

$\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)] =$ چنانچه

$x \rightarrow 1$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} = [1^+] = 1$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} = [1^-] = 2$

در نقاط خاصه
مثبت نسبت به عدد در آن

$\lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{x}{f(x)} \right] =$ چنانچه

$\lim_{x \rightarrow 2^+} \left[\frac{x}{2^+} \right] = [2^-] = 1$

$\lim_{x \rightarrow 2^-} \left[\frac{x}{2^-} \right] = [2^+] = 2$

چنانچه

چنانچه

حالات حدی بدون چند صیغه و تقریر مطلوب

تعمیر اول جای نزاری عدداست

حالا اگر چه حالت صیغه بوجود نرود، وضع ایجاب هم می رود

حالات صیغه نکرانه

سوال) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin \frac{\pi x}{2}}{x^2 + 1} = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{5} = \frac{1}{5}$

حدی
حدی

سوال) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x^2 - 1} = \frac{\sqrt{-1} - 1}{-1} = \frac{-1 - 1}{-1} = 1$

$x \rightarrow 0$

$x \rightarrow 0$

$\frac{0}{0}$

سوال $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x \cos \left(\frac{\pi x}{2} \right)} = \frac{-1 - 1}{(-1) \cos \frac{\pi}{2}} = \frac{-2}{-1 \times \frac{1}{2}} = 1$

مثال) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 7}{x^2 + 1} = \frac{2+2-7}{2+1} = \frac{-3}{3} = -1$

مثال) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 7}{x^2 - 4} = \frac{2+2-7}{2-4} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$

حذف عامل مشترک
یا تقسیم
یا با هم ضرب
قاعده ل'Hospital

مثال) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+2)} = \frac{2+3}{2+2} = \frac{5}{4}$

مثال) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(1x+3)}{(x-2)(1x+2)} = \frac{5}{4}$

۲	۱	۱	-۲
	۱	۲	-
۲	۱	۰	-۴
	۱	۲	-

روش ل'Hospital \rightarrow مخصوص $\frac{0}{0}$ است

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f}{g} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'}{g'}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 7}{x^2 - 4} = \frac{0}{0} = \frac{2x + 1}{2x} = \frac{5}{4}$$

جواب) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{rx^r + \epsilon x^r - x - d}{rx^r + \epsilon x - v} = ?$ $\frac{r + \epsilon - 1 - d}{r + \epsilon - v} = \frac{0}{0}$

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(rx^r + \gamma x + d)}{(x-1)(rx + v)} = \frac{r + \gamma + d}{r + v} = \frac{10}{1}$

	r	ε	-1	-d
	r	γ	d	-

فرضاً Hop $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\gamma x^r + \lambda x - 1}{\gamma x + \epsilon} = \frac{\gamma + \lambda - 1}{\gamma + \epsilon} = \frac{11}{10}$

جواب) $\lim_{x \rightarrow -r} \frac{x^r + x + 1}{rx^r + x - 1} = \frac{-r - r + 1}{r + r - 1} = \frac{0}{0} = \frac{0}{0}$

$\lim_{x \rightarrow -r} \frac{(x+r)(x^r - rx + d)}{(x+r)(rx - d)} = \frac{\epsilon + \epsilon + d}{-\epsilon - d} = \frac{10}{-9}$

-r	1	0	1	1
	1	-r	d	-

Hop $\lim_{x \rightarrow -r} \frac{rx^r + 1}{\epsilon x - 1} = \frac{10 + 1}{-r - 1} = \frac{10}{-9}$

? إذاً a, b $\sim \epsilon$ $\forall \epsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ $\rightarrow f(x) = \frac{x^r + ax + b}{x^r - 1}$ في حد ما

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^r + ax + b}{x^r - 1} = \frac{1 + a + b}{1 - 1} = \frac{0}{0}$ $1 + a + b = 0$
 $a + b = -1$

فرضاً: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{rx + a}{rx^r} = \frac{r + a}{r} = \epsilon$
 $r + a = r\epsilon$
 $a = r(\epsilon - 1)$ $b = -1$

چہ مواقع جب راستہ در حد صہمی ہوتا ہے؟

۱۱ حد ارضی نمودار

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\bigcirc |x^2 - 4|}{\bigcirc} \left\{ \begin{array}{l} = \text{حرارت} \\ = \text{حد صہمی} \end{array} \right.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\bigcirc |x^2 - 4|}{\bigcirc} = \lim_{x \rightarrow 1} \dots$$

