پس است.}$$

☆ ۳۹ گزینه ۳

$$n(S) = 6^2 = 36$$

تاس اول	تاس دوم
۲	۱
۳	۱, ۲
۴	۱, ۲, ۳
۵	۱, ۲, ۳, ۴
۶	۱, ۲, ۳, ۴, ۵

$\Rightarrow n(A) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$

$$P(A) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12} \text{ پس است.}$$

☆ ۴۰ گزینه ۱ چون A و B ناسازگارند $P(A \cap B) = 0$ می باشد پس:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{1}{5} + P(B) \Rightarrow P(B) = \frac{2}{5}$$

☆ ۴۱ گزینه ۲

می‌دانیم: $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

$$P(B) + P(A - B) = P(B) + P(A) - P(A \cap B) = P(A \cup B)$$

☆ ۴۲ گزینه ۱

$$S_{\text{جدید}} = \{(1, 6)(6, 1)(2, 5)(5, 2)(3, 4)(4, 3)\} \Rightarrow n(S) = 6$$

$$A = \{(2, 5)(5, 2)\} \Rightarrow n(A) = 2$$

پس $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ است.

☆ ۴۳ گزینه ۲

$$S_{\text{جدید}} = \{(1, 6)(6, 1)(2, 3)(3, 2)\} \Rightarrow n(S) = 4$$

$$A = \{(2, 3)(3, 2)\} \Rightarrow n(A) = 2$$

پس $P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ است.

☆ ۴۴ گزینه ۱

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{1}{4} - \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{4}\right) = \frac{11}{12} - \frac{2}{12} = \frac{9}{12}$$

☆ ۴۵ گزینه ۲ اگر $P(B) = x$ باشد.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)$$

$$0,4 = 0,2 + x - 0,2x \Rightarrow 0,2 = 0,8x \Rightarrow x = \frac{1}{4} = 0,25$$

☆ ۴۶ گزینه ۳

$$\begin{cases} P(B) = 0,8 \\ P(A) = 0,4 \end{cases}$$

چون A و B مستقلند A' و B' نیز مستقلند پس:

$$P(A' \cap B') = P(A') \times P(B') = 0,6 \times 0,2 = 0,12$$

☆ ۴۷ گزینه ۲

$$n(S) = 9, \quad A = \{2, 3, 4, 6, 8, 9\} \Rightarrow n(A) = 6$$

پس $P(A) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ است.

☆ ۴۸ گزینه ۴ پیشامد باید زیرمجموعه ای از فضای نمونه ای باشد.

☆ ۴۹ گزینه ۴ ۴ ساعت خراب و ۶ ساعت سالم داریم.

$$\begin{cases} n(S) = \binom{10}{3} \\ n(A) = \binom{4}{3} \end{cases} \Rightarrow P(A) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{10}{3}}$$

☆ ۵۰ گزینه ۴

احتمال آمدن باران: $P(A)$ ، احتمال نیامدن باران: $P(A')$

$$\frac{P(A)}{P(A')} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{P(A)}{1 - P(A)} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3P(A) = 2 - 2P(A) \Rightarrow 5P(A) = 2 \Rightarrow P(A) = \frac{2}{5}$$

☆ ۵۱ گزینه ۴

$$S_{\text{جدید}} = \{(2, 6)(6, 2)(3, 5)(5, 3)(4, 4)\} \Rightarrow n(S) = 5$$

$$A = \{(2, 6)(6, 2)(3, 5)(5, 3)\} \Rightarrow n(A) = 4$$

پس $P(A) = \frac{4}{5}$ است.

☆ ۵۲ گزینه ۲ استفاده از الگویی خاص برای جمع آوری داده‌ها مناسب نیست.

☆ ۵۳ گزینه ۱ مجموع همه ی زوایای مرکزی برابر با 360° است، پس داریم:

$$27 + 45 + 99 + \alpha + 54 + 18 = 360 \Rightarrow 243 + \alpha = 360 \Rightarrow \alpha = 117^\circ$$

مجموع فراوانی‌ها برابر با $N = 160$ می‌باشد، اگر F_f فراوانی مطلق گروه چهارم باشد داریم:

$$d_i = \frac{360}{N} \times F_i \Rightarrow 117 = \frac{360}{160} F_f \Rightarrow F_f = \frac{160 \times 117}{360} = 52$$

☆ ۵۴ گزینه ۴ می‌دانیم: $\lim_{u \rightarrow 0} (1 - \cos u) \sim \frac{u^2}{2}$, $\lim_{u \rightarrow 0} \sin u \sim u$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x)^2}{x \times x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2}{2x^2} = \frac{4}{2} = 2$$

☆ ۵۵ گزینه ۲

$$16^x = 64 \Rightarrow (2^4)^x = 2^6 \Rightarrow 2^{4x} = 2^6 \Rightarrow 4x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{4}$$

☆ ۵۶ گزینه ۴

$$\left(\frac{1}{8}\right)^{3x} = 32^{x+1} \Rightarrow (2^{-3})^{3x} = (2^5)^{x+1} \Rightarrow 2^{-9x} = 2^{5x+5}$$

$$\Rightarrow -9x = 5x + 5 \Rightarrow 14x = -5 \Rightarrow x = -\frac{5}{14}$$

☆ ۵۷ گزینه ۱

می‌دانیم: $\log_b^N = x \rightarrow N = b^x$

$$\log_8^{x+300} = 3 \xrightarrow{\text{تعریف}} x + 300 = 8^3 = 512 \rightarrow x = 512 - 300 = 212$$

