تاریخ آزمون: ۱۳۹۸/۰۱/۰۲

زمان برگزاری: ۱۸۰۰۰ دقیقه

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: ریاضی یازدهم متوسط

۱ ☆ اگر $x = ۴$ یکی از جواب‌های معادله‌ی $x + a = \sqrt{۵x - x^۲}$ باشد، جواب دیگر آن کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) جواب دیگر ندارد.

پاسخ: گزینه ۴

$x = ۴$ ریشه‌ی معادله است، پس در معادله صدق می کند: $x = ۴ \Rightarrow ۴ + a = \sqrt{۲۰ - ۱۶} \Rightarrow a = -۲$

$$x - ۲ = \sqrt{۵x - x^۲} \xrightarrow{\text{توان ۲}} x^۲ - ۴x + ۴ = ۵x - x^۲ \Rightarrow ۲x^۲ - ۹x + ۴ = ۰$$

$$\Rightarrow x_۱ + x_۲ = \frac{-b}{a} \Rightarrow \frac{۹}{۲} \xrightarrow{x_۱ = ۴} ۴ + x_۲ = \frac{۹}{۲} \Rightarrow x_۲ = \frac{۱}{۲}$$

$x_۲ = \frac{۱}{۲}$ در معادله صدق نمی‌کند $(x - ۲ = \sqrt{۵x - x^۲})$ پس به عنوان ریشه محسوب نمی‌شود.

۲ ☆ در یک خانواده‌ی سه فرزندی می‌دانیم فرزند اول آن‌ها دختر است، با کدام احتمال لااقل یکی از فرزندان پسر است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۵}{۸}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

پاسخ: گزینه ۴

می‌دانیم یکی از فرزندان دختر است پس می‌توان فضای نمونه ای جدیدی ساخت:

$$S_{\text{جدید}} = \{DPD, DPP, DDP, DDD\} \Rightarrow n(S) = ۴$$
$$A = \{DPD, DPP, DDP\} \Rightarrow n(A) = ۳$$

پس $P(A) = \frac{۳}{۴}$ است.

۳ ☆ ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^۲ + ax + b = ۰$ یک واحد از ریشه‌های معادله‌ی $۳x^۲ + ۷x + ۱ = ۰$ بیشتر است. b کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

پاسخ: گزینه ۲

معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌هایش k واحد بیشتر از ریشه های معادله‌ی $ax^۲ + bx + c = ۰$ می باشد به صورت زیر است:

$$a(x - k)^۲ + b(x - k) + c = ۰$$

پس کافی است x را به $x - ۱$ تبدیل کنیم.

$$۳(x - ۱)^۲ + ۷(x - ۱) + ۱ = ۰ \Rightarrow ۳x^۲ - ۶x + ۳ + ۷x - ۷ + ۱ = ۰ \Rightarrow ۳x^۲ + x - ۳ = ۰$$

برای مقایسه با $x^۲ + ax + b = ۰$ معادله را بر ۳ تقسیم می کنیم.

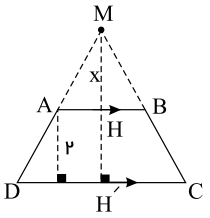
$$x^۲ + \frac{۱}{۳}x - ۱ = ۰ \rightarrow a = \frac{۱}{۳},\ b = -۱$$

۴ ☆ در ذوزنقه‌ای به طول قاعده‌های ۶ و ۹ و ارتفاع ۲ واحد، امتداد دو ساق در نقطه‌ی M متقاطع‌اند. فاصله‌ی M از قاعده‌ی بزرگ‌تر، چه قدر است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

پاسخ: گزینه ۲ در مثلث MCD با توجه به این مطلب که AB و CD موازی هستند، طبق قضیه‌ی تالس داریم:

$$\frac{AB}{CD}=\frac{MH}{MH'}\rightarrow\frac{۶}{۹}=\frac{x}{x+۲}\rightarrow ۹x=۶x+۱۲\rightarrow ۳x=۱۲\rightarrow x=۴$$



بنابراین فاصله‌ی M از قاعده‌ی بزرگ‌تر برابر $MH'=۴+۲=۶$ است.

۵ ☆ داده های جدول مقابل، داده‌های آماری پیوسته است، چند درصد داده‌ها، در فاصله‌ی $[۱۸٫۵\ ,\ ۲۱٫۵)$ قرار دارند؟

مرکز دسته	۱۴	۱۷	۲۰	۲۳	۲۶
فراوانی تجمعی	۵	۱۳	۲۵	۳۴	۴۰

۱) ۲۰ ۲) ۲۵
۳) ۳۰ ۴) ۴۰

پاسخ: گزینه ۳

$$(۱۸٫۵, ۲۱٫۵)\Rightarrow \text{مرکز دسته}=\frac{۱۸٫۵+۲۱٫۵}{۲}=\frac{۴۰}{۲}=۲۰$$

طرح سوال درصد فراوانی نسبی دسته‌ای که مرکز دسته‌ی آن ۲۰ می‌باشد را خواسته است.

$$\text{درصدفراوانی نسبی}=\frac{\text{فراوانی مطلق}}{\text{تعداد کل داده‌ها}}\times ۱۰۰\Rightarrow \text{درصد فراوانی نسبی}=\text{فراوانی نسبی}\times ۱۰۰$$

$$\Rightarrow \text{درصد فراوانی نسبی}=\frac{۲۵-۱۳}{۴۰}\times ۱۰۰=\frac{۱۲}{۴۰}\times ۱۰۰=۳۰$$

دقت کنید فراوانی تجمعی آخرین طبقه در جدول برابر تعداد کل داده‌ها است. و اختلاف فراوانی تجمعی دو دسته‌ی iام و $(i+۱)$ام فراوانی مطلق دسته‌ی $(i+۱)$ ام را می‌دهد.

۶ ☆ تابع با ضابطه‌ی $\begin{cases}\frac{x^۲-۱}{x+۱} & ;|x|>۱\\ ۲x & ;|x|\le ۱\end{cases}$، از نظر پیوستگی در دو نقطه به طول های ۱ و ۱−چگونه است؟

۱) در ۱− ناپیوسته - در ۱ ناپیوسته ۲) در ۱− ناپیوسته - در ۱ پیوسته
۳) در ۱− پیوسته - در ۱ پیوسته ۴) در ۱− پیوسته - در ۱ ناپیوسته

پاسخ: گزینه ۴ ابتدا تابع داده شده را ساده می کنیم.

$$f(x)=\begin{cases}x-۱ & x>۱ \text{ یا } x<-۱\\ ۲x & -۱\le x\le ۱\end{cases}$$

حد راست و حد چپ و مقدار تابع را باید در $x=۱$ و $x=-۱$ بدست آوریم.

$$x=۱:\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۱^+}f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^+}(x-۱)=۱-۱=۰\\ \lim\limits_{x\to ۱^-}f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^-}f(x)=۲(۱)=۲\\ f(۱)=۲(۱)=۲\end{cases}\Rightarrow \text{تابع در } x=۱ \text{ ناپیوسته است.}$$

$$x=-۱:\begin{cases}\lim\limits_{x\to (-۱)^+}f(x)=\lim\limits_{x\to (-۱)^+}۲x=۲(-۱)=-۲\\ \lim\limits_{x\to (-۱)^-}f(x)=\lim\limits_{x\to (-۱)^-}(x-۱)=-۱-۱=-۲\\ f(-۱)=۲(-۱)=-۲\end{cases}\Rightarrow \text{تابع در } x=-۱ \text{ پیوسته است.}$$

۷ ☆ در آزمایشگاهی ۵ موش سفید و ۳ موش سیاه نگهداری می‌شوند. به تصادف متوالیاً سه موش از بین آن‌ها انتخاب می‌شود. با کدام احتمال، اولین موش سفید و سومین موش سیاه است؟

۱) $\frac{۱۱}{۵۶}$ ۲) $\frac{۱۷}{۵۶}$ ۳) $\frac{۱۳}{۵۶}$ ۴) $\frac{۱۵}{۵۶}$

پاسخ: گزینه ۴ دو حالت داریم:

۱) موش اول سفید و موش دوم سفید و موش سوم سیاه

$$\frac{۵}{۸}\times\frac{۴}{۷}\times\frac{۳}{۶}=\frac{۵}{۲۸}$$

۲) موش اول سفید و موش دوم سیاه و موش سوم سیاه

$$\frac{۵}{۸}\times\frac{۳}{۷}\times\frac{۲}{۶}=\frac{۵}{۵۶}$$

پس $P=\frac{۵}{۲۸}+\frac{۵}{۵۶}=\frac{۱۵}{۵۶}$ است.

روش دوم: چون در تست به رنگ موش دوم اشاره نشده است فرض می‌کنیم موشی که به رنگ آن اشاره نشده است را انتخاب نکرده‌ایم و تنها می‌خواهیم دو موش را پشت سرهم (متوالیا) انتخاب کنیم یعنی موش دوم تأثیری در حل مسأله ندارد

$$P\ (\text{اولی سفید و دومی سیاه})=\frac{۵}{۸}\times\frac{۳}{۷}=\frac{۱۵}{۵۶}$$

۸ ☆ به ازای کدام مقدار a، سه خط به معادلات $y+۲x=۰$ ، $۲y+ax+۵=۰$ ، $y+۳x=a$ همگی از یک نقطه می‌گذرند؟

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) نشدنی

پاسخ: گزینه ۴ شرط آنکه سه خط در یک نقطه همدیگر را قطع کنند آن است که محل تلاقی دو خط در معادله‌ی خط سوم صدق کند.

$$-\begin{cases}y+۲x=۰\\ y+۳x=a\end{cases}\Rightarrow x=a\ ,\ y=-۲a$$

$$A\begin{vmatrix}a\\-۲a\end{vmatrix}\xrightarrow[۲y+ax+۵=۰]{\text{صدق در خط سوم}}-۴a+a^۲+۵=۰\Rightarrow a^۲-۴a+۵=۰$$

$\Delta=b^۲-۴ac=۱۶-۲۰=-۴<۰\rightarrow$ ریشه‌ی حقیقی ندارد $\rightarrow$ این سه خط هیچ‌گاه متقارب نیستند.

۹ ☆ از معادله‌ی $\log_۳(x^۲-۱)=۱+\log_۳(x+۳)$، مقدار $\log_۴(x-۳)$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) -۱

پاسخ: گزینه ۲

می‌دانیم: $\log_k^a-\log_k^b=\log_k^{\frac{a}{b}}\ ,\ \log_b^N=x\rightarrow b^x=N\ ,\ \log_{k^m}^{a^n}=\frac{n}{m}\log_k^a$

$$\log_۳(x^۲-۱)=۱+\log_۳(x+۳)\rightarrow\log_۳(x^۲-۱)-\log_۳(x+۳)=۱$$

$$\rightarrow\log_۳\frac{x^۲-۱}{x+۳}=۱\xrightarrow{\text{تعریف}}\frac{x^۲-۱}{x+۳}=۳\rightarrow x^۲-۱=۳x+۹\rightarrow x^۲-۳x-۱۰=۰$$

$$\rightarrow(x-۵)(x+۲)=۰\rightarrow\begin{cases}x=۵ & \text{ق ق}\\ x=-۲ & \text{ق ق}\end{cases}$$

ولی برای محاسبه‌ی $\log_۴^{(x-۳)}$ جای x فقط می‌توان $x=۵$ را قرار داد.

$$\log_۴^{(x-۳)}\overset{x=۵}{=\!=}\log_{۲^۲}^۲=\frac{۱}{۲}$$

۱۰ ☆ تابع جزء صحیح $y=\left[-x^۲\right]$ در $x=۳$ چه وضعی دارد؟

۱) از چپ ناپیوسته - از راست پیوسته ۲) از چپ پیوسته - از راست ناپیوسته
۳) از چپ و راست پیوسته ۴) از چپ و راست ناپیوسته

پاسخ: گزینه ۲

$$\lim_{x\to ۳^+}[-x^۲]=[-(۳^+)^۲]=[-(۹^+)]=[-۹/۰۱]=-۱۰$$
$$\lim_{x\to ۳^-}[-x^۲]=[-(۳^-)^۲]=[-(۹^-)]=[-۸/۹۹]=-۹$$
$$f(-۳)=[-۹]=-۹$$

تابع از چپ پیوسته و از راست ناپیوسته است.

۱۱ ☆ حاصل $\log_{(۱+\sqrt{۲})}^{(۳+۲\sqrt{۲})^۳}$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) $\frac{۲}{۳}$

پاسخ: گزینه ۳

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^{a^n}=n\log_k^a}$

دقت کنید که $(۱+\sqrt{۲})^۲=۱+۲+۲\sqrt{۲}=۳+۲\sqrt{۲}$ است.

$$\log_{(۱+\sqrt{۲})}^{(۳+۲\sqrt{۲})^۳}=\log_{((۱+\sqrt{۲})^۲)^۳}^{(۱+\sqrt{۲})^۶}=۶$$

۱۲ ☆ در معادله‌ی $x^۲+۴x-۱=۰$ حاصل $(\frac{x_۲}{x_۱}+\frac{x_۱}{x_۲})^۲$ کدام است؟

۱) ۱۹۶ ۲) ۲۸۹ ۳) ۳۲۴ ۴) ۸۱

پاسخ: گزینه ۳

$$x_۱+x_۲=-\frac{b}{a}=-۴\quad,\quad x_۱\cdot x_۲=\frac{c}{a}=-۱$$
$$(\frac{x_۲}{x_۱}+\frac{x_۱}{x_۲})^۲=(\frac{x_۱^۲+x_۲^۲}{x_۱x_۲})^۲=(\frac{(x_۱+x_۲)^۲-۲x_۱x_۲}{x_۱x_۲})^۲=(\frac{۱۶+۲}{-۱})^۲=(-۱۸)^۲=۳۲۴$$

۱۳ ☆ دنباله‌ی $\left\{\frac{n^۲}{۲^n}\right\}$ به چه عددی همگراست؟

۱) $+\infty$ ۲) ۰ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ: گزینه ۲ از آنجا که نرخ رشد ۲^n از نرخ رشد $n^۲$ بیش تر است لذا داریم:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^۲}{۲^n}=۰$$

۱۴ ☆ میانگین ۱۰ عدد مساوی ۱۲ شده است. اگر یک عدد را کنار بگذاریم میانگین ۹ عدد باقی مانده مساوی ۱۱ می شود. عددی را که کنار گذاشته شده است کدام است؟

۱) ۲۱ ۲) ۲۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۱

پاسخ: گزینه ۱ داده‌های $x_۱,x_۲,\cdots,x_{۱۰}$ را در نظر می گیریم.

$$\frac{x_۱+x_۲+\cdots+x_{۱۰}}{۱۰}=۱۲\Rightarrow x_۱+x_۲+\cdots+x_{۱۰}=۱۲۰$$

فرض می‌کنیم داده‌ی $x_۱$ را کنار گذاشته‌ایم.

$$\frac{x_۲+x_۳+\cdots+x_{۱۰}}{۹}=۱۱\Rightarrow x_۲+x_۳+\cdots+x_{۱۰}=۹۹$$

بنابراین $x_۱=۱۲۰-۹۹=۲۱$ است.

۱۵ ☆ اگر داشته باشیم $P(A)=۰/۵$ و $P(A\cup B)=۰/۶$ و $P(B)=۰/۲$، آنگاه کدام گزینه درست است؟

۱) A و B ناسازگارند. ۲) $P(A|B)=\frac{۱}{۳}$ ۳) $P(B|A)=\frac{۲}{۳}$ ۴) A و B مستقل هستند.

پاسخ: گزینه ۴

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$۰/۶ = ۰/۵ + ۰/۲ - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = ۰/۱$

چون $P(A \cap B) = P(A)P(B) = ۰/۱$ پس A , B مستقل اند.

۱۶ ☆ اگر $\log ۲ = k$ باشد حاصل $\log(۶ - ۲\sqrt{۵}) + ۲\log(۱ + \sqrt{۵})$ کدام است؟

۱) $۲+۴k$ ۲) $۴k$ ۳) $۱+k$ ۴) $۲k$

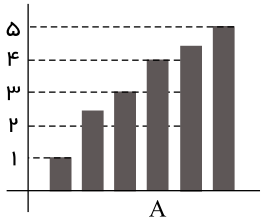
پاسخ: گزینه ۲

می‌دانیم: $\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab} \quad , \quad \log_k^{a^n} = n\log_k^a$

$\log(۶ - ۲\sqrt{۵}) + ۲\log(۱ + \sqrt{۵}) = \log(۶ - ۲\sqrt{۵}) + \log(۱ + \sqrt{۵})^۲ = \log(۶ - ۲\sqrt{۵}) + \log(۱ + ۵ + ۲\sqrt{۵})$

$= \log(۶ - ۲\sqrt{۵}) + \log(۶ + ۲\sqrt{۵}) = \log \underbrace{(۶ - ۲\sqrt{۵})(۶ + ۲\sqrt{۵})}_{\text{مزدوج}} = \log(۳۶ - ۲۰) = \log ۱۶ = \log^{۲^۴} = ۴\log ۲ = ۴k$

۱۷ ☆ در مقایسه‌ی سطح زیر کشت غله‌ای در شش استان نمودار میله‌ای مقابل رسم شده است در نمودار دایره‌ای زاویه‌ی مرکزی متناظر استان A چند درجه است؟ (قسمت غیرصحیح هر دو میله ۰/۵ است)



۱) ۹۶
۲) ۷۲
۳) ۸۰
۴) ۶۴

پاسخ: گزینه ۲

در ابتدا جمع ارتفاع میله‌ها و یا به عبارت دیگر، تعداد کل داده‌ها (N) را بدست می‌آوریم.

$N = ۱ + ۲/۵ + ۳ + ۴ + ۴/۵ + ۵ = ۲۰ \rightarrow d_i = \frac{۳۶۰}{N} \times F_i = \frac{۳۶۰}{۲۰} \times ۴ = ۷۲^\circ$

۱۸ ☆ تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \frac{|x^۲ + x - ۲|}{x - ۱} & ;x \neq ۱ \\ a & ;x = ۱ \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a بر R پیوسته است؟

۱) هر مقدار a ۲) -۳ ۳) ۳ ۴) هیچ مقدار a

پاسخ: گزینه ۴

کافی است حد راست و حد چپ و مقدار تابع را در $x = ۱$ بدست آوریم.

$$\lim_{x \to ۱^+} f(x) = \lim_{x \to ۱^+} \frac{\overbrace{|(x+۲)(x-۱)|}^{+}}{x - ۱} = \lim_{x \to ۱^+} \frac{(x+۲)(x-۱)}{(x-۱)} = ۳$$

$$\lim_{x \to ۱^-} f(x) = \lim_{x \to ۱^-} \frac{\overbrace{|(x+۲)(x-۱)|}^{-}}{x - ۱} = \lim_{x \to ۱^-} \frac{-(x+۲)(x-۱)}{(x-۱)} = -۳$$

این تابع در $x = ۱$ پیوسته نمی‌باشد.

۱۹ ☆ در گروه زنان ساکن یک روستا ۶۰ درصد آنان تحصیلات ابتدایی و ۲۵ درصد از آنان مهارت قالی بافی دارند، اگر یک فرد از این گروه انتخاب شود با کدام احتمال این فرد تحصیلات ابتدایی یا مهارت قالی بافی دارد؟

۱) ۰/۸۵ ۲) ۰/۷۵ ۳) ۰/۸ ۴) ۰/۷

پاسخ: گزینه ۴

A : تحصیلات ابتدایی داشتن و B : مهارت قالی‌بافی داشتن

دقت کنید که دو پیشامد A و B مستقل هستند.

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$=P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B)=\frac{۶۰}{۱۰۰}+\frac{۲۵}{۱۰۰}-(\frac{۶۰}{۱۰۰}\times\frac{۲۵}{۱۰۰})$$
$$=\frac{۳}{۵}+\frac{۱}{۴}-\frac{۳}{۲۰}=\frac{۱۴}{۲۰}=\frac{۷}{۱۰}=۰/۷$$

۲۰ ☆ در یک خانواده‌ی ۴ فرزندی با کدام احتمال ۲ فرزند پسر یا ۳ فرزند دختر است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۹}{۱۶}$ ۳) $\frac{۵}{۸}$ ۴) $\frac{۳}{۸}$

پاسخ: گزینه ۳

$$n(S)=۲^۴=۱۶$$
$$PPDD\text{ یا }DDDP\Rightarrow n(A)=\frac{۴!}{۲!۲!}+\frac{۴!}{۳!}=۶+۴=۱۰$$

پس $P(A)=\frac{۱۰}{۱۶}=\frac{۵}{۸}$ است.

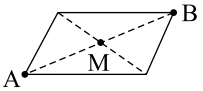
۲۱ ☆ نقطه‌ی $A(۷,۶)$ رأس یک متوازی الاضلاع است که دو ضلع آن منطبق بر دو خط به معادلات $۲y-۳x=۱۱$ و $۳y+۴x=۸$ می باشند.مختصات وسط قطر آن کدام است؟

۱) $(۴,۳)$ ۲) $(۳,۴)$ ۳) $(۳,۵)$ ۴) $(۱,۵)$

پاسخ: گزینه ۳

مختصات نقطه‌ی A در هیچ‌یک از معادلات دو خط صدق نمی‌کند پس نقطه A روی این دو خط قرار ندارد و چون این دو خط، موازی نیستند کافی است با این دو خط تشکیل دستگاه دهیم تا مختصات نقطه‌ی B بدست آید.

$$\begin{matrix}۳\\-۲\end{matrix}\begin{cases}۲y-۳x=۱۱\\۳y+۴x=۸\end{cases}\rightarrow -۱۷x=۱۷\Rightarrow x=-۱\ ,\ y=۴\Rightarrow B\left|\begin{matrix}-۱\\۴\end{matrix}\right.$$



می‌دانیم نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB قرار دارد یعنی:

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{۲}=\frac{۷-۱}{۲}=۳\quad,\quad y_M=\frac{y_A+y_B}{۲}=\frac{۶+۴}{۲}=۵$$

۲۲ ☆ مجموع ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $(x^۲+x)^۲-۱۸(x^۲+x)+۷۲=۰$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) -۴

پاسخ: گزینه ۲

$$(x^۲+x)^۲-۱۸(x^۲+x)+۷۲=۰\xrightarrow{x^۲+x=A}A^۲-۱۸A+۷۲=۰\Rightarrow(A-۱۲)(A-۶)=۰$$

$$A=۱۲\Rightarrow x^۲+x-۱۲=۰\xrightarrow{\Delta>۰}\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-۱$$
$$A=۶\Rightarrow x^۲+x-۶=۰\xrightarrow{\Delta>۰}\alpha'+\beta'=-\frac{b}{a}=-۱$$
$$\Rightarrow\alpha+\beta+\alpha'+\beta'=-۲$$

۲۳ ☆ در آزمایشگاهی ۷ موش نگهداری می‌شوند که بر روی ۳ موش آزمون مهارت انجام شده است. اگر ۲ موش از بین آنان تصادفی انتخاب شوند، با کدام احتمال، لااقل بر روی یکی از آن دو، آزمون انجام شده است؟

۱) $\frac{۱۰}{۲۱}$ ۲) $\frac{۴}{۷}$ ۳) $\frac{۵}{۷}$ ۴) $\frac{۱۶}{۲۱}$

پاسخ: گزینه ۳ بر روی ۳ موش آزمون مهارت انجام شده است و بر روی ۴ موش آزمون مهارت انجام نشده است.

$$n(S)=\binom{۷}{۲}=\frac{۷\times۶}{۲}=۲۱$$

لااقل بر روی یکی از آن دو آزمون انجام شده است یعنی: بر روی هر دو آزمون انجام شده است یا بر روی یکی آزمون انجام شده و بر روی دیگری آزمون انجام نشده است.

$$n(A)=\binom{۳}{۲}+\binom{۳}{۱}\binom{۴}{۱}=۳+۱۲=۱۵$$

پس $P(A)=\frac{۱۵}{۲۱}=\frac{۵}{۷}$ است.

۲۴ ☆ اگر $۴^x=۴\sqrt{۲}$ و $۱+\log\sqrt{x+۱}=\log y$ باشد مقدار y کدام است؟

۱) ۷٫۵ ۲) ۱۲٫۵ ۳) ۱۵ ۴) ۲۵

پاسخ: گزینه ۳

می‌دانیم: $\log_k^a+\log_k^b=\log_k^{ab}$

$$۴\sqrt{۲}=۴^x\Rightarrow ۲^۲\times ۲^{\frac{۱}{۲}}=۴^x\Rightarrow ۲^{\frac{۵}{۲}}=۲^{۲x}\Rightarrow ۲x=\frac{۵}{۲}\Rightarrow x=\frac{۵}{۴}$$

$$۱+\log\sqrt{x+۱}=\log y\Rightarrow \log ۱۰+\log\sqrt{\frac{۵}{۴}+۱}=\log y$$

$$\Rightarrow \log ۱۰+\log\frac{۳}{۲}=\log y\Rightarrow \log ۱۰\times\frac{۳}{۲}=\log y\Rightarrow y=۱۵$$

۲۵ ☆ مجموع حد راست و چپ تابع $y=[x]+[۲x]$ وقتی $x\to-\frac{۱}{۲}$ کدام است؟ ($[\,]$، نماد جزء صحیح است)

۱) -۴ ۲) -۶ ۳) -۵ ۴) -۳

پاسخ: گزینه ۳

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\frac{۱}{۲}^+}[x]+[۲x]=[(-\frac{۱}{۲})^+]+[۲(-\frac{۱}{۲})^+]=[(-\frac{۱}{۲})^+]+[(-۱)^+]=-۱-۱=-۲\\ \lim\limits_{x\to-\frac{۱}{۲}^-}[x]+[۲x]=[(-\frac{۱}{۲})^-]+[۲(-\frac{۱}{۲})^-]=[(-\frac{۱}{۲})^-]+[(-۱)^-]=-۱-۲=-۳\end{array}\right\}\Rightarrow -۲-۳=-۵$$

۲۶ ☆ اگر $\log ۳+\log\sqrt[۴]{۳}=\log(۸۱)^k$، آنگاه لگاریتم $\frac{۵}{k}$ در پایه‌ی ۲ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: گزینه ۳

می‌دانیم: $\log_k^a+\log_k^b=\log_k^{ab}\ ,\ \log_k^{a^n}=n\log_k^a$

$$\log ۳+\log\sqrt[۴]{۳}=\log(۸۱)^k\to\log ۳+\log ۳^{\frac{۱}{۴}}=\log ۳^{۴k}\to\log ۳\times ۳^{\frac{۱}{۴}}=\log ۳^{۴k}$$

$$\to\log ۳^{\frac{۵}{۴}}=\log ۳^{۴k}\to ۴k=\frac{۵}{۴}\to k=\frac{۵}{۱۶}$$

$$\log_۲^{\frac{۵}{k}}\xrightarrow{k=\frac{۵}{۱۶}}\log_۲^{۱۶}=\log_۲^{۲^۴}=۴$$

۲۷ ☆ در بازه‌ی $\left[\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۲}\right]-\{۱\}$ همواره $\frac{\sin\pi x}{۱-x}\le f(x)\le g(x)$، $\lim\limits_{x\to۱}\left(\frac{\sin\pi x}{۱-x}-g(x)\right)=۰$، حاصل $\lim\limits_{x\to۱}f(x)$ برابر کدام است؟

۱) $-\pi$ ۲) ۰ ۳) $\frac{\pi}{۲}$ ۴) π

پاسخ: گزینه ۴

$$\lim_{x\to۱}\frac{\sin\pi x}{۱-x}-g(x)=۰\to\lim_{x\to۱}\frac{\sin\pi x}{۱-x}=\lim_{x\to۱}g(x)$$

$$\lim_{x\to۱}\frac{\sin\pi x}{۱-x}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to۱}\frac{\pi\cos\pi x}{-۱}=\pi\Rightarrow\lim_{x\to۱}\frac{\sin\pi x}{۱-x}=\lim_{x\to۱}g(x)=\pi$$

طبق قضیه‌ی فشردگی $\lim\limits_{x\to۱}f(x)=\pi$ می‌باشد.

۲۸ ☆ در داده‌های آماری با میانگین $\bar{x}$ و انحراف معیار δ اگر به هر یک از داده ها، مقدار $\bar{x}$ را اضافه کنیم تا داده‌های جدید حاصل شود، ضریب تغییرات داده‌های جدید چند برابر ضریب تغییرات در داده‌های قبلی است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ: گزینه ۲ اگر به هر یک از داده‌ها مقدار $\bar{x}$ را اضافه کنیم، انحراف معیار تغییر نمی‌کند ولی به میانگین، $\bar{x}$ اضافه می‌شود.

$$C_{V_{قدیم}} = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$
$$C_{V_{جدید}} = \frac{\sigma}{\bar{x}+\bar{x}} = \frac{\sigma}{۲\bar{x}} \rightarrow \frac{C_{V_{جدید}}}{C_{V_{قدیم}}} = \frac{\frac{\sigma}{۲\bar{x}}}{\frac{\sigma}{\bar{x}}} = \frac{۱}{۲}$$

۲۹ ☆ در آزمایشگاهی ۳ موش سفید و ۵ موش سیاه نگهداری می‌شوند. اگر به‌طور تصادفی ۴ موش از بین آن‌ها جهت آزمایشی برداشته شوند، با کدام احتمال فقط یکی از موش های مورد آزمایش، سفید است؟

۱) $\frac{۲}{۷}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{۳}{۷}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

پاسخ: گزینه ۳

$$n(S) = \binom{۸}{۴} = \frac{۸!}{۴!۴!} = ۷۰$$

یکی سفید و سه تا سیاه $\Rightarrow n(A) = \binom{۳}{۱} \times \binom{۵}{۳} = ۳ \times ۱۰ = ۳۰$

پس $P(A) = \frac{۳۰}{۷۰} = \frac{۳}{۷}$ است.