۱۲ ریم لاری قدر مطلق

۱۳ اعداد صحیح کتنے جزو صحیح

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\bigcirc [\sqrt{x}]}{\bigcirc} \left\{ \begin{array}{l} = \text{حرارت} \\ = \text{حد صہمی} \end{array} \right.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\bigcirc [\sqrt{x}]}{\bigcirc} = \lim \dots$$

۱۴ وقت جو - حد صہمی ہوتا ہے (بہائیت)

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 1) [\sqrt{x}] = \lim_{x \rightarrow 2} (4 - 1) [\sqrt{2}] = 3 \times 1 = 3$$

مثال $\lim_{x \rightarrow 4} (x^2 - 1) [\sqrt{x}]$

$x \rightarrow 4$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} (x^2 - 1) x^2 = (16 - 1) \times 4 = 60$$

$x \rightarrow 4^+$

$x > 4$

$\sqrt{x} > 2$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} (x^2 - 1) x^1 = (16 - 1) \times 4 = 60$$

$x \rightarrow 4^-$

$x < 4$

$\sqrt{x} < 2$

در $x = 4$ حد ندارد

$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1) [\sqrt{x}]$

$x \rightarrow 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 1) x^1 = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 - 1$$

$x \rightarrow 1^+$

$x \rightarrow 1^+$

مطلق $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1) x^0 = \lim_{x \rightarrow 1} \dots$

$x \rightarrow 1^+$

$x \rightarrow 1$

$\sqrt{x} < 1$

بہائیت $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1) x^0 = \dots$

در جز مخرج اگر داخل جز مخرج، اوجه بود
 میت اینه صفر نشود داشته باشه جواب اینه حد دارد
 در نام داخل جز مخرج، اوجه بود، در ایا صفر باشه

مثال) $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 1) [x^2]$

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0^+ \\ x \rightarrow 0^-}} (x^2 + 1) [(0^+)^2] = (x^2 + 1) [0^+]$
 $(x^2 + 1) \times 0 = 0$



مثال) $\lim_{x \rightarrow 1} (2x + 1) \left[\frac{x^2 - 2x}{x^2 - 2x + 1} \right]$

$\lim_{\substack{x \rightarrow 1^+ \\ x \rightarrow 1^-}} (2x + 1) [(x-1)^2 - 1]$
 $(2x + 1) [(0^+)^2 - 1]$
 $(2x + 1) [(-1)^2]$
 $(2 + 1) \times 1 = 3$

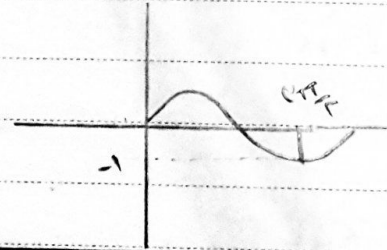


$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{b}{2a} = \frac{0}{2} = 0$

مثال) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} [\sin x]$



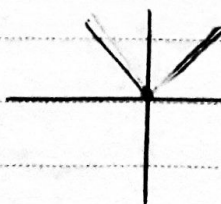
$\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+ \\ x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-}} [(1-1)^+] = -1$



$\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 2x + \epsilon) [1/x]$

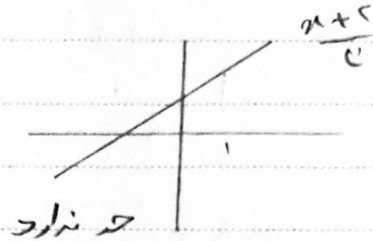
$= \epsilon \times [0^+]$
 $= \epsilon \times 0$
 $= 0$

حد دارد



$$\lim_{x \rightarrow r} (rx^r + rx - 1) \left[\frac{x^r}{r} \right] = 0 \times 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^r - (rx + r)) \left[\frac{x+r}{r} \right]$$



$$\lim_{x \rightarrow 1^+} 1 \times [1^+] = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} 1 \times [1^-] = 1 \times 0 = 0$$

خط مستقیم

? خط مستقیم $x = -r \rightarrow f(x) = (x^r + rx + r) \left[\frac{x}{r} \right]$ مع ϵ

$$x^r - rx + r = 0$$

$$-rx = -r \quad r = \frac{\epsilon}{x}$$

? خط مستقیم $x = r \rightarrow f(x) = (x^r - r) \left[\frac{x^r + rx + 1}{r} \right]$ مع ϵ

$$x^r + rx + 1$$

$$x = r$$

$$\text{مثلاً } x = -\frac{b}{ra} = \frac{-k}{r(1)} = r$$

$$k = -r$$

خط مستقیم $x \leq \epsilon, x \geq 1 \rightarrow f(x) = (x^r + ax + b) \left[\sqrt{x} \right]$ مع ϵ