☆ ۵۸ گزینه ۳

می‌دانیم: $\log_b^N = x \rightarrow N = b^x$

$$\log_3^{x+229} = 6 \xrightarrow{\text{تعریف}} x + 229 = 3^6 = 729 \Rightarrow x = 729 - 229 = 500$$

☆ ۵۹ گزینه ۲

جلوی لگاریتم باید مثبت باشد.

$$|x - 3| > 0 \Rightarrow |x| > 3 \Rightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x < -3 \end{cases} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - [-3, 3]$$

☆ ۶۰ گزینه ۳

می‌دانیم: $\log_{km}^a = \frac{n}{m} \log_k^a$

$$\log_8^{\sqrt{2}} = \log_{2^3}^{2^{\frac{1}{2}}} = \log_{2^3}^{2^{-\frac{1}{2}}} = \frac{-\frac{1}{2}}{3} = -\frac{1}{6} = -\frac{1}{2}$$

گزینه ۳ ☆ ۶۱

$$a \log_b^x = x \log_b^a, \log_{km}^a = \frac{n}{m} \log_k^a \quad \text{می دانیم:}$$

$${}_2 \log_x^x = x \log_x^2 = x \log_{2^2}^2 = x \frac{1}{2} = \frac{x}{\sqrt{2}}$$

گزینه ۳ ☆ ۶۲

$$\log_{km}^a = \frac{n}{m} \log_k^a \quad \text{می دانیم:}$$

$$\log_{\sqrt{5}}^{(\sqrt{5})^9} = \log_{5^{\frac{1}{2}}}^{5^{\frac{9}{2}}} = \log_{5^{\frac{1}{2}}}^{5^{\frac{9}{2}}} = \frac{\frac{9}{2}}{\frac{1}{2}} = 9$$

گزینه ۳ ☆ ۶۳

$$\log_{km}^a = \frac{n}{m} \log_k^a \quad \text{می دانیم:}$$

$$\log_{\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} = \log_{5^{\frac{1}{2}}}^{5^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} \log_5^5 = \frac{1}{\frac{1}{2}} a$$

گزینه ۲ ☆ ۶۴

$$\log_k^{ab} = \log_k^a + \log_k^b, \log_k^{a^n} = n \log_k^a \quad \text{می دانیم:}$$

$$\log_{6000}^{6000} = \log_{\underbrace{6}_{2 \times 3}}^{\underbrace{6000}_{2^3 \times 3^4 \times 5^3}} = \log 2 + \log 3 + \log 10^3 = 0,301 + 0,5 + 3 = 3,801$$

گزینه ۱ ☆ ۶۵

$$S = x_1 + x_2 = 2 + \sqrt{4-a} + 2 - \sqrt{4-a} = 4$$

$$P = x_1 \times x_2 = (2 + \sqrt{4-a})(2 - \sqrt{4-a}) = 4 - (4-a) = a$$

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + a = 0$$

گزینه ۲ ☆ ۶۶ در یک معادله‌ی درجه‌ی دوم با ضرایب گویا اگر یک ریشه‌ی معادله، $\alpha + \sqrt{\beta}$ باشد ریشه‌ی دیگر $\alpha - \sqrt{\beta}$ است پس ریشه‌ی دیگر معادله $3 + \sqrt{5}$ باشد. در نتیجه:

$$x_1 = 3 - \sqrt{5}, x_2 = 3 + \sqrt{5} \Rightarrow \begin{cases} S = x_1 + x_2 = 6 \\ P = x_1 \times x_2 = (3 - \sqrt{5}) \times (3 + \sqrt{5}) = 9 - 5 = 4 \end{cases}$$

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 4 = 0$$

گزینه ۲ ☆ ۶۷

روش اول:

$$x^2 - 2x + 1 = (1 - \sqrt{2})^2 \rightarrow x^2 - 2x + 1 - (1 - \sqrt{2})^2 = 0 \rightarrow S = \frac{-b}{a} = 2$$

روش دوم:

$$(x-1)^2 = (1 - \sqrt{2})^2 \Rightarrow x-1 = \pm(1 - \sqrt{2})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-1 = 1 - \sqrt{2} \Rightarrow x_1 = 2 - \sqrt{2} \\ x-1 = -1 + \sqrt{2} \Rightarrow x_2 = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 = 2$$

گزینه ۱ ☆ ۶۸

$$|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \Rightarrow 1 = \frac{\sqrt{\Delta}}{1} \Rightarrow \Delta = 1 \xrightarrow{b^2 - 4ac = 1} a^2 - 4b = 1 \Rightarrow a^2 = 4b + 1$$

☆ ۶۹ گزینه ۲

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \sqrt{3} + \sqrt{2}, \quad P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \sqrt{6}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 - 2\sqrt{6} = 3 + 2 + 2\sqrt{6} - 2\sqrt{6} = 5$$