۳۰ ☆ اگر هر یک از ریشه‌های معادله‌ی $۳x^۲ + ax + b = ۰$ دو برابر معکوس هر ریشه از معادله‌ی $۴x^۲ - ۷x + ۳ = ۰$ باشد، a کدام است؟

۱) -۱۴ ۲) -۱۲ ۳) -۸ ۴) -۶

پاسخ: گزینه ۱

روش اول: اگر t ریشه‌ی معادله‌ی جدید و x ریشه‌ی معادله ی قدیم باشد آن گاه:

$$t = \frac{۲}{x} \Rightarrow x = \frac{۲}{t} \xrightarrow{\text{معادله}} \frac{۱۶}{t^۲} - \frac{۱۴}{t} + ۳ = ۰ \xrightarrow{\times t^۲} ۱۶ - ۱۴t + ۳t^۲ = ۰ \rightarrow ۳t^۲ - ۱۴t + ۱۶ = ۰$$

$$\xrightarrow{\text{مقایسه با } ۳x^۲+ax+۱۰=۰} a = -۱۴ \ , \ b = ۱۶$$

روش دوم: ابتدا معادله‌ی درجه‌ی دومی مینویسیم که ریشه‌هایش معکوس ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم داده شده باشد سپس معادله‌ی درجه‌ی دومی می‌نویسیم که ریشه هایش دو برابر ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم بدست آمده باشد پس جای a , c را عوض کرده و سپس b را در ۲ و c را در $۲^۲$ ضرب کنیم.

$$۴x^۲ - ۷x + ۳ = ۰ \Rightarrow ۳x^۲ - ۷x + ۴ = ۰ \Rightarrow ۳x^۲ - ۱۴x + ۱۶ = ۰$$

این معادله را با $۳x^۲ + ax + b = ۰$ مقایسه می‌کنیم و داریم:

$$a = -۱۴ \ , \ b = ۱۶$$

توجه کنید ریشه‌های معادله‌ی $cx^۲ + bx + a = ۰$ عکس ریشه‌های معادله‌ی $ax^۲ + bx + c = ۰$ است. و ریشه‌های معادله‌ی $ax^۲ + bkx + ck^۲ = ۰$، k برابر ریشه‌های معادله ی $ax^۲ + bx + c = ۰$ می‌باشند.

۳۱ ☆ اگر $\log_{۱۲}^{۲} + \log_{۱۲}^{۳} + \log_{۱۲}^{۴} = a$ باشد حاصل $\log_{۱۲}^{۳} + \log_{۱۲}^{۶} + \log_{۱۲}^{۱۶}$ کدام است؟

۱) a ۲) $a+۲$ ۳) $a+۱$ ۴) $۲a+۱$

پاسخ: گزینه ۳

می‌دانیم: $\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}$, $\log_k^{a^n} = n\log_k^a$

$$a = \log_{۱۲}^{۲} + \log_{۱۲}^{(۳\times۴)} = \log_{۱۲}^{۲} + ۱ \Rightarrow \log_{۱۲}^{۲} = a - ۱$$

$$\log_{۱۲}^{۳} + \log_{۱۲}^{۶} + \log_{۱۲}^{۱۶} = \log_{۱۲}(۳ \times ۶ \times ۱۶) = \log_{۱۲}^{(۱۴۴\times۲)} = \log_{۱۲}^{۱۲^۲} + \log_{۱۲}^{۲} = ۲ + \log_{۱۲}^{۲} = ۲ + (a-۱) = a + ۱$$

۳۲ ☆ چند نقطه روی تابع $y = |x+۲|$ وجود دارد که از مبداء مختصات به فاصله سه باشند؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینه ۳ یک نقطه‌ی دلخواه روی تابع $y = |x+۲|$ در نظر می‌گیریم $A\begin{vmatrix} x \\ |x+۲| \end{vmatrix}$ و فاصله‌ی آن از مبدأ یعنی $O\begin{vmatrix} ۰ \\ ۰ \end{vmatrix}$ را حساب می‌کنیم.

$$OA = \sqrt{x^۲ + (x+۲)^۲} = ۳ \xrightarrow{\text{توان ۲}} x^۲ + x^۲ + ۴ + ۴x = ۹ \Rightarrow ۲x^۲ + ۴x - ۵ = ۰ \xrightarrow{\frac{c}{a}<۰}$$ دو ریشه‌ی مختلف العلامت دارد

۳۳ ☆ در معادله‌ی $x^۲ - ۵x - ۱ = ۰$ حاصل $\frac{x_۱}{x_۲^۲} + \frac{x_۲}{x_۱^۲}$ کدام است؟ ($x_۱, x_۲$ ریشه‌های معادله هستند)

۱) ۱۱۰ ۲) ۱۴۰ ۳) -۱۴۰ ۴) -۱۱۰

پاسخ: گزینه ۲

$$P = x_۱ \cdot x_۲ = \frac{c}{a} = -۱ \ , \ S = x_۱ + x_۲ = \frac{-b}{a} = ۵$$

$$\frac{x_۱}{x_۲^۲} + \frac{x_۲}{x_۱^۲} = \frac{x_۱^۳ + x_۲^۳}{x_۱^۲ \cdot x_۲^۲} = \frac{(x_۱ + x_۲)^۳ - ۳x_۱x_۲(x_۱ + x_۲)}{(x_۱x_۲)^۲} = \frac{۱۲۵ + ۱۵}{۱} = ۱۴۰$$

۳۴ ☆ اگر $\tan x + \cot x = -۲$ باشد حاصل $\sin^۴ x + \cos^۲ x$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $۱ + \frac{\sqrt{۲}}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

پاسخ: گزینه ۴

می‌دانیم $\tan x$ و $\cot x$ عکس یکدیگرند و دو عددی که عکس یکدیگرند فقط وقتی مجموعشان -۲ می شود که هر کدام -۱ باشد پس : $\tan x = \cot x = -۱$

$$\tan x + \cot x = -۲ \Rightarrow \tan x = -۱ \Rightarrow x = -\frac{\pi}{۴}$$

$$\sin^۴ x + \cos^۲ x = (\frac{-\sqrt{۲}}{۲})^۴ + (\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲ = \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۲} = \frac{۳}{۴}$$

۳۵ ☆ تابع $y = [x] - [\frac{x}{۴}]$ در $x = ۸$ چه وضعی دارد؟

۱) فقط پیوستگی راست دارد. ۲) فقط پیوستگی چپ دارد. ۳) پیوسته است. ۴) پیوسته نیست.

پاسخ: گزینه ۳

$$\lim_{x \to ۸^+} f(x) = [۸^+] - [\frac{۸}{۴}^+] = ۸ - [۲^+] = ۸ - ۲ = ۶$$

$$\lim_{x \to ۸^-} f(x) = [۸^-] - [\frac{۸}{۴}^-] = ۷ - [۲^-] = ۷ - ۱ = ۶$$

$$f(۸) = [۸] - [\frac{۸}{۴}] = ۸ - [۲] = ۸ - ۲ = ۶$$

چون حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x = ۸$ با هم برابر هستند پس تابع در $x = ۸$ پیوسته است.

۳۶ ☆ اگر $\log_۵^۳ = a$ باشد حاصل $\log_{۲۵}^{\sqrt{۳}}$ چقدر است؟

۱) $-\frac{a}{۴}$ ۲) $-a$ ۳) $-\frac{a}{۲}$ ۴) $\frac{a}{۴}$

پاسخ: گزینه ۱

می‌دانیم: $\boxed{\log_{k^n}^{a^m} = \frac{m}{n}\log_k^a}$

$$\log_{۲۵}^{\sqrt{۳}} = \log_{۵^۲}^{۳^{\frac{۱}{۲}}} = \log_{۵^۲}^{۳^{-\frac{۱}{۲}}} = -\frac{۱}{۴}\log_{۵}^{۳} = -\frac{۱}{۴}a$$

۳۷ ☆ در معادله‌ی $x^۲ - (\sqrt{۲}+۱)x + \sqrt{۲} = ۰$ حاصل $x_۱^۶ + x_۲^۶$ چقدر است؟ ($x_۱, x_۲$ ریشه های معادله هستند)

۱) ۵ ۲) ۶۵ ۳) ۱۷ ۴) ۹

پاسخ: گزینه ۴

مجموع ضرایب برابر صفر است پس $x_۱ = ۱$ و $x_۲ = \frac{c}{a} = \sqrt{۲}$ است.

$$x_۱^۶ + x_۲^۶ = (۱)^۶ + (\sqrt{۲})^۶ = ۱ + ۸ = ۹$$

۳۸ ☆ دامنه‌ی تعریف تابع $y = \sqrt{۴ - \sqrt{x+۱}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۱۷ ۲) ۱۶ ۳) ۵ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۱

$$\left.\begin{array}{l} x + ۱ \geq ۰ \Rightarrow x \geq -۱ \\ ۴ - \sqrt{x+۱} \geq ۰ \Rightarrow \sqrt{x+۱} \leq ۴ \Rightarrow x + ۱ \leq ۱۶ \Rightarrow x \leq ۱۵ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} -۱ \leq x \leq ۱۵$$

این بازه شامل ۱۷ عدد صحیح است.

۳۹ ☆ اگر $f(x) = |x| + [x + \frac{\sqrt{۳}}{۲}]$ حد چپ تابع در $x = ۳$ کدام است؟ ($[\,]$، نماد جزء صحیح است)

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۲

$$\lim_{x \to ۳^-} |x| + [x + \frac{\sqrt{۳}}{۲}] = ۳ + [۲/۹۹ + ۰/۸۶] = ۳ + [۳/۰۰۰] = ۳ + ۳ = ۶$$

۴۰ ☆ احتمال این که از چهار فرزند یک خانواده دو فرزند پسر و دو فرزند دختر باشند کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۸}$ ۴) $\frac{۷}{۱۶}$

پاسخ: گزینه ۳

$$n(S) = ۲^۴ = ۱۶$$

$$PPDD \Rightarrow n(A) = \frac{۴!}{۲!۲!} = ۶$$

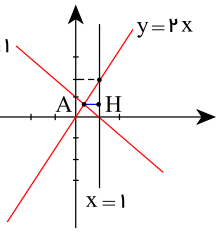
پس $P(A) = \frac{۶}{۱۶} = \frac{۳}{۸}$ است.

۴۱ ☆ معادله‌ی سه ضلع یک مثلث $x + y = ۱$, $y = ۲x$ و $x = ۱$ است. معادله‌ی خطی که کوچک‌ترین ارتفاع این مثلث بر آن قرار دارد کدام است؟

۱) $y = \frac{۲}{۳}$ ۲) $x = \frac{۲}{۳}$ ۳) $y + x = \frac{۲}{۳}$ ۴) $y + x = \frac{۱}{۳}$

پاسخ: گزینه ۱ سه خط داده شده را رسم می‌کنیم.

$y=۲x \rightarrow \begin{vmatrix} ۰ \\ ۰ \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} ۱ \\ ۲ \end{vmatrix}$ و $x+y=۱ \begin{vmatrix} ۰ \\ ۱ \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} ۱ \\ ۰ \end{vmatrix} \rightarrow$



کوچک‌ترین ارتفاع مثلث ABC پاره‌خط AH می‌باشد که معادله‌اش $y=\frac{۲}{۳}$ است زیرا اگر با دو خط $x+y=۱$ و $y=۲x$ تشکیل دهیم داریم:

$$\begin{cases} x+y=۱ \\ y=۲x \end{cases} \Rightarrow x=\frac{۱}{۳},\ y=\frac{۲}{۳}$$

یعنی مختصات نقطه‌ی A به‌صورت $A\begin{vmatrix} \frac{۱}{۳} \\ \frac{۲}{۳} \end{vmatrix}$ است پس معادله‌ی ارتفاع AH به‌صورت $y=\frac{۲}{۳}$ است.

۴۲ ☆ از معادلات $۲^x \times ۸^y = ۴$ و $\log x = \log ۲ + \log y$ مقدار x کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$

پاسخ: گزینه ۴

می‌دانیم: $\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}$

$$\left.\begin{matrix} ۲^x \times ۸^y = ۴ \Rightarrow ۲^x \times ۲^{۳y} = ۲^۲ \Rightarrow ۲^{x+۳y} = ۲^۲ \Rightarrow x+۳y=۲ \\ \log x = \log ۲ + \log y \Rightarrow \log x = \log ۲y \Rightarrow x = ۲y \end{matrix}\right\} \Rightarrow x=\frac{۴}{۵},\ y=\frac{۲}{۵}$$

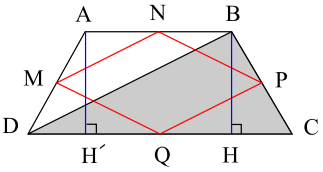
۴۳ ☆ در ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین به قاعده‌ی ۱۲ و ۴ طول ارتفاع وارد بر قاعده ۴ است، اوساط اضلاع را بهم وصل می‌کنیم. محیط چهارضلعی حاصل چقدر است؟

۱) $۴\sqrt{۵}$ ۲) $۸\sqrt{۵}$ ۳) $۴\sqrt{۱۰}$ ۴) $۸\sqrt{۱۰}$

پاسخ: گزینه ۲ اگر ارتفاع‌های AH' , BH را رسم کنیم دو مثلث قائم الزاویه‌ی همنهشت ایجاد می‌شود. داریم:

$$DH' = HC = \frac{۱۲-۴}{۲} = ۴$$

$$DB = \sqrt{BH^۲ + DH^۲} = \sqrt{۱۶+۶۴} = ۴\sqrt{۵}$$ قطر



با توجه به رابطه‌ی تالس می‌توان نتیجه گرفت چهارضلعی MNPQ که وسط‌های اضلاع ذوزنقه را به هم وصل کرده لوزی و اندازه‌ی هر ضلع آن نصف قطر ذوزنقه است و محیط آن برابر مجموع ۲ قطر ذوزنقه است. پس داریم:

$$\text{محیط MNPA} = \text{(مجموع اقطار)} = (۴\sqrt{۵} + ۴\sqrt{۵}) = ۸\sqrt{۵}$$

۴۴ ☆ اگر $\log(۳x-۲) = \begin{vmatrix} \log ۵ & \log ۲ \\ \log ۲ & \log ۵ \end{vmatrix}$ مقدار x کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۵}{۴}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

پاسخ: گزینه ۴

می‌دانیم: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc$, $\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}$, $\log_k^a - \log_k^b = \log_k^{\frac{a}{b}}$

$$\log(۳x-۲) = (\log ۵)^۲ - (\log ۲)^۲ \rightarrow \log(۳x-۲) = (\log ۵ - \log ۲)\underbrace{(\log ۵ + \log ۲)}_{۱}$$

$$\rightarrow \log(۳x-۲) = \log(\frac{۵}{۲}) \Rightarrow ۳x-۲ = \frac{۵}{۲} \Rightarrow ۳x = \frac{۹}{۲} \Rightarrow x = \frac{۳}{۲}$$

۴۵ ☆ خانواده ای دارای چهار فرزند است می دانیم که دو فرزند اول آن ها پسر است. احتمال آن که دو فرزند دیگر این خانواده دختر باشد کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۱۶}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۵}{۱۶}$ ۴) $\frac{۳}{۸}$

پاسخ: گزینه ۲

$S_{\text{جدید}} = \{PPPD, PPDP, PPDD, PPPP\} \Rightarrow n(S) = ۴ \ , \ A = \{PPDD\} \Rightarrow n(A) = ۱$

پس $P(A) = \frac{۱}{۴}$ است.

۴۶ ☆ به ازای کدام مقادیر a معادله‌ی درجه‌ی دوم $۲x^۲ + ax + a - \frac{۳}{۲} = ۰$ دارای دو ریشه‌ی حقیقی متمایز است؟

۱) $a < ۲$ یا $a > ۶$ ۲) $a < ۳$ یا $a > ۴$ ۳) $۲ < a < ۶$ ۴) $۳ < a < ۴$

پاسخ: گزینه ۱

اگر بخواهیم دو ریشه ی متمایز داشته باشیم Δ باید بزرگتر از صفر باشد پس داریم:

$$۲x^۲ + ax + a - \frac{۳}{۲} = ۰$$

$$\Delta = b^۲ - ۴ac = a^۲ - ۸a + ۱۲ > ۰ \Rightarrow (a-۲)(a-۶) > ۰$$

a	$-\infty$		۲		۶		$+\infty$
عبارت>0		+	۰	−	۰	+	

$$\rightarrow \Rightarrow \begin{cases} a > ۶ \\ a < ۲ \end{cases}$$

۴۷ ☆ نمره‌ی کل آزمون عمومی یک داوطلب مطابق جدول زیر ۵۸ درصد است. نمره‌ی آزمون زبان انگلیسی او چند درصد است؟

درس	فارسی	عربی	ادبیات	معارف اسلامی	زبان انگلیسی
درصد	۶۵	۵۲		۷۰	؟
ضریب	۴	۲		۳	۲

۱) ۳۱ ۲) ۳۲ ۳) ۳۳ ۴) ۳۴

پاسخ: گزینه ۲

نمره‌ی کل آزمون عمومی این داوطلب همان میانگین نمرات دروس عمومی ولی با حساب کردن ضریب هر درس است.

$$\bar{x} = \frac{۱}{N}\sum_{i=1}^{N} F_i x_i \rightarrow ۵۸ = \frac{۱}{۱۱}((۴ \times ۶۵) + (۲ \times ۵۲) + (۳ \times ۷۰) + ۲x)$$

$$\rightarrow ۵۸ = \frac{۲۶۰ + ۱۰۴ + ۲۱۰ + ۲x}{۱۱} \rightarrow ۶۳۸ = ۵۷۴ + ۲x \rightarrow x = ۳۲$$

۴۸ ☆ یک خط از دسته خطوط به معادله‌ی $(k+۱)y + ۲kx - k + ۱ = ۰$ برخط گذرنده بر دو نقطه‌ی $(۲, -۱)$ و $(۸, ۳)$ عمود است، معادله‌ی آن خط کدام است؟

۱) $۲y + ۳x = ۴$ ۲) $۲y + ۳x = ۱$ ۳) $۲y - ۳x = -۵$ ۴) $۳y - ۲x = -۵$

پاسخ: گزینه ۲ ابتدا شیب خط گذرنده از دو نقطه‌ی $A\begin{vmatrix} ۲ \\ -۱ \end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix} ۸ \\ ۳ \end{vmatrix}$ را بدست می‌آوریم.

$$m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{-۱ - ۳}{۲ - ۸} = \frac{-۴}{-۶} = \frac{۲}{۳} \xrightarrow{\text{عمود}} m_{\text{دسته خط}} = -\frac{۳}{۲}$$

$$m_{\text{دسته خط}} = -\frac{۲k}{k+۱} = -\frac{۳}{۲} \rightarrow ۴k = ۳k + ۳ \rightarrow k = ۳$$

$$k = ۳ \xrightarrow{\text{معادله‌ی دسته خطوط}} ۴y + ۶x - ۲ = ۰ \xrightarrow{\div ۲} ۲y + ۳x = ۱$$

۴۹ ☆ اگر $\log\frac{۲}{x}+\log(x+۱)=۱$ باشد لگاریتم عدد x در پایه‌ی ۸ کدام است؟

۱) $-\frac{۲}{۳}$ ۲) $-\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

پاسخ: گزینه ۱

می‌دانیم: $\log_{k^m}^{a^n}=\frac{n}{m}\log_k^a \;,\; \log_k^a+\log_k^b=\log_k^{ab} \;,\; \log_b^N=x\to N=b^x$

$$\log\frac{۲}{x}+\log(x+۱)=۱\Rightarrow\log\frac{۲x+۲}{x}=۱\xrightarrow{\text{تعریف}}\frac{۲x+۲}{x}=۱۰\Rightarrow ۱۰x=۲x+۲\Rightarrow x=\frac{۱}{۴}$$

$$\log_۸^x=\log_۸^{\frac{۱}{۴}}=\log_{۲^۳}^{۲^{-۲}}=-\frac{۲}{۳}$$

۵۰ ☆ اگر یکی از منحنی‌های تابع درجه‌ی دوم $y=(a-۱)x^۲+x+۳$ نسبت به خط $x=۲$ متقارن باشد، این منحنی محور x ها را با کدام طول مثبت قطع می‌کند؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

پاسخ: گزینه ۴

خط $x=۲$ محور تقارن تابع درجه‌ی دوم داده شده است.

$$x=\frac{-b}{۲a}\Rightarrow x=۲=-\frac{۱}{۲a-۲}\Rightarrow ۴a-۴=-۱\Rightarrow a=\frac{۳}{۴}$$

$$y=-\frac{۱}{۴}x^۲+x+۳\xrightarrow[y=۰]{\times(-۴)}y=۰x^۲-۴x-۱۲=۰\Rightarrow(x-۶)(x+۲)=۰\begin{cases}x=-۲\\x=۶\end{cases}$$

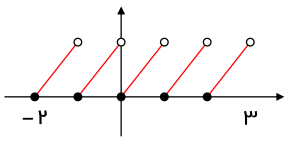
چون طول مثبت را خواسته پس $x=۶$ جواب مسأله است.

۵۱ ☆ نمودار تابع $y=x-[x]\;;\;x\in[-۲,۳)$ از n پاره‌خط مساوی به اندازه‌ی l تشکیل شده است. دو تایی مرتب (n,l) کدام است؟

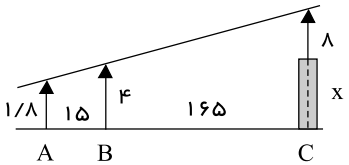
۱) $(۴,۱)$ ۲) $(۴,\sqrt{۲})$ ۳) $(۵,۱)$ ۴) $(۵,\sqrt{۲})$

پاسخ: گزینه ۴

نمودار تابع $y=x-[x]$ به صورت زیر است واضح است در فاصله‌ی $[-۲,۳)$، ۵ پاره‌خط به اندازه‌ی $\sqrt{۲}$ وجود دارد.

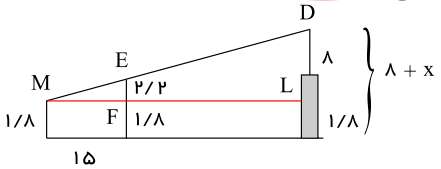


۵۲ ☆ در شکل مقابل دکلی به طول ۸ متر بر بالای برجی نصب شده است. دید چشمی ناظر به ارتفاع ۱٫۸ متر، از ارتفاع دکل و تیرک ۴ متری در یک راستا است. بلندی برج چند متراست؟



۱) ۱۹٫۸ ۲) ۲۰٫۲ ۳) ۲۰٫۸ ۴) ۲۱٫۲

پاسخ: گزینه ۲ ازنقطه‌ی M موازی خطی موازی سطح افق رسم کرده، باتوجه به شکل و قضیه‌ی تالس داریم:

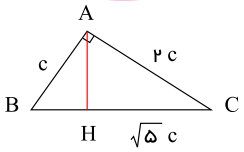


$$EF\parallel DL\Rightarrow\frac{EF}{DL}=\frac{MF}{ML}\Rightarrow\frac{۲٫۲}{۸+x-۱٫۸}=\frac{۱۵}{۱۸۰}=\frac{۱}{۱۲}\Rightarrow x=۲۰٫۲$$

۵۳ ☆ در مثلث قائم الزاویه $(\hat{A}=\frac{\pi}{۲})ABC$ اگر $AC=۲AB$، ارتفاع AH رسم شده است. مساحت مثلث ABC چند برابر مساحت مثلث ABH است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ: گزینه ۳ بنابر قضیه‌ی فیثاغورس نتیجه می‌شود $BC=\sqrt{۵}c$، داریم:



$$\Delta ABH \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{ABH}}=(\frac{BC}{AB})^{۲}=(\frac{\sqrt{۵}c}{c})^{۲}=۵$$

۵۴ ☆ در تابع جزء صحیح $f(x)=[\frac{x}{۲}]+[\frac{x}{۳}]$ مجموع حد چپ و راست وقتی $x\to ۶$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۸

پاسخ: گزینه ۴

$$\lim_{x\to ۶^+} f(x)+\lim_{x\to ۶^-} f(x)=[\frac{۶^+}{۲}]+[\frac{۶^+}{۳}]+[\frac{۶^-}{۲}]+[\frac{۶^-}{۳}]$$
$$=[۳^+]+[۲^+]+[۳^-]+[۲^-]=۳+۲+۲+۱=۸$$

۵۵ ☆ جواب معادله‌ی $\log_{۳}^{\sqrt{۳}}+\log_{\sqrt{۳}}^{۳}=\log_{۹}^{x}$ کدام است؟

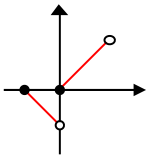
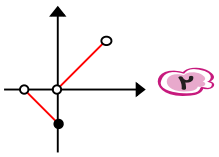
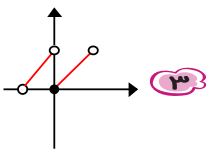
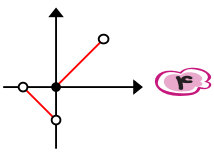
۱) $x=۳^۲$ ۲) $x=۳^۳$ ۳) $x=۳^۵$ ۴) $x=۳^۴$

پاسخ: گزینه ۳

می‌دانیم: $\boxed{\log_{k^m}^{a^n}=\frac{n}{m}\log_k^a \ , \ \log_b^N=x\to N=b^x}$

$$\log_{۳}^{\sqrt{۳}}+\log_{\sqrt{۳}}^{۳}=\log_{۹}^{x}\Rightarrow \log_{۳}^{۳^{\frac{۱}{۲}}}+\log_{۳^{\frac{۱}{۲}}}^{۳}=\log_{۹}^{x}\Rightarrow \frac{۱}{۲}+۲=\log_{۹}^{x}$$
$$\log_{۹}^{x}=\frac{۵}{۲}\Rightarrow x=۹^{\frac{۵}{۲}}\Rightarrow x=(۳^۲)^{\frac{۵}{۲}}\Rightarrow x=۳^۵$$

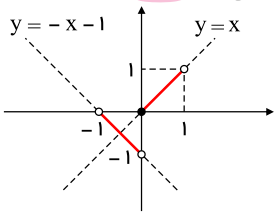
۵۶ ☆ نمایش هندسی تابع $y=|x|+[x]$ در فاصله‌ی $-۱<x<۱$ کدام شکل است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

پاسخ: گزینه ۴

$$-۱<x<۰ \xrightarrow{\text{داخل قدرمطلق منفی و } [x]=-۱} y=-x-۱ \xrightarrow{\text{برای رسم}} \begin{vmatrix} ۰ \\ -۱ \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -۱ \\ ۰ \end{vmatrix}$$

$$۰\le x<۱ \xrightarrow{\text{داخل قدرمطلق مثبت و } [x]=۰} y=x \xrightarrow{\text{برای رسم}} \begin{vmatrix} ۰ \\ ۰ \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} ۱ \\ ۱ \end{vmatrix}$$



۵۷ ☆ دامنه‌ی تعریف تابع $y=\sqrt{-x^۲(x^۲-۴)^۲}$ چند عضو دارد؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) بی شمار

پاسخ: گزینه ۳ هم $x^۲\ge ۰$ است هم $(x^۲-۴)^۲\ge ۰$ است یعنی زیر رادیکال به خاطر منفی هرگز نمی‌تواند مثبت باشد ولی

می‌تواند صفر باشد.

$$-x^{۲}(x^{۲}-۴)^{۲}=۰ \Rightarrow x=۰\ ,\ x=۲\ ,\ x=-۲$$

پس دامنه‌ی تعریف این تابع ۳ عضو دارد.

۵۸ ☆ در تابع $y=[\frac{۱}{x}]$ حد چپ در $x=\frac{-۱}{۱۰}$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است)

۱) ۱۱ ۲) -۹ ۳) -۱۰ ۴) -۱۱

پاسخ: گزینه ۳

$$x\to(\frac{-۱}{۱۰})^{-} \xrightarrow{\text{یعنی}} x<-\frac{۱}{۱۰} \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{۱}{x}>-۱۰$$

یعنی داخل جزء صحیح کمی از -۱۰ بزرگتر است یعنی $[^{+}(-۱۰)]$ که حاصل برابر -۱۰ است.

۵۹ ☆ حروف کلمه‌ی ATAXIA را بریده به‌طور تصادفی کنار هم قرار می‌دهیم با کدام احتمال هر سه حرف A کنار هم قرار می‌گیرند؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) A ۴) $\frac{۱}{۳}$

پاسخ: گزینه ۲

$$n(S)=\frac{۶!}{۳!}=۱۲۰ \quad (\text{جابه‌جایی حروف ATAXIA})$$

$$\boxed{AAA}\ TXI \Rightarrow n(A)=۴!=۲۴ \quad (\text{جابه‌جایی ۳ حرف A باهم اهمیت ندارد})$$

پس $P(A)=\frac{۲۴}{۱۲۰}=\frac{۱}{۵}$ است.

۶۰ ☆ در جدول فراوانی داده‌های دسته‌بندی شده‌ی زیر، اگر به تمام داده‌ها ۱٫۵ واحد اضافه شود، میانگین داده‌های جدید، برابر ۱۰ می‌شود. فراوانی دسته‌ی سوم کدام است؟

حدود دسته	۱ − ۵	۵ − ۹	۹ − ۱۳	۱۳ − ۱۷
فراوانی	۴	۵	a	۳

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۶

پاسخ: گزینه ۲

اگر به تمام داده‌ها ۱٫۵ واحد اضافه کنیم به میانگین نیز ۱٫۵ واحد اضافه می‌شود بنابراین میانگین در این جدول، برابر $۸٫۵=۱٫۵-۱۰$ است و مراکز دسته‌ها به ترتیب برابر ۳ و ۷ و ۱۱ و ۱۵ می‌باشند.

$$\bar{x}=\frac{۱}{N}\sum_{i=۱}^{N}F_i x_i \Rightarrow ۸٫۵=\frac{۳\times۴+۷\times۵+۱۱a+۱۵\times۳}{۱۲+a} \Rightarrow ۹۲+۱۱a=۸٫۵a+۱۰۲$$

$$\Rightarrow ۹۲+۲٫۵a=۱۰۲ \Rightarrow ۲٫۵a=۱۰ \Rightarrow a=۴$$

۶۱ ☆ دو نقطه بر خط به معادله‌ی $y=x-۱$ قرار دارند، که فاصله این نقاط از خط به معادله‌ی $۲x-۳y=۵$ برابر $\sqrt{۱۳}$ است. طول این دو نقطه، کدام است؟

۱) $-۱۵,۹$ ۲) $-۱۵,۱۱$ ۳) $۱۱,-۹$ ۴) $-۱۱,۱۵$

پاسخ: گزینه ۲ نقطه‌ی $A\left|\begin{matrix}\alpha\\ \alpha-۱\end{matrix}\right.$ را روی خط $y=x-۱$ در نظر گرفته و فاصله‌ی آن را از خط $۲x-۳y=۵$ بدست آورده و مساوی $\sqrt{۱۳}$ قرار می‌دهیم.

$$\begin{cases} A\left|\begin{matrix}\alpha\\ \alpha-۱\end{matrix}\right. \\ ۲x-۳y-۵=۰ \end{cases} \rightarrow AH=\frac{|۲\alpha-۳\alpha+۳-۵|}{\sqrt{۴+۹}}=\frac{|-\alpha-۲|}{\sqrt{۱۳}}=\sqrt{۱۳} \rightarrow |-\alpha-۲|=۱۳$$

$$-\alpha-۲=۱۳ \rightarrow \alpha=-۱۵\ ,\ -\alpha-۲=-۱۳ \rightarrow \alpha=۱۱$$

توجه کنید فاصله‌ی نقطه‌ی $A\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right.$ از خط به معادله‌ی $ax+by+c=۰$ از رابطه‌ی $AH=\frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}}$ به‌دست می‌آید.

