$$\lim_{x\to -3^+} \frac{[x]}{\sqrt{9-x^2}} \qquad \lim_{x\to -3^+} = \frac{-3}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{-3}{\sqrt{9-9}} = \frac{-3}{0^+} = -\infty$$

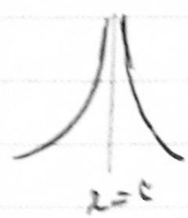
$9-x^2>0$
$-x^2>-9$
$x^2<9$

$-3<x<3$

اگر $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-1}{x^2+ax+b} = +\infty$ ، a,b کدام است؟

$$\lim_{x\to 3} \frac{9-1}{9+3a+b} = \frac{8}{9+3a+b} = +\infty$$

۳ = مثبت ← ریشه ∞+ =
۳ = منفی



مربع $(x-3)^2 = x^2-6x+9$ $\begin{cases} a=-6 \\ b=9 \end{cases}$

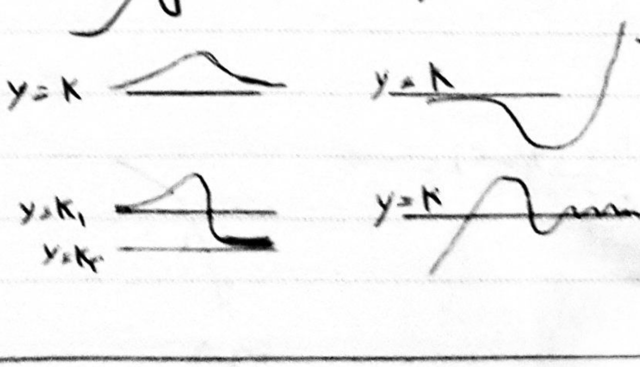
جلسه ۳۷

حد در بی‌نهایت

بررسی حد تابع در $x\to\infty$ می‌باشد

حالت رایج مبهم در این وضعیت $\frac{\infty}{\infty}$ است

نمودار تابع در بررسی حد در بی‌نهایت محدود به ۳ شکل زیر است.



Subject ۱۴۵
Date

مثال) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3+x^2-4x+5}{x^3-6x+7} = \dfrac{\infty}{\infty} \quad \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3\left(2+\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2}+\frac{5}{x^3}\right)}{x^3\left(1-\frac{6}{x^2}+\frac{7}{x^3}\right)}$

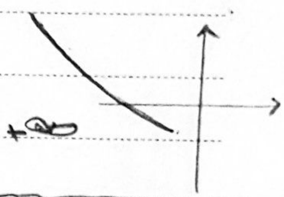
$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2+0+0+0}{1-0+0} = 2 \qquad y=2 \qquad \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3}{x^3} = 2$

مثال) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-6x+5}{2x^3-x^2+x-7} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{2x^3} = \dfrac{1}{2x} = \dfrac{1}{\infty} = 0$

$\boxed{y=0}$

مثال) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2x^3-x+5}{x^2+5x-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2x^3}{x^2} = -2x$

$= -2(-\infty) = +\infty$



وقتی درجه صورت و مخرج با هم مساوی باشند خروجی یک عدد است

درجه مخرج بیشتر از صورت باشد " صفر است.

درجه صورت بیشتر از مخرج باشد " ∞ خواهد بود

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2+3x-\sqrt{x^2+6x-1}}{x^2-6x+2} = \dfrac{\infty}{\infty}$

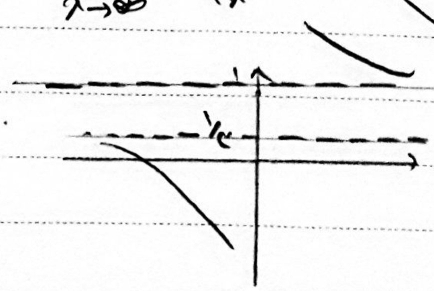
$= \dfrac{2x^2}{x^2} = 2$

$\lim \dfrac{2x+3+\sqrt{x^2-6x+1}}{3x-1} = \dfrac{\infty}{\infty}$

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x+\sqrt{x}}{3x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x+|x|}{3x}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} = \dfrac{2x-x}{3x} = \dfrac{1}{3}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} = \dfrac{2x+x}{3x} = 1$