☆ ۷۰ گزینه ۱

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -1, \quad P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = -3$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = (-1)^2 - 2(-3) = 1 + 6 = 7$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = (-1)^2 - 2(-3) = 7$$

$$\alpha^3 + \beta^3 + \alpha^2 + \beta^2 = -1 + 7 = 6$$

☆ ۷۱ گزینه ۳

روش اول: اگر ریشه‌ی معادله‌ی جدید را y و ریشه‌ی معادله‌ی قدیم را x در نظر بگیریم داریم:

$$y = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{y}$$

$$\xrightarrow{\text{معادله}} 5\left(\frac{1}{y}\right)^2 - 13\left(\frac{1}{y}\right) - 1 = 0 \Rightarrow \frac{5}{y^2} - \frac{13}{y} - 1 = 0$$

$$\xrightarrow{\times y^2} 5 - 13y - y^2 = 0 \Rightarrow y^2 + 13y - 5 = 0$$

روش دوم: کافی است جای a و c را عوض کنید. (ریشه‌های معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ و $cx^2 + bx + a = 0$ عکس یکدیگر می‌باشند)

$$-x^2 - 13x + 5 = 0 \Rightarrow x^2 + 13x - 5 = 0$$

☆ ۷۲ گزینه ۱ روش اول: اگر y ریشه‌ی معادله‌ی جدید و x ریشه‌ی معادله‌ی قدیم باشد. آنگاه $y = 9x$ پس: $x = \frac{y}{9}$ لذا:

$$x^2 + x - 3 = 0 \Rightarrow \left(\frac{y}{9}\right)^2 + \frac{y}{9} - 3 = 0 \Rightarrow y^2 + 9y - 243 = 0$$

روش دوم: کافی است b را در 9 و c را در 9^2 ضرب کنید.

$$x^2 + x - 3 = 0 \Rightarrow x^2 + 9x - 243 = 0$$

(ریشه‌های معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ برابر ریشه‌های معادله‌ی $ax^2 + b'x + c' = 0$ می‌باشند.)

☆ ۷۳ گزینه ۳ معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌هایش k واحد بیشتر از ریشه‌های معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ می‌باشد به صورت زیر است:

$$a(x - k)^2 + b(x - k) + c = 0$$

پس کافی است x را به $x - 2$ تبدیل کنیم.

$$(x - 2)^2 - m(x - 2) + m - 1 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 - mx + 2m + m - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - (4 + m)x + 3m + 3 = 0$$

☆ ۷۴ گزینه ۳

$$\sqrt{3} + \sqrt{x - x^2} = \sqrt{3} \Rightarrow \text{توان } 2 \Rightarrow 3 + \sqrt{x - x^2} = 3$$

$$\Rightarrow \sqrt{x - x^2} = 0 \Rightarrow x - x^2 = 0 \Rightarrow x(1 - x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

هر سه x بدست آمده در معادله صدق می‌کنند و مجموع ریشه‌ها صفر است.

☆ ۷۵ گزینه ۲

$$x \text{ محور تقارن} = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2}$$

x بدست آمده را در تابع $y = \frac{2x-1}{4x}$ قرار داده y را بدست می آوریم.

$$x = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{2(-\frac{1}{2}) - 1}{4(-\frac{1}{2})} = \frac{-2}{-2} = 1$$

☆ ۷۶ گزینه ۲ شرط آن که یک عبارت درجه ی دوم، مربع کامل باشد آن است که $\Delta = 0$ باشد.

$$\Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow a^2 - 4a = 0 \begin{cases} a = 0 \text{ غ ق ن} \rightarrow \\ a = 4 \end{cases}$$

عبارت به صورت $y = x^2$ می شود. \rightarrow غ ق ن $a = 0$

☆ ۷۷ گزینه ۳

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 4, \quad P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = 1$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 x_2} = \frac{4}{1} = 4$$

☆ ۷۸ گزینه ۱ چون مجموع ضرایب برابر صفر است یکی از ریشه ها ۱ و دیگری $\frac{c}{a}$ یعنی ۲ است.

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow 1^4 + 2^4 = 1 + 16 = 17$$

☆ ۷۹ گزینه ۳

$$y = x^2 - x, \quad x = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow 2x - 1 = 0$$

☆ ۸۰ گزینه ۲ در تابع درجه ی دوم وقتی ضریب x^2 منفی است تابع فقط Max دارد.

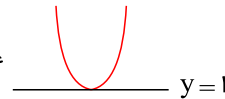
☆ ۸۱ گزینه ۲ در تابع درجه ی دوم وقتی ضریب x^2 مثبت است تابع فقط Min دارد.

☆ ۸۲ گزینه ۱

هر نقطه ای روی محور عرض قرار دارد طولش صفر است یعنی طول نقطه ی S برابر صفر می باشد.

$$x = \frac{-b}{2a} = 0 \Rightarrow b = 0$$

☆ ۸۳ گزینه ۱ با توجه به شکل عرض نقطه ی S برابر یک می باشد.



$$y_s = 1 \rightarrow \frac{4ac - b^2}{4a} = 1 \Rightarrow \frac{4 - a^2}{4} = 1 \Rightarrow 4 - a^2 = 4 \Rightarrow a = 0$$

☆ ۸۴ گزینه ۲ شرط آنکه یک معادله ی درجه ی دوم دارای ریشه ی مضاعف صفر باشد آن است که c و b هر دو صفر باشند.

$$\begin{cases} b = 0 \Rightarrow m + 2n + 1 = 0 \Rightarrow m = -3, n = 1 \\ c = 0 \Rightarrow m - 2n + 5 = 0 \end{cases}$$

☆ ۸۵ گزینه ۱

$$S = \text{مجموع ریشه ها} = \frac{-b}{a} = \frac{a+3}{1} = 4 \Rightarrow a = 1$$

$$P = \text{ضرب ریشه ها} = \frac{c}{a} = \frac{3a}{1} \xrightarrow{a=1} P = 3$$

☆ ۸۶ گزینه ۲

$$(x-1)^2 = (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2$$

$$\Rightarrow x-1 = \pm(\sqrt{2} - \sqrt{3}) \begin{cases} x-1 = \sqrt{2} - \sqrt{3} \Rightarrow x = 1 + \sqrt{2} - \sqrt{3} \\ x-1 = -\sqrt{2} + \sqrt{3} \Rightarrow x = 1 - \sqrt{2} + \sqrt{3} \end{cases}$$

حاصل جمع دو ریشه برابر ۲ می شود.