۶۲ ☆ از دو معادله‌ی $\log_{۳} x + \log_{۳} y = ۲$ و $x^{۲} + y^{۲} = ۴۶$، لگاریتم $(x + y)$ در پایه‌ی ۴ کدام است؟

۱) ۱٫۵ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۲٫۵

پاسخ: گزینه ۱

می‌دانیم:

$$a^{۲} + b^{۲} = (a + b)^{۲} - ۲ab \ , \ \log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab} \ , \ \log_b^N = x \to b^x = N \ , \ \log_{k^m}^{a^n} = \frac{n}{m}\log_k^a$$

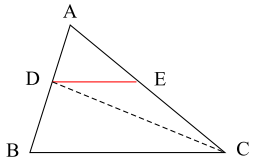
$$\log_{۳}^{x} + \log_{۳}^{y} = ۲ \to \log_{۳}^{xy} = ۲ \xrightarrow{\text{تعریف}} xy = ۳^{۲} = ۹$$

$$x^{۲} + y^{۲} = ۴۶ \to (x + y)^{۲} - ۲xy = ۴۶ \to (x + y)^{۲} - ۱۸ = ۴۶$$

$$\to (x + y)^{۲} = ۶۴ \to x + y = ۸ \text{ یا } x + y = -۸ \text{ غ ق ق } (x, y \text{ اعدادی مثبت هستند.})$$

$$\log_{۴}^{x+y} = \log_{۴}^{۸} = \log_{۲^۲}^{۲^۳} = \frac{۳}{۲}$$

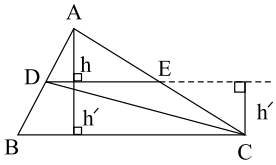
۶۳ ☆ در شکل مقابل $DE \parallel BC, \frac{AD}{AB} = \frac{۳}{۷}$، مساحت مثلث ADE چند درصد مثلث DEC است؟



۱) ۷۰ ۲) ۸۴
۳) ۷۸ ۴) ۷۵

پاسخ: گزینه ۴

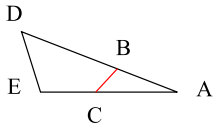
چون $\frac{AD}{AB} = \frac{۳}{۷}$ است پس $\frac{AD}{DB} = \frac{۳}{۴}$ می‌باشد.



$$DE \| BC \xrightarrow[\text{رابطه‌ی تالس در } \Delta ABC]{} \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} = \frac{h}{h'} = \frac{۳}{۴}$$

$$\text{پس: } \frac{S_{ADE}}{S_{DEC}} = \frac{\frac{DE \times h}{۲}}{\frac{DE \times h'}{۲}} = \frac{h}{h'} = \frac{۳}{۴} = ۰٫۷۵$$

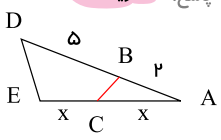
۶۴ ☆ در شکل اگر $AB = ۲$ و $BD = ۵$ و $AC = EC = x$ و دو مثلث ABC و ADE متشابه باشند، آنگاه:



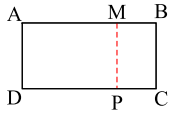
۱) $x = \sqrt{۷}$ ۲) $x = ۲\sqrt{۷}$
۳) $x = \sqrt{۱۴}$ ۴) $x = ۴\sqrt{۷}$

پاسخ: گزینه ۱

$$\Delta ABC \sim \Delta ADE \Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AD} \Rightarrow \frac{۲}{۲x} = \frac{x}{۷} \Rightarrow x^{۲} = ۷ \Rightarrow x = \sqrt{۷}$$

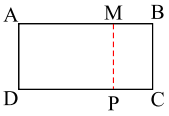


۶۵ ☆ چند نقطه مانند M روی ضلع AB از مستطیل ABCD وجود دارد که اگر از آن نقطه به CD عمود شود و نقطه‌ی P به دست آید، اگر $AB = ۱۰$ و $BC = ۴$، آنگاه دو مستطیل ABCD و MBCP متشابه باشند؟



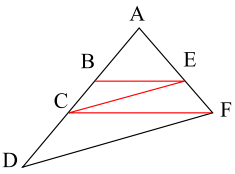
۱) صفر ۲) ۱
۳) ۲ ۴) بی شمار

پاسخ: گزینه ۲ تنها یک نقطه M وجود دارد. زیرا اگر دو مستطیل متشابه باشند باید داشته باشیم:



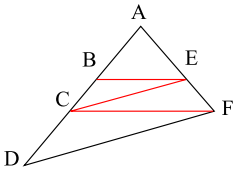
$$\frac{\text{طول بزرگ}}{\text{طول کوچک}} = \frac{\text{عرض بزرگ}}{\text{عرض کوچک}} \Rightarrow \frac{۱۰}{۴} = \frac{۴}{MB} \Rightarrow MB = ۱٫۶$$

۶۶ ☆ در شکل مقابل $BE||CF$ و $CE||DF$ است. اگر $AB = ۵$ و $BC = ۳$، آنگاه اندازه‌ی CD کدام است؟



۱) ۴٫۵
۲) ۴٫۸
۳) ۵٫۴
۴) ۵٫۶

پاسخ: گزینه ۲ اگر CD را برابر x در نظر بگیریم، داریم:



$$\begin{cases} BE||CF \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AF} \\ CE||DF \Rightarrow \frac{AE}{AF} = \frac{AC}{AD} \end{cases} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD} \Rightarrow AC^{۲} = AB \times AD \Rightarrow ۸^{۲} = ۵AD \Rightarrow AD = \frac{۶۴}{۵}$$

$$CD = AD - AC = \frac{۶۴}{۵} - ۸ = \frac{۲۴}{۵} = ۴٫۸$$

۶۷ ☆ در یک دبیرستان ۱۸ دانش آموز در شهریورماه متولد شده اند. احتمال آن که هر ۱۸ نفر در روز هفتم شهریور متولد شده باشند کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳۱^{۱۹}}$
۲) $\frac{۱}{۳۱^{۱۸}}$
۳) $\frac{۱}{۱۸^{۳۱}}$
۴) $\frac{۱۸}{۳۱}$

پاسخ: گزینه ۲ چون شهریورماه ۳۱ روز دارد پس برای هر یک از دانش آموزان ۳۱ حالت مختلف وجود دارد.

$$n(S) = ۳۱ \times ۳۱ \times \cdots \times ۳۱ = ۳۱^{۱۸}$$

حالتی که همه در هفتم شهریور به دنیا آمده باشند فقط ۱ حالت است.

پس $P(A) = \frac{۱}{۳۱^{۱۸}}$ است.

۶۸ ☆ فرض کنید $S = \{a, b, c\}$ فضای نمونه ای یک آزمایش است اگر $P(a) = \frac{۱}{۳}P(b) = ۴P(c)$ آنگاه $P(a)$ کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۱۷}$
۲) $\frac{۳}{۱۶}$
۳) $\frac{۲}{۳}$
۴) $\frac{۲}{۱۳}$

پاسخ: گزینه ۱

$$P(c) = x \Rightarrow \begin{cases} P(a) = ۴x \\ P(b) = ۱۲x \end{cases}$$

$$P(a) + P(b) + P(c) = ۱ \Rightarrow ۴x + ۱۲x + x = ۱ \Rightarrow ۱۷x = ۱ \Rightarrow x = \frac{۱}{۱۷} \Rightarrow P(a) = \frac{۴}{۱۷}$$

۶۹ ☆ اگر $S = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$ و $P(۱) = ۲P(۲) = ۳P(۳) = ۴P(۴)$، $P(۱)$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۲۵}$
۲) $\frac{۸}{۲۵}$
۳) $\frac{۱۲}{۲۵}$
۴) $\frac{۱۴}{۲۵}$

پاسخ: گزینه ۳ اگر $P(۱) = x$ باشد آنگاه $P(۲) = \frac{x}{۲}$ و $P(۳) = \frac{x}{۳}$ و $P(۴) = \frac{x}{۴}$ است.

$$P(۱) + P(۲) + P(۳) + P(۴) = ۱ \Rightarrow x + \frac{x}{۲} + \frac{x}{۳} + \frac{x}{۴} = ۱$$

$$\xrightarrow{\times ۱۲} ۱۲x + ۶x + ۴x + ۳x = ۱۲ \Rightarrow ۲۵x = ۱۲ \Rightarrow x = \frac{۱۲}{۲۵} \Rightarrow P(۱) = \frac{۱۲}{۲۵}$$

۷۰ ☆ تاسی طوری ساخته شده است که احتمال وقوع هر عدد در یک بار پرتاب آن متناسب با عکس آن عدد می باشد. احتمال رو شدن عدد ۴ در یک بار پرتاب این تاس کدام است؟

۱) $\frac{۱۰}{۴۹}$ ۲) $\frac{۴}{۴۹}$ ۳) $\frac{۵}{۴۹}$ ۴) $\frac{۲۰}{۱۴۷}$

پاسخ: گزینه ۳

صورت سوال یعنی اینکه $P(۱)=\frac{x}{۱}, P(۲)=\frac{x}{۲}, P(۳)=\frac{x}{۳}, P(۴)=\frac{x}{۴}, P(۵)=\frac{x}{۵}, P(۶)=\frac{x}{۶}$ است.

$$P(۱)+P(۲)+P(۳)+P(۴)+P(۵)+P(۶)=۱ \Rightarrow x+\frac{x}{۲}+\frac{x}{۳}+\frac{x}{۴}+\frac{x}{۵}+\frac{x}{۶}=۱$$

$$\xrightarrow{\times ۶۰} ۶۰x+۳۰x+۲۰x+۱۵x+۱۲x+۱۰x=۶۰ \Rightarrow ۱۴۷x=۶۰ \Rightarrow x=\frac{۶۰}{۱۴۷}$$

$$P(۴)=\frac{x}{۴} \Rightarrow P(۴)=\frac{\frac{۶۰}{۱۴۷}}{\frac{۴}{۱}}=\frac{۵}{۴۹}$$

۷۱ ☆ اگر $S=\{۱,۲,۳,۴\}$ فضای نمونه ای یک تجربه ی تصادفی باشد $P(\{۲,۳\})=\frac{۲}{۳}$، $P(\{۲,۴\})=\frac{۱}{۲}$ و $P(۲)=\frac{۱}{۳}$، در این صورت $P(۱)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ: گزینه ۱

$$P(\{۲,۴\})=P(۲)+P(۴) \Rightarrow \frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۳}+P(۴) \Rightarrow P(۴)=\frac{۱}{۶}$$

$$P(\{۲,۳\})=P(۲)+P(۳) \Rightarrow \frac{۲}{۳}=\frac{۱}{۳}+P(۳) \Rightarrow P(۳)=\frac{۱}{۳}$$

$$P(۱)+P(۲)+P(۳)+P(۴)=۱ \Rightarrow P(۱)+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۶}=۱ \Rightarrow P(۱)=۱-\frac{۵}{۶}=\frac{۱}{۶}$$

۷۲ ☆ اگر A و B دو پیشامد از یک فضای نمونه ای باشند آنگاه $P(A\cup B')-P(A\cap B)$ کدام است؟

۱) $P(B)$ ۲) $P(A')$ ۳) $P(B')$ ۴) $P(A)$

پاسخ: گزینه ۳

می‌دانیم: $\boxed{P(A-B)=P(A\cap B')=P(A)-P(A\cap B),\ P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A-\cap B)}$

$$\begin{aligned}P(A\cup B')-P(A\cap B)&=P(A)+P(B')-P(A\cap B')-P(A\cap B)\\&=P(A)+P(B')-P(A-B)-P(A\cap B)\\&=P(A)+P(B')-(P(A)-P(A\cap B))-P(A\cap B)=P(B')\end{aligned}$$

۷۳ ☆ اگر A و B دو پیشامد باشند به طوری که $P(B)=\frac{۱}{۳}$ و $P(A\cup B)=\frac{۷}{۱۲}$ آنگاه $P(A'|B')$ برابر است با:

۱) $\frac{۵}{۶}$ ۲) $\frac{۵}{۱۲}$ ۳) $\frac{۵}{۸}$ ۴) $\frac{۱۱}{۱۲}$

پاسخ: گزینه ۳

می‌دانیم: $\boxed{\begin{matrix}(A\cup B)'=A'\cap B'\\(A\cap B)'=A'\cup B'\end{matrix}}$

$$P(A'|B')=\frac{P(A'\cap B')}{P(B')}=\frac{P((A\cup B)')}{P(B')}=\frac{۱-P(A\cup B)}{۱-P(B)}=\frac{۱-\frac{۷}{۱۲}}{۱-\frac{۱}{۳}}=\frac{\frac{۵}{۱۲}}{\frac{۲}{۳}}=\frac{۵}{۸}$$

۷۴ ☆ دو کارت به تصادف و بدون جایگذاری از بین ۹ کارت به شماره های ۱ تا ۹ انتخاب می کنیم. اگر مجموع رقم های دو کارت زوج باشد. احتمال آن که هر دو رقم فرد باشند کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۸}$ ۴) $\frac{۵}{۸}$

پاسخ: گزینه ۴

هر گاه پی‌درپی و بدون جایگزینی انتخاب می‌کنیم و ترتیب، مهم نباشد می‌توانید فرض کنید که با هم انتخاب کرده‌ایم.

۹ کارت به شماره‌های $۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹$ موجود است.

چون می دانیم مجموع دو کارت زوج بوده پس هر دو کارت زوج یا هر دو کارت فرد بوده اند. پس تعداد اعضای فضای نمونه ای جدید به صورت زیر است:

$$\binom{۵}{۲} + \binom{۴}{۲} = ۱۰ + ۶ = ۱۶$$

حال از بین حالات فوق حالات مطلوب آن هایی هستند که هردو فرد باشند یعنی تعداد حالات مطلوب $\binom{۵}{۲}$ یا همان ۱۰ می باشد.

پس $P(A) = \frac{۱۰}{۱۶} = \frac{۵}{۸}$ است.

۷۵ ☆ خانواده‌ای دارای ۳ فرزند است که فرزند دوم پسر است. با فرض برابر بودن احتمال پسر و دختر بودن در هر تولد احتمال این که هر سه فرزند این خانواده پسر باشند کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۸}$

پاسخ: گزینه ۳

$$S_{\text{جدید}} = \{PPD, DPP, DPD, PPP\} \Rightarrow n(S) = ۴$$

از بین حالات فوق حالتی مطلوب است که همه پسر باشند یعنی $n(A) = ۱$ است.

پس $P(A) = \frac{۱}{۴}$ است.

۷۶ ☆ یک تاس همگن را دو بار می‌ریزیم. اگر مجموع دو عدد روشده کمتر از ۶ باشد، احتمال یکسان بودن دو عدد روشده کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$

پاسخ: گزینه ۱

$$\left.\begin{array}{l} ۵ \rightarrow (۱,۴)(۴,۱)(۲,۳)(۳,۲) \\ ۴ \rightarrow (۱,۳)(۳,۱)(۲,۲) \\ ۳ \rightarrow (۱,۲)(۲,۱) \\ ۲ \rightarrow (۱,۱) \end{array}\right\} \Rightarrow n(S) = ۱۰$$

$$A = \{(۱,۱)(۲,۲)\} \Rightarrow n(A) = ۲$$

پس $P(A) = \frac{۲}{۱۰} = \frac{۱}{۵}$ است.

۷۷ ☆ دو تاس سالم را می ریزیم. اگر دست کم یکی از دو تاس ۳ باشد احتمال آن که دیگری هم ۳ باشد کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۱۲}$ ۲) $\frac{۲}{۱۲}$ ۳) $\frac{۱}{۱۱}$ ۴) $\frac{۲}{۱۱}$

پاسخ: گزینه ۳

$$S_{\text{جدید}} = \{(۱,۳)(۳,۱)(۲,۳)(۳,۲)(۳,۳)(۳,۴)(۴,۳)(۳,۵)(۵,۳)(۳,۶)(۶,۳)\} \Rightarrow n(S) = ۱۱$$

$$A = \{(۳,۳)\} \Rightarrow n(A) = ۱$$

پس $P(A) = \frac{۱}{۱۱}$ است.

۷۸ ☆ احتمال زنده ماندن در یک عمل پیوند برابر ۰٫۵ است احتمال این که بدن او پس از یک ماه پیوند را قبول نکند ۰٫۲ است. احتمال زنده ماندن یک بیمار پیوندی پس از این دو مرحله چقدر است؟

۱) ۰٫۲ ۲) ۰٫۰۱ ۳) ۰٫۴ ۴) ۰٫۵

پاسخ: گزینه ۳

$P(\text{در عمل زنده بماند و بدن پس از یک ماه پیوند را قبول کند}) = P(\text{در عمل زنده بماند}) \cdot P(\text{بدن پس از یک ماه پیوند را قبول کند} \mid \text{در عمل زنده مانده باشد}) = (۰٫۵)(۱ - ۰٫۲) = ۰٫۴$

۷۹ ☆ در تیراندازی با یک تفنگ خاص احتمال اصابت گلوله به هدف ۹۰ درصد است. اگر هنگام استفاده از این تفنگ تیراندازی را آن قدر ادامه دهیم تا گلوله به هدف اصابت نماید، احتمال آن که دقیقاً ۳ گلوله مصرف شود کدام است؟

۱) ۰٫۰۲۷ ۲) ۰٫۲۷ ۳) ۰٫۰۰۹ ۴) ۰٫۰۹

پاسخ: گزینه ۳ یعنی دفعات اول و دوم گلوله به هدف اصابت نکند ولی دفعه سوم گلوله به هدف اصابت کند.

$(۰٫۱) \times (۰٫۱) \times (۰٫۹) = ۰٫۰۱ \times ۰٫۹ = ۰٫۰۰۹$

۸۰ ☆ اگر $P(E) = \frac{۱}{۴}$ و $P(F|E) = \frac{۱}{۲}$ و $P(E|F) = \frac{۱}{۳}$ باشد در این صورت $P(F)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

پاسخ: گزینه ۳

$$P(F|E) = \frac{P(F \cap E)}{P(E)} \quad , \quad P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$$

دو رابطه را بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{P(F|E)}{P(E|F)} = \frac{P(F)}{P(E)} \Rightarrow \frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۱}{۳}} = \frac{P(F)}{\frac{۱}{۴}} \Rightarrow \frac{۳}{۲} = ۴P(F) \Rightarrow P(F) = \frac{۳}{۸}$$

۸۱ ☆ احتمال قبول شدن سه نفر در کنکور به ترتیب ۵۰ و ۶۰ و ۷۰ درصد است احتمال آن که دست کم یکی از این سه نفر در کنکور قبول شود کدام است؟

۱) ۹۲% ۲) ۹۶% ۳) ۹۰% ۴) ۹۴%

پاسخ: گزینه ۴

$P(\text{حداقل یک نفر قبول شود}) = ۱ - P(\text{هیچ کدام قبول نشوند})$

$= ۱ - (۱ - ۰٫۵)(۱ - ۰٫۶)(۱ - ۰٫۷) = ۱ - (۰٫۵)(۰٫۴)(۰٫۳) = ۰٫۹۴$

۸۲ ☆ احتمال قبول شدن شخص A در کنکور ۶۵ درصد است و احتمال قبول شدن شخص B در کنکور ۷۰ درصد ، احتمال آن که حداقل یکی از آن ها در کنکور قبول شوند کدام است؟

۱) ۰٫۵۵ ۲) ۰٫۸۹۵ ۳) ۰٫۶۵ ۴) ۰٫۱۰۵

پاسخ: گزینه ۲

$P(\text{حداقل یک نفر قبول شود}) = ۱ - P(\text{هیچ کدام قبول نشوند}) = ۱ - (۰٫۳۵)(۰٫۳) = ۱ - ۰٫۱۰۵ = ۰٫۸۹۵$

۸۳ ☆ اگر A یک پیشامد مستقل از خودش باشد آنگاه کدام گزینه در مورد پیشامد A صحیح تر است؟

۱) A حتمی است ۲) A نشدنی است ۳) A یک پیشامد دلخواه است ۴) A حتمی یا نشدنی است

پاسخ: گزینه ۴ طبق تعریف پیشامدهای مستقل داریم:

$$P(A \cap A) = P(A) \times P(A) \Rightarrow P(A) = (P(A))^{۲} \Rightarrow P(A) - (P(A))^{۲} = ۰$$
$$\Rightarrow P(A)(۱ - P(A)) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} P(A) = ۰ \Rightarrow A = \emptyset \\ P(A) = ۱ \Rightarrow A = S \end{cases}$$

۸۴ ☆ جدول زیر چگونگی توزیع کارمندان اداره ای را نشان می دهد احتمال این که کارمندی از این اداره مرد یا لیسانس باشد کدام است؟

مدرک/جنسیت	لیسانس	غیر لیسانس
زن	۱۰	۳۰
مرد	۲۰	۴۰

۱) ۰٫۴ ۲) ۰٫۵ ۳) ۰٫۶ ۴) ۰٫۷

پاسخ: گزینه ۴ دقت کنید این اداره ۱۰۰ کارمند دارد

$$P\text{(مرد یا لیسانس)} = P\text{(مرد)} + P\text{(لیسانس)} - P\text{(مرد و لیسانس)} = \frac{۶۰}{۱۰۰} + \frac{۳۰}{۱۰۰} - \frac{۲۰}{۱۰۰} = \frac{۷۰}{۱۰۰} = ۰٫۷$$

۸۵ ☆ ۷۰ درصد تولیدات کارخانه‌ای سالم است. ۲ نمونه از تولیدات این کارخانه را متوالیاً به تصادف انتخاب می کنیم احتمال آن که حداقل یکی سالم باشد کدام است؟

۱) ۰٫۷ ۲) ۰٫۱۴ ۳) ۰٫۴۹ ۴) ۰٫۹۱

پاسخ: گزینه ۴

$$P\text{(حداقل یکی سالم)} = ۱ - P\text{(هر دو معیوب)} = ۱ - (۰٫۳)(۰٫۳) = ۰٫۹۱$$

۸۶ ☆ دو رأس از یک پنج ضلعی را به تصادف انتخاب می کنیم. احتمال این که این دو رأس مجاور باشند برابر است با:

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$

پاسخ: گزینه ۲

$$n(S) = \binom{۵}{۲} = ۱۰$$

این که دو رأس مجاور باشند دقیقاً مانند این است که دو رأس دو سر یک ضلع از این پنج ضلعی باشند پس:

$$n(A) = \binom{۵}{۱} = ۵$$

پس $P(A) = \frac{۵}{۱۰} = \frac{۱}{۲}$ است.

۸۷ ☆ سکه‌ای را ۲۰۰ مرتبه می‌اندازیم. احتمال آن که حداکثر ۲ مرتبه پشت بیاید کدام است؟

۱) $\frac{۲۰۱۰۰}{۲^{۲۰۰}}$ ۲) $\frac{۱۹۹۰۰}{۲^{۲۰۰}}$ ۳) $\frac{۲۰۱۰۱}{۲^{۲۰۰}}$ ۴) $\frac{۱۹۹۰۱}{۲^{۲۰۰}}$

پاسخ: گزینه ۳ اگر سکه‌ای را n بار یا n سکه را با هم پرتاب کنیم، احتمال آنکه دقیقاً k بار رو (پشت) بیاید برابر $\frac{\binom{n}{k}}{۲^{n}}$ است.

احتمال آنکه حداکثر ۲ مرتبه پشت بیاید یعنی ۰ یا ۱ یا ۲ بار پشت بیاید.

$$P(A) = \frac{\binom{۲۰۰}{۰} + \binom{۲۰۰}{۱} + \binom{۲۰۰}{۲}}{۲^{۲۰۰}} = \frac{۱ + ۲۰۰ + \frac{۲۰۰ \times ۱۹۹}{۲}}{۲^{۲۰۰}} = \frac{۲۰۱ + ۱۹۹۰۰}{۲^{۲۰۰}} = \frac{۲۰۱۰۱}{۲^{۲۰۰}}$$

۸۸ ☆ احتمال این که سه نفر به نام های A, B, C هدفی را بزنند به ترتیب مساوی $\frac{۱}{۶}$ و $\frac{۱}{۴}$ و $\frac{۱}{۳}$ است هر یک از آن سه یک بار به هدف تیراندازی می کند. احتمال این که فقط یکی به هدف بزند کدام است؟

۱) $\frac{۶}{۳۱}$ ۲) $\frac{۳۱}{۷۲}$ ۳) $\frac{۳۰}{۷۲}$ ۴) $\frac{۳۷}{۷۲}$

پاسخ: گزینه ۲ حالات مطلوب به صورت زیر هستند

A, B', C' یا A', B, C' یا A', B', C

$$(\frac{۱}{۶}\times\frac{۳}{۴}\times\frac{۲}{۳})+(\frac{۵}{۶}\times\frac{۱}{۴}\times\frac{۲}{۳})+(\frac{۵}{۶}\times\frac{۳}{۴}\times\frac{۱}{۳})=\frac{۶}{۷۲}+\frac{۱۰}{۷۲}+\frac{۱۵}{۷۲}=\frac{۳۱}{۷۲}$$

۸۹ ☆ اگر A و B دو پیشامد از یک فضای نمونه ای S باشند پیشامد «تنها یکی از دو پیشامد A یا B رخ دهد» کدام است؟

۱) $(A\cap B)'$ ۲) $(A\cup B)'$ ۳) $A'\cup B$ ۴) $(A-B)\cup(B-A)$

پاسخ: گزینه ۴ یعنی A رخ دهد و B رخ ندهد یا B رخ دهد و A رخ ندهد.$((A-B)\cup(B-A))$

۹۰ ☆ ظرفی حاوی ۴ گلوله سفید و ۲ گلوله سیاه است در کدام یک از آزمایش های زیر تعداد عضوهای فضای نمونه ای بیش تر است؟

۱) یک گلوله به تصادف برمی داریم
۲) دو گلوله بدون جایگذاری برداریم
۳) دو گلوله با جایگذاری برداریم
۴) دو گلوله به تصادف برداریم

پاسخ: گزینه ۳ به بررسی گزینه ها می پردازیم:

۱) $\binom{۶}{۱}=۶$ ، ۲) $\binom{۶}{۱}\times\binom{۵}{۱}=۶\times۵=۳۰$ ، ۳) $\binom{۶}{۱}\times\binom{۶}{۱}=۶\times۶=۳۶$ ، ۴) $\binom{۶}{۲}=۱۵$

۹۱ ☆ در یک جعبه، ۱۰ ترانزیستور که ۴ تای آن‌ها خراب است وجود دارد ۳ ترانزیستور به تصادف یکی پس از دیگری انتخاب می‌کنیم احتمال این که هر سه سالم باشند کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۱۰}$ ۲) $\frac{۴}{۶}$ ۳) $\frac{۳}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

پاسخ: گزینه ۴ در جعبه، ۴ ترانزیستور خراب و ۶ ترانزیستور سالم وجود دارد.

$$P(\text{هر سه سالم})=P(\text{اولی سالم})\times P(\text{دومی سالم})\times P(\text{سومی سالم})=\frac{۶}{۱۰}\times\frac{۵}{۹}\times\frac{۴}{۸}=\frac{۱}{۶}$$

۹۲ ☆ سه تاس همگن را با هم می‌ریزیم احتمال آن که سه عدد روشده یک تصاعد عددی با قدرنسبت ۲ تشکیل دهند کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۹}$ ۲) $\frac{۱}{۱۸}$ ۳) $\frac{۱}{۲۷}$ ۴) $\frac{۱}{۳۶}$

پاسخ: گزینه ۲

$$n(S)=۶^۳=۲۱۶$$

$$۱,۳,۵\xrightarrow{\text{جابجایی}}۳!=۶$$
$$۲,۴,۶\xrightarrow{\text{جابجایی}}۳!=۶$$
$$\rightarrow n(A)=۱۲$$

پس $P(A)=\frac{۱۲}{۲۱۶}=\frac{۱}{۱۸}$ است.

۹۳ ☆ اگر ده جفت کفش به روی هم ریخته شود و از بین آن ها دو لنگه به تصادف انتخاب کنیم آن گاه احتمال این که دو لنگه متعلق به یک جفت باشند برابر است با:

۱) $\frac{۱}{۱۰}$ ۲) $\frac{۱}{۲۰}$ ۳) $\frac{۱}{۱۹}$ ۴) $\frac{۱}{۴۰۰}$

پاسخ: گزینه ۳ تعداد کل حالات برابر تعداد حالات انتخاب ۲ لنگه از ۲۰ لنگه می باشد.

$$n(S)=\binom{۲۰}{۲}=\frac{۲۰\times۱۹}{۲}=۱۹۰$$

تعداد حالات مطلوب برابر تعداد حالات انتخاب ۱ جفت از ۱۰ جفت می‌باشد.

$$n(A)=\binom{۱۰}{۱}=۱۰$$

پس $P(A)=\frac{۱۰}{۱۹۰}=\frac{۱}{۱۹}$ است.

۹۴ ☆ یک تاس همگن را ۳ بار متوالی می ریزیم. احتمال آن که ۳ عدد روشده اعداد متوالی با هر ترتیبی باشند کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۲۷}$ ۳) $\frac{۱}{۵۴}$ ۴) $\frac{۱}{۹}$

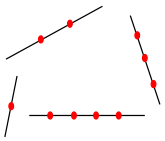
پاسخ: گزینه ۴

$$n(S) = ۶^۳ = ۲۱۶$$

$$\left.\begin{array}{l} ۱,۲,۳ \xrightarrow{\text{جابجایی}} ۳! = ۶ \\ ۲,۳,۴ \xrightarrow{\text{جابجایی}} ۳! = ۶ \\ ۳,۴,۵ \xrightarrow{\text{جابجایی}} ۳! = ۶ \\ ۴,۵,۶ \xrightarrow{\text{جابجایی}} ۳! = ۶ \end{array}\right\} \rightarrow n(A) = ۲۴$$

پس $P(A) = \frac{۲۴}{۲۱۶} = \frac{۱}{۹}$ است.