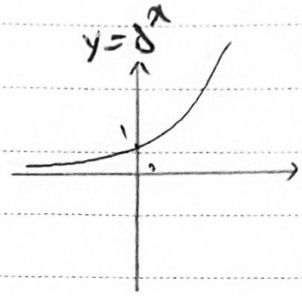


S.SALEH

Subject ١٤٧

Date

مثال) $\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{3+5^x}$



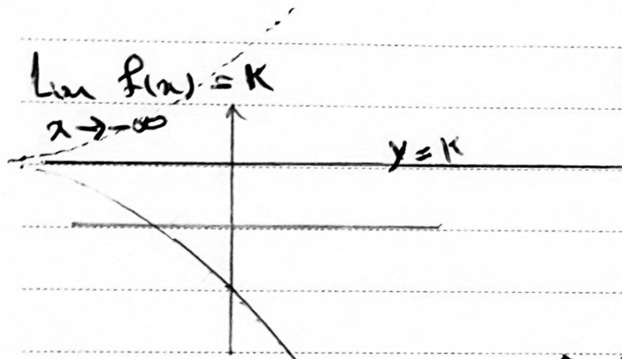
مثال) $\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{3+5^x}$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{3+(+\infty)}=\frac{2}{+\infty}=0$

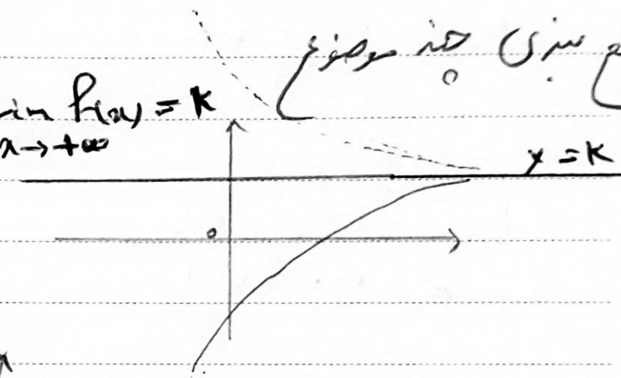
$\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{3+0}=\frac{2}{3}$

جمع بندی چند موضوع

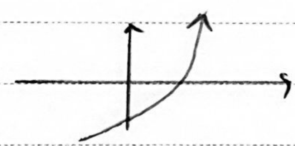
$\lim_{x\to-\infty} f(x)=K$



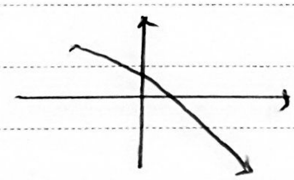
$\lim_{x\to+\infty} f(x)=K$



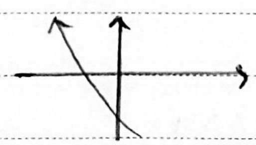
$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$



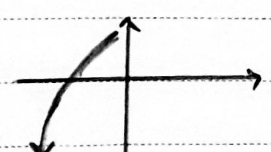
$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$



$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

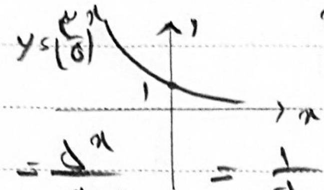


$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$



مثال) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x^2}=\frac{\text{عدد محدود بین ۱ و ۱-}}{\infty}=0$

مثال) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3^x+5^x}{3^{x+1}+5^{x+1}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5^x\left((\frac{3}{5})^x+1\right)}{5^x\left((\frac{3}{5})^x \times 3 + 5\right)} = \lim \dfrac{0+1}{0\times 3+5} = \dfrac{1}{5}$



راه دوم $= \dfrac{5^x}{5^{x+1}} = \dfrac{1}{5}$

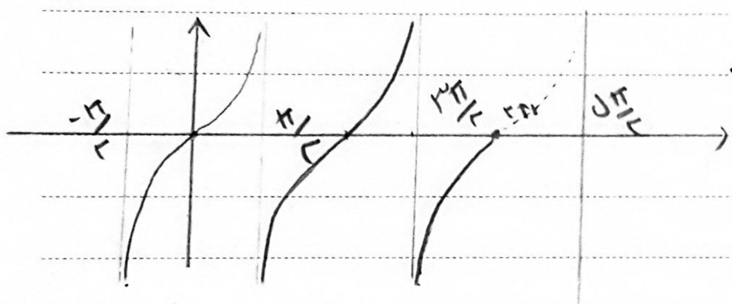
مثال) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-x|x|}{2x^2+5}$

