مثلثات

موضوع:

تاریخ:

۱) واحدهای اندازه‌گیری زاویه

$$\frac{D}{\cancel{360}\,18} = \frac{R}{\cancel{2\pi}\,\pi}$$

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$$

$\pi/2 \longrightarrow 90^\circ$

$\pi \longrightarrow 180^\circ$

$\pi/3 \longrightarrow 60^\circ$

$\pi/4 \longrightarrow 45^\circ$

$\pi/5 \longrightarrow 36^\circ$

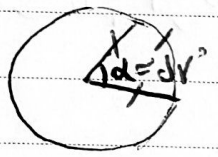
$3\pi/4 \longrightarrow 270^\circ$

$2\pi \longrightarrow 360^\circ$

$10^\circ \longrightarrow ?$

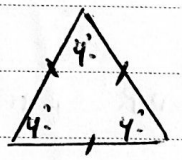
$$\frac{10}{180} = \frac{R}{\pi} \qquad R = \frac{10\pi}{180} = \frac{\pi}{18}$$

۲) مفهوم یک رادیان:



$\alpha = 1\ rad$

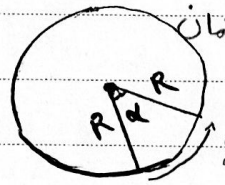
زاویه‌ی روبرو به کمانی که با شعاع برابر باشد



$1\ rad \longrightarrow ?$ درجه

$$\frac{D}{180} = \frac{1}{\pi} \qquad D = \frac{180}{3.14} \simeq 57^\circ$$

۳) نکات مرتبط با قطاع دایره



$L = R\alpha \xrightarrow[\alpha = 2\pi]{\text{دایره کامل}} 2\pi R$

رادیان می‌باشد

$$\frac{\text{مساحت}}{\text{قطاع دایره}} = \frac{1}{2}\alpha R^2 \xrightarrow[\alpha = 2\pi]{\text{دایره کامل}} \pi R^2$$

موضوع: تاریخ:

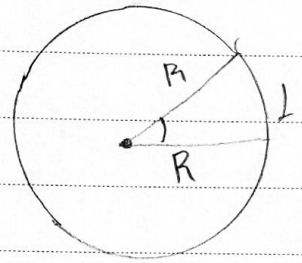
تست ۱ متحرکی روی دایره‌ای به شعاع ۲cm در جهت مثلثاتی حرکت می‌کند اگر مساحت طی شده برابر $6\,cm^2$ باشد زاویه‌ای که متحرک چرخیده چند درجه است؟

$R=2 \qquad L=R\alpha \qquad \alpha = 3\times\frac{180}{\pi} = \frac{540}{\pi}$

$L=R\alpha \qquad 6=2\alpha$

$\alpha = 3\,rad$

تست ۲ مساحت قطاع از دایره به شعاع ۴ برابر 2π است اندازه‌ی محیط قطاع کدام است.

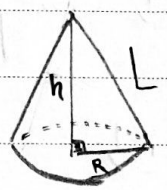


$\frac{1}{2}\alpha R^2 = 2\pi$

$\frac{1}{2}\alpha\times 16 = 2\pi$

$\alpha = \frac{\pi}{4} \qquad 2R+\pi = 11.4$

یادآوری چند نکته از مخروط



$L^2 = h^2 + R^2$

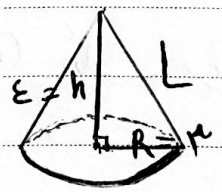
$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$

$S_{\text{جانبی}} = \pi R L$

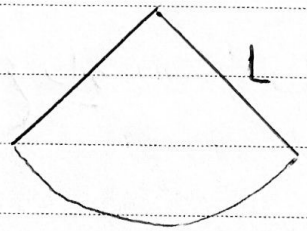
$S_{\text{قاعده}} = \pi R^2$

$+ \quad S_{\text{کل}} = \pi R L + \pi R^2$

تست ۳ مخروطی به شعاع قاعده ۳ و ارتفاع ۴ را از محل مولد می‌گسترانیم اندازه زاویه قطاع حاصل کدام است؟



$L=5$



$S_{\text{جانبی مخروط}} = S_{\text{قطاع}}$

$\pi R L = \frac{1}{2}\alpha \cancel{R}^{2} \cancel{L}$

$\pi R = \frac{1}{2}\alpha L$

$\alpha = \frac{2\pi R}{L} = \frac{2\pi(3)}{5} = \frac{6\pi}{5}$

موضوع: تاریخ:

تست ٤ مساحت و اندازه کمان قطاع از دایره برابر 8π و 2π است اندازه شعاع آن کدام است؟

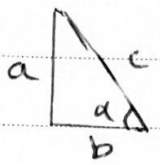
$S = 8\pi \qquad \frac{1}{2}\alpha R^2 = 8\pi$

$L = 2\pi \qquad R\alpha = 2\pi$

$\frac{1}{2}\alpha R R = 8\pi \rightarrow \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{\alpha} R R = 8\pi$

$\alpha R = 2\pi \qquad \pi R = 8\pi \rightarrow R = 8$

معرفی نسبت های مثلثاتی



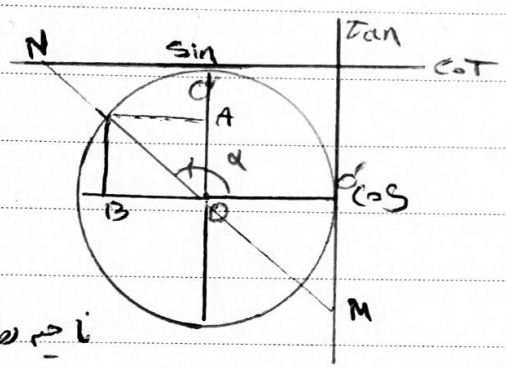
$c^2 = a^2 + b^2$

$\sin\alpha = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{a}{c}$

$\cos\alpha = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{b}{c}$

$\tan\alpha = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{a}{b}$

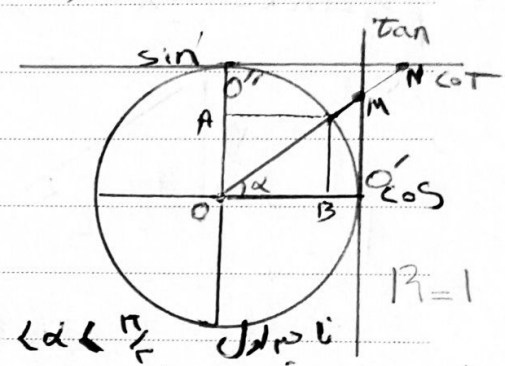
$\cot\alpha = \frac{\text{مجاور}}{\text{مقابل}} = \frac{b}{a}$



ناحیه دوم $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

$\sin\alpha = +OA \qquad \tan\alpha = -O'm$

$\cos\alpha = -OB \qquad \cot\alpha = -O''N$

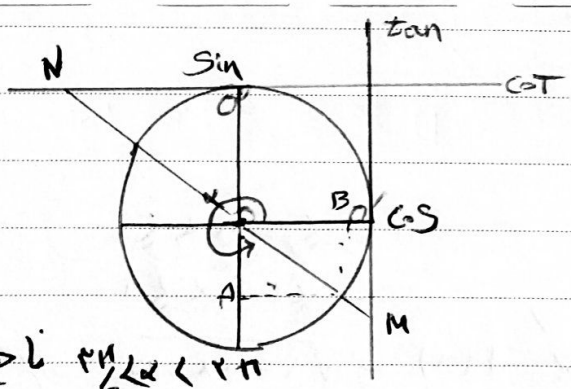


$R = 1$

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ناحیه اول

$\sin\alpha = OA \qquad \tan\alpha = O'M$

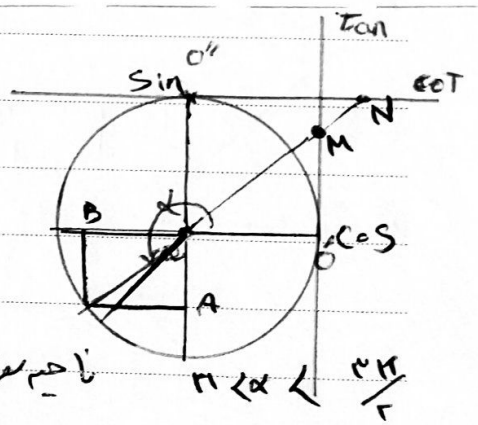
$\cos\alpha = OB \qquad \cot\alpha = O''N$



$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ ناحیه سوم

$\sin\alpha = -OA \qquad \tan\alpha = -O'M$

$\cos\alpha = -OB \qquad \cot\alpha = -O''N$



ناحیه چهارم $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

$\sin\alpha = -OA \qquad \tan\alpha = +O'M$

$\cos\alpha = -OB \qquad \cot\alpha = +O''N$

مثبت ها: همه ① ② ③ ④

موضوع: تاریخ:

یادآوری روابط اولیه

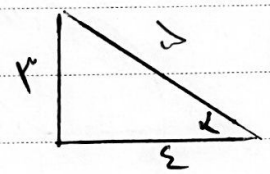
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$$\left.\begin{array}{l} \tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \\ \cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \end{array}\right\} \longrightarrow \tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1$$

$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

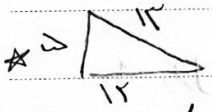
$$1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

اگر $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ و α در ربع دوم باشد مقدار $\tan\alpha - \cot\alpha$ کدام است؟



$$\left(-\frac{3}{4}\right) - \left(-\frac{4}{3}\right)$$

$$-\frac{3}{4} + \frac{4}{3} = \frac{7}{12}$$



اگر $\tan\alpha = 2$ و α در ربع سوم باشد مقدار $\sin^2\alpha \cdot \cos\alpha$ کدام است؟

محدوده $-1 \leq \sin\alpha \leq 1$

$-1 \leq \cos\alpha \leq 1$

برد تابع $f(x) = \sqrt{2\sin x + 5}$ کدام است؟

موضوع: تاریخ:

مقدار $[\sin 4^\circ] + [\sin 4]$ کدام است؟

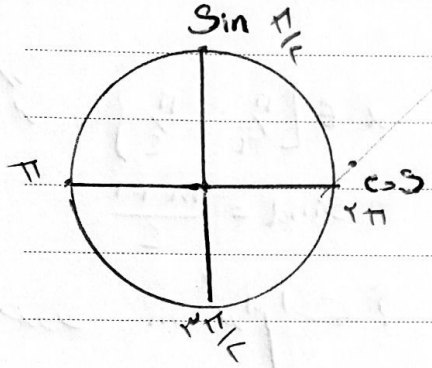
$4^\circ \longrightarrow$ ربع اول

$4 \longrightarrow$ رادیان $4 \times 57 = 228$ درجه

$[+0/\ldots] + [-0/\ldots]$

$= 0 + (-1) = -1$

نسبت‌های مثلثاتی زوایای مهم



	۰	π/۶	π/۴	π/۳	π/۲	π	۳π/۲	۲π
Sinα								
Cosα								
Tanα								
Cotα								

موضوع: تاریخ:

* نسبت‌های مثلثاتی مرتبط با جدول

$\sin \frac{\pi}{2} =$

$\cos \frac{2\pi}{3} =$

$\sin \frac{5\pi}{6} =$

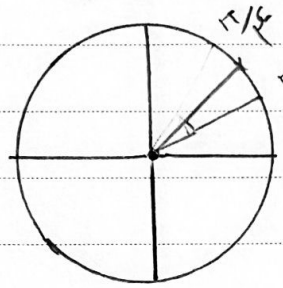
$\tan \frac{5\pi}{4} =$

$\sin \frac{7\pi}{6} =$

$\cot \frac{7\pi}{6} =$

$\sin \frac{11\pi}{6} =$

$\cos \frac{4\pi}{3} =$



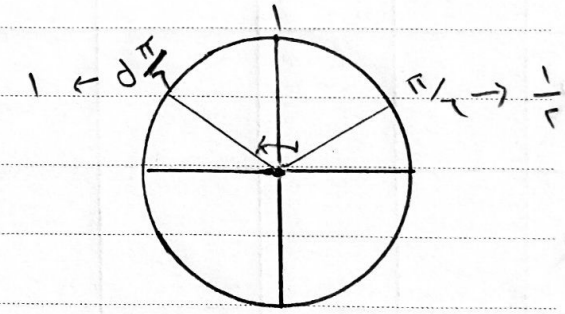
$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

اگر $\alpha \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$ ، $\sin\alpha = \frac{m+1}{4}$

حدود m کدام است؟

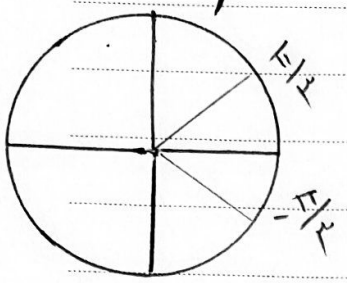
اگر $\alpha \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$ ، $\sin\alpha = \frac{2m+1}{4}$ باشد حدود m کدام است



تاریخ:

موضوع:

اگر $-\frac{\pi}{9} < x < \frac{\pi}{9}$ و $\cos 3m = \frac{m-1}{2}$ مقادیر m در کدام فاصله است؟



۱) $[1, 2)$

۲) $(0, 2)$

۳) $(2, 4)$

۴) $[3, 4)$

حذفیات درون کمان

۱) حذف ⊖ : فقط در cos است

$\cos(-\alpha) =$

$\sin(-\alpha) =$

$\tan(-\alpha) =$

۲) حذف مضرب π : بدون قید و شرط

$\cos(8\pi + \alpha)$

$\tan(-10\pi + \alpha)$

$\sin(6\pi - \alpha)$

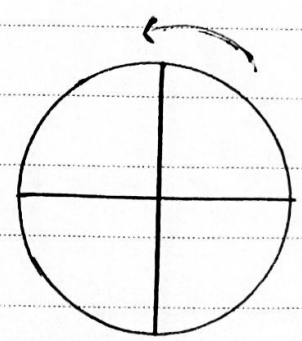
$\cos(4\pi - \alpha)$

۳) حذف π : حذف کن علامت بده

$\sin(7\pi + \alpha)$

$\cos(5\pi - \alpha)$

$\tan(3\pi + \alpha)$



۴) حذف $\frac{\pi}{2}$: حذف کن، تغییر جنس و علامت بده

$\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)$

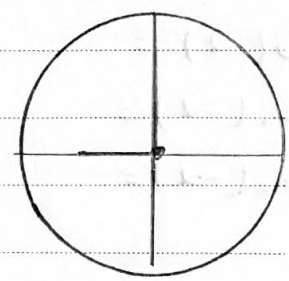
$\cos(\frac{3\pi}{2}-\alpha)$

$\tan(\frac{3\pi}{2}+\alpha)$

$\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)$

اگر $\tan\alpha=2$ باشد حاصل زیر کدام است؟

$$A=\frac{2\sin(7\pi+\alpha)-3\sin(\frac{3\pi}{2}+\alpha)}{\cos(8\pi-\alpha)+5\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)}$$



اگر $\sin^2\alpha-\sin\alpha>0$

$\cos\alpha-\cos^2\alpha<0$

α در کدام ناحیه مثلثاتی است؟

۱) اول

۲) دوم

۳) سوم

۴) چهارم

موضوع: تاریخ:

اگر $\cos x = \sqrt{\frac{\cot x}{\cot^2 x - a^2}}$ $(a \in R)$ آنگاه x در کدام ناحیه واقع است؟

۱) اول
۲) دوم
۳) سوم
۴) چهارم

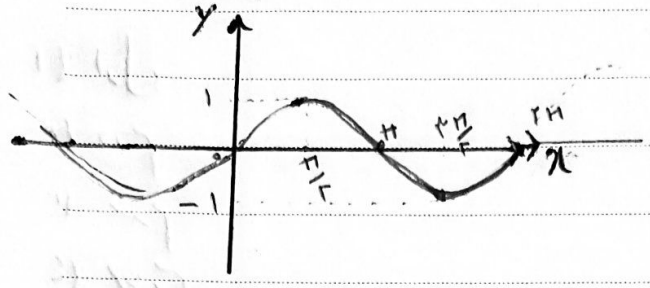
اگر $\sin x + \frac{1}{\sin x} = 2$ مقدار عبارت $\sin^2 x + \cos^5 x$ کدام است؟

اگر $\tan 20^\circ = x$ مقدار $\frac{\sin 140 - \cos 50^\circ}{\cos 110^\circ + \sin 40}$ کدام است؟

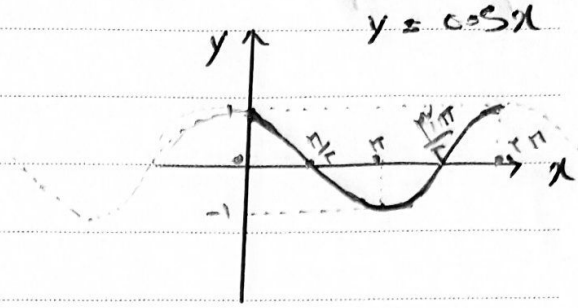
موضوع: تاریخ:

رسم نمودارهای مثلثاتی پایه

$y = \sin x$



$y = \cos x$



$y = \sin x$

x	۰	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
y					

$y = \cos x$

x	۰	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
y					

دوره تناوب $T = 2\pi$

$y_{max} =$

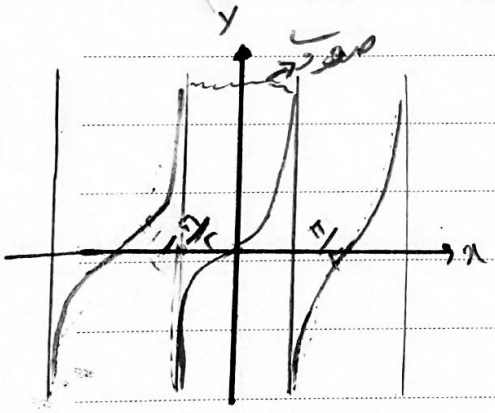
$y_{min} =$

دوره تناوب $T = 2\pi$

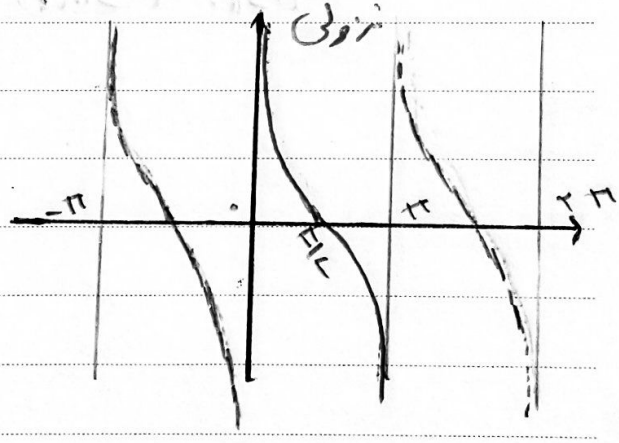
$y_{max} =$

$y_{min} =$

$y = \tan x$



$y = \cot x$



x	$-\pi/2^+$	۰	$\pi/2^-$
y			

x	۰	$\pi/2$	π
y			

$T = \pi$

$T = \pi$

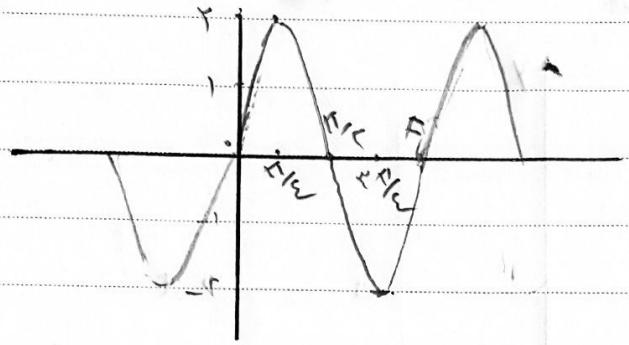
موضوع: تاریخ:

تحلیل نمودار $f(x) = 2\sin(2x)$

$\sin x$:

x	0	$\pi/6$	π	$3\pi/2$	2π
y	0	1	0	-1	0

x	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
y	0	2	0	-2	0



$T = \pi$ یا $\frac{2\pi}{2} = \pi$

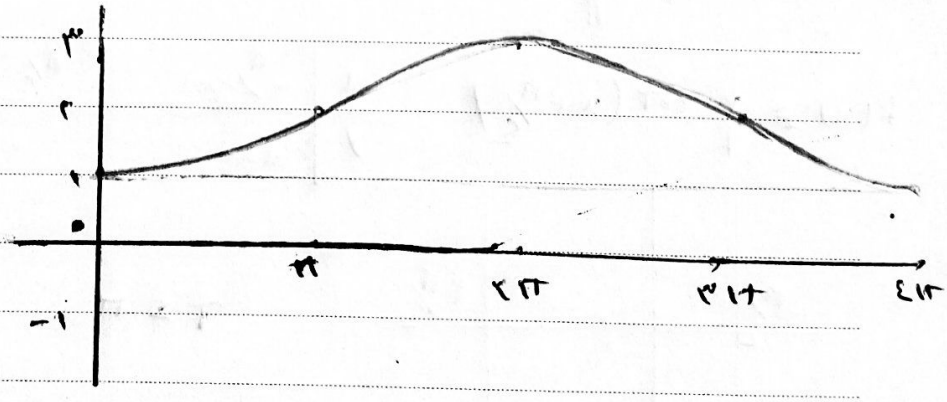
$\begin{cases} y_{max} = 2 \\ y_{min} = 2 \end{cases}$