☆ ۸۷ گزینه ۲

معادله را به صورت $3x^2 + 11x - 2m - 7 = 0$ مرتب می کنیم.

$$x_1 = \frac{-1}{x_2} \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = -1 \Rightarrow \frac{c}{a} = -1 \Rightarrow \frac{-2m-7}{3} = -1 \Rightarrow -2m-7 = -3 \Rightarrow m = -2$$

☆ ۸۸ گزینه ۱

شرط آنکه معادله درجه ۲ دارای دو ریشه ی متمایز مختلف علامت باشد آن است که $\frac{c}{a}$ منفی باشد.

$$\frac{c}{a} < 0 \Rightarrow \frac{m-2}{m^2+1} < 0 \Rightarrow m-2 < 0 \Rightarrow m < 2$$

مثبت

☆ ۸۹ گزینه ۳ چون $\frac{c}{a}$ منفی است $(\frac{k^2+3}{-6} < 0)$ پس دلنا حتماً مثبت است و معادله ی درجه ی دوم دارای دو ریشه ی متمایز مختلف علامت است.

☆ ۹۰ گزینه ۴ کمترین یا بیشترین مقدار تابع درجه ی دوم همان عرض نقطه ی S است.

$$\frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{8 - 1}{4} = \frac{7}{4}$$

☆ ۹۱ گزینه ۴

کمترین یا بیشترین مقدار تابع درجه ی دوم همان عرض نقطه ی S است.

$$\frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{-8 - 1}{-4} = \frac{9}{4}$$

☆ ۹۲ گزینه ۱

عرض محل تلاقی سهمی با محور تقارنش همان عرض رأس سهمی (S) است.

$$\frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{6 - 4}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

☆ ۹۳ گزینه ۳

عدد مورد نظر را x در نظر می گیریم.

$$x \times x = 3x + 4 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow (x-4)(x+1) = 0 \begin{cases} x=4 & \checkmark \\ x=-1 & \times \end{cases}$$

☆ ۹۴ گزینه ۲ اگر یک ریشه ی معادله ی درجه ی دوم صفر باشد ریشه ی دیگر $-\frac{b}{a}$ است. پس $x = -\frac{b}{a} = -1$ است.

☆ ۹۵ گزینه ۳ زیرا رادیکال باید بزرگ تر مساوی صفر باشد.

$$x^2 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2(x-1) \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow D_f = [1, +\infty) \cup \{0\}$$

☆ ۹۶ گزینه ۳

$$[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in Z \\ -1 & x \notin Z \end{cases}$$

می دانیم:

مخرج کسر نباید صفر باشد پس:

$$D_g = R - \{ \text{ریشه یا ریشه های مخرج} \} \Rightarrow D_g = R - Z$$

☆ ۹۷ گزینه ۱

$$x^2 - 3 = t \Rightarrow x^2 = t + 3 \xrightarrow{x = \pm \sqrt{t+3}} f(t) = \pm \frac{2}{3} \sqrt{t+3} \Rightarrow f(x) = \frac{2}{3} \sqrt{x+3}$$

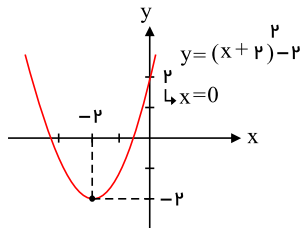
$f(x) = -\frac{2}{3} \sqrt{x+3}$ هم صحیح است اما در گزینه ها مطرح نشده است.

☆ ۹۸ گزینه ۱

$$y = x^2 - 2 \xrightarrow{\text{یک واحد به سمت راست}} y = (x-2)^2 - 2 \xrightarrow{\text{یک واحد به سمت بالا}} y = (x-2)^2 - 2 + 1$$

$$\Rightarrow y = x^2 - 4x + 3 \Rightarrow (c, d) = (4, 3)$$

☆ ۹۹ گزینه ۴ کافی است نمودار $y = x^2$ را دو واحد به سمت چپ و دو واحد به پایین انتقال دهیم.



☆ ۱۰۰ گزینه ۱ ماشین داده شده تعریف $g(f(x))$ می باشد.

$$g(f(x)) = x \Rightarrow g(3x - 4) = x \xrightarrow{3x-4=2 \Rightarrow x=2} g(2) = 2$$

☆ ۱۰۱ گزینه ۳

ناحیه‌ی سوم \rightarrow ^{اشترک} ناحیه‌ی اول یا سوم \Rightarrow سینوس و کسینوس هم علامتند $\Rightarrow \sin \alpha \cdot \cos \alpha > 0$
 ناحیه‌ی دوم یا سوم \Rightarrow سینوس و تانژانت غیر هم علامتند $\Rightarrow \sin \alpha \cdot \tan \alpha < 0$

☆ ۱۰۲ گزینه ۱

هرگاه مجموع یا تفاضل سینوس و کسینوس را داشتید و حاصل ضرب سینوس و کسینوس را خواستید دو طرف را به توان ۲ برسانید.