$x>0$: $\lim \dfrac{x^2-x(x)}{2x^2+5} = \dfrac{0}{2x^2+5} = 0$

$x<0$: $\lim \dfrac{x^2-x(-x)}{2x^2+5} = \dfrac{2x^2}{2x^2} = 1$

ابتدا تابع $f(x)=\tan x$ را در بازه $-\frac{\pi}{2}<x<2\pi$ رسم کنید

سپس حدهای زیر را بررسی کنید.



$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty \qquad \lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{2}^+} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) = +\infty \qquad \lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{2}^-} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \dfrac{3}{2+f(x)} = \dfrac{3}{2+(-\infty)} = \dfrac{3}{-\infty} = 0$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \dfrac{3}{2+f(x)} = \dfrac{3}{2+(+\infty)} = \dfrac{3}{+\infty} = 0$

Subject ۱۴۸

Date

«پیوستگی تابع در یک نقطه»

تابع f را در نقطه x_0 پیوسته می‌گوییم

اگر $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

مقدار تابع

به عبارتی

$f(x)^+ = f(x)^- = f(x_0)$

$L^+ = L^- = f(x_0)$

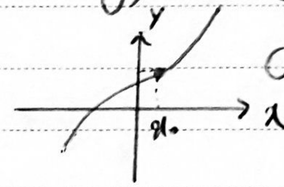
حد تابع در x_0^+ با حد تابع در x_0^- برابر باشند

برابر با مقدار تابع باشد

حالات مختلف بررسی پیوستگی

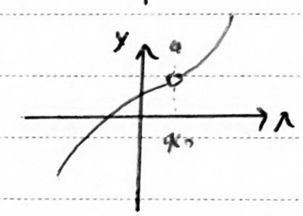
حالت اول: تابع در x_0 پیوسته است

$L^+ = L^- = f(x_0)$



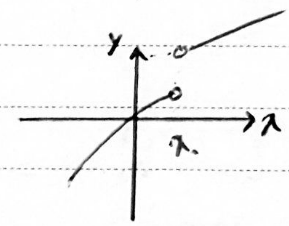
حالت دوم: تابع x_0 حد دارد اما پیوسته نیست

$L^+ = L^- \neq f(x_0)$



حالت سوم: تابع در x_0 حد ندارد و هیچ نوع پیوستگی ندارد

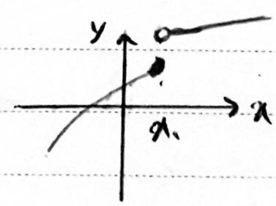
$L^+ \neq L^- \neq f(x_0)$



حالت چهارم: حد ندارد، پیوسته نیست فقط پیوستگی

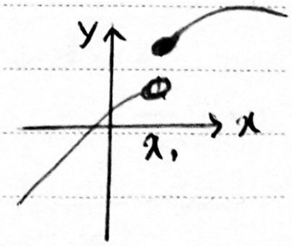
چپ دارد

$L^+ \neq L^- = f(x)$



حالت پنجم: حد ندارد و پیوسته نیست

فقط پیوستگی راست دارد.



$L^- \neq L^+ = f(x)$

مثال) $f(x)=x^3+2x^2-1$ بررسی پیوستگی تابع در $x_0=2$

$\lim\limits_{x\to 2^+} = 8+8-1=15$

$\lim\limits_{x\to 2^-} = 8+8-1=15$

در $x=2$ پیوسته

$f(x)=f(2)=8+8-1=15$

چون حدهای ما در یک نقطه خاص پیوسته هستند.