۹۵ ☆ از میان ۱۰ نقطه‌ی مقابل ۴ نقطه به تصادف انتخاب می کنیم احتمال آن که با ۴ نقطه انتخاب شده بتوان یک ۴ ضلعی ساخت به صورتی که روی هر خط، فقط یک رأس چهارضلعی قرار داشته باشد کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۲}{۳۵}$ ۳) $\frac{۳}{۳۵}$ ۴) $\frac{۴}{۳۵}$

پاسخ: گزینه ۴

$$n(S) = \binom{۱۰}{۴} = \frac{۱۰!}{۴!۶!} = ۲۱۰$$

از روی هر خط باید یک نقطه برداریم $\Rightarrow n(A) = \binom{۱}{۱} \times \binom{۲}{۱} \times \binom{۳}{۱} \times \binom{۴}{۱} = ۲۴$

پس $P(A) = \frac{۲۴}{۲۱۰} = \frac{۴}{۳۵}$ است.

۹۶ ☆ داده‌های آماری در ۴ دسته با درصد فراوانی نسبی آن‌ها بیان شده است. میانگین این داده‌ها کدام است؟

مرکز دسته	۱۲	۱۵	۱۸	۲۱
درصد فراوانی نسبی	۱۵	۳۰	۲۵	α

۱) ۱۶٫۵ ۲) ۱۶٫۸ ۳) ۱۷ ۴) ۱۷٫۱

پاسخ: گزینه ۴ مجموع همه‌ی درصد فراوانی‌های نسبی همواره برابر ۱۰۰ درصد است. لذا داریم:

$$۱۵ + ۳۰ + ۲۵ + \alpha = ۱۰۰ \Rightarrow \alpha = ۳۰$$

در نتیجه جدول فراوانی نسبی این داده های آماری، به صورت زیر است:

مرکز دسته x_i	۱۲	۱۵	۱۸	۲۱
فراوانی نسبی $\frac{F_i}{N}$	۰٫۱۵	۰٫۳۰	۰٫۲۵	۰٫۳۰

دقت کنید میانگین برابر است با مجموع حاصلضرب مرکز هر دسته در فراوانی نسبی آن دسته. برای راحتی در محاسبات از تمام داده‌ها ۲۰ واحد کم می‌کنیم.

$$\bar{x} - ۲۰ = (-۸ \times ۰٫۱۵) + (-۵ \times ۰٫۳) + (-۲ \times ۰٫۲۵) + (۰٫۳ \times ۱) \Rightarrow \bar{x} - ۲۰ = -۲٫۹ \Rightarrow \bar{x} = ۱۷٫۱$$

۹۷ ☆ واریانس ۱۱ داده ی آماری صفر است. اگر داده های ۲۴، ۱۶ و ۲۶ به آن ها اضافه شود، میانگین داده ها تغییر نمی کند، انحراف معیار ۱۴ داده‌ی حاصل کدام است؟

۱) ۰٫۷۵ ۲) ۱٫۲۵ ۳) ۱٫۵ ۴) ۲

پاسخ: گزینه ۴ چون واریانس این ۱۱ داده‌ی آماری برابر صفر است،در نتیجه تمام داده ها با هم برابرند.

میانگین سه داده‌ی اضافه شده ۲۲ $= \frac{۶۶}{۳} = \frac{۲۶ + ۱۶ + ۲۴}{۳}$ است و چون با اضافه شدن این سه داده ،میانگین ۱۴ داده تغییر نکرده است پس میانگین ۱۴ داده نیز برابر ۲۲ است.چون می دانیم در بین ۱۴ داده، ۱۱ داده با هم برابرند می توانیم همه‌ی آن ۱۱ داده را ۲۲ در نظر بگیریم.

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2$$

$$= \frac{1}{14}(11(22-22)^2 + (24-22)^2 + (16-22)^2 + (26-22)^2)$$

$$= \frac{1}{14}(0+4+36+16) = \frac{56}{14} = 4 \to \sigma = 2$$

۹۸ ☆ در آزمایشگاهی ۵ موش سفید و ۶ موش سیاه موجود است. به تصادف ۳ موش از بین آن ها خارج می کنیم. با کدام احتمال لااقل یکی از موش ها سفید است؟

۱) $\frac{8}{11}$ ۲) $\frac{9}{11}$ ۳) $\frac{28}{33}$ ۴) $\frac{29}{33}$

پاسخ: گزینه ۴

$$n(S) = \binom{11}{3} = \frac{11\times10\times9}{6} = 165$$

$P($حداقل یکی از موش ها سفید باشد$) = 1 - P($هر سه موش سیاه باشند$)$

$$= 1 - \frac{\binom{6}{3}}{165} = 1 - \frac{\frac{6\times5\times4}{6}}{165} = 1 - \frac{20}{165} = 1 - \frac{4}{33} = \frac{29}{33}$$

۹۹ ☆ در جدول مقابل مرکز دسته با درصد فراوانی نسبی داده شده است، در نمودار دایره ای زاویه ی مربوط به بازه ی $[25,28)$ چند درجه است؟

مرکز دسته	۱۷٫۵	۲۰٫۵	۲۳٫۵	۲۶٫۵	۲۹٫۵
درصد فراوانی نسبی	۱۷	۲۰٫۵	۲۲	x	۱۸

۱) 72° ۲) 81° ۳) 84° ۴) 90°

پاسخ: گزینه ۲ مجموع درصد فراوانی های N داده‌ی آماری برابر ۱۰۰ است.

$$17 + 20{,}5 + 22 + x + 18 = 100 \to x = 22{,}5$$

بنابراین درصد فراوانی نسبی دسته‌ی $[25,28)$ با مرکز دسته‌ی ۲۳٫۵ برابر ۲۲٫۵ است.

حال با یک تناسب ساده، مسأله را حل می کنیم.

$$\begin{matrix}100 \\ 360^\circ\end{matrix} \quad \begin{matrix}22{,}5 \\ \alpha\end{matrix} \to \alpha = \frac{22{,}5\times360^\circ}{100} = 81^\circ$$

۱۰۰ ☆ اگر $\log 5 = 3k$ باشد، $\log\sqrt[3]{1{,}6}$ کدام است؟

۱) $1-4k$ ۲) $2-5k$ ۳) $1-2k$ ۴) $1-k$

پاسخ: گزینه ۱

می‌دانیم: $\log_k^{a^n} = n\log_k^a \;,\; \log_k^{\frac{a}{b}} = \log_k^a - \log_k^b \;,\; \log 5 = 1 - \log 2$

$$\log\sqrt[3]{1{,}6} = \log(1{,}6)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\log 1{,}6 = \frac{1}{3}\log\frac{16}{10}$$

$$= \frac{1}{3}(\log 16 - \log 10) = \frac{1}{3}(4\log 2 - 1) = \frac{1}{3}(4(1-\log 5) - 1) = \frac{1}{3}(3 - 4\log 5)$$

$$= \frac{1}{3}(3 - 12k) = \frac{1}{3}(3(1-4k)) = 1 - 4k$$

۱۰۱☆ تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} a\sin 2x & ; \frac{\pi}{4} \le x < \frac{3\pi}{4} \\ \cos(x+\frac{\pi}{4}) & ; \frac{3\pi}{4} \le x \le 2\pi \end{cases}$ **بر بازه‌ی** $[\frac{\pi}{4}, 2\pi]$ **پیوسته است. مقدار** a **کدام است؟**

۱) -1 ۲) 0 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) 1

پاسخ: گزینه ۴ برای پیوستگی f در بازه ی $[\frac{\pi}{4}, 2\pi]$ تنها کافی است شرایط پیوستگی را در نقطه‌ی مرزی $x=\frac{3\pi}{4}$ اعمال کنیم. (تساوی حد راست و حد چپ و مقدار تابع)

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to(\frac{3\pi}{4})^+} f(x) = \lim\limits_{x\to(\frac{3\pi}{4})^+} \cos(x+\frac{\pi}{4}) = \cos\pi = -1 \\ \lim\limits_{x\to(\frac{3\pi}{4})^-} f(x) = \lim\limits_{x\to(\frac{3\pi}{4})^-} a\sin 2x = a\sin\frac{3\pi}{2} = -a \\ f(\frac{3\pi}{4}) = \cos(\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{4}) = \cos\pi = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow -a=-1 \Rightarrow a=1$$

۱۰۲☆ در جدول فراوانی مقابل واریانس داده ها کدام است؟

مرکز دسته	۱۲	۱۵	۱۸	۲۱	۲۴
فراوانی	۴	۳	۹	۷	۲

۱) ۱۱٫۷۲ ۲) ۱۱٫۹۶ ۳) ۱۲٫۲۴ ۴) ۱۲٫۳۶

پاسخ: گزینه ۳

برای راحتی در محاسبات از تمام داده‌ها ۱۸ واحد کم می کنیم و دقت کنید که واریانس تغییری نمی کند.

$$\bar{x}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} F_i x_i = \frac{1}{25}((4\times(-6))+(3\times(-31))+(9\times 0)+(7\times 3)+(2\times 6))$$
$$=\frac{1}{25}(-24-9+21+12)=0$$

$$\sigma^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} F_i(x_i-\bar{x})^2$$
$$=\frac{1}{25}(4(-6-0)^2+3(-3-0)^2+9(0-0)^2+7(3-0)^2+2(6-0)^2)$$

$$=\frac{1}{25}(144+27+63+72)=\frac{306}{25}=12{,}24$$

۱۰۳☆ به ازای کدام مجموعه مقادیر m**، معادله‌ی درجه‌ی دوم** $2x^2+(m+1)x+\frac{1}{2}m+2=0$ **فاقد ریشه‌ی حقیقی است؟**

۱) $-3<m<5$ ۲) $-3<m<4$ ۳) $-2<m<4$ ۴) $-1<m<5$

پاسخ: گزینه ۱ شرط آنکه معادله‌ی درجه دوم $2x^2+(m+1)x+\frac{1}{2}m+2=0$ فاقد ریشه‌ی حقیقی باشد، آن است که دلتای معادله، منفی باشد. پس داریم:

$$\Delta<0 \Rightarrow b^2-4ac<0 \Rightarrow (m+1)^2-4(2)(\frac{1}{2}m+2)=(m^2+2m+1)-4m-16$$
$$=m^2-2m-15=(m-5)(m+3)<0 \rightarrow$$

m	$-\infty$		-3		5		$+\infty$
		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\rightarrow -3<m<5$

۱۰۴☆ چهار رقم ۳ و ۲ و ۱ و ۰ را به تصادف در کنار هم قرار می دهیم تا عددی چهار رقمی حاصل شود با کدام احتمال یک عدد چهار رقمی مضرب ۶، حاصل می شود؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۵}{۱۲}$ ۳) $\frac{۴}{۹}$ ۴) $\frac{۵}{۹}$

پاسخ: گزینه ۴ تعداد حالات انجام تجربه‌ی تصادفی که همان چیدن چهار رقم ۳ و ۲ و ۱ و ۰ به تصادف در کنار هم است، برابر است با:

$$n(S) = \boxed{۳} \times \boxed{۳} \times \boxed{۲} \times \boxed{۱} = ۱۸$$

برای آن که عددی چهار رقمی مضرب ۶ باشد، باید هم زوج و هم بر ۳ بخش‌پذیر باشد. شرط آن که عددی بر ۳ بخش پذیر باشد آن است که مجموع ارقامش بر ۳ قابل قسمت باشد.

چون همواره مجموع ارقام ۳ و ۲ و ۱ و ۰ برابر ۶ است، پس این عدد چهار رقمی همواره بر ۳ بخش پذیر می باشد. لذا باید تنها تعداد اعداد زوج را پیدا کنیم تا عدد مضرب ۶ شود. تعداد اعداد چهار رقمی زوج برابر است با:

$$\left.\begin{array}{ll} \boxed{۳} \times \boxed{۲} \times \boxed{۱} \times \boxed{۱} = ۶ & \text{رقم یکان صفر باشد} \\ \boxed{۲} \times \boxed{۲} \times \boxed{۱} \times \boxed{۱} = ۴ & \text{رقم یکان صفر نباشد} \end{array}\right\} \Longrightarrow n(A) = ۶ + ۴ = ۱۰$$

پس $P(A) = \frac{۱۰}{۱۸} = \frac{۵}{۹}$ است.

۱۰۵☆ در داده‌های آماری دسته‌بندی شده، مساحت نمودار مستطیلی آن را S و سطح زیر نمودار چندبر فراوانی را که دو سر آن بر روی محور افقی باشد، S' می نامیم، نسبت $\frac{S}{S'}$ چگونه است؟

۱) کوچک‌تر از ۱ ۲) بزرگ‌تر از ۱ ۳) برابر ۱ ۴) اظهارنظر نمی‌توان کرد.

پاسخ: گزینه ۳ همواره مساحت زیر نمودار مستطیلی و نمودار چندبر فراوانی که دو سر آن روی محور قرار داشته باشند، با هم برابرند. پس: $\frac{S}{S'} = ۱$

۱۰۶☆ تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \frac{x^۳ - ۳x^۲ + ۴}{x - ۲} & ; x > ۲ \\ ۲x + b & ; x \le ۲ \end{cases}$، به ازای کدام مقدار b همواره پیوسته است؟

۱) -۴ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۱ کافی است شرط پیوستگی (تساوی حد راست و حد چپ و مقدار تابع) را در $x = ۲$ اعمال کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to ۲^+} f(x) = \lim\limits_{x \to ۲^+} \frac{x^۳ - ۳x^۲ + ۴}{x - ۲} = \frac{۰}{۰} \overset{\text{HOP}}{\longrightarrow} \lim\limits_{x \to ۲^+} \frac{۳x^۲ - ۶x}{۱} = ۱۲ - ۱۲ = ۰ \\ \lim\limits_{x \to ۲^-} f(x) = \lim\limits_{x \to ۲^-} (۲x + b) = ۴ + b \\ f(۲) = ۴ + b \end{array}\right\} \Rightarrow ۰ = ۴ + b \Rightarrow b = -۴$$

۱۰۷☆ در یک خانواده‌ی سه فرزندی، می دانیم یکی از فرزندان پسر است. با کدام احتمال دو فرزند دیگر، دختر است؟

۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $\frac{۳}{۷}$ ۳) $\frac{۴}{۷}$ ۴) $\frac{۵}{۸}$

پاسخ: گزینه ۲ یعنی در این خانواده سه فرزندی حداقل یک فرزند پسر است. پس در این خانواده حالتی که هر ۳ فرزند دختر باشند وجود ندارد.

$$n(S) = ۲^۳ - ۱ = ۷$$

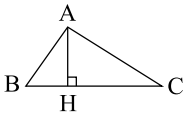
تعداد حالت مطلوب یعنی این خانواده دارای دو دختر باشد: $DDP \Rightarrow n(A) = \frac{۳!}{۲!} = ۳$

پس $P(A) = \frac{۳}{۷}$ است.

۱۰۸☆ سه ضلع مثلثی به معادلات $AB : ۲y - x = ۳, AC : y - ۲x = ۵, BC : ۲y + ۳x = ۶$ هستند. معادله‌ی ارتفاع AH از مثلث مفروض، کدام است؟

۱) $۶y - ۴x = ۱۵$ ۲) $۹y - ۶x = ۱۷$ ۳) $۳y - ۲x = ۷$ ۴) $۳y + ۲x = ۹$

پاسخ: گزینه ۲



$$BC: 2y+3x=6 \to m_{BC}=-\frac{3}{2} \xrightarrow{\text{ارتفاع AH بر ضلع BC عمود است}} m_{AH}=\frac{2}{3}$$

برای پیدا کردن مختصات نقطه‌ی A کافی است معادلات خطوط اضلاع AB و AC را تلاقی دهیم.

$$\begin{cases} 2y-x=3 \\ y-2x=5 \end{cases} \xrightarrow{\text{دستگاه}} x=-\frac{7}{3},\ y=\frac{1}{3}$$

حال، معادله‌ی ارتفاع AH را با داشتن شیب و یک نقطه می‌نویسیم.

$$A\left|\begin{matrix}-\frac{7}{3} \\ \frac{1}{3}\end{matrix}\right.,\ m_{AH}=\frac{2}{3} \to y-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}(x+\frac{7}{3}) \to 3y-1=2x+\frac{14}{3}$$

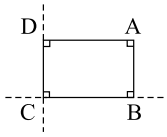
$$\xrightarrow{\times 3} 9y-3=6x+14 \to 9y-6x=17$$

۱۰۹☆ دو ضلع یک مستطیل منطبق بر دو خط به معادلات $2y+x=6$ و $2x-y=7$ و یک رأس آن نقطه‌ی $A(8,5)$ است. مساحت این مستطیل کدام است؟

۱) ۷٫۲ ۲) ۹٫۶ ۳) ۱۱٫۴ ۴) ۱۲٫۸

پاسخ: گزینه ۲

$$2y+x=6 \to m=-\frac{1}{2},\quad 2x-y=7 \to m'=2$$



چون شیب‌ها عکس و قرینه‌ی هم هستند این دو خط بر هم عمودند و نقطه‌ی A در معادله‌ی هیچ کدام از این دو خط صدق نمی‌کند پس می‌توان شکل را در این‌گونه در نظر گرفت.

برای یافتن طول و عرض مستطیل کافی است فاصله‌ی نقطه‌ی A را از این دو خط بدست آوریم.

$$\left.\begin{matrix} A\left|\begin{matrix}8\\5\end{matrix}\right.,\ x+2y-6=0 \to AD=\frac{|8+10-6|}{\sqrt{1+4}}=\frac{12}{\sqrt{5}} \\ A\left|\begin{matrix}8\\5\end{matrix}\right.,\ 2x-y-7=0 \to AB=\frac{|16-5-7|}{\sqrt{1+4}}=\frac{4}{\sqrt{5}} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{مساحت مستطیل}=AD\times AB=\frac{48}{5}=9{,}6$$

توجه کنید فاصله‌ی نقطه‌ی $A\left|\begin{matrix}\alpha\\\beta\end{matrix}\right.$ از خط به معادله‌ی $ax+by+c=0$ از رابطه‌ی $AH=\frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ بدست می‌آید.

۱۱۰☆ به ازای کدام مقدار m، ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $mx^2+3x+m^2=2$، معکوس یک‌دیگرند؟

۱) -2 ۲) -1 ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ: گزینه ۲ معادله را به صورت $mx^2+3x+m^2-2=0$ مرتب می‌کنیم.

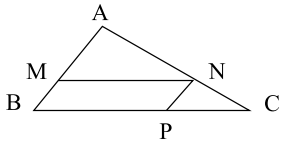
$$x'=\frac{1}{x''} \Rightarrow x'x''=1 \Rightarrow \frac{c}{a}=1 \Rightarrow \frac{m^2-2}{m}=1 \Rightarrow m^2-2=m \Rightarrow m^2-m-2=0$$

$$\Rightarrow (m-2)(m+1)=0 \Rightarrow m=2,\ m=-1$$

$$m=2 \xrightarrow{\text{معادله}} 2x^2+3x+2=0 \Rightarrow \Delta=b^2-4ac=9-16=-7<0 \text{ غیر قابل قبول}$$

$$m=-1 \xrightarrow{\text{معادله}} -x^2+3x-1=0 \Rightarrow \Delta=b^2-4ac=9-4=5>0 \text{ قابل قبول}$$

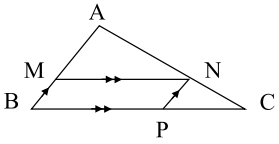
۱۱۱☆ در شکل مقابل $\frac{MA}{MB}=\frac{۳}{۲}$ است. مساحت متوازی‌الاضلاع MNPB چند درصد مساحت مثلث ABC است؟



۱) ۴۸ ۲) ۵۲ ۳) ۵۴ ۴) ۵۶

پاسخ: گزینه ۱

MNPB متوازی‌الاضلاع است، بنابراین:



$$MN||BC\ ,\ NP||AB$$

$$\frac{AM}{MB}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow \text{ترکیب در مخرج} \Rightarrow \frac{AM}{AB}=\frac{۳}{۵}\Rightarrow\frac{BM}{AB}=\frac{۲}{۵}\quad (۱)$$

$$MN||BC\Rightarrow\frac{MN}{BC}=\frac{AM}{AB}=\frac{۳}{۵}\xrightarrow{MN=BP}\frac{BP}{BC}=\frac{۳}{۵}\quad (۲)$$

$$\frac{S_{MNPB}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{MB\times BP\times\sin\hat{B}}{\frac{۱}{۲}AB\times BC\times\sin\hat{B}}\overset{(۱),(۲)}{=\!=\!=}\frac{\frac{۲}{۵}AB\times\frac{۳}{۵}BC}{\frac{۱}{۲}AB\times BC}=\frac{۱۲}{۲۵}=۰/۴۸=۴۸\%$$

۱۱۲☆ معادله‌ی $۴^x-۳\times۲^x-۴=۰$ چند ریشه دارد؟

۱) هیچ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینه ۲

$$۴^x-۳\times۲^x-۴=۰\rightarrow(۲^x)^۲-۳(۲^x)-۴=۰\xrightarrow{۲^x=A}A^۲-۳A-۴=۰$$

$$\rightarrow(A-۴)(A+۱)=۰\rightarrow\begin{cases}A=-۱\Rightarrow ۲^x=-۱\rightarrow\text{امکان ندارد}\\A=۴\Rightarrow ۲^x=۴\Rightarrow x=۲\end{cases}$$

بنابراین معادله دارای یک ریشه است.

۱۱۳☆ معادله ی $۹^x+۶^x-۲\times۴^x=۰$ چند ریشه دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۱

$$۹^x+۶^x-۲\times۴^x=۰\Rightarrow ۳^{۲x}+۲^x\times۳^x-۲\times۲^{۲x}=۰$$

$$\Rightarrow ۳^{۲x}+۲^x\times۳^x-۲^{۲x}-۲^{۲x}=۰\Rightarrow\underbrace{(۳^{۲x}-۲^{۲x})}_{\text{مزدوج}}+(۲^x\times۳^x-۲^{۲x})=۰$$

$$\Rightarrow(۳^x-۲^x)(۳^x+۲^x)+۲^x(۳^x-۲^x)=۰$$

$$\Rightarrow\underbrace{(۳^x-۲^x)}_{\text{فاکتور}}(۳^x+۲^x+۲^x)=۰\Rightarrow\begin{cases}۳^x-۲^x=۰\Rightarrow ۳^x=۲^x\Rightarrow x=۰\\۳^x+۲^x+۲^x\neq۰\Rightarrow\text{جمع سه عبارت مثبت صفر نمی شود}\end{cases}$$

۱۱۴☆ تابع نمایی $y=۲^x$ محور y ها را در نقطه ی A قطع می کند معکوس این تابع محور x ها را در نقطه ی B قطع می کند. طول پاره خط AB کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) ۳ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $\frac{۱۰}{۳}$

پاسخ: گزینه ۳ می دانیم تابع $y = ۲^x$ وقتی محور y ها را قطع می کند که $x = ۰$ باشد . پس : $y = ۲^۰ = ۱$

پس نقطه ی $A(۰, ۱)$ به دست آمد و چون نقطه ی B در معکوس تابع صدق می کند پس جای x و y عوض می شوند. و $B(۱, ۰)$ است. حال فاصله ی نقاط A و B را به دست آوریم:

$$AB = \sqrt{(۰ - ۱)^۲ + (۱ - ۰)^۲} = \sqrt{۲}$$

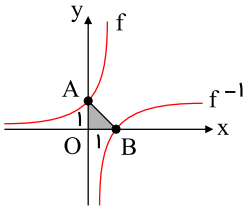
۱۱۵☆ تابع نمایی $y = ۳^x$ محور y ها را در نقطه ی A قطع می کند معکوس این تابع محور x ها را در نقطه ی B قطع می کند. مساحت مثلث ABO کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینه ۲

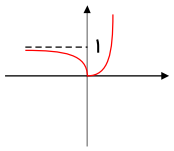
$$y = ۳^x \xrightarrow{x=۰} y = ۳^۰ = ۱ \to A\Big|_{۱}^{۰}$$

چون نقطه‌ی B در معکوس تابع صدق می‌کند پس جای x و y عوض می‌شود یعنی $B\Big|_{۰}^{۱}$ است.



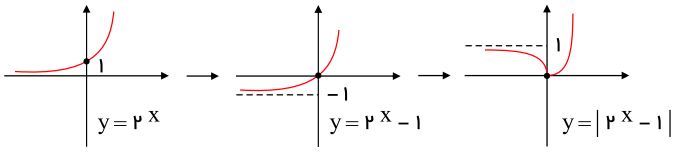
$$\to S_{\overset{\Delta}{AOB}} = \frac{۱ \times ۱}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

۱۱۶☆ شکل مقابل نمودار کدام تابع است؟



۱) $y = -۲^{-x}$ ۲) $y = ۲^{-|x|}$
۳) $y = ۲^{x+۱} - ۱$ ۴) $y = |۲^x - ۱|$

پاسخ: گزینه ۴



برای رسم توابع به فرم $y = |f(x)|$ هر آنچه از شکل تابع $y = f(x)$ زیر محور xها است آئینه‌وار به بالا منتقل می‌کنیم.

۱۱۷☆ کدام گزینه جواب معادله‌ی $۳^{۲x} - ۸(۳^x) + ۱۵ = ۰$ می‌باشد؟

۱) $\log_۳^۵$ ۲) $\log_۵^۳$ ۳) $\log ۱۰$ ۴) گزینه‌ی ۱ و ۳

پاسخ: گزینه ۴

$$(۳^x)^۲ - ۸ \times ۳^x + ۱۵ = ۰ \xrightarrow{۳^x = a} a^۲ - ۸a + ۱۵ = ۰ \to (a - ۵)(a - ۳) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = ۳ \Rightarrow ۳^x = ۳ \Rightarrow x = ۱ \Rightarrow x = \log ۱۰ \\ a = ۵ \Rightarrow ۳^x = ۵ \Rightarrow x = \log_۳^۵ \end{cases}$$

۱۱۸☆ اگر $\log ۹ = ۰/۹۵۴۲۴$ باشد آنگاه عدد $۳^{۱۰۰}$ چند رقمی است؟

۱) ۴۷ ۲) ۴۹ ۳) ۴۸ ۴) ۴۶

پاسخ: گزینه ۳

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^{a^n} = n \log_k^a}$

$$\log ۹ = ۰/۹۵۴۲۴ \Rightarrow ۲ \log ۳ = ۰/۹۵۴۲۴ \Rightarrow \log ۳ = ۰/۴۷۷۱۲$$

$$\log ۳^{۱۰۰} = ۱۰۰ \log ۳ = ۱۰۰(۰/۴۷۷۱۲) = ۴۷/۷۱۲$$

تعداد ارقام $= [۴۷/۷۱۲] + ۱ = ۴۷ + ۱ = ۴۸$

اگر n یک عدد طبیعی باشد آنگاه تعداد ارقام n برابر است با $[\log n] + 1$.

۱۱۹☆ اگر $\log ۲ = ۰/۳۰۱$ باشد آنگاه عدد $۲^{۱۰۰}$ چند رقمی است؟

۱) ۳۰ ۲) ۳۱ ۳) ۳۲ ۴) ۳۳

پاسخ: گزینه ۲

می‌دانیم: $\log_k^{a^n} = n \log_k^a$

$$\log ۲^{۱۰۰} = ۱۰۰ \log ۲ = ۱۰۰(۰/۳۰۱) = ۳۰/۱$$

تعداد ارقام $= [۳۰/۱] + ۱ = ۳۰ + ۱ = ۳۱$

اگر n یک عدد طبیعی باشد آنگاه تعداد ارقام n برابر است با $[\log n] + 1$.

۱۲۰☆ اگر $\log_a^x = ۳$ ، $\log_b^x = ۶$ و $\log_c^x = ۱۲$ باشد، $\log_{abc}^x$ برابر است با .....

۱) $\frac{۱}{۹۶}$ ۲) ۹۶ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۱۲}{۷}$

پاسخ: گزینه ۴

می‌دانیم: $\log_k^a = \frac{۱}{\log_a^k}$, $\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}$

$$\begin{cases} \log_a^x = ۳ \Rightarrow \log_x^a = \frac{۱}{۳} \\ \log_b^x = ۶ \Rightarrow \log_x^b = \frac{۱}{۶} \\ \log_c^x = ۱۲ \Rightarrow \log_x^c = \frac{۱}{۱۲} \end{cases} \Rightarrow \log_x^a + \log_x^b + \log_x^c = \frac{۷}{۱۲} \Rightarrow \log_x^{abc} = \frac{۷}{۱۲} \Rightarrow \log_{abc}^x = \frac{۱۲}{۷}$$

۱۲۱☆ حاصل $[\log_۳^۷] + [\log_۷^۳]$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است)

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۰

پاسخ: گزینه ۱

$$۳^۱ < ۷ < ۳^۲ \Rightarrow \log_۳^{۳^۱} < \log_۳^۷ < \log_۳^{۳^۲} \Rightarrow ۱ < \log_۳^۷ < ۲ \Rightarrow [\log_۳^۷] = ۱$$

$$۷^۰ < ۳ < ۷^۱ \Rightarrow \log_۷^{۷^۰} < \log_۷^۳ < \log_۷^{۷^۱} \Rightarrow ۰ < \log_۷^۳ < ۱ \Rightarrow [\log_۷^۳] = ۰$$

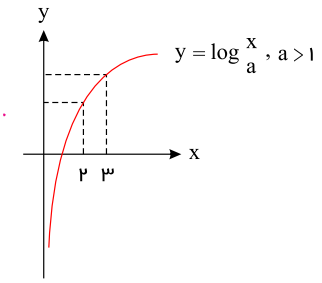
$$\Rightarrow [\log_۳^۷] + [\log_۷^۳] = ۱ + ۰ = ۱$$

۱۲۲☆ اگر $a > ۱$ باشد. کدام گزینه صحیح است؟

۱) $\log_a^۲ < \log_a^۳$ ۲) $\log_a^۲ > \log_a^۳$ ۳) $۲^a > ۳^a$ ۴) $\frac{۳}{۲}\log_a^۲ = \frac{۲}{۳}\log_a^۳$

پاسخ: گزینه ۱

نمودار تابع $y = \log_a^x$ را با شرط $a > ۱$ رسم می کنیم (واضح است هرچه x افزایش می یابد y افزایش می یابد)

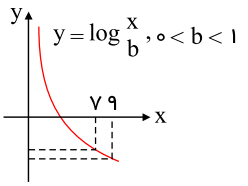


۱۲۳☆ اگر $0 < b < 1$ باشد کدام گزینه صحیح است؟

۱) $y = 5n$ ۲) $y = 5000n$ ۳) $y = 5000^n$ ۴) $y = 5^n$

پاسخ: گزینه ۲

نمودار تابع $y = \log_b^x$ را با شرط $0 < b < 1$ رسم می کنیم که یک تابع نزولی است (واضح است هرچه x افزایش می‌یابد y کاهش می یابد)



۱۲۴☆ دامنه‌ی تعریف تابع $f(x) = \sqrt{\log(2x-3)}$ کدام است؟

۱) $[1,+\infty)$ ۲) $(1,+\infty)$ ۳) $[2,+\infty)$ ۴) $(2,+\infty)$

پاسخ: گزینه ۳

جلوی لگاریتم باید مثبت باشد $\Rightarrow 2x-3>0 \Rightarrow x > \frac{3}{2}$

زیر رادیکال باید بزرگتر مساوی صفر باشد $\Rightarrow \log(2x-3) \geq 0 \Rightarrow \log(2x-3) \geq \log 1 \Rightarrow 2x-3 \geq 1 \Rightarrow 2x \geq 4 \Rightarrow x \geq 2$

از اشتراک این دو جواب به $x \geq 2$ یا $x \in [2,+\infty)$ می‌رسیم.