$$\sin x - \cos x = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{توان ۲}} \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{1} - 2 \sin x \cos x = \frac{1}{4} \Rightarrow 2 \sin x \cos x = \frac{3}{4}$$

☆ ۱۰۳ گزینه ۱

$$\frac{2 \sin^2 \alpha}{\cos \alpha - \cos^2 \alpha} = \frac{2 \sin^2 \alpha}{\cos \alpha (1 - \cos^2 \alpha)} = \frac{2 \sin^2 \alpha}{\cos \alpha \sin^2 \alpha} = \frac{2 \sin \alpha}{\cos \alpha} = 2 \tan \alpha$$

☆ ۱۰۴ گزینه ۱

$$\underbrace{\cos^2 x - \sin^2 x}_{\text{مزوج}} + 1 = (\cos^2 x - \sin^2 x) \underbrace{(\cos^2 x + \sin^2 x)}_1 + 1 = \cos^2 x - \sin^2 x + 1 = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) + 1 = 2 \cos^2 x$$

☆ ۱۰۵ گزینه ۴ کافی است حد راست و حد چپ و مقدار تابع را در $x = 0$ بدست آوریم.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(3x + \frac{|2x|}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (3x + 2) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(3x + \frac{|2x|}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (3x - 2) = -2$$

تابع در $x = 0$ حد ندارد پس نمی تواند پیوسته باشد.

گزینه ۴ ☆۱۰۶

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^r - 2x + b) = a - 2 + b = 2 + b \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} (2ax + 2b) = 2a + 2b \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2 + b = 2a + 2b \Rightarrow 2a + 2b = 2 \Rightarrow 2a + b = 1$$

گزینه ۲ ☆۱۰۷

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2 \sin(x + \frac{\pi}{6}) \cos 2x}{\tan^2 x} = \frac{2 \sin(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}) \cos(\frac{2\pi}{3})}{\tan^2 \frac{\pi}{3}} = \frac{2(1)(-1)}{3} = -\frac{2}{3}$$

گزینه ۱ ☆۱۰۸ فرض می‌کنیم در تابع $f(x)$ وقتی $x \rightarrow 1$ حد تابع برابر a است.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f(x) - 2}{f(x) + a} = \frac{2a - 2}{a + a} = 1 \Rightarrow 2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

پس $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1}{2}$ است.

گزینه ۴ ☆۱۰۹

تابع وقتی حد دارد که حد راست و حد چپ آن در آن نقطه، موجود و با هم برابر باشند.

$$\left\{ \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^r + 3a) = 2 + 3a \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} (ax - 3) = 2a - 3 \end{aligned} \right. \Rightarrow 2 + 3a = 2a - 3 \Rightarrow a = -5$$

گزینه ۱ ☆۱۱۰

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 3, \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -2, f(3) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) + f(3) = 3 - (-2) + 2 = 7$$

گزینه ۲ ☆۱۱۱

هرگاه x به سمت عددی میل کند که باعث صفر شدن تمام جملات شود آن گاه هر عبارت، هم ارز آن جمله ای است که توان کمتری دارد.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 2\sqrt[3]{x}}{3x + 4\sqrt[3]{x}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{جمله‌ی کم‌توان}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2\sqrt[3]{x}}{4\sqrt[3]{x}} = -\frac{1}{2}$$

گزینه ۳ ☆۱۱۲

وقتی $x \rightarrow a$ یعنی x در یک همسایگی از عدد a قرار دارد بنابراین همواره x غیر صحیح است و هیچ گاه سراغ ضابطه‌ی صحیح نمی‌رویم.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow (\frac{-1}{2})^+} f(x) = -2 + (-2) = -4$$

گزینه ۲ ☆۱۱۳

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3, \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = 3 - 1 = 2$$

گزینه ۳ ☆۱۱۴

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -1, \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1, f(2) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) - f(2) = -1 + 1 + 0 = 0$$

گزینه ۱ ☆۱۱۵

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$$

تنها گزینه‌ای که جواب آن عدد یک می‌شود گزینه‌ی اول است زیرا برای محاسبه‌ی $f(0)$ باید سراغ ضابطه‌ی پایین برویم که جواب یک می‌شود.

گزینه ۲ ☆۱۱۶

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \cot^2 x = (-\infty)^2 = -\infty$$

توجه کنید که 0^- در ناحیه‌ی چهارم است و در این ناحیه کتانژانت، منفی است.

☆۱۱۷ گزینه ۴

حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x = -2$ باید با هم برابر باشند.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow (-2)^+} (x+2)^2 = (-2+2)^2 \\ \lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow (-2)^-} (3x-1) = 3(-2)-1 = -7 \\ f(-2) &= (-2+2)^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (-2+2)^2 = -7 \rightarrow \text{امکان ندارد}$$

☆۱۱۸ گزینه ۴

هرگاه x به سمت عددی میل کند که باعث صفر شدن تمام جملات شود آن گاه هر عبارت، هم ارز آن جمله ای است که توان کمتری دارد.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} - x}{\sqrt{x} + x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{جمله ی کم توان}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1$$

☆۱۱۹ گزینه ۴

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin x + \sqrt{2}}{2 \cos x - \sqrt{2}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{2 \cos x}{-2 \sin x} = \frac{2 \frac{\sqrt{2}}{2}}{2 \frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

☆۱۲۰ گزینه ۳

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - a^2}{x^2 + 2ax + a^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-a)(x+a)}{(x+a)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-a}{x+a} = -\frac{a}{a} = -1$$

پس به ازای هر مقدار مخالف صفر a برقرار است. چون اگر $a = 0$ باشد جواب حد برابر یک می شود.