مثال) $f(x)=\sin 2x+\cos x$ بررسی پیوستگی تابع در $x_0=\frac{\pi}{4}$

$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}^+} \sin 2x+\cos x = \sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{4} = 1+\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}^-} \sin 2x+\cos x = \sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{4} = 1+\frac{\sqrt{2}}{2}$

$f(\frac{\pi}{4}) = \sin 2x+\cos x = \sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{4} = 1+\frac{\sqrt{2}}{2}$

در $x=\frac{\pi}{4}$ پیوسته است.

بررسی پیوستگی تابع $f(x)=|x^2-1|+x$ در $x_0=1$

$x^2-1=0$ ، $x^2=1$ ، $x=\pm1$

	-1		1	
$+$		$-$		$+$

$\lim\limits_{x\to 1^+} x^2-1+x = 1-1+1=1$

$\lim\limits_{x\to 1^-} -x^2+1+x = -1+1+1=1$

$f(1)=|1-1|+1=1$

در $x_0=1$ پیوسته است.

Subject ۱۵۰
Date

بررسی پیوستگی تابع $f(x)=\sqrt[3]{x-2}+x+1$ در $x_0=2$

$\lim_{x\to 2^+} = 0+2+1=3$

$\lim_{x\to 2^-} = 0+2+1=3$

$f(2)=0+2+1=3$

در $x_0=2$ پیوسته است

بررسی پیوستگی تابع در $x=2$

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x<2 \\ x[-x]+2 & x>2 \\ 5 & x=2 \end{cases}$$

$\lim_{x\to 2^+} x[-x]+2 = 2[-(2)^+]+2 = 2[(-2)^-]+2 = 2(-3)+2 = -4$

$\lim_{x\to 2^-} x^2+1 = 4+1=5$

$f(2)=5$

تابع پیوسته نیست و نقطه پیوستگی چپ دارد.

بررسی پیوستگی تابع $f(x)=(x^2-1)[\sqrt{x}]$ در $x_0=4$

$\lim_{x\to 4^+} (16-1)[\sqrt{4^+}] = 15[2^+] = 15\times 2 = 30$

$\lim_{x\to 4^-} (16-1)[\sqrt{4^-}] = 15[2^-] = 15\times 1 = 15$

$f(4) = (16-1)\times 2 = 30$

در $x_0=4$ پیوسته نیست فقط پیوستگی راست دارد.

بررسی پیوستگی تابع $f(x)=(x^2-1)[\sqrt{x}]$ در $x_0=1$

$\lim_{x\to 1^+} (1-1)[\sqrt{1^+}] = 0\times[1^+] = 0\times 1 = 0$

$\lim_{x\to 1^-} (1-1)[\sqrt{1^-}] = 0\times[1^-] = 0\times 0 = 0$

$f(1) = (1-1)\times 1 = 0$

در تست جز صحیح ٤ اگر ضریب صفر شود پیوسته می شود

S.SALEH

Subject ۱۵۱
Date

بررسی پیوستگی تابع $f(x) = [x^2 - 2x]$ در $x_0 = 1$

$$\lim_{x \to 1^+} [1-2] = [(-1)^+] = -1$$

$x^2 - 2x > -1$

$x^2 - 2x + 1 > 0$

$(x-1)^2 > 0$

$-\infty$	1	$+\infty$
$+$	0	$+$

$$\lim_{x \to 1^-} [1-2] = [(-1)^+] = -1$$

$$f(1) = [1-2] = [-1] = -1$$

در $x_0 = 1$ پیوسته است.

بررسی پیوستگی تابع $f(x) = \left[\frac{x+3}{x-1}\right]$ در $x_0 = 2$

$$\lim_{x \to 2^+} \left[\frac{2+3}{2-1}\right] = \left[\frac{5^-}{1}\right] = 4$$

$\frac{x+3}{x-1} < 5$

$\frac{x+3}{x-1} - 5 < 0$

$\frac{x+3-5x+5}{x-1} < 0$

$\frac{-4x+8}{x-1} < 0$

$$\lim_{x \to 2^-} \left[\frac{2+3}{2-1}\right] = \left[\frac{5^+}{1}\right] = 5$$

$$f(2) = \left[\frac{5}{1}\right] = 5$$

	1		2	
$-$		$+$		$-$

پیوسته نیست در $x = 2$ فقط پیوستگی چپ دارد

$$f(x) = \left[\frac{x+3}{x-1}\right] = \left[\frac{7+3}{7-1}\right] = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$
$x_0 = 7$