$$(x+1)(x-\epsilon) = x^r - ax + \epsilon$$

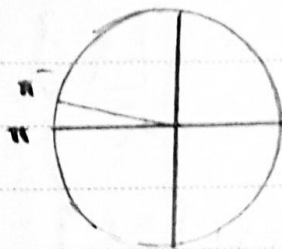
? خط مستقیم a, b

$$x^r + ax + b \Rightarrow \begin{cases} a = -a \\ b = \epsilon \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} [\sin x + \cos x]$$

$$= [1^+ + (-1)^+]$$

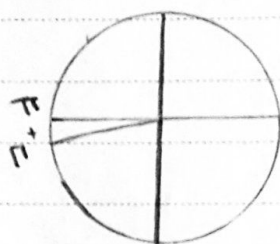
$$= [(-1)^+] = -1$$



$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} [\sin x + \cos x]$$

$$= [-1^- + (-1)^+]$$

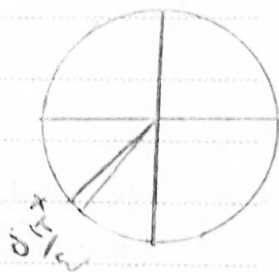
$$= [(-1)^?] = -1$$



$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} \left[\sqrt{r} \left(\sin x \frac{1}{\sqrt{r}} + \cos x \frac{1}{\sqrt{r}} \right) \right]$$

$$= \left[\sqrt{r} \sin \left(\pi + \frac{\pi}{2} \right) \right] = \left[\sqrt{r} \sin \frac{3\pi}{2} \right]$$

$$= \left[\sqrt{r} \left(-\frac{\sqrt{r}}{r} \right) \right] = [(-1)] = -1$$



$$\lim_{x \rightarrow r^+} \frac{[x]^r - [x^r]}{x^r - \varepsilon} = \lim_{x \rightarrow r^+} \frac{r^r - [\varepsilon^+]}{x^r - \varepsilon} = \frac{r^r - \varepsilon}{r^r - \varepsilon} = \frac{0}{0}$$

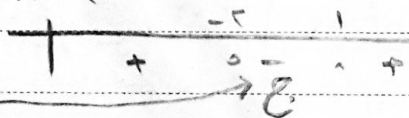
حدهای نام قدر مطلق
- وقتی داخل قدر مطلق منفی شود
حد چپ را راست مهم است
- با توجه به تغییر علامت اگر قدر مطلق
خدهای منفی، سادگی کار است
و اگر چیزی باقی ماند، در سرانجام $\frac{0}{0}$ شدن

سوال) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{|x - 2|}$ $\frac{2}{2-2} = \frac{2}{0} +$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x + 2) = 2 + 2 = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 4}{-(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} -(x + 2) = -(2 + 2) = -4$$

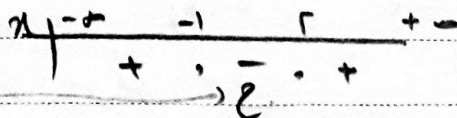
سوال) $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{|x^2 + x - 2|}{x^2 + x}$ $x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$



$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{-(x^2 + x - 2)}{x^2 + x} = \frac{0}{0}$$

$$\text{Hop} = \frac{-(2x + 1)}{2x} = \frac{-(-1)}{1} = \frac{1}{1}$$

سوال) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x^2 - x - 2|}{2x - \sqrt{x^2 + 12}}$ $x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$



(۰/۰) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x^2 - x - 2)}{2x - \sqrt{x^2 + 12}} = \frac{0}{0}$

$$\text{Hop} = \frac{-(2x - 1)}{2 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 12}}} = \frac{-1}{2 - \frac{2}{2}} = \frac{-1}{1} = -1$$

? برای $a=3 \rightarrow f(x) = \frac{(x-3)\sqrt{x^2-4x+9}}{x-3}$ (جواب)

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(x-3)\sqrt{x^2-4x+9}}{x-3} = \frac{1 \times |x-3|}{x-3} = \frac{-(x-3)}{(x-3)^{-1}} \rightarrow 1$$