☆۱۲۱ گزینه ۳

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{\tan x}{\cot x} = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{\tan x}{\frac{1}{\tan x}} = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \tan^2 x = (-\infty)^2 = +\infty$$

$(\frac{\pi}{2})^+$ در ناحیه ی دوم است و در این ناحیه تانژانت، منفی است.

☆۱۲۲ گزینه ۳

هرگاه x به سمت عددی میل کند که باعث صفر شدن تمام جملات شود آن گاه هر عبارت، هم ارز آن جمله ای است که توان کمتری دارد.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 5x^2 + 4x}{3x^2 - 3x} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{-3x} = -\frac{4}{3}$$

☆۱۲۳ گزینه ۳

$$S = 4P \Rightarrow -\frac{b}{a} = 4 \times \frac{c}{a} \Rightarrow 4c + b = 0 \Rightarrow 4m + (3 - 3m) = 0 \Rightarrow m = -3$$

☆۱۲۴ گزینه ۲ اگر a واسطه ی هندسی بین b و c باشد، یعنی $\frac{a}{b} = \frac{c}{a}$ یا $a^2 = bc$

$$\frac{2x}{2x-2} = \frac{2x+3}{2x} \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$$

☆۱۲۵ گزینه ۱

$$DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{x}{2x-3} = \frac{x+2}{2x} \Rightarrow x = 6 \Rightarrow AB = 15$$

☆۱۲۶ گزینه ۲ در تناسب می توان صورت ها را با هم و مخرج ها را با هم جمع کنیم و نسبت تغییر نمی کند. داریم:

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} \Rightarrow \frac{a+b+c}{2+3+4} = \frac{a}{2} \Rightarrow a+b+c = \frac{a}{2} \Rightarrow \frac{a}{a+b+c} = \frac{2}{9}$$

☆۱۲۷ گزینه ۳ اگر دو شکل متشابه باشند نسبت محیط آن ها برابر نسبت تشابه است و نسبت مساحت آن ها مجذور نسبت تشابه آن هاست.

$$\frac{(\text{محيط اولي})^2}{(\text{محيط دومي})^2} = \frac{\text{مساحت اولي}}{\text{مساحت دومي}} \Rightarrow \left(\frac{12}{8}\right)^2 = \left(\frac{6}{S}\right)^2 \Rightarrow \frac{4}{9} = \frac{6}{S} \Rightarrow S = 13,5$$

۱۲۸ ☆ گزینه ۲ وقتی دو مثلث متشابه اند نسبت تشابه (نسبت اضلاع نظير) همان نسبت ميانه هاي نظير دو مثلث است، پس نسبت ميانه هاي كوچك تر به ميانه هاي نظيرش در مثلث بزرگ تر $\frac{b}{a}$ است.

۱۲۹ ☆ گزینه ۳ بنابر قضيه تالس بين خطوط موازي داريم:

$$d_1 \parallel d_2 \parallel d_3 \Rightarrow \frac{2}{x+1} = \frac{x+1}{8} \Rightarrow x^2 + 2x - 15 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-5 \end{cases}$$

که $x = -5$ غير قابل قبول است.

۱۳۰ ☆ گزینه ۴

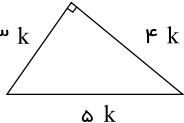
$$\frac{S}{S'} = 3 \frac{P}{P'} \Rightarrow K^2 = 3K \Rightarrow K = 3 \text{ يا } \frac{P}{P'} = 3, \frac{P'}{P} = \frac{1}{3}$$

نکته: اگر دو شکل متشابه باشند نسبت محيط آن ها همان نسبت تشابه است و نسبت مساحت آن ها مجذور نسبت تشابه آن هاست.

۱۳۱ ☆ گزینه ۲ وقتی دو مثلث متشابه اند نسبت مساحت آن ها مجذور نسبت تشابه است.

$$\frac{3}{4} = \left(\frac{AM}{A'M'}\right)^2 \Rightarrow \frac{AM}{A'M'} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

۱۳۲ ☆ گزینه ۳ مثلث مورد نظر به صورت شکل مقابل است که حتماً قائم الزاويه است پس



$$S = 2P \Rightarrow 12K = \frac{(3K)(4K)}{2}$$

بنابراين $K = 2$

پس اضلاع مثلث ۶ و ۸ و ۱۰ است.

۱۳۳ ☆ گزینه ۱ اگر C واسطه ي هندسي بين دو عدد a, b باشد خواهيم داشت:

$$C = \sqrt{ab} = \sqrt{2^2 \times 5 \times 2^2 \times 2 \times 5^2 \times 11^2} = \sqrt{2^4 \times 5^2 \times 11^2} \Rightarrow C = 2^2 \times 5 \times 11 = 220$$

۱۳۴ ☆ گزینه ۱ اگر c واسطه ي هندسي a و b باشد، داريم:

$$c = \sqrt{ab} = \sqrt{\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

۱۳۵ ☆ گزینه ۲

$$\frac{S}{S'} = \left(\frac{2P}{2P'}\right)^2 = k^2 \Rightarrow \frac{2P}{2P'} = k$$

نسبت مساحت دو شکل متشابه مجذور نسبت تشابه آن هاست.