پس پیوستگی دارد

S.SALEH

Subject ۱۵۲
Date

در توابع شکل براکتی: اگر x_0 داده شد الف) داخل براکت را صحیح کرده پیوسته است

$f(x) = x^2[\sqrt{x}]$ $x_0=4$

ب) داخل براکت را صحیح کرد

۱) پشت براکت را هم صفر کرد ← پیوسته

$f(x) = (x^2-16)[\sqrt{x}]$ در $x_0=4$ پیوسته است

۲) داخل براکت در min باشد ← پیوسته

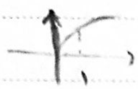
$f(x) = (x+2)[x^2-2x]$ $x=1$ پیوسته است

$\min x = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2} = 1$

$x=1$

۳) در غیر اینصورت ← ناپیوسته

$f(x) = (x+1)[\sqrt{x}]$ $x_0=1$ در پیوسته نیست



تابع $f(x) = \begin{cases} x^2+ax & x>2 \\ [x]+b & x<2 \\ 5 & x_0=2 \end{cases}$ در $x_0=2$ پیوسته است a و b چرا صفر؟

$\lim_{x\to 2^+} 4+2a$

$\lim_{x\to 2^-} 1+b$

$f(2)=5$

$4+2a=5 \Rightarrow a=\frac{1}{2}$

$1+b=5 \Rightarrow b=4$

$f(2)=5$

S.SALEH

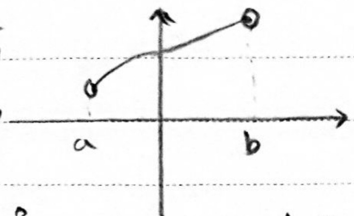
Subject ۱۵۳

Date

پیوستگی در بازه

حالت اول : $x \in (a,b)$

تمام نقاط داخل بازه باید پیوسته باشند



نقاط مشکوک به ناپیوستگی

۱) محل اتصال توابع دو ضابطه‌ای مثال

$$f(x)=\begin{cases} \bigcirc & x\geq 1 \\ \bigcirc & x<1 \end{cases}$$

۲) اعداد صحیح کننده براکت

$$f(x) = \cdots [x^2]$$

$x=0$

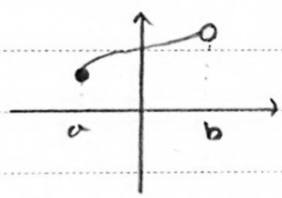
$x=1$

$x=-\sqrt{2}$

$x=\sqrt{2}$

۳) مخرج صفر

حالت دوم : $x \in [a,b)$

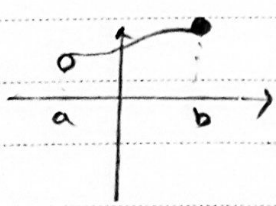


باید تمام نقاط (a,b) پیوسته باشند

همچنین در $x_0=a$ پیوسته باشد ،

* در نقطه ابتدا $(x=a)$ برای پیوستگی کافی است حد راست = مقدار تابع

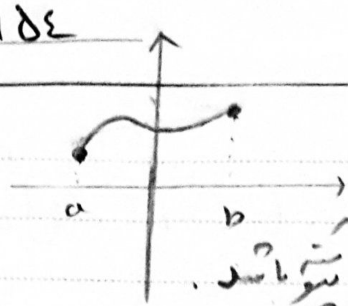
حالت سوم : $x \in (a,b]$



باید تمام نقاط (a,b) پیوسته باشند

همچنین در $x=b$ پیوسته باشد ،

در نقطه انتها $(x=b)$ برای پیوستگی کافی است حد چپ = مقدار تابع



حالت چهارم : $x \in [a,b]$
باید تمام نقاط (a,b) پیوسته باشند
و همچنین در $x=a$ ، $x=b$ هم پیوسته باشد.