۱۲۵☆ اگر $\log_{15}^{3} = a$ باشد $\log_{15}^{75}$ چقدر است؟

۱) $a+2$ ۲) $\frac{2}{a}$ ۳) $2-a$ ۴) $-\frac{2}{a}$

پاسخ: گزینه ۳

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab} \ , \ \log_b^a = \log_k^a - \log_k^b}$

$$\log_{15}^{75} = \log_{15}^{5\times 15} = \log_{15}^{15} + \log_{15}^{5} = 1 + \log_{15}^{\frac{15}{3}}$$

$$= 1 + \log_{15}^{15} - \log_{15}^{3} = 1 + 1 - a = 2 - a$$

۱۲۶☆ اگر $\log 2 + \log 3 = x$ و $\log 3 + \log 7 = y$ و $\log 2 + \log 7 = z$ باشد $\log 42$ چه قدر است؟

۱) $\frac{xyz}{2}$ ۲) $\sqrt{x+y+z}$ ۳) $\frac{x+y+z}{2}$ ۴) $\sqrt{xyz}$

پاسخ: گزینه ۳

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}}$

$$\begin{cases} \log 2 + \log 3 = x \\ \log 3 + \log 7 = y \\ \log 2 + \log 7 = z \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع می کنیم}} 2(\log 2 + \log 3 + \log 7) = x + y + z$$

$$\Rightarrow \log 2 + \log 3 + \log 7 = \frac{x+y+z}{2} \Rightarrow \log(2\times 3\times 7) = \log 42 = \frac{x+y+z}{2}$$

۱۲۷☆ ساده شده‌ی عبارت $5^{(2\log_5^2 + 3\log_5^3)}$ برابر است با:

۱) ۵ ۲) ۳۶ ۳) ۱۰۸ ۴) 5^6

پاسخ: گزینه ۳

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^{a^n} = n\log_k^a \ , \ \log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab} \ , \ a^{\log_b^x} = x^{\log_b^a}}$

$$۵^{(۲\log_۵^۲ + ۳\log_۵^۳)} = ۵^{(\log_۵^۴ + \log_۵^{۲۷})} = ۵^{\log_۵^{۴\times ۲۷}} = ۴ \times ۲۷ = ۱۰۸$$

۱۲۸☆ حاصل $۲\log_{۹}^{\sqrt{۳}} - \log_{۴}^{(\frac{۱}{\sqrt{۲}})}$ **کدام است؟**

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

پاسخ: گزینه ۱

می‌دانیم: $\log_k^{a^n} = n\log_k^a \ , \ \log_{k^m}^{a^n} = \frac{n}{m}\log_k^a$

$$۲\log_{۹}^{\sqrt{۳}} - \log_{۴}^{\frac{۱}{\sqrt{۲}}} = ۲ \times \log_{۳^۲}^{۳^{\frac{۱}{۲}}} - \log_{۲^۲}^{۲^{-\frac{۱}{۲}}} = ۲ \times \frac{\frac{۱}{۲}}{۲} - \frac{-\frac{۱}{۲}}{۲} = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} = \frac{۳}{۴}$$

۱۲۹☆ اگر لگاریتم a در پایه‌ی $\sqrt{۳}$ برابر $\frac{۴}{۳}$ باشد آنگاه لگاریتم $(a^۳ + ۷)$ در پایه‌ی ۸ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

پاسخ: گزینه ۲

می‌دانیم: $\log_b^N = x \to b^x = N \ , \ \log_k^{a^n} = n\log_k^a$

$$\log_{\sqrt{۳}}^a = \frac{۴}{۳} \Rightarrow a = (\sqrt{۳})^{\frac{۴}{۳}} \Rightarrow a = (۳^{\frac{۱}{۲}})^{\frac{۴}{۳}} = ۳^{\frac{۴}{۶}} = ۳^{\frac{۲}{۳}}$$

$$\log_{۸}^{(a^۳+۷)} = \log_{۸}^{(۳^{\frac{۲}{۳}})^۳+۷} = \log_{۸}^{۳^۲+۷} = \log_{۸}^{۱۶} = \log_{۲^۳}^{۲^۴} = \frac{۴}{۳}$$

۱۳۰☆ اگر $\log ۲ = \frac{b}{۲}$ **باشد مقدار** $\log ۱۲٫۵$ **چه قدر است؟**

۱) $\frac{۳b-۴}{۲}$ ۲) $\frac{۴-۳b}{۲}$ ۳) $۴+۳b$ ۴) $\frac{۳-۴b}{۲}$

پاسخ: گزینه ۲ می‌دانیم: $\log ۵ = \log \frac{۱۰}{۲} = \log ۱۰ - \log ۲ = ۱ - \log ۲$

$$\log ۱۲٫۵ = \log \frac{۲۵}{۲} = \log ۲۵ - \log ۲ = \log ۵^۲ - \log ۲ = ۲\log ۵ - \log ۲$$

$$= ۲(۱ - \log ۲) - \log ۲ = ۲ - ۳\log ۲ = ۲ - \frac{۳b}{۲} = \frac{۴-۳b}{۲}$$

۱۳۱☆ دترمینان ماتریس $\begin{bmatrix} \log a & \log b \\ \log b & \log a \end{bmatrix}$ **کدام است؟**

۱) $\log \frac{a^۳}{b^۲}$ ۲) $۲\log \frac{a}{b}$ ۳) $\log ab \log \frac{a}{b}$ ۴) ۰

پاسخ: گزینه ۳

می‌دانیم: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \ , \ \log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab} \ , \ \log_k^a - \log_k^b = \log_k^{\frac{a}{b}}$

$$\begin{vmatrix} \log a & \log b \\ \log b & \log a \end{vmatrix} = \log a \log a - \log b \log b$$

$$= (\log a)^۲ - (\log b)^۲ \overset{\text{مزدوج}}{=\!=} (\log a + \log b)(\log a - \log b) = \log ab \cdot \log \frac{a}{b}$$

۱۳۲☆ حاصل $\log_{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}^{۸} + \log_{۸}^{\sqrt[۴]{۳}} + \log_{۸}^{\frac{۱}{\sqrt{۳}}}$ برابر است با:

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۱}{۴}$

پاسخ: گزینه ۱

می‌دانیم: $\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}$ ، $\log_k^{a^n} = n\log_k^a$ ، $\log_{k^m}^{a^n} = \frac{n}{m}\log_k^a$

$$\log_{۸}^{\frac{\sqrt{۲}}{۲}} + \log_{۸}^{\sqrt[۴]{۳}} + \log_{۸}^{\frac{۱}{\sqrt{۳}}} = \log_{۸}^{\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\sqrt[۴]{۳}\times\frac{۱}{\sqrt{۳}}} = \log_{۸}^{\sqrt{۲}} = \log_{۲^۳}^{۲^{۲\times\frac{۱}{۲}}} = \log_{۲^۳}^{۲^{\frac{۳}{۲}}} = \frac{\frac{۳}{۲}}{\frac{۳}{۱}} = \frac{۱}{۲}$$

۱۳۳☆ اگر $۳\log_{۱۶}^{۲} - \log_{۴}^{\sqrt{۲}} = A$ باشد مقدار $\log_{\sqrt{۲}}^{\sqrt{A}}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) $\frac{۳}{۲}$

پاسخ: گزینه ۲

می‌دانیم: $\log_{k^m}^{a^n} = \frac{n}{m}\log_k^a$

$$۳\log_{۱۶}^{۲} - \log_{۴}^{\sqrt{۲}} = A \Rightarrow ۳\log_{۲^۴}^{۲} - \log_{۲^۲}^{۲^{\frac{۱}{۲}}} = \frac{۳}{۴} - \frac{\frac{۱}{۲}}{۲} = \frac{۳}{۴} - \frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۲} \to A = \frac{۱}{۲}$$

$$\log_{\sqrt{۲}}^{\sqrt{A}} = \log_{\sqrt{۲}}^{\sqrt{\frac{۱}{۲}}} = \log_{\sqrt{۲}}^{\sqrt{۲^{-۱}}} = \log_{۲^{\frac{۱}{۲}}}^{۲^{-\frac{۱}{۲}}} = \frac{-\frac{۱}{۲}}{\frac{۱}{۲}} = -۱$$

۱۳۴☆ اگر $\log_y^x = \frac{۱}{۳}$ باشد حاصل $\log_{x\sqrt{x}}^y$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) ۱۲

پاسخ: گزینه ۳

می‌دانیم: $\log_k^a = \frac{۱}{\log_a^k}$ ، $\log_{k^m}^{a^n} = \frac{n}{m}\log_k^a$

$$\log_{x\sqrt{x}}^y = \log_{x^{\frac{۳}{۲}}}^y = \frac{۲}{۳}\log_x^y = \frac{۲}{۳} \times \frac{۱}{\log_y^x} = \frac{۲}{۳} \times ۳ = ۲$$

۱۳۵☆ حاصل $\frac{\log ۸ + \log ۳}{\log ۲ + \log \sqrt{۶}}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۲۴ ۴) $۲\sqrt{۶}$

پاسخ: گزینه ۱

می‌دانیم: $\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}$ ، $\log_k^{a^n} = n\log_k^a$

$$\frac{\log ۸ + \log ۳}{\log ۲ + \log \sqrt{۶}} = \frac{\log ۲۴}{\log ۲\sqrt{۶}} = \frac{\log ۲۴}{\log \sqrt{۲۴}} = \frac{\log ۲۴}{\log (۲۴)^{\frac{۱}{۲}}} = \frac{\log ۲۴}{\frac{۱}{۲}\log ۲۴} = ۲$$

۱۳۶☆ حاصل $\left[\log_{۶}^{۳}\right] + \left[\log_{۳}^{۶}\right]$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است)

۱) ۲ ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) ۳

پاسخ: گزینه ۳

$$۶^{۰} < ۳ < ۶^{۱} \Rightarrow \log_{۶}^{۶^{۰}} < \log_{۶}^{۳} < \log_{۶}^{۶^{۱}} \Rightarrow ۰ < \log_{۶}^{۳} < ۱ \Rightarrow [\log_{۶}^{۳}] = ۰$$

$$۳^{۱} < ۶ < ۳^{۲} \Rightarrow \log_{۳}^{۳^{۱}} < \log_{۳}^{۶} < \log_{۳}^{۳^{۲}} \Rightarrow ۱ < \log_{۳}^{۶} < ۲ \Rightarrow [\log_{۳}^{۶}] = ۱$$

$$[\log_{۶}^{۳}] + [\log_{۳}^{۶}] = ۰ + ۱ = ۱$$

۱۳۷☆ جواب معادله‌ی $\log(x+۴) = \log\sqrt{۲x+۱۱}$ کدام است؟

۱) -۳ ۲) -۵ ۳) -۱ ۴) ۳

پاسخ: گزینه ۳

$$\log(x+۴) = \log\sqrt{۲x+۱۱} \rightarrow x+۴ = \sqrt{۲x+۱۱}$$

$$\xrightarrow{\text{توان } ۲} x^{۲} + ۱۶ + ۸x = ۲x + ۱۱ \rightarrow x^{۲} + ۶x + ۵ = ۰$$

$$\rightarrow (x+۱)(x+۵) = ۰ \rightarrow \begin{cases} x = -۱ & \text{ق ق} \\ x = -۵ & \text{جلوی لگاریتم را منفی می کند و غیر قابل قبول است} \end{cases}$$

۱۳۸☆ اگر $\log(x-۲) = \frac{۱}{۲}\log(x+۱۰)$ باشد. آنگاه $\log_{۲}^{x+۲}$ کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) ۳ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

پاسخ: گزینه ۲

می‌دانیم: $\log_{k}^{a^n} = n\log_{k}^{a}$

$$\log(x-۲) = \frac{۱}{۲}\log(x+۱۰) \Rightarrow ۲\log(x-۲) = \log(x+۱۰) \Rightarrow \log(x-۲)^{۲} = \log(x+۱۰)$$

$$\Rightarrow x^{۲} + ۴ - ۴x = x + ۱۰ \Rightarrow x^{۲} - ۵x - ۶ = ۰$$

$$\Rightarrow (x-۶)(x+۱) = ۰ \begin{cases} x = -۱ & \text{غیر قابل قبول است چون جلوی لگاریتم را منفی می‌کند} \\ x = ۶ & \text{ق ق} \end{cases} \quad (x = -۱)$$

$$\log_{۲}^{x+۲} \overset{x=۶}{=\!=} \log_{۲}^{۸} = \log_{۲}^{۲^{۳}} = ۳$$

۱۳۹☆ اگر $\log xy^{۲} = ۲$ و $\log x^{۲}y = ۴$ باشد. حاصل $\log x^{۲}y^{۴}$ چقدر است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۸ ۴) ۶

پاسخ: گزینه ۱

می‌دانیم: $\log_{k}^{a} + \log_{k}^{b} = \log_{k}^{ab}$ ، $\log_{k}^{a^n} = n\log_{k}^{a}$

$$\begin{cases} \log xy^{۲} = ۲ \\ \log x^{۲}y = ۴ \end{cases} \Rightarrow \overset{-۲}{} \begin{cases} \log x + ۲\log y = ۲ \\ ۲\log x + \log y = ۴ \end{cases} \Rightarrow \log y = ۰ \ , \ \log x = ۲$$

$$\log x^{۲}y^{۴} = \log x^{۲} + \log y^{۴} = ۲\log x + ۴\log y = ۴ + ۰ = ۴$$

۱۴۰☆ معادله‌ی $\log(x^{۳} + ۳x^{۲} + ۳x - ۱) = \log x + \log(x+۱) + \log(x+۲)$ چند ریشه‌ی حقیقی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) هیچ ۴) بیشمار

پاسخ: گزینه ۱

می‌دانیم: $\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}$

$$\log(x^۳ + ۳x^۲ + ۳x - ۱) = \log x + \log(x+۱) + \log(x+۲)$$
$$\Rightarrow \log(x^۳ + ۳x^۲ + ۳x - ۱) = \log x(x+۱)(x+۲)$$
$$\Rightarrow x^۳ + ۳x^۲ + ۳x - ۱ = x(x^۲ + ۳x + ۲)$$
$$\Rightarrow x^۳ + ۳x^۲ + ۳x - ۱ = x^۳ + ۳x^۲ + ۲x \Rightarrow x = ۱$$

۱۴۱☆ لگاریتم عددی در مبنای ۹ از لگاریتم عکس مجذور آن در پایه‌ی ۹ به اندازه‌ی ۴٫۵ واحد بیشتر است. آن عدد کدام است؟

۱) ۸۱ ۲) ۳۶ ۳) ۱۸ ۴) ۲۷

پاسخ: گزینه ۴

می‌دانیم: $\log_{k^m}^{a^n} = \frac{n}{m}\log_k^a \quad , \quad \log_b^N = x \to N = b^x$

$$\log_۹^x = \log_{۹^{\frac{۱}{۲}}}^x + ۴٫۵ \to \log_{۳^۲}^x = \log_{۳^{۲}}^{x^{-۲}} + ۴٫۵ \to \frac{۱}{۲}\log_۳^x = -\log_۳^x + ۴٫۵$$
$$\to \frac{۳}{۲}\log_۳^x = \frac{۹}{۲} \to \log_۳^x = ۳ \xrightarrow{\text{تعریف}} x = ۳^۳ = ۲۷$$

۱۴۲☆ مجموع مربعات دو عدد صحیح متوالی ۹۲۵ است. مجموع این دو عدد کدام است؟

۱) ۴۱ ۲) ۴۳ ۳) ۴۵ ۴) ۴۷

پاسخ: گزینه ۲

دو عدد متوالی را x و $x+۱$ در نظر می گیریم.

$$x^۲ + (x+۱)^۲ = ۹۲۵ \Rightarrow x^۲ + x^۲ + ۲x + ۱ = ۹۲۵ \Rightarrow ۲x^۲ + ۲x - ۹۲۴ = ۰$$
$$x^۲ + x - ۴۶۲ = ۰ \Rightarrow x_۱, x_۲ = \frac{-۱ \pm \sqrt{۱۸۴۹}}{۲} \Rightarrow \begin{cases} x_۱ = ۲۱ \\ x_۲ = -۲۲ \end{cases} \Rightarrow ۲۱ + (۲۱+۱) = ۴۳$$

۱۴۳☆ پنج عدد طبیعی متوالی مفروضند. مجموع مربعات سه تای اول برابر است با مجموع مربعات دوتای آخر، کوچک ترین آن ها کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۵ ۳) ۱۰ ۴) ۱۸

پاسخ: گزینه ۳ کافی است اعداد x، $x+۱$، $x+۲$، $x+۳$ و $x+۴$ را در نظر بگیریم:

$$x^۲ + (x+۱)^۲ + (x+۲)^۲ = (x+۳)^۲ + (x+۴)^۲$$
$$\Rightarrow x^۲ + x^۲ + ۲x + ۱ + x^۲ + ۴x + ۴ = x^۲ + ۶x + ۹ + x^۲ + ۸x + ۱۶$$
$$\Rightarrow x^۲ - ۸x - ۲۰ = ۰ \Rightarrow (x-۱۰)(x+۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۱۰ & \text{ق ق} \\ x = -۲ & \text{غ ق ق(طبیعی نمی‌باشد)} \end{cases}$$

۱۴۴☆ معادله‌ی $(k^۲+۱)^۲x^۲ - (k+۱)x - ۱ = ۰$ به ازای جمیع مقادیر k:

۱) دو ریشه ی مثبت دارد.
۲) دو ریشه ی منفی دارد.
۳) دو ریشه ی مختلف العلامت دارد.
۴) دو ریشه ی مضاعف دارد.

پاسخ: گزینه ۳

$$P = \frac{c}{a} = \frac{-۱}{(k^۲+۱)^۲} < ۰$$

چون $\frac{c}{a} < ۰$، بنابراین معادله‌ی فوق دارای دو ریشه‌ی متمایز مختلف‌العلامت است.

۱۴۵☆ اگر معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^۲ - ۴x + k = ۰$ دارای دو ریشه‌ی حقیقی متمایز x' و x'' باشد، کدام درست است؟

۱) $x'x'' > ۴$ ۲) $x'x'' > -۴$ ۳) $x'x'' < -۴$ ۴) $x'x'' < ۴$

پاسخ: گزینه ۴

برای داشتن دو ریشه‌ی حقیقی متمایز باید $\Delta > 0$ باشد. $(b^2 - 4ac > 0)$

$$\Delta = 16 - 4k > 0 \Rightarrow k < 4 \Rightarrow x'x'' = \frac{c}{a} = k \Rightarrow x'x'' < 4$$

۱۴۶☆ حدود m برای آن که معادله ی $(m-1)x^2 + mx + m - 3 = 0$ دارای دو ریشه ی مختلف‌العلامت باشد. کدام است؟

۱) $m > 2$ ۲) $1 < m < 3$ ۳) $m < 1$ ۴) $0 < m < 1$

پاسخ: گزینه ۲ شرط آن‌که یک معادله‌ی درجه‌ی دوم دارای دو ریشه‌ی متمایز مختلف‌العلامت باشد آن است که $\frac{c}{a}$ منفی باشد.

$$\frac{c}{a} < 0 \Rightarrow \frac{m-3}{m-1} < 0 \Rightarrow$$

m	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$m-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$m-1$		$-$	0	$+$		$+$	
عبارت < 0		$+$	ن	$-$	0	$+$	

$$\Rightarrow 1 < m < 3$$

۱۴۷☆ کدام یک از معادلات زیر به ازای جمیع مقادیر k دو ریشه‌ی حقیقی منفی دارد؟

۱) $x^2 + kx + k^2 + 1 = 0$ ۲) $x^2 + (k+1)x + k - 2 = 0$

۳) $x^2 - (k^2+1)x + k^2 = 0$ ۴) $x^2 + (k^2+3)x + k^2 + 2 = 0$

پاسخ: گزینه ۴ شرط آنکه معادله‌ی درجه‌ی دوم دارای دو ریشه‌ی حقیقی منفی باشد آن است که $\Delta > 0$ و $\frac{c}{a} > 0$ و $\frac{-b}{a} < 0$ باشد (ضرب دو ریشه مثبت و جمع دو ریشه باید منفی باشد) که فقط در گزینه‌ی چهارم صدق می کند.

گزینه‌ی چهارم:
$$\begin{cases} \Delta = b^2 - 4ac = (k^2+3)^2 - 4(k^2+2) = k^4 + 2k^2 + 1 > 0 \\ \frac{c}{a} = k^2 + 2 > 0 \\ -\frac{b}{a} = -k^2 - 3 < 0 \end{cases}$$

۱۴۸☆ حدود m برای آن که معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2 - x + m = 0$ دارای دو ریشه‌ی متمایز مثبت باشد. کدام است؟

۱) $m < \frac{1}{4}$ ۲) $0 < m < \frac{1}{4}$ ۳) $m > 0$ ۴) $m < 0$ یا $m > \frac{1}{4}$

پاسخ: گزینه ۲

شرط آنکه یک معادله‌ی درجه‌ی دوم دارای دو ریشه‌ی متمایز مثبت باشد آن است که $\Delta > 0$ و $-\frac{b}{a} > 0$ و $\frac{c}{a} > 0$ باشد.

$$\left.\begin{array}{l} (1) \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow 1 - 4m > 0 \Rightarrow m < \frac{1}{4} \\ (2) \Rightarrow x_1 + x_2 > 0 \Rightarrow -\frac{b}{a} = 1 > 0 \text{ برقرار است:} \\ (3) \Rightarrow x_1 \times x_2 > 0 \Rightarrow \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow m > 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} 0 < m < \frac{1}{4}$$

۱۴۹☆ به ازای کدام مقادیر a، عبارت $y = x^2 - (a+2)x + 2a$ به صورت مربع کامل یک دوجمله‌ای در می آید؟

۱) -2 ۲) 2 ۳) 1 ۴) -1

پاسخ: گزینه ۲ شرط آن‌که یک عبارت درجه دوم مربع کامل باشد آن است که $\Delta = 0$ باشد.

$$\Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow (a+2)^2 - 4(1)(2a) = 0 \Rightarrow a^2 + 4a + 4 - 8a = 0$$

$$\Rightarrow a^2 - 4a + 4 = 0 \Rightarrow (a-2)^2 = 0 \Rightarrow a = 2$$

۱۵۰☆ معادله‌ی $(x^2+2)^2 - 4(x^2+2) + 3 = 0$ چند ریشه‌ی حقیقی دارد؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۰

پاسخ: گزینه ۲

$$(x^۲+۲)^۲-۴(x^۲+۲)+۳=۰ \xrightarrow{x^۲+۲=A} A^۲-۴A+۳=۰$$

$$\Rightarrow (A-۱)(A-۳)=۰ \begin{cases} A=۱ \Rightarrow x^۲+۲=۱ \Rightarrow x^۲=-۱ \text{ ریشه‌ی حقیقی ندارد:} \\ A=۳ \Rightarrow x^۲+۲=۳ \Rightarrow x^۲=۱ \Rightarrow x=\pm ۱ \end{cases}$$

پاسخنامه تشریحی

۱ ☆ گزینه ۴

$x = ۴$ ریشه‌ی معادله است، پس در معادله صدق می کند:

$$x = ۴ \Rightarrow ۴ + a = \sqrt{۲۰ - ۱۶} \Rightarrow a = -۲$$

$$x - ۲ = \sqrt{۵x - x^۲} \xrightarrow{\text{توان ۲}} x^۲ - ۴x + ۴ = ۵x - x^۲ \Rightarrow ۲x^۲ - ۹x + ۴ = ۰$$

$$\Rightarrow x_۱ + x_۲ = \frac{-b}{a} \Rightarrow \frac{۹}{۲} \xrightarrow{x_۱ = ۴} ۴ + x_۲ = \frac{۹}{۲} \Rightarrow x_۲ = \frac{۱}{۲}$$

$x_۲ = \frac{۱}{۲}$ در معادله صدق نمی‌کند $(x - ۲ = \sqrt{۵x - x^۲})$ پس به عنوان ریشه محسوب نمی‌شود.

۲ ☆ گزینه ۴

می‌دانیم یکی از فرزندان دختر است پس می‌توان فضای نمونه ای جدیدی ساخت:

$$S_{\text{جدید}} = \{DPD, DPP, DDP, DDD\} \Rightarrow n(S) = ۴$$
$$A = \{DPD, DPP, DDP\} \Rightarrow n(A) = ۳$$

پس $P(A) = \frac{۳}{۴}$ است.

۳ ☆ گزینه ۲

معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌هایش k واحد بیشتر از ریشه های معادله‌ی $ax^۲ + bx + c = ۰$ می باشد به صورت زیر است:

$$a(x - k)^۲ + b(x - k) + c = ۰$$

پس کافی است x را به $x - ۱$ تبدیل کنیم.

$$۳(x - ۱)^۲ + ۷(x - ۱) + ۱ = ۰ \Rightarrow ۳x^۲ - ۶x + ۳ + ۷x - ۷ + ۱ = ۰ \Rightarrow ۳x^۲ + x - ۳ = ۰$$

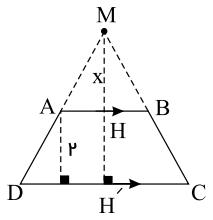
برای مقایسه با $x^۲ + ax + b = ۰$ معادله را بر ۳ تقسیم می کنیم.

$$x^۲ + \frac{۱}{۳}x - ۱ = ۰ \rightarrow a = \frac{۱}{۳}\ ,\ b = -۱$$

۴ ☆ گزینه ۲

در مثلث MCD با توجه به این مطلب که AB و CD موازی هستند، طبق قضیه‌ی تالس داریم:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{MH}{MH'} \rightarrow \frac{۶}{۹} = \frac{x}{x + ۲} \rightarrow ۹x = ۶x + ۱۲ \rightarrow ۳x = ۱۲ \rightarrow x = ۴$$



بنابراین فاصله‌ی M از قاعده‌ی بزرگ‌تر برابر $MH' = ۴ + ۲ = ۶$ است.

۵ ☆ گزینه ۳

$$(۱۸٫۵, ۲۱٫۵) \Rightarrow \text{مرکز دسته} = \frac{۱۸٫۵ + ۲۱٫۵}{۲} = \frac{۴۰}{۲} = ۲۰$$

طرح سوال درصد فراوانی نسبی دسته‌ای که مرکز دسته‌ی آن ۲۰ می‌باشد را خواسته است.

$$\text{درصد فراوانی نسبی} = \text{فراوانی نسبی} \times ۱۰۰ \Rightarrow \text{درصدفراوانی نسبی} = \frac{\text{فراوانی مطلق}}{\text{تعداد کل داده‌ها}} \times ۱۰۰$$

$$\Rightarrow \text{درصد فراوانی نسبی} = \frac{۲۵ - ۱۳}{۴۰} \times ۱۰۰ = \frac{۱۲}{۴۰} \times ۱۰۰ = ۳۰$$

دقت کنید فراوانی تجمعی آخرین طبقه در جدول برابر تعداد کل داده‌ها است. و اختلاف فراوانی تجمعی دو دسته‌ی iام و $(i + ۱)$ام فراوانی مطلق دسته‌ی $(i + ۱)$ ام را می‌دهد.

۶ ☆ **گزینه ۴** ابتدا تابع داده شده را ساده می‌کنیم.

$$f(x)=\begin{cases}x-1 & x>1 \text{ یا } x<-1\\ 2x & -1\le x\le 1\end{cases}$$

حد راست و حد چپ و مقدار تابع را باید در $x=1$ و $x=-1$ بدست آوریم.

$$x=1:\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)=1-1=0\\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=2(1)=2\\ f(1)=2(1)=2\end{cases}$$

تابع در $x=1$ ناپیوسته است. $\Rightarrow$

$$x=-1:\begin{cases}\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^+} 2x=2(-1)=-2\\ \lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^-}(x-1)=-1-1=-2\\ f(-1)=2(-1)=-2\end{cases}$$

تابع در $x=-1$ پیوسته است. $\Rightarrow$

۷ ☆ **گزینه ۴** دو حالت داریم:

۱) موش اول سفید و موش دوم سفید و موش سوم سیاه

$$\frac{5}{8}\times\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}=\frac{5}{28}$$

۲) موش اول سفید و موش دوم سیاه و موش سوم سیاه

$$\frac{5}{8}\times\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}=\frac{5}{56}$$

پس $P=\frac{5}{28}+\frac{5}{56}=\frac{15}{56}$ است.

روش دوم: چون در تست به رنگ موش دوم اشاره نشده است فرض می‌کنیم موشی که به رنگ آن اشاره نشده است را انتخاب نکرده‌ایم و تنها می‌خواهیم دو موش را پشت سرهم (متوالیا) انتخاب کنیم یعنی موش دوم تأثیری در حل مسأله ندارد

$$P\text{ (اولی سفید و دومی سیاه)}=\frac{5}{8}\times\frac{3}{7}=\frac{15}{56}$$

۸ ☆ **گزینه ۴** شرط آنکه سه خط در یک نقطه همدیگر را قطع کنند آن است که محل تلاقی دو خط در معادله‌ی خط سوم صدق کند.

$$-\begin{cases}y+2x=0\\ y+3x=a\end{cases}\Rightarrow x=a\ ,\ y=-2a$$

$$A\left|\begin{matrix}a\\ -2a\end{matrix}\right. \xrightarrow[2y+ax+5=0]{\text{صدق در خط سوم}} -4a+a^2+5=0\Rightarrow a^2-4a+5=0$$

$\Delta=b^2-4ac=16-20=-4<0\rightarrow$ ریشه‌ی حقیقی ندارد $\rightarrow$ این سه خط هیچ‌گاه متقارب نیستند.