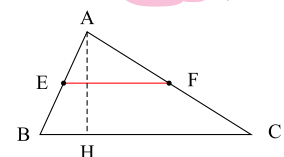
۱۳۶ ☆ گزینه ۳

$$BC' \parallel BC \Rightarrow \frac{AB'}{BB'} = \frac{AC'}{CC'} \Rightarrow \frac{3}{y} = \frac{AC'}{CC'} \Rightarrow AC' = \frac{3}{y} CC'$$

۱۳۷ ☆ گزینه ۴

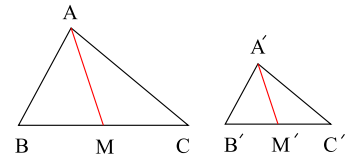
$$EF \parallel BC \Rightarrow \triangle AEF \sim \triangle ABC$$

$$\Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{AEF}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow S_{ABC} = 4S_{AEF} \Rightarrow S_{EFCB} = 3S_{AEF}$$



۱۳۸ ☆ گزینه ۴ در دو مثلث متشابه نسبت ميانه ها با نسبت اضلاع برابر است.

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{AM}{A'M'} = r \Rightarrow \frac{S_{ABM}}{S_{A'B'M'}} = \left(\frac{AC}{A'C'}\right)^2 = r^2 = 4$$



☆ ۱۳۹ گزینه ۲

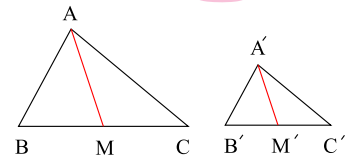
$$\frac{r}{5} = \frac{5}{x} = \frac{y}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{25}{3} \\ y = \frac{35}{3} \end{cases} \Rightarrow x + y = \frac{25 + 35}{3} = 20$$

☆ ۱۴۰ گزینه ۱

$$\angle B = \angle E \Rightarrow ED \parallel BC \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{ED}{BC} \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{6}{9} \Rightarrow AB = 12 \Rightarrow EB = AB - AE = 6$$

☆ ۱۴۱ گزینه ۴

$$\text{نسبت تشابه} = \frac{AM}{A'M'} = 3 \Rightarrow \frac{S}{S'} = (3)^2 = 9$$



نکته: در دو مثلث متشابه نسبت میانه‌های نظیر همان نسبت تشابه است و نسبت مساحت‌ها مجذور نسبت تشابه است.

☆ ۱۴۲ گزینه ۳

$$\begin{aligned} DD' \parallel BC &\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{DD'}{BC} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{DD'}{8} \Rightarrow DD' = \frac{8}{3} \\ EE' \parallel BC &\Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{EE'}{BC} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{EE'}{8} \Rightarrow EE' = \frac{16}{3} \\ \Rightarrow DD' + EE' &= \frac{8}{3} + \frac{16}{3} = \frac{24}{3} = 8 \end{aligned}$$

☆ ۱۴۳ گزینه ۴ اگر میانگین هندسی b و a عدد c باشد $c^2 = ab$ پس $c = \sqrt{ab}$ یا 14 یا 196 $ab = 196$

☆ ۱۴۴ گزینه ۳

$$BC \parallel DE \Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE} \Rightarrow \frac{x-1}{2x} = \frac{x-1}{x+3} \Rightarrow 2x = x+3 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow x = 3$$

☆ ۱۴۵ گزینه ۱

$$\frac{S}{S'} = \left(\frac{15}{8}\right)^2 \Rightarrow \frac{25}{S'} = \left(\frac{15}{8}\right)^2 \Rightarrow S' = \frac{64}{9} = 7\frac{1}{9}$$

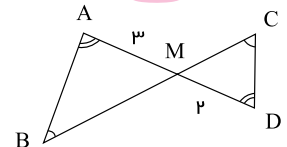
☆ ۱۴۶ گزینه ۴

$$\frac{a}{b} = \frac{2}{3} \Rightarrow \begin{cases} a = 2k \\ b = 3k \end{cases} \Rightarrow \frac{2a + 2b}{a + 2b} = \frac{4k + 6k}{2k + 6k} = \frac{10k}{8k} = \frac{5}{4}$$

☆ ۱۴۷ گزینه ۳ تذکر: وقتی دو مثلث متشابه‌اند نسبت مساحت آن‌ها مجذور نسبت تشابه آن‌هاست.

$$AB \parallel CD \Rightarrow \triangle ABM \sim \triangle MCD \Rightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{AM}{MD} = \frac{BM}{MC} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{S_{MCD}}{S_{AMB}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$



☆ ۱۴۸ گزینه ۴ در دو مثلث متشابه نسبت محیط‌ها برابر نسبت اضلاع نظیر است.

$$\text{محیط مثلث اول} = 7 + 5 + 11 = 23$$

$$\frac{\text{محیط مثلث اول}}{\text{محیط مثلث دوم}} = \frac{a}{a'} \Rightarrow \frac{23}{22,5} = \frac{5}{a'}$$

$$\Rightarrow \text{محیط مثلث دوم} = 103,5$$

☆۱۴۹ گزینه ۳

برای این که تابع f در نقطه $x = -1$ پیوسته باشد، باید حد راست، حد چپ و مقدار تابع در این نقطه برابر باشند.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{1}{x+a} = \frac{1}{-1+a} = \frac{-1}{1-a} \\ \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (x^2 + ax) = (-1)^2 + a(-1) = 1-a \\ f(-1) &= \frac{1}{-1+a} = \frac{-1}{1-a} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{-1}{1-a} = 1-a \Rightarrow (1-a)^2 = -1 \Rightarrow \text{امکان ندارد}$$