? برای است $\lim_{x \rightarrow -} \frac{|x| - [x]}{r(x) + [x]}$ (جواب)

$$\lim_{x \rightarrow -} \frac{-(x) - (-1)}{-r(x) + (-1)} = \frac{-x+1}{-r(x)-1} = \frac{-+1}{-1} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} |[x] + [-x]| = |-1| = 1 \quad [A] + [-A] = \begin{cases} 0 & A \in \mathbb{Z} \\ -1 & A \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} |[x] + [-x]| = |-1| = 1$$

$$f(x) = \begin{cases} \dots & \text{if } x \in \mathbb{Z} \\ \dots & \text{if } x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \dots$
 $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} f(x) = \dots$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{2x}{x^2-1} - \left| \frac{x}{x+1} \right| \rightarrow \frac{-2}{0} - \left| \frac{-1}{0} \right|$$

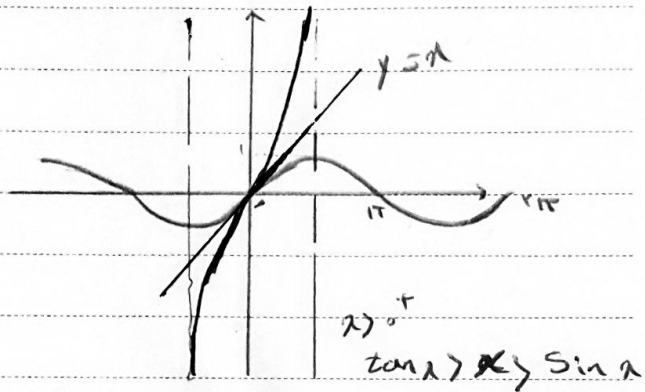
$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{2x}{(x-1)(x+1)} + \frac{x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{2x + x(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x^2+x}{(x-1)(x+1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{-1}{-1-1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow r} \frac{x+r}{x^2-rx} + \frac{r[x]}{r-x}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow r} \frac{x+r}{x^2-rx} + \frac{r[x]}{r-x} &= \lim_{x \rightarrow r} \frac{x+r}{x(x-r)} + \frac{r(1)}{-(x-r)} = \frac{x+r-rx}{x(x-r)} = \frac{-(x-r)}{x(x-r)} \\ &= \frac{-1}{r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{\sin x}{x} \right] &= \left[\frac{x}{x} \right] \\ &= [1] = 1 \end{aligned}$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{x}{\sin x} \right] = \left[\frac{x}{x} \right] = [1^+] = 1$$

$x < 0$ $\sin x > x > \tan x$

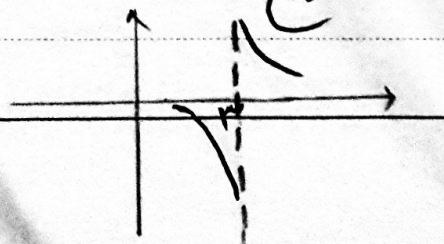
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{\tan x}{x} \right] = \left[\frac{x}{x} \right] = [1^+] = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{\tan x}{x} \right] = \left[\frac{x}{x} \right] = [1^+] = 1$$

حل ۲۴

حدی نفاذ
دقیقی جواب حد طری سوز
حتمی عدلت آن، امنت سینه
این کار، محدودت نیار، تفسیر عدلت
مخرج دارد

$$\lim_{x \rightarrow c^+} \frac{x^2+1}{x-c} = \frac{9+1}{3^+-c} = \frac{10}{0^+} = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow (-\varepsilon)^+} \frac{x^2 - \varepsilon}{x^2 + 2x - \varepsilon} = \frac{14 - \varepsilon}{14 + 12 - \varepsilon} = \frac{12}{26} = \frac{6}{13} \rightarrow -\infty$$

$x^2 + 2x - \varepsilon = 0$
 $x = 1$
 $x = -2 - \varepsilon$

$$\lim_{x \rightarrow (-\varepsilon)^-} \frac{x^2 - \varepsilon}{x^2 + 2x - \varepsilon} = \frac{14 - \varepsilon}{14 - 12 - \varepsilon} = \frac{12}{2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4x + 9} = \frac{9 - 1}{9 - 12 + 9} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \rightarrow \infty$$

$x^2 - 4x + 9 = 0$
 $(x - 2)^2 = 0$
 $x = 2$
 $x = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + [-x]}{\sqrt{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + [-1]}{\sqrt{x-1}} = \frac{1^2 - 1}{\sqrt{1-1}} = \frac{0}{0} = ?$$

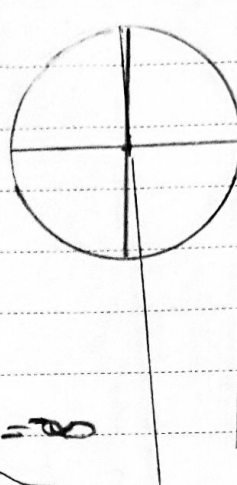
$$= \frac{x(x-1)(x+1)}{\sqrt{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} x(\sqrt{x-1})(x+1) = 1(0)(2) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2^+} \frac{\sin x + 1}{x \sin x - 1} = \frac{1/2 + 1}{\pi(1/2) - 1} = \frac{3/2}{\pi/2 - 1} \rightarrow +\infty$$

$x \rightarrow \pi/2$
 $\sin x \rightarrow 1/2$
 $x \sin x \rightarrow 1$
 $x \sin x - 1 \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan x = \tan \frac{\pi}{2}^+ = +\infty$$

مع دهم انتریات جز اول است.