تحلیل نمودار $f(x) = 2 - \cos \frac{x}{2}$

$\cos x$:

x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
y	1	0	-1	0	$+1$

x	0	π	2π	3π	4π
y	1	2	3	2	1



$T = 4\pi$ یا $2\pi \times 2 = 4\pi$

$\begin{cases} y_{max} = 3 \\ y_{min} = 1 \end{cases}$

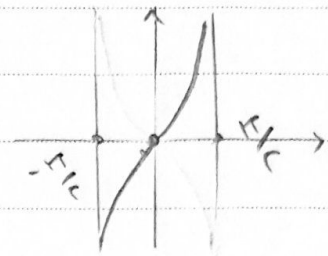
$f(-1) = 3$

$f(1) = 1$

تحلیل تابع $f(x) = -\tan x/2$

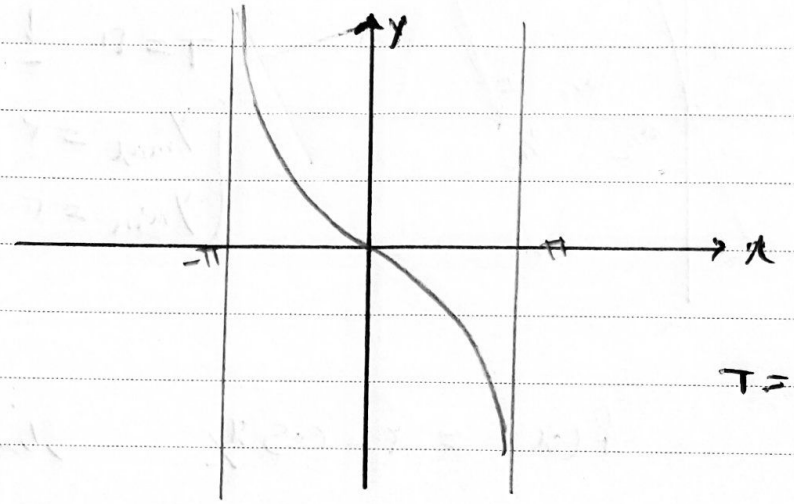
$\tan x$:

x	$-\pi/2$	0	$+\pi/2$
y	$-\infty$	0	$+\infty$



$f(x) = -\tan x/2$:

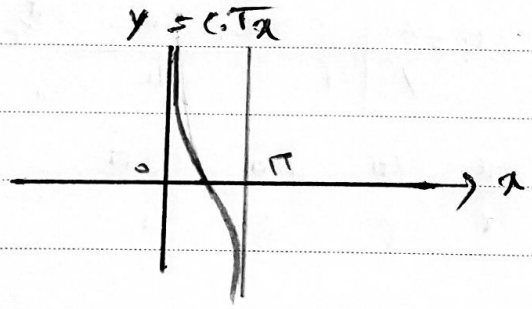
x	$-\pi$	0	$+\pi$
y	$+\infty$	0	$-\infty$