☆۱۵۰ گزینه ۳

$$n(S) = 6^2 = 36$$

$$\left. \begin{aligned} 4 &\Rightarrow (1, 3), (3, 1), (2, 2) \\ 8 &\Rightarrow (2, 6), (6, 2), (3, 5), (5, 3), (4, 4) \\ 12 &\Rightarrow (6, 6) \end{aligned} \right\} \Rightarrow n(A) = 9$$

$$\text{پس } P(A) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} \text{ است.}$$

پاسخنامه کلیدی

۱ ☆ ۲	۳۱ ☆ ۴	۶۱ ☆ ۳	۹۱ ☆ ۴	۱۲۱ ☆ ۳
۲ ☆ ۱	۳۲ ☆ ۱	۶۲ ☆ ۳	۹۲ ☆ ۱	۱۲۲ ☆ ۳
۳ ☆ ۳	۳۳ ☆ ۲	۶۳ ☆ ۳	۹۳ ☆ ۳	۱۲۳ ☆ ۳
۴ ☆ ۱	۳۴ ☆ ۱	۶۴ ☆ ۲	۹۴ ☆ ۲	۱۲۴ ☆ ۲
۵ ☆ ۳	۳۵ ☆ ۳	۶۵ ☆ ۱	۹۵ ☆ ۳	۱۲۵ ☆ ۱
۶ ☆ ۲	۳۶ ☆ ۲	۶۶ ☆ ۲	۹۶ ☆ ۳	۱۲۶ ☆ ۲
۷ ☆ ۳	۳۷ ☆ ۱	۶۷ ☆ ۲	۹۷ ☆ ۱	۱۲۷ ☆ ۳
۸ ☆ ۱	۳۸ ☆ ۴	۶۸ ☆ ۱	۹۸ ☆ ۱	۱۲۸ ☆ ۲
۹ ☆ ۴	۳۹ ☆ ۳	۶۹ ☆ ۲	۹۹ ☆ ۴	۱۲۹ ☆ ۳
۱۰ ☆ ۳	۴۰ ☆ ۱	۷۰ ☆ ۱	۱۰۰ ☆ ۱	۱۳۰ ☆ ۴
۱۱ ☆ ۱	۴۱ ☆ ۲	۷۱ ☆ ۳	۱۰۱ ☆ ۳	۱۳۱ ☆ ۲
۱۲ ☆ ۲	۴۲ ☆ ۱	۷۲ ☆ ۱	۱۰۲ ☆ ۱	۱۳۲ ☆ ۳
۱۳ ☆ ۱	۴۳ ☆ ۲	۷۳ ☆ ۳	۱۰۳ ☆ ۱	۱۳۳ ☆ ۱
۱۴ ☆ ۲	۴۴ ☆ ۱	۷۴ ☆ ۳	۱۰۴ ☆ ۱	۱۳۴ ☆ ۱
۱۵ ☆ ۴	۴۵ ☆ ۲	۷۵ ☆ ۲	۱۰۵ ☆ ۴	۱۳۵ ☆ ۲
۱۶ ☆ ۱	۴۶ ☆ ۳	۷۶ ☆ ۲	۱۰۶ ☆ ۴	۱۳۶ ☆ ۳
۱۷ ☆ ۱	۴۷ ☆ ۲	۷۷ ☆ ۳	۱۰۷ ☆ ۲	۱۳۷ ☆ ۴
۱۸ ☆ ۴	۴۸ ☆ ۴	۷۸ ☆ ۱	۱۰۸ ☆ ۱	۱۳۸ ☆ ۴
۱۹ ☆ ۴	۴۹ ☆ ۴	۷۹ ☆ ۳	۱۰۹ ☆ ۴	۱۳۹ ☆ ۲
۲۰ ☆ ۳	۵۰ ☆ ۴	۸۰ ☆ ۲	۱۱۰ ☆ ۱	۱۴۰ ☆ ۱
۲۱ ☆ ۱	۵۱ ☆ ۴	۸۱ ☆ ۲	۱۱۱ ☆ ۲	۱۴۱ ☆ ۴
۲۲ ☆ ۴	۵۲ ☆ ۲	۸۲ ☆ ۱	۱۱۲ ☆ ۳	۱۴۲ ☆ ۳
۲۳ ☆ ۲	۵۳ ☆ ۱	۸۳ ☆ ۱	۱۱۳ ☆ ۲	۱۴۳ ☆ ۴
۲۴ ☆ ۴	۵۴ ☆ ۴	۸۴ ☆ ۲	۱۱۴ ☆ ۳	۱۴۴ ☆ ۳
۲۵ ☆ ۴	۵۵ ☆ ۲	۸۵ ☆ ۱	۱۱۵ ☆ ۱	۱۴۵ ☆ ۱
۲۶ ☆ ۴	۵۶ ☆ ۴	۸۶ ☆ ۲	۱۱۶ ☆ ۲	۱۴۶ ☆ ۴
۲۷ ☆ ۴	۵۷ ☆ ۱	۸۷ ☆ ۲	۱۱۷ ☆ ۴	۱۴۷ ☆ ۳
۲۸ ☆ ۴	۵۸ ☆ ۳	۸۸ ☆ ۱	۱۱۸ ☆ ۴	۱۴۸ ☆ ۴
۲۹ ☆ ۴	۵۹ ☆ ۲	۸۹ ☆ ۳	۱۱۹ ☆ ۴	۱۴۹ ☆ ۳
۳۰ ☆ ۴	۶۰ ☆ ۳	۹۰ ☆ ۴	۱۲۰ ☆ ۳	۱۵۰ ☆ ۳