(سراسری ۹۵ ریاضی)
مثال) تعداد نقاط ناپیوستگی تابع $f(x)=[x^2]$ در بازه $[-1,2]$ کدام است؟

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

نقطه ابتدا $x_0=-1$ $\begin{cases} L^+ = [(-1)^{+2}] = 0 \\ f(-1) = [1] = 1 \end{cases}$ پیوسته نیست

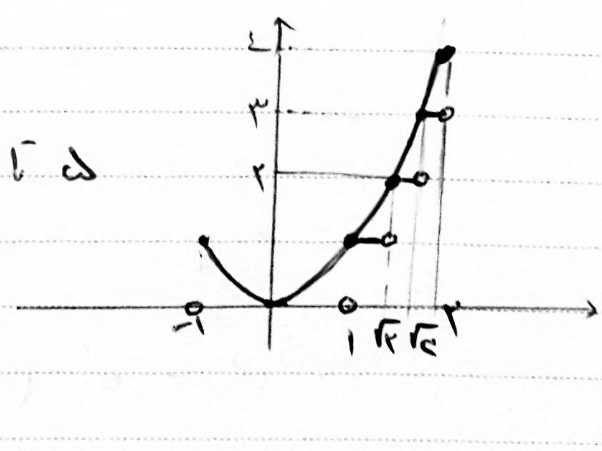
نقطه انتها $x_0=2$ $\begin{cases} L^- = [(2^-)^2] = 3 \\ f(2) = [2^2] = 4 \end{cases}$ پیوسته نیست

$x\in(-1,2)$ نقاط بین بازه

نقاط مشکوک	بررسی
ابتدا -1	ناپیوسته
0	$x=0$ پیوسته
1	ناپیوسته
$\sqrt{2}$	"
$\sqrt{3}$	"
انتها 2	ناپیوسته

$y=x^2 \to [x^2]$

۵ تا ناپیوستگی



(سراسری ۹۴)

تابع پیوستگی در بازه $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{\pi}{x} & 1\le x<6\\ a+\cos^2\frac{\pi x}{36} & x\ge 6\end{cases}$ در اعداد حقیقی بیشتر از یک پیوسته است

$[1,+\infty)$ a کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{4}$

۲) $-\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{2}$

نقطه ابتدا $x=1$ = $\begin{cases} L^+ = \sin\frac{\pi}{1} = 0 \\ f(1) = \sin\pi = 0 \end{cases}$ پیوسته است

$x=6$ نقطه مشکوک به ناپیوستگی

$x=6$ $\begin{cases} L^+ = a+\cos^2\frac{\pi}{6} = a+\frac{3}{4} \\ L^- = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \\ f(6) = a+\frac{3}{4} \end{cases}$ → $a+\frac{3}{4}=\frac{1}{2}$, $\boxed{a=-\frac{1}{4}}$

تابع $f(x)=\sqrt{x-2}+\sqrt{5-x}$ در بازه $[\alpha,\beta]$ پیوسته است
حداکثر $\beta-\alpha$ کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳ ✓
۳) ۵
۴) ✓

تعیین دامنه: $x-2\ge 0$, $x\ge 2$
$5-x\ge 0$, $x\le 5$
اشتراک $D=[2,5]$

در بازه $[2,5]$ پیوسته است $\left|\begin{matrix}\alpha=2\\ \beta=5\end{matrix}\right.$ لذا $\beta-\alpha=3$ است

تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{|x^2+x-2|}{x-1} & x\ne 1\\ a & x=1\end{cases}$ در R، به ازای کدام مقدار a پیوسته است؟

سراسری ۹۰

۱) هر مقدار a
۲) -3
۳) 3
۴) هیچ مقدار a

$x=1$ مشکوک

-2		1	
$+$	$-$		$+$

$x^2+x-2=0$
$x=1$
$x=-2$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^+} L^+ = \frac{+(x^2+x-2)}{x-1} = \frac{(x-1)(x+2)}{\cancel{(x-1)}} = 1+2=3 \\ \lim \frac{-(x^2+x-2)}{x-1} = -3 \\ f(1)=a \end{cases}$$

Subject ۱۵۷

Date

تابع $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-[x]}{x^3-x-6} & x \neq ۲ \\ a & x = ۲ \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a در $[۲,۴)$ پیوسته است؟