$T = 2\pi$ $\quad \frac{1}{2}\pi \times 2 = \pi$

تحلیل تابع $f(x) = 2\cot(x + \pi/4)$

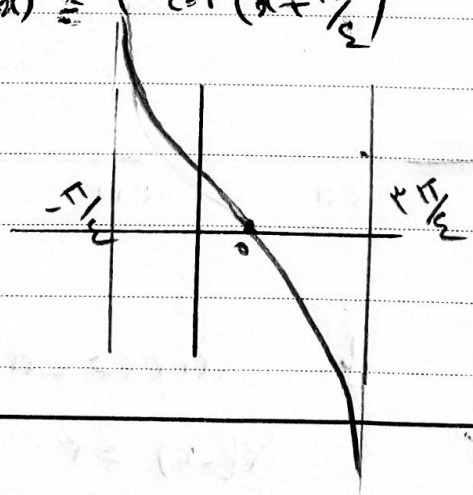
$y = \cot x$



x	0	$\pi/2$	π
y	$+\infty$	0	$-\infty$

$f(x) = 2\cot(x + \pi/4)$

x	$-\pi/4$	0	$\pi/4$	$3\pi/4$
y	$+\infty$		0	$-\infty$



$T = \pi$

اختلاف حداکثر و حداقل تابع $f(x) = 3 - 2\cos 3x$

$y_{min} = 3 + 2(1) = 1$

$y_{max} = 3 - 2(-1) = 5$

اختلاف حداکثر و حداقل تابع $f(x) = 3\sin x/2 + k$ برابر ۸ است k کدام است؟

$y = 3(1) + k = 3 + k$

$y = 3(-1) + k = -3 + k$

اختلاف = ۸

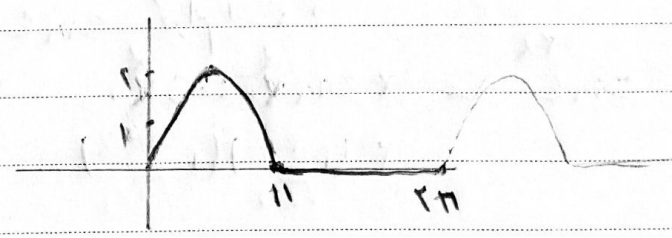
$(3+k) - (-3+k) = 8$

$6 \neq 8$ غیر ممکن

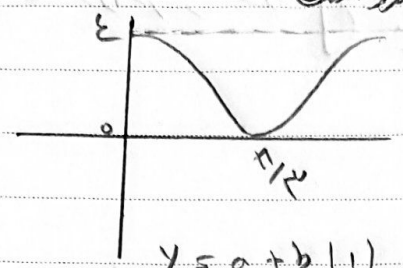
نمودار $f(x) = \sin x + |\sin x|$ در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ کدام است؟

$0 < x < \pi$ اول و دوم $\rightarrow y = \sin x + \sin x = 2\sin x$

$\pi < x < 2\pi$ سوم و چهارم $y = \sin x - \sin x = 0$



نمودار $f(x) = a + b\cos 3x$ در زیر رسم شده است
حاصل $\sqrt{ab}$ کدام است؟



۱) ۴
۲) ۲
۳) ۱
۴) صفر

$y = a + b(1) = a + b = 4$
$y = a + b(-1) = a - b = 0$ +

$2a = 4 \Rightarrow a = 2$
$2 + b = 4 \Rightarrow b = 2$

$\sqrt{ab} = \sqrt{2 \times 2} = 2$

نسبت‌های مثلثاتی دو برابر کمان

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

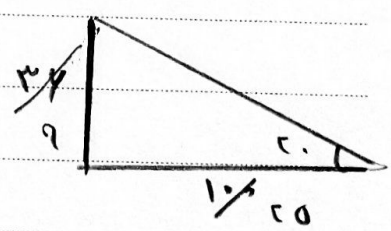
$\cos 2\alpha$

$\tan 2\alpha$

اگر $\tan 20^\circ = 0.36$ مقدار $\sin 40^\circ$ کدام است؟

$\sin \overset{2\alpha}{40^\circ} = 2\sin \overset{\alpha}{20^\circ}\cos \overset{\alpha}{20^\circ}$

$2\left(+\frac{9}{\sqrt{706}}\right)\left(+\frac{25}{\sqrt{706}}\right)$



$x^2 = 9^2 + 25^2$

$x = 81 + 625 = 706$

$x = \sqrt{706}$

اگر $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ و α در ربع دوم باشد مقدار $\cos(2\alpha + \frac{\pi}{2})$ کدام است؟

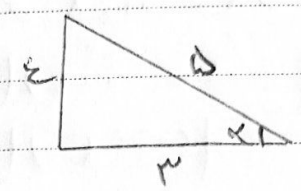
$$\cos(2\alpha + \tfrac{\pi}{2}) = -\sin 2\alpha$$

صورت cos در ربع دوم منفی می‌باشد

$$= -2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$= -2\left(+\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{3}{5}\right)$$

$$= \frac{24}{25}$$



اگر $\sin x + \cos x = \frac{1}{3}$ باشد مقدار $\sin 2x$ کدام است؟

$$\sin x + \cos x = \frac{1}{3}$$

توان ۲

$$(\sin x + \cos x)^2 = \frac{1}{9}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x = \frac{1}{9}$$

$$1 + \sin 2x = \frac{1}{9}$$

$$\sin 2x = \frac{1}{9} - 1 = \frac{-8}{9}$$

$$\cos 2\alpha = \underbrace{\cos^2\alpha}_{1-\sin^2\alpha} - \underbrace{\sin^2\alpha}_{(1-\cos^2\alpha)}$$

$$\to 1 - 2\sin^2\alpha$$

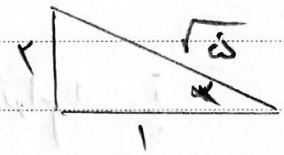
$$\to 2\cos^2\alpha - 1$$

اگر $\tan x = 2$ مقدار $\cos 2x$ کدام است؟

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

$$= 2\left(\pm\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - 1$$

$$= \frac{2}{5} - 1 = -\frac{3}{5}$$



تاریخ:

موضوع:

اگر $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = \frac{2}{3}$

مقدار $\cos 2\alpha$ کدام است؟

$$\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = \frac{2}{3}$$

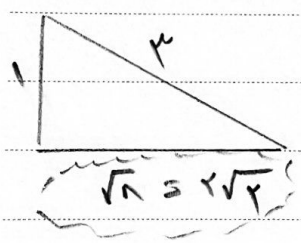
$$(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = \frac{2}{3}$$

$$(\cos 2\alpha)(\quad 1 \quad) = \frac{2}{3}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{2}{3}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

اگر $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ ، α در ربع دوم باشد مقدار $\cot 2\alpha$ کدام است؟



$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} =$$

$$= \frac{2\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)}{1-\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{8}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{7}{8}} = \frac{8}{7\sqrt{2}}$$

$$\cot 2\alpha = \frac{1}{\tan 2\alpha} = \frac{7\sqrt{2}}{8}$$

اگر $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = \frac{5}{8}$ باشد مقدار $|\sin 2\alpha|$ کدام است؟

$$\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = \frac{5}{8}$$

$$(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha = \frac{5}{8}$$

$$1 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha = \frac{5}{8} \Rightarrow -2\sin^2\alpha\cos^2\alpha = -\frac{3}{8}$$

$$\sin^2\alpha\cos^2\alpha = \frac{3}{16} \xrightarrow{\text{جذر}} \sin\alpha\cos\alpha = \pm\frac{\sqrt{3}}{4} \quad \times 2$$

$$\sin 2\alpha = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$|\sin 2\alpha| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

موضوع: تاریخ:

اگر $\tan 2x + \cot 2x = 4$ باشد مقدار $\sin 4x$ کدام است؟

۱) ۲

۲) $\frac{1}{2}$

۳) -2

۴) $-\frac{1}{2}$

$$\frac{\sin 2x}{\cos 2x} + \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = 4$$

$$\frac{\overbrace{\sin^2 2x + \cos^2 2x}^{1}}{\sin 2x \cos 2x} = 4$$

$$4 \sin 2x \cos 2x = 1$$

$$2 \sin 2x \cos 2x = \frac{1}{2}$$

$$\sin 2(2x) = \frac{1}{2}$$

$$\sin 4x = \frac{1}{2}$$

$$\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}$$

$$4 = \frac{2}{\sin 4x} \Rightarrow \sin 4x = \frac{1}{2}$$

اگر $\tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2} = 1$ مقدار $\tan x$ کدام است؟

$$\frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} - \frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} = 1$$

$$\frac{\sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = 1 \qquad \frac{-\cos x}{\frac{1}{2} \sin x} = 1 \qquad -2 \cot x = 1$$

$$\cot x = \frac{1}{-2}$$

$$\tan x = -2$$

$$\tan \alpha - \cot \alpha = -2 \cot 2\alpha$$

$$1 = -2 \cot x$$

$$-\frac{1}{2} = \cot x \Rightarrow \tan x = -2$$

تاریخ:

موضوع:

سوالات مرتبط با نصف کمان

$$\cos 2\alpha = \begin{cases} 2\cos^2\alpha - 1 \\ 1 - 2\sin^2\alpha \end{cases}$$

$$1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha \qquad \boxed{\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha) = \cos^2\alpha}$$

$$1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha \qquad \boxed{\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha) = \sin^2\alpha}$$

مقدار $\sin 22.5^\circ$ کدام است؟

$$22.5 \xrightarrow{\text{نصف}} 45$$

$$\frac{1}{2}(1-\cos \underbrace{2\alpha}_{45}) = \sin^2 \underbrace{\alpha}_{22.5}$$

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sin^2 22.5$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right) = \sin^2 22.5$$

$$\frac{2-\sqrt{2}}{4} = \sin^2 22.5 \qquad \boxed{+\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}} = \sin 22.5}$$

مقدار $\cos \frac{\pi}{12}$ کدام است

$$\frac{1}{2}(1+\cos \underbrace{2\alpha}_{\frac{\pi}{6}}) = \cos^2 \underbrace{\alpha}_{\frac{\pi}{12}}$$

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \cos^2 15$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right) = \cos^2 15$$

$$\frac{2+\sqrt{3}}{4} = \cos^2 15 \qquad +\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} = \cos 15$$