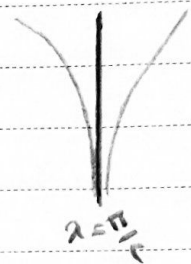


$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\cos x + r}{\sin x - 1} = \frac{0 + r}{1 - 1} = \frac{r}{0} = +\infty$$

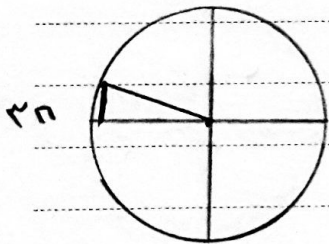


$$\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}^+ \Rightarrow \sin x < 1$$

$$\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}^+ \Rightarrow \sin x - 1 < 0$$



$$\lim_{x \rightarrow r^-} \frac{[x] - r}{\cos \pi x + 1} = \lim_{x \rightarrow r^-} \frac{r - r}{\cos \pi x + 1} = \lim_{x \rightarrow r^-} \frac{-1}{\cos \pi x + 1} = \frac{-1}{-1 + 1} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

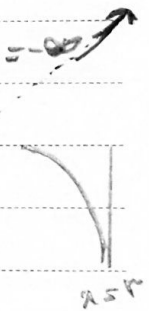


$$x < r$$

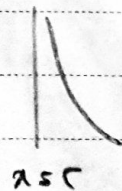
$$\pi x < \pi r$$

$$\cos \pi x > -1$$

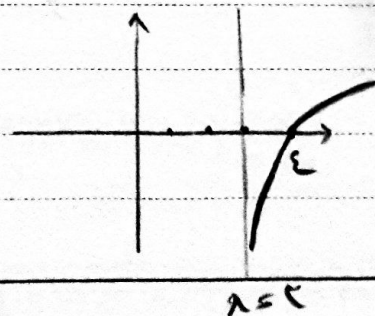
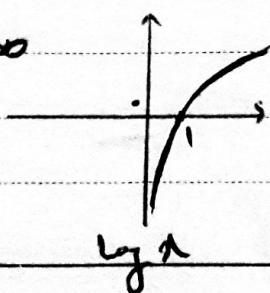
$$\cos \pi x + 1 > 0$$



$$\lim_{x \rightarrow r^+} \frac{x + r}{\sqrt{x - r}} = \frac{r + r}{\sqrt{r - r}} = \frac{r}{0^+} = +\infty$$



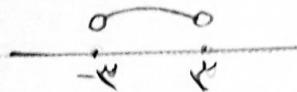
$$\lim_{x \rightarrow r^+} \lg(x - r) = -\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow c^+} \frac{[x]}{\sqrt{9-x^2}} \quad \lim_{x \rightarrow -c^+} \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{-c}{\sqrt{9-9}} = \frac{-c}{0^+} = -\infty$$

$$\begin{aligned} 9-x^2 &> 0 \\ -x^2 &> -9 \\ x^2 &< 9 \end{aligned}$$

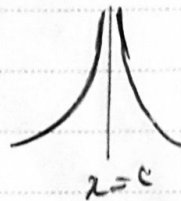
$$-3 < x < 3$$



اگر a, b کدامند؟ $\lim_{x \rightarrow c} \frac{x^2-1}{x^2+ax+b} = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{9-1}{9+3a+b} = \frac{8}{9+3a+b} = +\infty$$

برای $\frac{8}{9+3a+b} = +\infty$ باید $9+3a+b = 0$ باشد.
 اگر $3 = 3$ و $3 = 3$ باشد.



$$(x-c)^2 = x^2 - 2cx + c^2 \quad \begin{cases} a = -2 \\ b = c^2 \end{cases}$$

چند مثال

حد دربی نهایت
 برای حد تابع $x \rightarrow \infty$ می باشد

حالت واضح مهم در این وضعیت $\frac{\infty}{\infty}$ است

مقدار تابع در برای حد دربی نهایت معرّفه نیست