۹ ☆ **گزینه ۲**

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^a-\log_k^b=\log_k^{\frac{a}{b}}\ ,\ \log_b^N=x\rightarrow b^x=N\ ,\ \log_{k^m}^{a^n}=\frac{n}{m}\log_k^a}$

$$\log_3(x^2-1)=1+\log_3(x+3)\rightarrow\log_3(x^2-1)-\log_3(x+3)=1$$

$$\rightarrow\log_3\frac{x^2-1}{x+3}=1\xrightarrow{\text{تعریف}}\frac{x^2-1}{x+3}=3\rightarrow x^2-1=3x+9\rightarrow x^2-3x-10=0$$

$$\rightarrow(x-5)(x+2)=0\rightarrow\begin{cases}x=5 & \text{ق ق}\\ x=-2 & \text{ق ق}\end{cases}$$

ولی برای محاسبه‌ی $\log_4^{(x-3)}$ جای x فقط می‌توان $x=5$ را قرار داد.

$$\log_4^{(x-3)}\overset{x=5}{=\!=\!=}\log_{2^2}^2=\frac{1}{2}$$

۱۰ ☆ گزینه ۲

$$\lim_{x\to ۳^+}[-x^۲]=[-(۳^+)^۲]=[-(۹^+)]=[-۹/۰۱]=-۱۰$$
$$\lim_{x\to ۳^-}[-x^۲]=[-(۳^-)^۲]=[-(۹^-)]=[-۸/۹۹]=-۹$$
$$f(-۳)=[-۹]=-۹$$

تابع از چپ پیوسته و از راست ناپیوسته است.

۱۱ ☆ گزینه ۳

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^{a^n}=n\log_k^a}$

دقت کنید که $(۱+\sqrt{۲})^۲=۱+۲+۲\sqrt{۲}=۳+۲\sqrt{۲}$ است.

$$\log_{(۱+\sqrt{۲})}^{(۳+۲\sqrt{۲})^۳}=\log_{(۱+\sqrt{۲})}^{((۱+\sqrt{۲})^۲)^۳}=\log_{(۱+\sqrt{۲})}^{(۱+\sqrt{۲})^۶}=۶$$

۱۲ ☆ گزینه ۳

$$x_۱+x_۲=-\frac{b}{a}=-۴\quad,\quad x_۱\cdot x_۲=\frac{c}{a}=-۱$$
$$(\frac{x_۲}{x_۱}+\frac{x_۱}{x_۲})^۲=(\frac{x_۱^۲+x_۲^۲}{x_۱x_۲})^۲=(\frac{(x_۱+x_۲)^۲-۲x_۱x_۲}{x_۱x_۲})^۲=(\frac{۱۶+۲}{-۱})^۲=(-۱۸)^۲=۳۲۴$$

۱۳ ☆ گزینه ۲ از آنجا که نرخ رشد ۲^n از نرخ رشد $n^۲$ بیش تر است لذا داریم:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^۲}{۲^n}=۰$$

۱۴ ☆ گزینه ۱ داده‌های $x_۱,x_۲,\cdots,x_{۱۰}$ را در نظر می‌گیریم.

$$\frac{x_۱+x_۲+\cdots+x_{۱۰}}{۱۰}=۱۲\Rightarrow x_۱+x_۲+\cdots+x_{۱۰}=۱۲۰$$

فرض می‌کنیم داده‌ی $x_۱$ را کنار گذاشته‌ایم.

$$\frac{x_۲+x_۳+\cdots+x_{۱۰}}{۹}=۱۱\Rightarrow x_۲+x_۳+\cdots+x_{۱۰}=۹۹$$

بنابراین $x_۱=۱۲۰-۹۹=۲۱$ است.

۱۵ ☆ گزینه ۴

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$۰/۶=۰/۵+۰/۲-P(A\cap B)\Rightarrow P(A\cap B)=۰/۱$$

چون $P(A\cap B)=P(A)P(B)=۰/۱$ پس A,B مستقل اند.

۱۶ ☆ گزینه ۲

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^a+\log_k^b=\log_k^{ab}\ ,\ \log_k^{a^n}=n\log_k^a}$

$$\log(۶-۲\sqrt{۵})+۲\log(۱+\sqrt{۵})=\log(۶-۲\sqrt{۵})+\log(۱+\sqrt{۵})^۲=\log(۶-۲\sqrt{۵})+\log(۱+۵+۲\sqrt{۵})$$
$$=\log(۶-۲\sqrt{۵})+\log(۶+۲\sqrt{۵})=\log\underbrace{(۶-۲\sqrt{۵})(۶+۲\sqrt{۵})}_{\text{مزدوج}}=\log(۳۶-۲۰)=\log ۱۶=\log^{۲^۴}=۴\log ۲=۴k$$

۱۷ ☆ گزینه ۲

در ابتدا جمع ارتفاع میله‌ها و یا به عبارت دیگر، تعداد کل داده‌ها (N) را بدست می‌آوریم.

$$N=۱+۲/۵+۳+۴+۴/۵+۵=۲۰\to d_i=\frac{۳۶۰}{N}\times F_i=\frac{۳۶۰}{۲۰}\times ۴=۷۲^\circ$$

۱۸ ☆ گزینه ۴

کافی است حد راست و حد چپ و مقدار تابع را در $x=۱$ بدست آوریم.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{\overbrace{|(x+2)(x-1)|}^{+}}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x+2)(x-1)}{(x-1)} = 3$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{\overbrace{|(x+2)(x-1)|}^{-}}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-(x+2)(x-1)}{(x-1)} = -3$$

این تابع در $x = 1$ پیوسته نمی‌باشد.

۱۹ ☆ گزینه ۴

A : تحصیلات ابتدایی داشتن و B : مهارت قالی‌بافی داشتن

دقت کنید که دو پیشامد A و B مستقل هستند.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= P(A) + P(B) - P(A)\cdot P(B) = \frac{60}{100} + \frac{25}{100} - (\frac{60}{100} \times \frac{25}{100})$$

$$= \frac{3}{5} + \frac{1}{4} - \frac{3}{20} = \frac{14}{20} = \frac{7}{10} = 0/7$$

۲۰ ☆ گزینه ۳

$$n(S) = 2^4 = 16$$

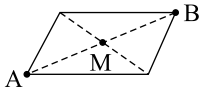
$$PPDD \text{ یا } DDDP \Rightarrow n(A) = \frac{4!}{2!2!} + \frac{4!}{3!} = 6 + 4 = 10$$

پس $P(A) = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$ است.

۲۱ ☆ گزینه ۳

مختصات نقطه‌ی A در هیچ‌یک از معادلات دو خط صدق نمی‌کند پس نقطه A روی این دو خط قرار ندارد و چون این دو خط، موازی نیستند کافی است با این دو خط تشکیل دستگاه دهیم تا مختصات نقطه‌ی B بدست آید.

$$\begin{matrix} 3 \\ -2 \end{matrix}\begin{cases} 2y - 3x = 11 \\ 3y + 4x = 8 \end{cases} \rightarrow -17x = 17 \Rightarrow x = -1 \,,\, y = 4 \Rightarrow B \left| \begin{matrix} -1 \\ 4 \end{matrix} \right.$$



می‌دانیم نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB قرار دارد یعنی:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{7-1}{2} = 3 \quad , \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{6+4}{2} = 5$$

۲۲ ☆ گزینه ۲

$$(x^2+x)^2 - 18(x^2+x) + 72 = 0 \xrightarrow{x^2+x=A} A^2 - 18A + 72 = 0 \Rightarrow (A-12)(A-6) = 0$$

$$A = 12 \Rightarrow x^2 + x - 12 = 0 \xrightarrow{\Delta>0} \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -1$$

$$A = 6 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \xrightarrow{\Delta>0} \alpha' + \beta' = -\frac{b}{a} = -1$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta + \alpha' + \beta' = -2$$

۲۳ ☆ گزینه ۳ بر روی ۳ موش آزمون مهارت انجام شده است و بر روی ۴ موش آزمون مهارت انجام نشده است.

$$n(S) = \binom{7}{2} = \frac{7\times 6}{2} = 21$$

لااقل بر روی یکی از آن دو آزمون انجام شده است یعنی: بر روی هر دو آزمون انجام شده است یا بر روی یکی آزمون انجام شده و بر روی دیگری آزمون انجام نشده است.

$$n(A) = \binom{3}{2} + \binom{3}{1}\binom{4}{1} = 3 + 12 = 15$$

پس $P(A) = \frac{15}{21} = \frac{5}{7}$ است.

۲۴ ☆ گزینه ۳

می‌دانیم: $\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}$

$$\sqrt[4]{2} = 4^x \Rightarrow 2^2 \times 2^{\frac{1}{2}} = 4^x \Rightarrow 2^{\frac{5}{2}} = 2^{2x} \Rightarrow 2x = \frac{5}{2} \Rightarrow x = \frac{5}{4}$$

$$1 + \log\sqrt{x+1} = \log y \Rightarrow \log 10 + \log\sqrt{\frac{5}{4}+1} = \log y$$

$$\Rightarrow \log 10 + \log\frac{3}{2} = \log y \Rightarrow \log 10 \times \frac{3}{2} = \log y \Rightarrow y = 15$$

۲۵ ☆ گزینه ۳

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}^+}[x] + [2x] = [(-\frac{1}{2})^+] + [2(-\frac{1}{2})^+] = [(-\frac{1}{2})^+] + [(-1)^+] = -1 - 1 = -2 \\ \lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}^-}[x] + [2x] = [(-\frac{1}{2})^-] + [2(-\frac{1}{2})^-] = [(-\frac{1}{2})^-] + [(-1)^-] = -1 - 2 = -3 \end{array}\right\} \Rightarrow -2 - 3 = -5$$

۲۶ ☆ گزینه ۳

می‌دانیم: $\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}$, $\log_k^{a^n} = n\log_k^a$

$$\log 3 + \log\sqrt[4]{3} = \log(81)^k \to \log 3 + \log 3^{\frac{1}{4}} = \log 3^{4k} \to \log 3 \times 3^{\frac{1}{4}} = \log 3^{4k}$$

$$\to \log 3^{\frac{5}{4}} = \log 3^{4k} \to 4k = \frac{5}{4} \to k = \frac{5}{16}$$

$$\log_2^{\frac{5}{k}} \xrightarrow{k=\frac{5}{16}} \log_2^{16} = \log_2^{2^4} = 4$$

۲۷ ☆ گزینه ۴

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin\pi x}{1-x} - g(x) = 0 \to \lim_{x\to 1}\frac{\sin\pi x}{1-x} = \lim_{x\to 1} g(x)$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin\pi x}{1-x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x\to 1}\frac{\pi\cos\pi x}{-1} = \pi \Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{\sin\pi x}{1-x} = \lim_{x\to 1} g(x) = \pi$$

طبق قضیه‌ی فشردگی $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \pi$ می‌باشد.

۲۸ ☆ گزینه ۲ اگر به هر یک از داده‌ها مقدار $\bar{x}$ را اضافه کنیم، انحراف معیار تغییر نمی‌کند ولی به میانگین، $\bar{x}$ اضافه می‌شود.

$$C_{V_{\text{قدیم}}} = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

$$C_{V_{\text{جدید}}} = \frac{\sigma}{\bar{x}+\bar{x}} = \frac{\sigma}{2\bar{x}} \to \frac{C_{V_{\text{جدید}}}}{C_{V_{\text{قدیم}}}} = \frac{\frac{\sigma}{2\bar{x}}}{\frac{\sigma}{\bar{x}}} = \frac{1}{2}$$

۲۹ ☆ گزینه ۳

$$n(S) = \binom{8}{4} = \frac{8!}{4!4!} = 70$$

یکی سفید و سه تا سیاه $\Rightarrow n(A) = \binom{3}{1} \times \binom{5}{3} = 3 \times 10 = 30$

پس $P(A) = \frac{30}{70} = \frac{3}{7}$ است.

۳۰ ☆ گزینه ۱

روش اول: اگر t ریشه‌ی معادله‌ی جدید و x ریشه‌ی معادله ی قدیم باشد آن گاه:

$$t = \frac{2}{x} \Rightarrow x = \frac{2}{t} \xrightarrow{\text{معادله}} \frac{16}{t^2} - \frac{14}{t} + 3 = 0 \xrightarrow{\times t^2} 16 - 14t + 3t^2 = 0 \to 3t^2 - 14t + 16 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{مقایسه با } 3x^2+ax+10=0} a = -14 \ , \ b = 16$$

روش دوم: ابتدا معادله‌ی درجه‌ی دومی مینویسیم که ریشه‌هایش معکوس ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم داده شده باشد سپس معادله‌ی درجه‌ی دومی می‌نویسیم که ریشه هایش دو برابر ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم بدست آمده باشد پس جای a ، c را عوض کرده و سپس b را در ۲ و c را در $۲^۲$ ضرب کنیم.

$$۴x^۲ - ۷x + ۳ = ۰ \Rightarrow ۳x^۲ - ۷x + ۴ = ۰ \Rightarrow ۳x^۲ - ۱۴x + ۱۶ = ۰$$

این معادله را با $۳x^۲ + ax + b = ۰$ مقایسه می‌کنیم و داریم:

$$a = -۱۴ \quad , \quad b = ۱۶$$

توجه کنید ریشه‌های معادله‌ی $cx^۲ + bx + a = ۰$ عکس ریشه‌های معادله‌ی $ax^۲ + bx + c = ۰$ است. و ریشه‌های معادله‌ی $k.ax^۲ + bkx + ck^۲ = ۰$ برابر ریشه‌های معادله‌ی $ax^۲ + bx + c = ۰$ می‌باشند.

۳۱ ☆ گزینه ۳

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab} \quad , \quad \log_k^{a^n} = n\log_k^a}$

$$a = \log_{۱۲}^۲ + \log_{۱۲}^{(۳\times۴)} = \log_{۱۲}^۲ + ۱ \Rightarrow \log_{۱۲}^۲ = a - ۱$$

$$\log_{۱۲}^۳ + \log_{۱۲}^۶ + \log_{۱۲}^{۱۶} = \log_{۱۲}(۳ \times ۶ \times ۱۶) = \log_{۱۲}^{(۱۴۴\times۲)} = \log_{۱۲}^{۱۲^۲} + \log_{۱۲}^۲ = ۲ + \log_{۱۲}^۲ = ۲ + (a - ۱) = a + ۱$$

۳۲ ☆ گزینه ۳ یک نقطه‌ی دلخواه روی تابع $y = |x + ۲|$ در نظر می‌گیریم $A\begin{vmatrix} x \\ |x+۲| \end{vmatrix}$ و فاصله‌ی آن از مبدأ یعنی $O\begin{vmatrix} ۰ \\ ۰ \end{vmatrix}$ را حساب می‌کنیم.

$$OA = \sqrt{x^۲ + (x+۲)^۲} = ۳ \xrightarrow{\text{توان ۲}} x^۲ + x^۲ + ۴ + ۴x = ۹ \Rightarrow ۲x^۲ + ۴x - ۵ = ۰ \xrightarrow{\frac{c}{a}<۰}$$ دو ریشه‌ی مختلف العلامت دارد

۳۳ ☆ گزینه ۲

$$P = x_۱ \cdot x_۲ = \frac{c}{a} = -۱ \ , \ S = x_۱ + x_۲ = \frac{-b}{a} = ۵$$

$$\frac{x_۱}{x_۲^۲} + \frac{x_۲}{x_۱^۲} = \frac{x_۱^۳ + x_۲^۳}{x_۱^۲ \cdot x_۲^۲} = \frac{(x_۱ + x_۲)^۳ - ۳x_۱x_۲(x_۱ + x_۲)}{(x_۱x_۲)^۲} = \frac{۱۲۵ + ۱۵}{۱} = ۱۴۰$$

۳۴ ☆ گزینه ۴

می‌دانیم $\tan x$ و $\cot x$ عکس یکدیگرند و دو عددی که عکس یکدیگرند فقط وقتی مجموعشان -۲ می شود که هر کدام -۱ باشد پس : $\tan x = \cot x = -۱$

$$\tan x + \cot x = -۲ \Rightarrow \tan x = -۱ \Rightarrow x = -\frac{\pi}{۴}$$

$$\sin^۴ x + \cos^۲ x = (\frac{-\sqrt{۲}}{۲})^۴ + (\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲ = \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۲} = \frac{۳}{۴}$$

۳۵ ☆ گزینه ۳

$$\lim_{x\to۸^+} f(x) = [۸^+] - [\frac{۸}{۴}^+] = ۸ - [۲^+] = ۸ - ۲ = ۶$$

$$\lim_{x\to۸^-} f(x) = [۸^-] - [\frac{۸}{۴}^-] = ۷ - [۲^-] = ۷ - ۱ = ۶$$

$$f(۸) = [۸] - [\frac{۸}{۴}] = ۸ - [۲] = ۸ - ۲ = ۶$$

چون حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x = ۸$ با هم برابر هستند پس تابع در $x = ۸$ پیوسته است.

۳۶ ☆ گزینه ۱

می‌دانیم: $\boxed{\log_{k^m}^{a^n} = \frac{n}{m}\log_k^a}$

$$\log_{۲۵}^{\sqrt{۳}} = \log_{۵^۲}^{۳^{\frac{۱}{۲}}} = \log_{۵^۲}^{۳^{-\frac{۱}{۲}}} = -\frac{۱}{۴}\log_۵^۳ = -\frac{۱}{۴}a$$

۳۷ ☆ گزینه ۴

مجموع ضرایب برابر صفر است پس $x_۱ = ۱$ و $x_۲ = \frac{c}{a} = \sqrt{۲}$ است.

$$x_1^6 + x_2^6 = (1)^6 + (\sqrt{2})^6 = 1 + 8 = 9$$

۳۸ ☆ گزینه ۱

$$\left.\begin{array}{l} x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1 \\ 4 - \sqrt{x+1} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x+1} \leq 4 \Rightarrow x + 1 \leq 16 \Rightarrow x \leq 15 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} -1 \leq x \leq 15$$

این بازه شامل ۱۷ عدد صحیح است.

۳۹ ☆ گزینه ۲

$$\lim_{x \to 3^-} |x| + [x + \frac{\sqrt{3}}{2}] = 3 + [2/99 + 0/86] = 3 + [3/000] = 3 + 3 = 6$$

۴۰ ☆ گزینه ۳

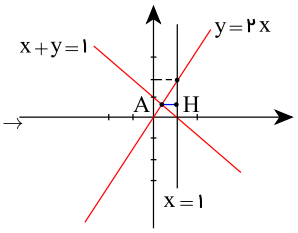
$$n(S) = 2^4 = 16$$

$$PPDD \Rightarrow n(A) = \frac{4!}{2!2!} = 6$$

پس $P(A) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$ است.

۴۱ ☆ گزینه ۱ سه خط داده شده را رسم می‌کنیم.

$$y = 2x \rightarrow \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix} \quad \text{و} \quad x + y = 1 \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} \rightarrow$$



کوچک‌ترین ارتفاع مثلث ABC پاره‌خط AH می‌باشد که معادله‌اش $y = \frac{2}{3}$ است زیرا اگر با دو خط $x + y = 1$ و $y = 2x$ تشکیل دهیم داریم:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{3}, \; y = \frac{2}{3}$$

یعنی مختصات نقطه‌ی A به‌صورت $A\begin{vmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{vmatrix}$ است پس معادله‌ی ارتفاع AH به‌صورت $y = \frac{2}{3}$ است.

۴۲ ☆ گزینه ۴

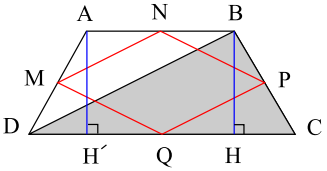
می‌دانیم: $\boxed{\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}}$

$$\left.\begin{array}{l} 2^x \times 8^y = 4 \Rightarrow 2^x \times 2^{3y} = 2^2 \Rightarrow 2^{x+3y} = 2^2 \Rightarrow x + 3y = 2 \\ \log x = \log 2 + \log y \Rightarrow \log x = \log 2y \Rightarrow x = 2y \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{4}{5}, \; y = \frac{2}{5}$$

۴۳ ☆ گزینه ۲ اگر ارتفاع‌های AH' , BH را رسم کنیم دو مثلث قائم الزاویه‌ی همنهشت ایجاد می‌شود. داریم:

$$DH' = HC = \frac{12 - 4}{2} = 4$$

$$\text{قطر } DB = \sqrt{BH^2 + DH^2} = \sqrt{16 + 64} = 4\sqrt{5}$$



با توجه به رابطه‌ی تالس می‌توان نتیجه گرفت چهارضلعی MNPQ که وسط‌های اضلاع ذوزنقه را به هم وصل کرده لوزی و اندازه‌ی هر ضلع آن نصف قطر ذوزنقه است و محیط آن برابر مجموع ۲ قطر ذوزنقه است. پس داریم:

$$\text{محیط } MNPA = (\text{مجموع اقطار}) = (4\sqrt{5} + 4\sqrt{5}) = 8\sqrt{5}$$

۴۴ ☆ گزینه ۴

می‌دانیم: $\boxed{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \;,\; \log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab} \;,\; \log_k^a - \log_k^b = \log_k^{\frac{a}{b}}}$

$$\log(3x-2)=(\log 5)^2-(\log 2)^2 \to \log(3x-2)=(\log 5-\log 2)\underbrace{(\log 5+\log 2)}_{1}$$

$$\to \log(3x-2)=\log(\frac{5}{2}) \Rightarrow 3x-2=\frac{5}{2} \Rightarrow 3x=\frac{9}{2} \Rightarrow x=\frac{3}{2}$$

۴۵ ☆ گزینه ۲

$$S_{\text{جدید}}=\{PPPD, PPDP, PPDD, PPPP\} \Rightarrow n(S)=4 \ , \ A=\{PPDD\} \Rightarrow n(A)=1$$

پس $P(A)=\frac{1}{4}$ است.

۴۶ ☆ گزینه ۱

اگر بخواهیم دو ریشه ی متمایز داشته باشیم Δ باید بزرگتر از صفر باشد پس داریم:

$$2x^2+ax+a-\frac{3}{2}=0$$

$$\Delta=b^2-4ac=a^2-8a+12>0 \Rightarrow (a-2)(a-6)>0$$

$$\to \begin{array}{c|ccccccc} a & -\infty & & 2 & & 6 & & +\infty \\ \hline \text{عبارت}>0 & & + & 0 & - & 0 & + & \end{array} \Rightarrow \begin{cases} a>6 \\ a<2 \end{cases}$$

۴۷ ☆ گزینه ۲

نمره‌ی کل آزمون عمومی این داوطلب همان میانگین نمرات دروس عمومی ولی با حساب کردن ضریب هر درس است.

$$\bar{x}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}F_i x_i \to 58=\frac{1}{11}((4\times 65)+(2\times 52)+(3\times 70)+2x)$$

$$\to 58=\frac{260+104+210+2x}{11} \to 638=574+2x \to x=32$$

۴۸ ☆ گزینه ۲ ابتدا شیب خط گذرنده از دو نقطه‌ی $A\begin{vmatrix}2\\-1\end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix}8\\3\end{vmatrix}$ را بدست می‌آوریم.

$$m_{AB}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{-1-3}{2-8}=\frac{-4}{-6}=\frac{2}{3} \xrightarrow{\text{عمود}} m_{\text{دسته خط}}=-\frac{3}{2}$$

$$m_{\text{دسته خط}}=-\frac{2k}{k+1}=-\frac{3}{2} \to 4k=3k+3 \to k=3$$

$$k=3 \xrightarrow{\text{معادله‌ی دسته خطوط}} 4y+6x-2=0 \xrightarrow{\div 2} 2y+3x=1$$

۴۹ ☆ گزینه ۱

می‌دانیم: $\boxed{\log_{k^m}^{a^n}=\frac{n}{m}\log_k^a \ , \ \log_k^a+\log_k^b=\log_k^{ab} \ , \ \log_b^N=x \to N=b^x}$

$$\log\frac{2}{x}+\log(x+1)=1 \Rightarrow \log\frac{2x+2}{x}=1 \xrightarrow{\text{تعریف}} \frac{2x+2}{x}=10 \Rightarrow 10x=2x+2 \Rightarrow x=\frac{1}{4}$$

$$\log_8^x=\log_8^{\frac{1}{4}}=\log_{2^3}^{2^{-2}}=-\frac{2}{3}$$

۵۰ ☆ گزینه ۴

خط $x=2$ محور تقارن تابع درجه‌ی دوم داده شده است.

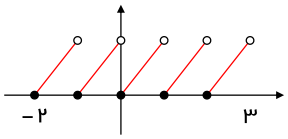
$$x=\frac{-b}{2a} \Rightarrow x=2=-\frac{1}{2a-2} \Rightarrow 4a-4=-1 \Rightarrow a=\frac{3}{4}$$

$$y=-\frac{1}{4}x^2+x+3 \xrightarrow[y=0]{\times(-4)} y=0x^2-4x-12=0 \Rightarrow (x-6)(x+2)=0 \begin{cases} x=-2 \\ x=6 \end{cases}$$

چون طول مثبت را خواسته پس $x=6$ جواب مسأله است.

۵۱ ☆ گزینه ۴

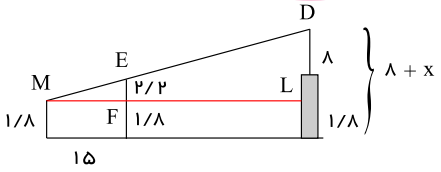
نمودار تابع $y = x - [x]$ به صورت زیر است واضح است در فاصله‌ی $(-۲, ۳]$، ۵ پاره‌خط به اندازه‌ی $\sqrt{۲}$ وجود دارد.



۵۲ ☆ گزینه ۲

ازنقطه‌ی M موازی خطی موازی سطح افق رسم کرده، باتوجه به شکل و قضیه‌ی تالس داریم:

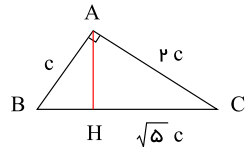
$$EF \parallel DL \Rightarrow \frac{EF}{DL} = \frac{MF}{ML} \Rightarrow \frac{۲/۲}{۸ + x - ۱/۸} = \frac{۱۵}{۱۸۰} = \frac{۱}{۱۲} \Rightarrow x = ۲۰/۲$$



۵۳ ☆ گزینه ۳

بنابر قضیه‌ی فیثاغورس نتیجه می‌شود $BC = \sqrt{۵}c$ ، داریم:

$$\Delta ABH \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{ABH}} = (\frac{BC}{AB})^۲ = (\frac{\sqrt{۵}c}{c})^۲ = ۵$$



۵۴ ☆ گزینه ۴

$$\lim_{x\to ۶^+} f(x) + \lim_{x\to ۶^-} f(x) = \left[\frac{۶^+}{۲}\right] + \left[\frac{۶^+}{۳}\right] + \left[\frac{۶^-}{۲}\right] + \left[\frac{۶^-}{۳}\right]$$
$$= [۳^+] + [۲^+] + [۳^-] + [۲^-] = ۳ + ۲ + ۲ + ۱ = ۸$$

۵۵ ☆ گزینه ۳

می‌دانیم: $\boxed{\log_{k^m}^{a^n} = \frac{n}{m}\log_k^a \ , \ \log_b^N = x \to N = b^x}$

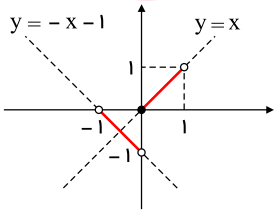
$$\log_۳^{\sqrt{۳}} + \log_{\sqrt{۳}}^۳ = \log_۹^x \Rightarrow \log_۳^{۳^{\frac{۱}{۲}}} + \log_{۳^{\frac{۱}{۲}}}^۳ = \log_۹^x \Rightarrow \frac{۱}{۲} + ۲ = \log_۹^x$$

$$\log_۹^x = \frac{۵}{۲} \Rightarrow x = ۹^{\frac{۵}{۲}} \Rightarrow x = (۳^۲)^{\frac{۵}{۲}} \Rightarrow x = ۳^۵$$

۵۶ ☆ گزینه ۴

$$-۱ < x < ۰ \xrightarrow{\text{داخل قدرمطلق منفی و } [x]=-۱} y = -x - ۱ \xrightarrow{\text{برای رسم}} \begin{vmatrix} ۰ \\ -۱ \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} -۱ \\ ۰ \end{vmatrix}$$

$$۰ \le x < ۱ \xrightarrow{\text{داخل قدرمطلق مثبت و } [x]=۰} y = x \xrightarrow{\text{برای رسم}} \begin{vmatrix} ۰ \\ ۰ \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} ۱ \\ ۱ \end{vmatrix}$$



۵۷ ☆ گزینه ۳

هم $x^۲ \ge ۰$ است هم $(x^۲ - ۴)^۲ \ge ۰$ است یعنی زیر رادیکال به خاطر منفی هرگز نمی‌تواند مثبت باشد ولی می‌تواند صفر باشد.

$$-x^۲(x^۲ - ۴)^۲ = ۰ \Rightarrow x = ۰ \ , \ x = ۲ \ , \ x = -۲$$

پس دامنه‌ی تعریف این تابع ۳ عضو دارد.

۵۸ ☆ گزینه ۳

$$x \to (\frac{-۱}{۱۰})^- \xrightarrow{\text{یعنی}} x < -\frac{۱}{۱۰} \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{۱}{x} > -۱۰$$

یعنی داخل جزء صحیح کمی از -۱۰ بزرگتر است یعنی $[(-۱۰)^+]$ که حاصل برابر -۱۰ است.

۵۹ ☆ گزینه ۲

$n(S) = \frac{۶!}{۳!} = ۱۲۰$ (جابه‌جایی حروف ATAXIA)

$\boxed{AAA}\ TXI \Rightarrow n(A) = ۴! = ۲۴$ (جابه‌جایی ۳ حرف A باهم اهمیت ندارد)

پس $P(A) = \frac{۲۴}{۱۲۰} = \frac{۱}{۵}$ است.

۶۰ ☆ گزینه ۲

اگر به تمام داده‌ها ۱٫۵ واحد اضافه کنیم به میانگین نیز ۱٫۵ واحد اضافه می‌شود بنابراین میانگین در این جدول، برابر $۸٫۵ - ۱٫۵ = ۱۰$ است و مراکز دسته‌ها به ترتیب برابر ۳ و ۷ و ۱۱ و ۱۵ می‌باشند.

$$\bar{x} = \frac{۱}{N}\sum_{i=۱}^{N} F_i x_i \Rightarrow ۸٫۵ = \frac{۳\times ۴ + ۷\times ۵ + ۱۱a + ۱۵\times ۳}{۱۲ + a} \Rightarrow ۹۲ + ۱۱a = ۸٫۵a + ۱۰۲$$

$$\Rightarrow ۹۲ + ۲٫۵a = ۱۰۲ \Rightarrow ۲٫۵a = ۱۰ \Rightarrow a = ۴$$

۶۱ ☆ گزینه ۲ نقطه‌ی $A\begin{vmatrix}\alpha\\ \alpha - ۱\end{vmatrix}$ را روی خط $y = x - ۱$ در نظر گرفته و فاصله‌ی آن را از خط $۲x - ۳y = ۵$ بدست آورده و مساوی $\sqrt{۱۳}$ قرار می‌دهیم.

$$\begin{cases} A\begin{vmatrix}\alpha\\ \alpha - ۱\end{vmatrix} \\ ۲x - ۳y - ۵ = ۰ \end{cases} \rightarrow AH = \frac{|۲\alpha - ۳\alpha + ۳ - ۵|}{\sqrt{۴ + ۹}} = \frac{|-\alpha - ۲|}{\sqrt{۱۳}} = \sqrt{۱۳} \rightarrow |-\alpha - ۲| = ۱۳$$

$$-\alpha - ۲ = ۱۳ \rightarrow \alpha = -۱۵\ ,\ -\alpha - ۲ = -۱۳ \rightarrow \alpha = ۱۱$$

توجه کنید فاصله‌ی نقطه‌ی $A\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta\end{vmatrix}$ از خط به معادله‌ی $ax + by + c = ۰$ از رابطه‌ی $AH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$ به‌دست می‌آید.