۱) $\frac{1}{11}$ ۳) $\frac{1}{8}$

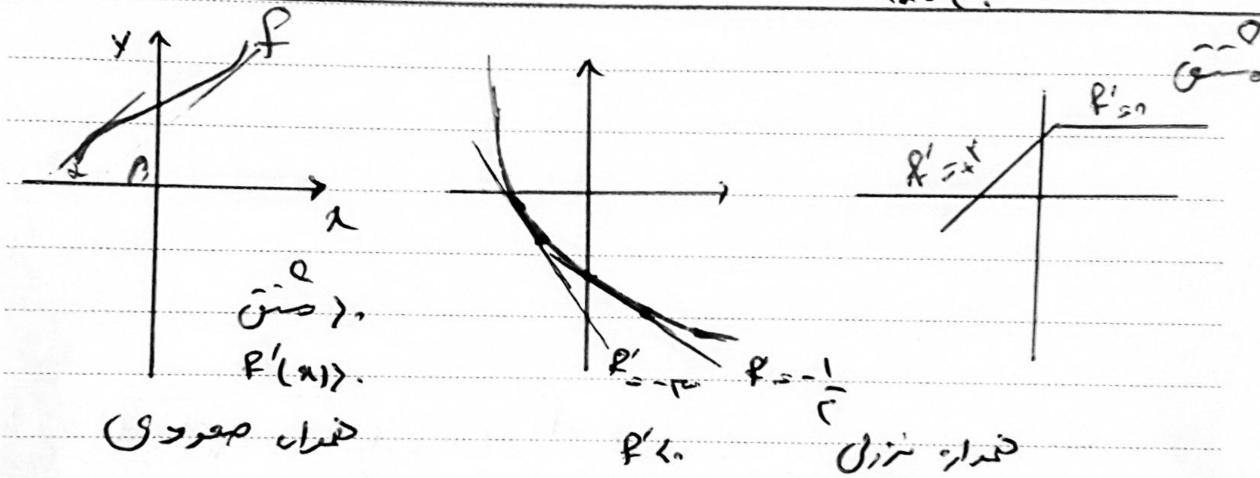
۲) $\frac{1}{9}$ ۴) $\frac{1}{6}$

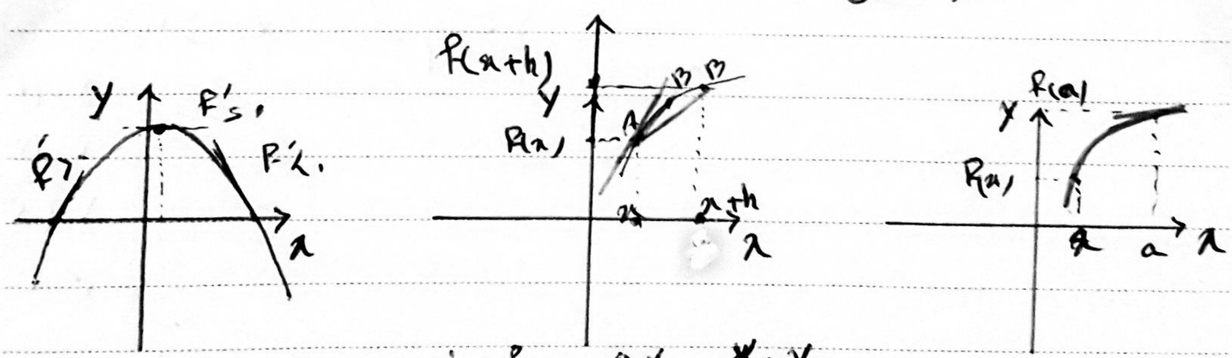
در نقطه ابتدا $x_0 = ۲$

$$\begin{cases} L^+ = \dfrac{x-۲}{x^3-x-6} = \dfrac{0}{0} \\ Hop = \dfrac{1}{3x^2-1} = \dfrac{1}{11} \\ f(۲) = a \end{cases}$$

باید در تمام نقاط $[۲,۴)$ پیوسته باشد

جلسه ۳۸





شیب خط AB : $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

$= \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

تعریف مشتق

B به A نزدیک شود $h \to 0$

قوانین = اثبات ⟵ $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

شیب خط مماس در یک نقطه

S.SALEH