۶۲ ☆ گزینه ۱

می‌دانیم:

$$\boxed{a^۲ + b^۲ = (a+b)^۲ - ۲ab\ ,\ \log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}\ ,\ \log_b^N = x \rightarrow b^x = N\ ,\ \log_{k^m}^{a^n} = \frac{n}{m}\log_k^a}$$

$$\log_۳^x + \log_۳^y = ۲ \rightarrow \log_۳^{xy} = ۲ \xrightarrow{\text{تعریف}} xy = ۳^۲ = ۹$$

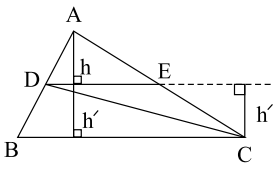
$$x^۲ + y^۲ = ۴۶ \rightarrow (x+y)^۲ - ۲xy = ۴۶ \rightarrow (x+y)^۲ - ۱۸ = ۴۶$$

$$\rightarrow (x+y)^۲ = ۶۴ \rightarrow x + y = ۸ \text{ یا } x + y = -۸ \text{ غ ق ق } (x, y \text{ اعدادی مثبت هستند.})$$

$$\log_۴^{x+y} = \log_۴^۸ = \log_{۲^۲}^{۲^۳} = \frac{۳}{۲}$$

۶۳ ☆ گزینه ۴

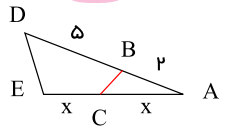
چون $\frac{AD}{AB} = \frac{۳}{۷}$ است پس $\frac{AD}{DB} = \frac{۳}{۴}$ می‌باشد.



$$DE||BC \xrightarrow[ABC\ \text{رابطه‌ی تالس در}]{\Delta} \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} = \frac{h}{h'} = \frac{۳}{۴}$$

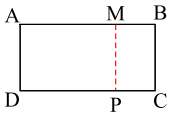
پس: $\frac{S_{ADE}}{S_{DEC}} = \frac{\frac{DE\times h}{۲}}{\frac{DE\times h'}{۲}} = \frac{h}{h'} = \frac{۳}{۴} = ۰٫۷۵$

۶۴ ☆ گزینه ۱



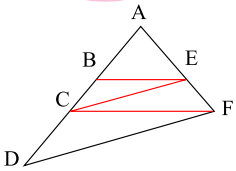
$$\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{ADE} \Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AD} \Rightarrow \frac{۲}{۲x} = \frac{x}{۷} \Rightarrow x^۲ = ۷ \Rightarrow x = \sqrt{۷}$$

۶۵ ☆ گزینه ۲ تنها یک نقطه M وجود دارد. زیرا اگر دو مستطیل متشابه باشند باید داشته باشیم:



$$\frac{\text{طول بزرگ}}{\text{طول کوچک}} = \frac{\text{عرض بزرگ}}{\text{عرض کوچک}} \Rightarrow \frac{۱۰}{۴} = \frac{۴}{MB} \Rightarrow MB = ۱٫۶$$

۶۶ ☆ گزینه ۲ اگر CD را برابر x در نظر بگیریم، داریم:



$$\begin{cases} BE||CF \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AF} \\ CE||DF \Rightarrow \frac{AE}{AF} = \frac{AC}{AD} \end{cases} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD} \Rightarrow AC^۲ = AB \times AD \Rightarrow ۸^۲ = ۵AD \Rightarrow AD = \frac{۶۴}{۵}$$

$$CD = AD - AC = \frac{۶۴}{۵} - ۸ = \frac{۲۴}{۵} = ۴٫۸$$

۶۷ ☆ گزینه ۲ چون شهریورماه ۳۱ روز دارد پس برای هر یک از دانش آموزان ۳۱ حالت مختلف وجود دارد.

$$n(S) = ۳۱ \times ۳۱ \times \cdots \times ۳۱ = ۳۱^{۱۸}$$

حالتی که همه در هفتم شهریور به دنیا آمده باشند فقط ۱ حالت است.

پس $P(A) = \frac{۱}{۳۱^{۱۸}}$ است.

۶۸ ☆ گزینه ۱

$$P(c) = x \Rightarrow \begin{cases} P(a) = ۴x \\ P(b) = ۱۲x \end{cases}$$

$$P(a) + P(b) + P(c) = ۱ \Rightarrow ۴x + ۱۲x + x = ۱ \Rightarrow ۱۷x = ۱ \Rightarrow x = \frac{۱}{۱۷} \Rightarrow P(a) = \frac{۴}{۱۷}$$

۶۹ ☆ گزینه ۳ اگر $P(۱) = x$ باشد آنگاه $P(۲) = \frac{x}{۲}$ و $P(۳) = \frac{x}{۳}$ و $P(۴) = \frac{x}{۴}$ است.

$$P(۱) + P(۲) + P(۳) + P(۴) = ۱ \Rightarrow x + \frac{x}{۲} + \frac{x}{۳} + \frac{x}{۴} = ۱$$

$$\xrightarrow{\times ۱۲} ۱۲x + ۶x + ۴x + ۳x = ۱۲ \Rightarrow ۲۵x = ۱۲ \Rightarrow x = \frac{۱۲}{۲۵} \Rightarrow P(۱) = \frac{۱۲}{۲۵}$$

۷۰ ☆ گزینه ۳

صورت سوال یعنی اینکه $P(۱) = x, P(۲) = \frac{x}{۲}, P(۳) = \frac{x}{۳}, P(۴) = \frac{x}{۴}, P(۵) = \frac{x}{۵}, P(۶) = \frac{x}{۶}$ است.

$$P(۱) + P(۲) + P(۳) + P(۴) + P(۵) + P(۶) = ۱ \Rightarrow x + \frac{x}{۲} + \frac{x}{۳} + \frac{x}{۴} + \frac{x}{۵} + \frac{x}{۶} = ۱$$

$$\xrightarrow{\times ۶۰} ۶۰x + ۳۰x + ۲۰x + ۱۵x + ۱۲x + ۱۰x = ۶۰ \Rightarrow ۱۴۷x = ۶۰ \Rightarrow x = \frac{۶۰}{۱۴۷}$$

$$P(۴) = \frac{x}{۴} \Rightarrow P(۴) = \frac{\frac{۶۰}{۱۴۷}}{\frac{۴}{۱}} = \frac{۵}{۴۹}$$

۷۱ ☆ گزینه ۱

$$P(\{۲,۴\}) = P(۲) + P(۴) \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۳} + P(۴) \Rightarrow P(۴) = \frac{۱}{۶}$$
$$P(\{۲,۳\}) = P(۲) + P(۳) \Rightarrow \frac{۲}{۳} = \frac{۱}{۳} + P(۳) \Rightarrow P(۳) = \frac{۱}{۳}$$
$$P(۱) + P(۲) + P(۳) + P(۴) = ۱ \Rightarrow P(۱) + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۶} = ۱ \Rightarrow P(۱) = ۱ - \frac{۵}{۶} = \frac{۱}{۶}$$

۷۲ ☆ گزینه ۳

می‌دانیم: $\boxed{P(A - B) = P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)\ ,\ \ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A - \cap B)}$

$$\begin{aligned} P(A \cup B') - P(A \cap B) &= P(A) + P(B') - P(A \cap B') - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B') - P(A - B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B') - (P(A) - P(A \cap B)) - P(A \cap B) = P(B') \end{aligned}$$

۷۳ ☆ گزینه ۳

می‌دانیم: $\boxed{\begin{matrix}(A \cup B)' = A' \cap B' \\ (A \cap B)' = A' \cup B'\end{matrix}}$

$$P(A'|B') = \frac{P(A' \cap B')}{P(B')} = \frac{P((A \cup B)')}{P(B')} = \frac{۱ - P(A \cup B)}{۱ - P(B)} = \frac{۱ - \frac{۷}{۱۲}}{۱ - \frac{۱}{۳}} = \frac{\frac{۵}{۱۲}}{\frac{۲}{۳}} = \frac{۵}{۸}$$

۷۴ ☆ گزینه ۴

هرگاه پی‌درپی و بدون جایگزینی انتخاب می‌کنیم و ترتیب، مهم نباشد می‌توانید فرض کنید که با هم انتخاب کرده‌ایم.

۹ کارت به شماره‌های $۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹$ موجود است.

چون می دانیم مجموع دو کارت زوج بوده پس هر دو کارت زوج یا هر دو کارت فرد بوده اند. پس تعداد اعضای فضای نمونه ای جدید به صورت زیر است:

$$\binom{۵}{۲} + \binom{۴}{۲} = ۱۰ + ۶ = ۱۶$$

حال از بین حالات فوق حالات مطلوب آن هایی هستند که هردو فرد باشند یعنی تعداد حالات مطلوب $\binom{۵}{۲}$ یا همان ۱۰ می باشد.

پس $P(A) = \frac{۱۰}{۱۶} = \frac{۵}{۸}$ است.

۷۵ ☆ گزینه ۳

$$S_{\text{جدید}} = \{PPD, DPP, DPD, PPP\} \Rightarrow n(S) = ۴$$

از بین حالات فوق حالتی مطلوب است که همه پسر باشند یعنی $n(A) = ۱$ است.

پس $P(A) = \frac{۱}{۴}$ است.

۷۶ ☆ گزینه ۱

$$\left.\begin{matrix}۵ \to (۱,۴)(۴,۱)(۲,۳)(۳,۲) \\ ۴ \to (۱,۳)(۳,۱)(۲,۲) \\ ۳ \to (۱,۲)(۲,۱) \\ ۲ \to (۱,۱)\end{matrix}\right\} \Rightarrow n(S) = ۱۰$$

$$A = \{(۱,۱)(۲,۲)\} \Rightarrow n(A) = ۲$$

پس $P(A) = \frac{۲}{۱۰} = \frac{۱}{۵}$ است.

۷۷ ☆ گزینه ۳

$$S_{\text{جدید}} = \{(۱,۳)(۳,۱)(۲,۳)(۳,۲)(۳,۳)(۳,۴)(۴,۳)(۳,۵)(۵,۳)(۳,۶)(۶,۳)\} \Rightarrow n(S) = ۱۱$$
$$A = \{(۳,۳)\} \Rightarrow n(A) = ۱$$

پس $P(A)=\frac{۱}{۱۱}$ است.

۷۸ ☆ گزینه ۳

$P(\text{در عمل زنده بماند و بدن پس از یک ماه پیوند را قبول کند})$

$=P(\text{در عمل زنده بماند})\cdot P(\text{بدن پس از یک ماه پیوند را قبول کند}\mid\text{در عمل زنده مانده باشد})=(۰/۵)(۱-۰/۲)=۰/۴$

۷۹ ☆ گزینه ۳ یعنی دفعات اول و دوم گلوله به هدف اصابت نکند ولی دفعه سوم گلوله به هدف اصابت کند.

$(۰/۱)\times(۰/۱)\times(۰/۹)=۰/۰۱\times۰/۹=۰/۰۰۹$

۸۰ ☆ گزینه ۳

$P(F|E)=\frac{P(F\cap E)}{P(E)}\ ,\ P(E|F)=\frac{P(E\cap F)}{P(F)}$

دو رابطه را بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{P(F|E)}{P(E|F)}=\frac{P(F)}{P(E)}\Rightarrow\frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۱}{۳}}=\frac{P(F)}{\frac{۱}{۴}}\Rightarrow\frac{۳}{۲}=۴P(F)\Rightarrow P(F)=\frac{۳}{۸}$$

۸۱ ☆ گزینه ۴

$P(\text{حداقل یک نفر قبول شود})=۱-P(\text{هیچ کدام قبول نشوند})$

$=۱-(۱-۰/۵)(۱-۰/۶)(۱-۰/۷)=۱-(۰/۵)(۰/۴)(۰/۳)=۰/۹۴$

۸۲ ☆ گزینه ۲

$P(\text{حداقل یک نفر قبول شود})=۱-P(\text{هیچ کدام قبول نشوند})=۱-(۰/۳۵)(۰/۳)=۱-۰/۱۰۵=۰/۸۹۵$

۸۳ ☆ گزینه ۴ طبق تعریف پیشامدهای مستقل داریم:

$$P(A\cap A)=P(A)\times P(A)\Rightarrow P(A)=(P(A))^۲\Rightarrow P(A)-(P(A))^۲=۰$$
$$\Rightarrow P(A)(۱-P(A))=۰\Rightarrow\begin{cases}P(A)=۰\Rightarrow A=\emptyset\\P(A)=۱\Rightarrow A=S\end{cases}$$

۸۴ ☆ گزینه ۴ دقت کنید این اداره ۱۰۰ کارمند دارد

$P(\text{مرد یا لیسانس})=P(\text{مرد})+P(\text{لیسانس})-P(\text{مرد و لیسانس})=\frac{۶۰}{۱۰۰}+\frac{۳۰}{۱۰۰}-\frac{۲۰}{۱۰۰}=\frac{۷۰}{۱۰۰}=۰/۷$

۸۵ ☆ گزینه ۴

$P(\text{حداقل یکی سالم})=۱-P(\text{هر دو معیوب})=۱-(۰/۳)(۰/۳)=۰/۹۱$

۸۶ ☆ گزینه ۲

$$n(S)=\binom{۵}{۲}=۱۰$$

این که دو رأس مجاور باشند دقیقاً مانند این است که دو رأس دو سر یک ضلع از این پنج ضلعی باشند پس:

$$n(A)=\binom{۵}{۱}=۵$$

پس $P(A)=\frac{۵}{۱۰}=\frac{۱}{۲}$ است.

۸۷ ☆ گزینه ۳ اگر سکه‌ای را n بار یا n سکه را با هم پرتاب کنیم، احتمال آنکه دقیقاً k بار رو (پشت) بیاید برابر $\frac{\binom{n}{k}}{۲^n}$ است.

احتمال آنکه حداکثر ۲ مرتبه پشت بیاید یعنی ۰ یا ۱ یا ۲ بار پشت بیاید.

$$P(A)=\frac{\binom{۲۰۰}{۰}+\binom{۲۰۰}{۱}+\binom{۲۰۰}{۲}}{۲^{۲۰۰}}=\frac{۱+۲۰۰+\frac{۲۰۰\times۱۹۹}{۲}}{۲^{۲۰۰}}=\frac{۲۰۱+۱۹۹۰۰}{۲^{۲۰۰}}=\frac{۲۰۱۰۱}{۲^{۲۰۰}}$$

۸۸ ☆ گزینه ۲ حالات مطلوب به صورت زیر هستند

A, B', C' یا A', B, C' یا A', B', C

$$(\frac{۱}{۶}\times\frac{۳}{۴}\times\frac{۲}{۳})+(\frac{۵}{۶}\times\frac{۱}{۴}\times\frac{۲}{۳})+(\frac{۵}{۶}\times\frac{۳}{۴}\times\frac{۱}{۳})=\frac{۶}{۷۲}+\frac{۱۰}{۷۲}+\frac{۱۵}{۷۲}=\frac{۳۱}{۷۲}$$

۸۹ ☆ گزینه ۴ یعنی A رخ دهد و B رخ ندهد یا B رخ دهد و A رخ ندهد. $((A-B)\cup(B-A))$

۹۰ ☆ گزینه ۳ به بررسی گزینه ها می پردازیم:

$$۱)\binom{۶}{۱}=۶\ ,\quad ۲)\binom{۶}{۱}\times\binom{۵}{۱}=۶\times۵=۳۰\ ,\quad ۳)\binom{۶}{۱}\times\binom{۶}{۱}=۶\times۶=۳۶\ ,\quad ۴)\binom{۶}{۲}=۱۵$$

۹۱ ☆ گزینه ۴ در جعبه، ۴ ترانزیستور خراب و ۶ ترانزیستور سالم وجود دارد.

$$P(\text{هر سه سالم})=P(\text{اولی سالم})\times P(\text{دومی سالم})\times P(\text{سومی سالم})=\frac{۶}{۱۰}\times\frac{۵}{۹}\times\frac{۴}{۸}=\frac{۱}{۶}$$

۹۲ ☆ گزینه ۲

$$n(S)=۶^۳=۲۱۶$$

$$\left.\begin{array}{l}۱,۳,۵\xrightarrow{\text{جابجایی}}۳!=۶\\ ۲,۴,۶\xrightarrow{\text{جابجایی}}۳!=۶\end{array}\right\}\rightarrow n(A)=۱۲$$

پس $P(A)=\frac{۱۲}{۲۱۶}=\frac{۱}{۱۸}$ است.

۹۳ ☆ گزینه ۳ تعداد کل حالات برابر تعداد حالات انتخاب ۲ لنگه از ۲۰ لنگه می باشد.

$$n(S)=\binom{۲۰}{۲}=\frac{۲۰\times۱۹}{۲}=۱۹۰$$

تعداد حالات مطلوب برابر تعداد حالات انتخاب ۱ جفت از ۱۰ جفت می‌باشد.

$$n(A)=\binom{۱۰}{۱}=۱۰$$

پس $P(A)=\frac{۱۰}{۱۹۰}=\frac{۱}{۱۹}$ است.

۹۴ ☆ گزینه ۴

$$n(S)=۶^۳=۲۱۶$$

$$\left.\begin{array}{l}۱,۲,۳\xrightarrow{\text{جابجایی}}۳!=۶\\ ۲,۳,۴\xrightarrow{\text{جابجایی}}۳!=۶\\ ۳,۴,۵\xrightarrow{\text{جابجایی}}۳!=۶\\ ۴,۵,۶\xrightarrow{\text{جابجایی}}۳!=۶\end{array}\right\}\rightarrow n(A)=۲۴$$

پس $P(A)=\frac{۲۴}{۲۱۶}=\frac{۱}{۹}$ است.

۹۵ ☆ گزینه ۴

$$n(S)=\binom{۱۰}{۴}=\frac{۱۰!}{۴!۶!}=۲۱۰$$

از روی هر خط باید یک نقطه برداریم $\Rightarrow n(A)=\binom{۱}{۱}\times\binom{۲}{۱}\times\binom{۳}{۱}\times\binom{۴}{۱}=۲۴$

پس $P(A)=\frac{۲۴}{۲۱۰}=\frac{۴}{۳۵}$ است.

۹۶ ☆ گزینه ۴ مجموع همه‌ی درصد فراوانی‌های نسبی همواره برابر ۱۰۰ درصد است. لذا داریم:

$$۱۵+۳۰+۲۵+\alpha=۱۰۰\Rightarrow\alpha=۳۰$$

در نتیجه جدول فراوانی نسبی این داده های آماری، به صورت زیر است:

مرکز دسته x_i	۱۲	۱۵	۱۸	۲۱
فراوانی نسبی $\frac{F_i}{N}$	۰٫۱۵	۰٫۳۰	۰٫۲۵	۰٫۳۰

دقت کنید میانگین برابر است با مجموع حاصلضرب مرکز هر دسته در فراوانی نسبی آن دسته. برای راحتی در محاسبات از تمام داده‌ها ۲۰ واحد کم می‌کنیم.

$$\bar{x} - ۲۰ = (-۸ \times ۰٫۱۵) + (-۵ \times ۰٫۳) + (-۲ \times ۰٫۲۵) + (۰٫۳ \times ۱) \Rightarrow \bar{x} - ۲۰ = -۲٫۹ \Rightarrow \bar{x} = ۱۷٫۱$$

۹۷ ☆ **گزینه ۴** چون واریانس این ۱۱ داده‌ی آماری برابر صفر است،در نتیجه تمام داده ها با هم برابرند.

میانگین سه داده‌ی اضافه شده $= \frac{۶۶}{۳} = \frac{۲۶ + ۱۶ + ۲۴}{۳}$ ۲۲ است و چون با اضافه شدن این سه داده ،میانگین ۱۴ داده تغییر نکرده است پس میانگین ۱۴ داده نیز برابر ۲۲ است.چون می دانیم در بین ۱۴ داده، ۱۱ داده با هم برابرند می توانیم همه‌ی آن ۱۱ داده را ۲۲ در نظر بگیریم.

$$\sigma^۲ = \frac{۱}{N}\sum_{i=۱}^{N}(x_i - \bar{x})^۲$$

$$= \frac{۱}{۱۴}(۱۱(۲۲ - ۲۲)^۲ + (۲۴ - ۲۲)^۲ + (۱۶ - ۲۲)^۲ + (۲۶ - ۲۲)^۲)$$

$$= \frac{۱}{۱۴}(۰ + ۴ + ۳۶ + ۱۶) = \frac{۵۶}{۱۴} = ۴ \rightarrow \sigma = ۲$$

۹۸ ☆ **گزینه ۴**

$$n(S) = \binom{۱۱}{۳} = \frac{۱۱ \times ۱۰ \times ۹}{۶} = ۱۶۵$$

$P($حداقل یکی از موش ها سفید باشد$) = ۱ - P($هر سه موش سیاه باشند$)$

$$= ۱ - \frac{\binom{۶}{۳}}{۱۶۵} = ۱ - \frac{\frac{۶ \times ۵ \times ۴}{۶}}{۱۶۵} = ۱ - \frac{۲۰}{۱۶۵} = ۱ - \frac{۴}{۳۳} = \frac{۲۹}{۳۳}$$

۹۹ ☆ **گزینه ۲** مجموع درصد فراوانی های N داده‌ی آماری برابر ۱۰۰ است.

$$۱۷ + ۲۰٫۵ + ۲۲ + x + ۱۸ = ۱۰۰ \rightarrow x = ۲۲٫۵$$

بنابراین درصد فراوانی نسبی دسته‌ی $[۲۵, ۲۸)$ با مرکز دسته‌ی ۲۳٫۵ برابر ۲۲٫۵ است.

حال با یک تناسب ساده، مسأله را حل می کنیم.

$$\begin{matrix} ۱۰۰ & ۲۲٫۵ \\ ۳۶۰^\circ & \alpha \end{matrix} \rightarrow \alpha = \frac{۲۲٫۵ \times ۳۶۰^\circ}{۱۰۰} = ۸۱^\circ$$

۱۰۰ ☆ **گزینه ۱**

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^{a^n} = n\log_k^a \ , \ \log_k^{\frac{a}{b}} = \log_k^a - \log_k^b \ , \ \log ۵ = ۱ - \log ۲}$

$$\log\sqrt[۳]{۱٫۶} = \log(۱٫۶)^{\frac{۱}{۳}} = \frac{۱}{۳}\log ۱٫۶ = \frac{۱}{۳}\log\frac{۱۶}{۱۰}$$

$$= \frac{۱}{۳}(\log ۱۶ - \log ۱۰) = \frac{۱}{۳}(۴\log ۲ - ۱) = \frac{۱}{۳}(۴(۱ - \log ۵) - ۱) = \frac{۱}{۳}(۳ - ۴\log ۵)$$

$$= \frac{۱}{۳}(۳ - ۱۲k) = \frac{۱}{۳}(۳(۱ - ۴k)) = ۱ - ۴k$$

۱۰۱ ☆ **گزینه ۴** برای پیوستگی f در بازه ی $[\frac{\pi}{۴}, ۲\pi]$ تنها کافی است شرایط پیوستگی را در نقطه‌ی مرزی $x = \frac{۳\pi}{۴}$ اعمال کنیم. (تساوی حد راست و حد چپ و مقدار تابع)

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to(\frac{3\pi}{4})^+} f(x)=\lim\limits_{x\to(\frac{3\pi}{4})^+}\cos(x+\frac{\pi}{4})=\cos\pi=-1\\ \lim\limits_{x\to(\frac{3\pi}{4})^-} f(x)=\lim\limits_{x\to(\frac{3\pi}{4})^-} a\sin 2x=a\sin\frac{3\pi}{2}=-a\\ f(\frac{3\pi}{4})=\cos(\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{4})=\cos\pi=-1\end{array}\right\}\Rightarrow -a=-1\Rightarrow a=1$$

۱۰۲☆ گزینه ۳

برای راحتی در محاسبات از تمام داده‌ها ۱۸ واحد کم می‌کنیم و دقت کنید که واریانس تغییری نمی‌کند.

$$\bar{x}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}F_i x_i=\frac{1}{25}((4\times(-6))+(3\times(-31))+(9\times 0)+(7\times 3)+(2\times 6))$$

$$=\frac{1}{25}(-24-9+21+12)=0$$

$$\sigma^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}F_i(x_i-\bar{x})^2$$

$$=\frac{1}{25}(4(-6-0)^2+3(-3-0)^2+9(0-0)^2+7(3-0)^2+2(6-0)^2)$$

$$=\frac{1}{25}(144+27+63+72)=\frac{306}{25}=12/24$$

۱۰۳☆ گزینه ۱ شرط آنکه معادله‌ی درجه دوم $2x^2+(m+1)x+\frac{1}{2}m+2=0$ فاقد ریشه‌ی حقیقی باشد، آن است که دلتای معادله، منفی باشد. پس داریم:

$$\Delta<0\Rightarrow b^2-4ac<0\Rightarrow (m+1)^2-4(2)(\frac{1}{2}m+2)=(m^2+2m+1)-4m-16$$

$$=m^2-2m-15=(m-5)(m+3)<0\rightarrow$$

m	$-\infty$		-3		5		$+\infty$
		+	0	−	0	+	

$$\rightarrow -3<m<5$$

۱۰۴☆ گزینه ۴ تعداد حالات انجام تجربه‌ی تصادفی که همان چیدن چهار رقم ۳ و ۲ و ۱ و ۰ به تصادف در کنار هم است، برابر است با:

$$n(S)=\boxed{3}\times\boxed{3}\times\boxed{2}\times\boxed{1}=18$$

برای آن که عددی چهار رقمی مضرب ۶ باشد، باید هم زوج و هم بر ۳ بخش‌پذیر باشد. شرط آن که عددی بر ۳ بخش پذیر باشد آن است که مجموع ارقامش بر ۳ قابل قسمت باشد. چون همواره مجموع ارقام ۳ و ۲ و ۱ و ۰ برابر ۶ است، پس این عدد چهار رقمی همواره بر ۳ بخش پذیر می باشد. لذا باید تنها تعداد اعداد زوج را پیدا کنیم تا عدد مضرب ۶ شود. تعداد اعداد چهار رقمی زوج برابر است با:

$$\left.\begin{array}{ll}\boxed{3}\times\boxed{2}\times\boxed{1}\times\boxed{1}=6 & \text{رقم یکان صفر باشد}\\ \boxed{2}\times\boxed{2}\times\boxed{1}\times\boxed{1}=4 & \text{رقم یکان صفر نباشد}\end{array}\right\}\Longrightarrow n(A)=6+4=10$$

پس $P(A)=\frac{10}{18}=\frac{5}{9}$ است.

۱۰۵☆ گزینه ۳ همواره مساحت زیر نمودار مستطیلی و نمودار چندبر فراوانی که دو سر آن روی محور قرار داشته باشند، با هم برابرند. پس: $\frac{S}{S'}=1$

۱۰۶☆ گزینه ۱ کافی است شرط پیوستگی (تساوی حد راست و حد چپ و مقدار تابع) را در $x=2$ اعمال کنیم.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{x^3-3x^2+4}{x-2}=\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{HOP}}\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{3x^2-6x}{1}=12-12=0\\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(2x+b)=4+b\\ f(2)=4+b\end{array}\right\}\Rightarrow 0=4+b\Rightarrow b=-4$$

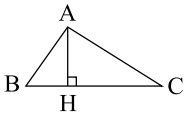
۱۰۷☆ گزینه ۲ یعنی در این خانواده سه فرزندی حداقل یک فرزند پسر است. پس در این خانواده حالتی که هر ۳ فرزند دختر باشند وجود ندارد.

$$n(S)=2^3-1=7$$

$$DDP\ \Rightarrow\ n(A)=\frac{3!}{2!}=3$$ تعداد حالت مطلوب یعنی این خانواده دارای دو دختر باشد: ۳

پس $P(A)=\frac{۳}{۷}$ است.

۱۰۸☆ گزینه ۲



$$BC: ۲y+۳x=۶ \to m_{BC}=-\frac{۳}{۲} \xrightarrow{\text{ارتفاع AH بر ضلع BC عمود است}} m_{AH}=\frac{۲}{۳}$$

برای پیدا کردن مختصات نقطه‌ی A کافی است معادلات خطوط اضلاع AB و AC را تلاقی دهیم.

$$\begin{cases} ۲y-x=۳ \\ y-۲x=۵ \end{cases} \xrightarrow{\text{دستگاه}} x=-\frac{۷}{۳},\ y=\frac{۱}{۳}$$

حال، معادله‌ی ارتفاع AH را با داشتن شیب و یک نقطه می‌نویسیم.

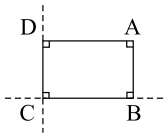
$$A\left|\begin{matrix}-\frac{۷}{۳} \\ \frac{۱}{۳}\end{matrix}\right. ,\ m_{AH}=\frac{۲}{۳} \to y-\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{۳}(x+\frac{۷}{۳}) \to ۳y-۱=۲x+\frac{۱۴}{۳}$$

$$\xrightarrow{\times ۳} ۹y-۳=۶x+۱۴ \to ۹y-۶x=۱۷$$

۱۰۹☆ گزینه ۲

$$۲y+x=۶ \to m=-\frac{۱}{۲}\ ,\ ۲x-y=۷ \to m'=۲$$

چون شیب‌ها عکس و قرینه‌ی هم هستند این دو خط بر هم عمودند و نقطه‌ی A در معادله‌ی هیچ کدام از این دو خط صدق نمی‌کند پس می‌توان شکل را در این‌گونه در نظر گرفت.



برای یافتن طول و عرض مستطیل کافی است فاصله‌ی نقطه‌ی A را از این دو خط بدست آوریم.

$$\left.\begin{matrix} A\left|\begin{matrix}۸ \\ ۵\end{matrix}\right.\ ,\ x+۲y-۶=۰ \to AD=\frac{|۸+۱۰-۶|}{\sqrt{۱+۴}}=\frac{۱۲}{\sqrt{۵}} \\ A\left|\begin{matrix}۸ \\ ۵\end{matrix}\right.\ ,\ ۲x-y-۷=۰ \to AB=\frac{|۱۶-۵-۷|}{\sqrt{۱+۴}}=\frac{۴}{\sqrt{۵}} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{مساحت مستطیل}=AD\times AB=\frac{۴۸}{۵}=۹٫۶$$

توجه کنید فاصله‌ی نقطه‌ی $A\left|\begin{matrix}\alpha \\ \beta\end{matrix}\right.$ از خط به معادله‌ی $ax+by+c=۰$ از رابطه‌ی $AH=\frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$ بدست می‌آید.

۱۱۰☆ گزینه ۲ معادله را به صورت $mx^۲+۳x+m^۲-۲=۰$ مرتب می‌کنیم.

$$x'=\frac{۱}{x''} \Rightarrow x'x''=۱ \Rightarrow \frac{c}{a}=۱ \Rightarrow \frac{m^۲-۲}{m}=۱ \Rightarrow m^۲-۲=m \Rightarrow m^۲-m-۲=۰$$

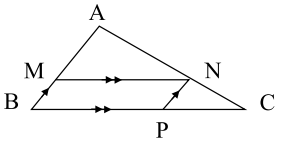
$$\Rightarrow (m-۲)(m+۱)=۰ \Rightarrow m=۲\ ,\ m=-۱$$

$$m=۲ \xrightarrow{\text{معادله}} ۲x^۲+۳x+۲=۰ \Rightarrow \Delta=b^۲-۴ac=۹-۱۶=-۷<0$$ غیر قابل قبول

$$m=-۱ \xrightarrow{\text{معادله}} -x^۲+۳x-۱=۰ \Rightarrow \Delta=b^۲-۴ac=۹-۴=۵>0$$ قابل قبول

۱۱۱☆ گزینه ۱

$MNPB$ متوازی‌الاضلاع است، بنابراین:



$$MN||BC\ ,\ NP||AB$$

$$\frac{AM}{MB}=\frac{۳}{۲} \Rightarrow \text{ترکیب در مخرج} \Rightarrow \frac{AM}{AB}=\frac{۳}{۵} \Rightarrow \frac{BM}{AB}=\frac{۲}{۵} \quad (۱)$$

$$MN||BC \Rightarrow \frac{MN}{BC}=\frac{AM}{AB}=\frac{۳}{۵} \xrightarrow{MN=BP} \frac{BP}{BC}=\frac{۳}{۵} \quad (۲)$$

$$\frac{S_{MNPB}}{S_{\underset{ABC}{\Delta}}} = \frac{MB \times BP \times \sin\hat{B}}{\frac{1}{2}AB \times BC \times \sin\hat{B}} \overset{(1),(2)}{=\!=\!=} \frac{\frac{2}{5}AB \times \frac{3}{5}BC}{\frac{1}{2}AB \times BC} = \frac{12}{25} = 0/48 = 48\%$$

۱۱۲ ☆ گزینه ۲

$$4^x - 3 \times 2^x - 4 = 0 \rightarrow (2^x)^2 - 3(2^x) - 4 = 0 \xrightarrow{2^x = A} A^2 - 3A - 4 = 0$$

$$\rightarrow (A-4)(A+1) = 0 \rightarrow \begin{cases} A = -1 \Rightarrow 2^x = -1 \rightarrow \text{امکان ندارد} \\ A = 4 \Rightarrow 2^x = 4 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$$

بنابراین معادله دارای یک ریشه است.

۱۱۳ ☆ گزینه ۱

$$9^x + 6^x - 2 \times 4^x = 0 \Rightarrow 3^{2x} + 2^x \times 3^x - 2 \times 2^{2x} = 0$$

$$\Rightarrow 3^{2x} + 2^x \times 3^x - 2^{2x} - 2^{2x} = 0 \Rightarrow \underbrace{(3^{2x} - 2^{2x})}_{\text{مزدوج}} + (2^x \times 3^x - 2^{2x}) = 0$$

$$\Rightarrow (3^x - 2^x)(3^x + 2^x) + 2^x(3^x - 2^x) = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{(3^x - 2^x)}_{\text{فاکتور}}(3^x + 2^x + 2^x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3^x - 2^x = 0 \Rightarrow 3^x = 2^x \Rightarrow x = 0 \\ 3^x + 2^x + 2^x \neq 0 \Rightarrow \text{جمع سه عبارت مثبت صفر نمی شود} \end{cases}$$

۱۱۴ ☆ گزینه ۳ می دانیم تابع $y = 2^x$ وقتی محور y ها را قطع می کند که $x = 0$ باشد . پس : $y = 2^0 = 1$

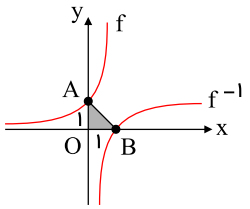
پس نقطه ی $A(0,1)$ به دست آمد و چون نقطه ی B در معکوس تابع صدق می کند پس جای x و y عوض می شوند. و $B(1,0)$ است. حال فاصله ی نقاط A و B را به دست آوریم:

$$AB = \sqrt{(0-1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}$$

۱۱۵ ☆ گزینه ۲

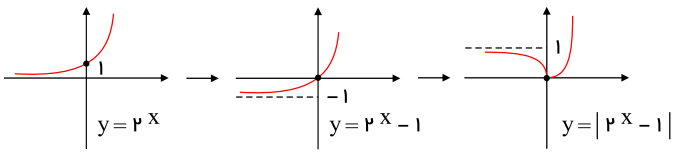
$$y = 3^x \xrightarrow{x=0} y = 3^0 = 1 \rightarrow A\Big|_1^0$$

چون نقطه‌ی B در معکوس تابع صدق می‌کند پس جای x و y عوض می‌شود یعنی $B\Big|_0^1$ است.



$$\rightarrow S_{\underset{AOB}{\Delta}} = \frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}$$

۱۱۶ ☆ گزینه ۴



برای رسم توابع به فرم $y = |f(x)|$ هر آنچه از شکل تابع $y = f(x)$ زیر محور xها است آئینه‌وار به بالا منتقل می‌کنیم.

۱۱۷ ☆ گزینه ۴

$$(3^x)^2 - 8 \times 3^x + 15 = 0 \xrightarrow{3^x = a} a^2 - 8a + 15 = 0 \rightarrow (a-5)(a-3) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 3 \Rightarrow 3^x = 3 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow x = \log 10 \\ a = 5 \Rightarrow 3^x = 5 \Rightarrow x = \log_3^5 \end{cases}$$

۱۱۸☆ گزینه ۳

می‌دانیم: $\log_k^{a^n} = n \log_k^a$

$\log ۹ = ۰/۹۵۴۲۴ \Rightarrow ۲ \log ۳ = ۰/۹۵۴۲۴ \Rightarrow \log ۳ = ۰/۴۷۷۱۲$

$\log ۳^{۱۰۰} = ۱۰۰ \log ۳ = ۱۰۰(۰/۴۷۷۱۲) = ۴۷/۷۱۲$

تعداد ارقام $= [۴۷/۷۱۲] + ۱ = ۴۷ + ۱ = ۴۸$

اگر n یک عدد طبیعی باشد آنگاه تعداد ارقام n برابر است با $[\log n] + ۱$.

۱۱۹☆ گزینه ۲

می‌دانیم: $\log_k^{a^n} = n \log_k^a$

$\log ۲^{۱۰۰} = ۱۰۰ \log ۲ = ۱۰۰(۰/۳۰۱) = ۳۰/۱$

تعداد ارقام $= [۳۰/۱] + ۱ = ۳۰ + ۱ = ۳۱$

اگر n یک عدد طبیعی باشد آنگاه تعداد ارقام n برابر است با $[\log n] + ۱$.

۱۲۰☆ گزینه ۴

می‌دانیم: $\log_k^a = \frac{۱}{\log_a^k}$, $\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}$

$$\begin{cases} \log_a^x = ۳ \Rightarrow \log_x^a = \frac{۱}{۳} \\ \log_b^x = ۶ \Rightarrow \log_x^b = \frac{۱}{۶} \\ \log_c^x = ۱۲ \Rightarrow \log_x^c = \frac{۱}{۱۲} \end{cases} \Rightarrow \log_x^a + \log_x^b + \log_x^c = \frac{۷}{۱۲} \Rightarrow \log_x^{abc} = \frac{۷}{۱۲} \Rightarrow \log_{abc}^x = \frac{۱۲}{۷}$$

۱۲۱☆ گزینه ۱

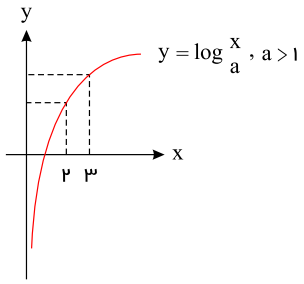
$۳^۱ < ۷ < ۳^۲ \Rightarrow \log_۳^{۳^۱} < \log_۳^۷ < \log_۳^{۳^۲} \Rightarrow ۱ < \log_۳^۷ < ۲ \Rightarrow [\log_۳^۷] = ۱$

$۷^۰ < ۳ < ۷^۱ \Rightarrow \log_۷^{۷^۰} < \log_۷^۳ < \log_۷^{۷^۱} \Rightarrow ۰ < \log_۷^۳ < ۱ \Rightarrow [\log_۷^۳] = ۰$

$\Rightarrow [\log_۳^۷] + [\log_۷^۳] = ۱ + ۰ = ۱$

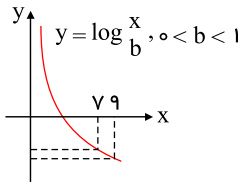
۱۲۲☆ گزینه ۱

نمودار تابع $y = \log_a^x$ را با شرط $a > ۱$ رسم می کنیم (واضح است هرچه x افزایش می یابد y افزایش می یابد)



۱۲۳☆ گزینه ۲

نمودار تابع $y = \log_b^x$ را با شرط $۰ < b < ۱$ رسم می کنیم که یک تابع نزولی است (واضح است هرچه x افزایش می‌یابد y کاهش می یابد)



۱۲۴☆ گزینه ۳

جلوی لگاریتم باید مثبت باشد $\Rightarrow ۲x - ۳ > ۰ \Rightarrow x > \frac{۳}{۲}$

زیر رادیکال باید بزرگتر مساوی صفر باشد $\Rightarrow \log(2x-3) \geq 0 \Rightarrow \log(2x-3) \geq \log 1 \Rightarrow 2x-3 \geq 1 \Rightarrow 2x \geq 4 \Rightarrow x \geq 2$

از اشتراک این دو جواب به $x \geq 2$ یا $x \in [2, +\infty)$ می‌رسیم.

۱۲۵ ☆ گزینه ۳

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab} \ , \ \log_k^{\frac{a}{b}} = \log_k^a - \log_k^b}$

$$\log_{15}^{75} = \log_{15}^{5\times 15} = \log_{15}^{15} + \log_{15}^{5} = 1 + \log_{15}^{\frac{15}{3}}$$

$$= 1 + \log_{15}^{15} - \log_{15}^{3} = 1 + 1 - a = 2 - a$$

۱۲۶ ☆ گزینه ۳

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}}$

$$\begin{cases} \log 2 + \log 3 = x \\ \log 3 + \log 7 = y \\ \log 2 + \log 7 = z \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع می کنیم}} 2(\log 2 + \log 3 + \log 7) = x + y + z$$

$$\Rightarrow \log 2 + \log 3 + \log 7 = \frac{x+y+z}{2} \Rightarrow \log(2 \times 3 \times 7) = \log 42 = \frac{x+y+z}{2}$$

۱۲۷ ☆ گزینه ۳

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^{a^n} = n \log_k^a \ , \ \log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab} \ , \ a^{\log_b^x} = x^{\log_b^a}}$

$$5^{(2\log_5^2 + 3\log_5^3)} = 5^{(\log_5^4 + \log_5^{27})} = 5^{\log_5^{4\times 27}} = 4 \times 27 = 108$$

۱۲۸ ☆ گزینه ۱

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^{a^n} = n \log_k^a \ , \ \log_{k^m}^{a^n} = \frac{n}{m} \log_k^a}$

$$2\log_9^{\sqrt{3}} - \log_4^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 2 \times \log_{3^2}^{3^{\frac{1}{2}}} - \log_{2^2}^{2^{-\frac{1}{2}}} = 2 \times \frac{\frac{1}{2}}{2} - \frac{-\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

۱۲۹ ☆ گزینه ۲

می‌دانیم: $\boxed{\log_b^N = x \to b^x = N \ , \ \log_k^{a^n} = n \log_k^a}$

$$\log_{\sqrt{3}}^a = \frac{4}{3} \Rightarrow a = (\sqrt{3})^{\frac{4}{3}} \Rightarrow a = (3^{\frac{1}{2}})^{\frac{4}{3}} = 3^{\frac{4}{6}} = 3^{\frac{2}{3}}$$

$$\log_8^{(a^3+7)} = \log_8^{(3^{\frac{2}{3}})^3+7} = \log_8^{3^2+7} = \log_8^{16} = \log_{2^3}^{2^4} = \frac{4}{3}$$

۱۳۰ ☆ گزینه ۲ می‌دانیم: $\boxed{\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - \log 2}$

$$\log 12{,}5 = \log \frac{25}{2} = \log 25 - \log 2 = \log 5^2 - \log 2 = 2\log 5 - \log 2$$

$$= 2(1 - \log 2) - \log 2 = 2 - 3\log 2 = 2 - \frac{3b}{2} = \frac{4-3b}{2}$$

۱۳۱ ☆ گزینه ۳

می‌دانیم: $\boxed{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \ , \ \log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab} \ , \ \log_k^a - \log_k^b = \log_k^{\frac{a}{b}}}$

$$\begin{vmatrix} \log a & \log b \\ \log b & \log a \end{vmatrix} = \log a \log a - \log b \log b$$

$$= (\log a)^2 - (\log b)^2 \xrightarrow{\text{مزدوج}} (\log a + \log b)(\log a - \log b) = \log ab \cdot \log \frac{a}{b}$$

۱۳۲☆ گزینه ۱

می‌دانیم: $\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}\ ,\ \log_k^{a^n} = n\log_k^a\ ,\ \log_{k^m}^{a^n} = \frac{n}{m}\log_k^a$

$$\log_{۸}^{\frac{\sqrt{۲}}{۲}} + \log_{۸}^{\sqrt[۴]{۳}} + \log_{۸}^{\frac{۱}{\sqrt{۳}}} = \log_{۸}^{\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\sqrt[۴]{۳}\times\frac{۱}{\sqrt{۳}}} = \log_{۸}^{\sqrt{۲}} = \log_{۲^۳}^{۲\times۲^{\frac{۱}{۲}}} = \log_{۲^۳}^{۲^{\frac{۳}{۲}}} = \frac{\frac{۳}{۲}}{۳} = \frac{۱}{۲}$$

۱۳۳☆ گزینه ۲

می‌دانیم: $\log_{k^m}^{a^n} = \frac{n}{m}\log_k^a$

$$۳\log_{۱۶}^{۲} - \log_{۴}^{\sqrt{۲}} = A \Rightarrow ۳\log_{۲^۴}^{۲} - \log_{۲^۲}^{۲^{\frac{۱}{۲}}} = \frac{۳}{۴} - \frac{\frac{۱}{۲}}{۲} = \frac{۳}{۴} - \frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۲} \to A = \frac{۱}{۲}$$

$$\log_{\sqrt{۲}}^{\sqrt{A}} = \log_{\sqrt{۲}}^{\sqrt{\frac{۱}{۲}}} = \log_{\sqrt{۲}}^{\sqrt{۲^{-۱}}} = \log_{۲^{\frac{۱}{۲}}}^{۲^{-\frac{۱}{۲}}} = \frac{-\frac{۱}{۲}}{\frac{۱}{۲}} = -۱$$

۱۳۴☆ گزینه ۳

می‌دانیم: $\log_k^a = \frac{۱}{\log_a^k}\ ,\ \log_{k^m}^{a^n} = \frac{n}{m}\log_k^a$

$$\log_{x\sqrt{x}}^{y} = \log_{x^{\frac{۳}{۲}}}^{y} = \frac{۲}{۳}\log_x^y = \frac{۲}{۳} \times \frac{۱}{\log_y^x} = \frac{۲}{۳} \times ۳ = ۲$$

۱۳۵☆ گزینه ۱

می‌دانیم: $\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}\ ,\ \log_k^{a^n} = n\log_k^a$

$$\frac{\log ۸ + \log ۳}{\log ۲ + \log\sqrt{۶}} = \frac{\log ۲۴}{\log ۲\sqrt{۶}} = \frac{\log ۲۴}{\log\sqrt{۲۴}} = \frac{\log ۲۴}{\log(۲۴)^{\frac{۱}{۲}}} = \frac{\log ۲۴}{\frac{۱}{۲}\log ۲۴} = ۲$$

۱۳۶☆ گزینه ۳

$$۶^۰ < ۳ < ۶^۱ \Rightarrow \log_۶^{۶^۰} < \log_۶^۳ < \log_۶^{۶^۱} \Rightarrow ۰ < \log_۶^۳ < ۱ \Rightarrow [\log_۶^۳] = ۰$$

$$۳^۱ < ۶ < ۳^۲ \Rightarrow \log_۳^{۳^۱} < \log_۳^۶ < \log_۳^{۳^۲} \Rightarrow ۱ < \log_۳^۶ < ۲ \Rightarrow [\log_۳^۶] = ۱$$

$$[\log_۶^۳] + [\log_۳^۶] = ۰ + ۱ = ۱$$

۱۳۷☆ گزینه ۳

$$\log(x+۴) = \log\sqrt{۲x+۱۱} \to x+۴ = \sqrt{۲x+۱۱}$$

$$\xrightarrow{\text{توان } ۲} x^۲ + ۱۶ + ۸x = ۲x + ۱۱ \to x^۲ + ۶x + ۵ = ۰$$

$$\to (x+۱)(x+۵) = ۰ \to \begin{cases} x = -۱ & \text{ق ق} \\ x = -۵ & \text{جلوی لگاریتم را منفی می کند و غیر قابل قبول است} \end{cases}$$

۱۳۸☆ گزینه ۲

می‌دانیم: $\log_k^{a^n} = n\log_k^a$

$$\log(x-۲) = \frac{۱}{۲}\log(x+۱۰) \Rightarrow ۲\log(x-۲) = \log(x+۱۰) \Rightarrow \log(x-۲)^۲ = \log(x+۱۰)$$

$$\Rightarrow x^۲ + ۴ - ۴x = x + ۱۰ \Rightarrow x^۲ - ۵x - ۶ = ۰$$

$$\Rightarrow (x-۶)(x+۱) = ۰ \begin{cases} x = -۱ & \text{غیر قابل قبول است چون جلوی لگاریتم را منفی می‌کند } (x = -۱) \\ x = ۶ & \text{ق ق} \end{cases}$$

$$\log_{۲}^{x+۲} \overset{x=۶}{=\!=} \log_{۲}^{۸} = \log_{۲}^{۲^۳} = ۳$$

۱۳۹☆ گزینه ۱

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab} \ , \ \log_k^{a^n} = n\log_k^a}$

$$\begin{cases} \log xy^۲ = ۲ \\ \log x^۲y = ۴ \end{cases} \Rightarrow \overset{-۲}{} \begin{cases} \log x + ۲\log y = ۲ \\ ۲\log x + \log y = ۴ \end{cases} \Rightarrow \log y = ۰ \ , \ \log x = ۲$$

$$\log x^۲y^۴ = \log x^۲ + \log y^۴ = ۲\log x + ۴\log y = ۴ + ۰ = ۴$$

۱۴۰☆ گزینه ۱

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}}$

$$\log(x^۳ + ۳x^۲ + ۳x - ۱) = \log x + \log(x+۱) + \log(x+۲)$$
$$\Rightarrow \log(x^۳ + ۳x^۲ + ۳x - ۱) = \log x(x+۱)(x+۲)$$
$$\Rightarrow x^۳ + ۳x^۲ + ۳x - ۱ = x(x^۲ + ۳x + ۲)$$
$$\Rightarrow x^۳ + ۳x^۲ + ۳x - ۱ = x^۳ + ۳x^۲ + ۲x \Rightarrow x = ۱$$

۱۴۱☆ گزینه ۴

می‌دانیم: $\boxed{\log_{k^m}^{a^n} = \frac{n}{m}\log_k^a \ , \ \log_b^N = x \to N = b^x}$

$$\log_۹^x = \log_{۹^{\frac{۱}{۲}}}^x + ۴/۵ \to \log_{۳^۲}^x = \log_{۳^{۲}}^{x^{-۲}} + ۴/۵ \to \frac{۱}{۲}\log_۳^x = -\log_۳^x + ۴/۵$$
$$\to \frac{۳}{۲}\log_۳^x = \frac{۹}{۲} \to \log_۳^x = ۳ \xrightarrow{\text{تعریف}} x = ۳^۳ = ۲۷$$

۱۴۲☆ گزینه ۲

دو عدد متوالی را x و $x+۱$ در نظر می گیریم.

$$x^۲ + (x+۱)^۲ = ۹۲۵ \Rightarrow x^۲ + x^۲ + ۲x + ۱ = ۹۲۵ \Rightarrow ۲x^۲ + ۲x - ۹۲۴ = ۰$$
$$x^۲ + x - ۴۶۲ = ۰ \Rightarrow x_۱, x_۲ = \frac{-۱ \pm \sqrt{۱۸۴۹}}{۲} \Rightarrow \begin{cases} x_۱ = ۲۱ \\ x_۲ = -۲۲ \end{cases} \Rightarrow ۲۱ + (۲۱+۱) = ۴۳$$

۱۴۳☆ گزینه ۳ کافی است اعداد x، $x+۱$، $x+۲$، $x+۳$ و $x+۴$ را در نظر بگیریم:

$$x^۲ + (x+۱)^۲ + (x+۲)^۲ = (x+۳)^۲ + (x+۴)^۲$$
$$\Rightarrow x^۲ + x^۲ + ۲x + ۱ + x^۲ + ۴x + ۴ = x^۲ + ۶x + ۹ + x^۲ + ۸x + ۱۶$$
$$\Rightarrow x^۲ - ۸x - ۲۰ = ۰ \Rightarrow (x-۱۰)(x+۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۱۰ & \text{ق ق} \\ x = -۲ & \text{غ ق ق(طبیعی نمی‌باشد)} \end{cases}$$

۱۴۴☆ گزینه ۳

$$P = \frac{c}{a} = \frac{-۱}{(k^۲+۱)^۲} < ۰$$

چون $\frac{c}{a} < ۰$، بنابراین معادله‌ی فوق دارای دو ریشه‌ی متمایز مختلف‌العلامت است.

۱۴۵☆ گزینه ۴

برای داشتن دو ریشه‌ی حقیقی متمایز باید $\Delta > ۰$ باشد.$(b^۲ - ۴ac > ۰)$

$$\Delta = ۱۶ - ۴k > ۰ \Rightarrow k < ۴ \Rightarrow x'x'' = \frac{c}{a} = k \Rightarrow x'x'' < ۴$$

۱۴۶☆ گزینه ۲ شرط آن‌که یک معادله‌ی درجه‌ی دوم دارای دو ریشه‌ی متمایز مختلف‌العلامت باشد آن است که $\frac{c}{a}$ منفی باشد.

$$\frac{c}{a} < ۰ \Rightarrow \frac{m-۳}{m-۱} < ۰ \Rightarrow$$

m	$-\infty$		۱		۳		$+\infty$
$m-۳$		−		−	۰	+	
$m-۱$		−	۰	+		+	
عبارت < ۰		+	ن	−	۰	+	

$$\Rightarrow ۱ < m < ۳$$

۱۴۷☆ گزینه ۴ شرط آنکه معادله‌ی درجه‌ی دوم دارای دو ریشه‌ی حقیقی منفی باشد آن است که $\Delta > 0$ و $\frac{c}{a} > 0$ و $\frac{-b}{a} < 0$ باشد (ضرب دو ریشه مثبت و جمع دو ریشه باید منفی باشد) که فقط در گزینه‌ی چهارم صدق می کند.

گزینه‌ی چهارم: $\begin{cases} \Delta = b^2 - 4ac = (k^2+3)^2 - 4(k^2+2) = k^4 + 2k^2 + 1 > 0 \\ \frac{c}{a} = k^2 + 2 > 0 \\ -\frac{b}{a} = -k^2 - 3 < 0 \end{cases}$

۱۴۸☆ گزینه ۲

شرط آنکه یک معادله‌ی درجه‌ی دوم دارای دو ریشه‌ی متمایز مثبت باشد آن است که $\Delta > 0$ و $-\frac{b}{a} > 0$ و $\frac{c}{a} > 0$ باشد.

$$\left.\begin{array}{l} (1) \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow 1 - 4m > 0 \Rightarrow m < \frac{1}{4} \\ (2) \Rightarrow x_1 + x_2 > 0 \Rightarrow -\frac{b}{a} = 1 > 0 \\ (3) \Rightarrow x_1 \times x_2 > 0 \Rightarrow \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow m > 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} 0 < m < \frac{1}{4}$$

برقرار است:

۱۴۹☆ گزینه ۲ شرط آن‌که یک عبارت درجه دوم مربع کامل باشد آن است که $\Delta = 0$ باشد.

$$\Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow (a+2)^2 - 4(1)(2a) = 0 \Rightarrow a^2 + 4a + 4 - 8a = 0$$

$$\Rightarrow a^2 - 4a + 4 = 0 \Rightarrow (a-2)^2 = 0 \Rightarrow a = 2$$

۱۵۰☆ گزینه ۲

$$(x^2+2)^2 - 4(x^2+2) + 3 = 0 \xrightarrow{x^2+2=A} A^2 - 4A + 3 = 0$$

$$\Rightarrow (A-1)(A-3) = 0 \begin{cases} A = 1 \Rightarrow x^2 + 2 = 1 \Rightarrow x^2 = -1 & \text{ریشه‌ی حقیقی ندارد:} \\ A = 3 \Rightarrow x^2 + 2 = 3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$

پاسخنامه کلیدی

۱	۴	۶۱	۲	۹۱	۴	۱۲۱	۱	۱۵۰	۲
۲	۴	۶۲	۱	۹۲	۲	۱۲۲	۱	۱۴۹	۲
۳	۲	۶۳	۴	۹۳	۳	۱۲۳	۲	۱۴۸	۲
۴	۲	۶۴	۱	۹۴	۴	۱۲۴	۳	۱۴۷	۴
۵	۳	۶۵	۲	۹۵	۴	۱۲۵	۳	۱۴۶	۲
۶	۴	۶۶	۲	۹۶	۴	۱۲۶	۳	۱۴۵	۴
۷	۴	۶۷	۲	۹۷	۴	۱۲۷	۳	۱۴۴	۳
۸	۴	۶۸	۱	۹۸	۴	۱۲۸	۱	۱۴۳	۳
۹	۲	۶۹	۳	۹۹	۲	۱۲۹	۲	۱۴۲	۲
۱۰	۲	۷۰	۳	۱۰۰	۱	۱۳۰	۲	۱۴۱	۴
۱۱	۳	۷۱	۱	۱۰۱	۴	۱۳۱	۳	۱۴۰	۱
۱۲	۳	۷۲	۳	۱۰۲	۳	۱۳۲	۱	۱۳۹	۱
۱۳	۲	۷۳	۳	۱۰۳	۱	۱۳۳	۲	۱۳۸	۲
۱۴	۱	۷۴	۴	۱۰۴	۴	۱۳۴	۳	۱۳۷	۳
۱۵	۴	۷۵	۳	۱۰۵	۳	۱۳۵	۱	۱۳۶	۳
۱۶	۲	۷۶	۱	۱۰۶	۱	۱۳۶	۳	۱۳۵	۱
۱۷	۲	۷۷	۳	۱۰۷	۲	۱۳۷	۳	۱۳۴	۳
۱۸	۴	۷۸	۳	۱۰۸	۲	۱۳۸	۲	۱۳۳	۲
۱۹	۴	۷۹	۳	۱۰۹	۲	۱۳۹	۱	۱۳۲	۱
۲۰	۳	۸۰	۳	۱۱۰	۲	۱۴۰	۱	۱۳۱	۳
۲۱	۳	۸۱	۴	۱۱۱	۱	۱۴۱	۴	۱۳۰	۲
۲۲	۲	۸۲	۲	۱۱۲	۲	۱۴۲	۲	۱۲۹	۲
۲۳	۳	۸۳	۴	۱۱۳	۱	۱۴۳	۳	۱۲۸	۱
۲۴	۳	۸۴	۴	۱۱۴	۳	۱۴۴	۳	۱۲۷	۳
۲۵	۳	۸۵	۴	۱۱۵	۲	۱۴۵	۴	۱۲۶	۳
۲۶	۳	۸۶	۲	۱۱۶	۴	۱۴۶	۲	۱۲۵	۳
۲۷	۴	۸۷	۳	۱۱۷	۴	۱۴۷	۴	۱۲۴	۳
۲۸	۲	۸۸	۲	۱۱۸	۳	۱۴۸	۲	۱۲۳	۲
۲۹	۳	۸۹	۴	۱۱۹	۲	۱۴۹	۲	۱۲۲	۱
۳۰	۱	۹۰	۳	۱۲۰	۴	۱۵۰	۲	۱۲۱	۱
۳۱	۳	۶۰	۲						
۳۲	۳	۵۹	۲						
۳۳	۲	۵۸	۳						
۳۴	۴	۵۷	۳						
۳۵	۳	۵۶	۴						
۳۶	۱	۵۵	۳						
۳۷	۴	۵۴	۴						
۳۸	۱	۵۳	۳						
۳۹	۲	۵۲	۲						
۴۰	۳	۵۱	۴						
۴۱	۱	۵۰	۴						
۴۲	۴	۴۹	۱						
۴۳	۲	۴۸	۲						
۴۴	۴	۴۷	۲						
۴۵	۲	۴۶	۱						
۴۶	۱	۴۵	۲						
۴۷	۲	۴۴	۴						
۴۸	۲	۴۳	۲						
۴۹	۱	۴۲	۴						
۵۰	۴	۴۱	۱						
۵۱	۴	۴۰	۳						
۵۲	۲	۳۹	۲						
۵۳	۳	۳۸	۱						
۵۴	۴	۳۷	۴						
۵۵	۳	۳۶	۱						
۵۶	۴	۳۵	۳						
۵۷	۳	۳۴	۴						
۵۸	۳	۳۳	۲						
۵۹	۲	۳۲	۳						
۶۰	۲	۳۱	۳						