

(1)

۹۹، ۷، ۲۹

بسمه تعالی

معادلات مثلثاتی:

هر رابطه‌ی مثلثاتی که به ازای بعضی از مقادیر متغیر برقرار باشد بین معادله مثلثاتی است.

منظور از حل یک معادله مثلثاتی یافتن همه زوایای است که رابطه بین سینوس از نسبت‌ها مثلثاتی آن معلوم باشد.

هر معادله مثلثاتی پس از ساده شدن به یکی از حالت‌ها زیر تبدیل می‌شود و طبق دو ال زیر می‌توان آن را حل کرد.

$$\sin x = \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases}$$

$$\cos x = \cos \alpha \Rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha$$

$$\tan x = \tan \alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha$$

$$\cot x = \cot \alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha$$

مثال: هر یک از معادلات مثلثاتی زیر را حل کنید.

$$2 \sin x - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow 2 \sin x = \sqrt{3} \Rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

$$\text{ب) } 2 \sin^2 x = 3 \cos x \Rightarrow 2(1 - \cos^2 x) = 3 \cos x$$

$$\Rightarrow 2 \cos^2 x + 3 \cos x - 2 = 0 \quad \xrightarrow{\cos x = t} \quad 2t^2 + 3t - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (3)^2 - 4(2)(-2) = 9 + 16 = 25 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{-3+5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ t_2 = \frac{-3-5}{4} = \frac{-8}{4} = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \\ \cos x = -2 \text{ غیر قابل قبول} \end{cases}$$

(2)

در حل معادلات مثلثاتی حالات زیر را در حالات خاص نامیده می شود (مطابق نیاز دیگر)

1) $\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$

4) $\cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$

2) $\sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$

5) $\cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi$

3) $\sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$

6) $\cos x = -1 \Rightarrow x = k\pi + \pi$

معادله 2: $\tan x - \tan 2x = 0$ اصل سینوس

$\tan 2x = \tan x \Rightarrow 2x = k\pi + x \Rightarrow x = k\pi$

معادله 2: $\tan x \cdot \tan 2x = 1$ اصل سینوس

$\tan x \cdot \tan 2x = 1 \Rightarrow \tan 2x = \frac{1}{\tan x} = \cot x$

$\Rightarrow \tan 2x = \tan(\frac{\pi}{2} - x)$

$\Rightarrow 2x = k\pi + (\frac{\pi}{2} - x) \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

امتحان عالی (97.06.97)

معادله 3: $\sin x - \cos 2x = 0$ اصل سینوس

$\sin x - (1 - 2\sin^2 x) = 0 \Rightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

$\Delta = (1)^2 - 4(2)(-1) = 1 + 8 = 9 \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \sin x &= \frac{-1 + 3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ \sin x &= \frac{-1 - 3}{4} = \frac{-4}{4} = -1 \end{aligned} \right.$

$\Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{6}$

$\sin x = -1 \Rightarrow \sin x = \sin \frac{3\pi}{2}$

$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} x &= 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x &= 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{aligned} \right. /$

$x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$

(2)

مثلاً: $\sin x + \cos x = 1$ در بازه $[0, 2\pi]$ حل کنید

$$\sin x + \cos x = 1 \Rightarrow \sin x = 1 - \cos x$$

$$\Rightarrow \sin^2 x = (1 - \cos x)^2 \Rightarrow \sin^2 x = 1 - 2\cos x + \cos^2 x$$

$$\xrightarrow{\sin^2 x = 1 - \cos^2 x} 1 - \cos^2 x = 1 - 2\cos x + \cos^2 x$$

$$\Rightarrow 2\cos^2 x - 2\cos x = 0$$

$$\Rightarrow 2\cos x (\cos x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi \end{cases}$$

چون سؤال گفته در بازه $[0, 2\pi]$ باید به k مقدار بدیم و جوابهایی که در این فاصله قرار دارند را بدست آوریم

$$x = k\pi + \frac{\pi}{2} \xrightarrow{k=0} x = \frac{\pi}{2}$$

$$\xrightarrow{k=1} x = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

$$x = 2k\pi \xrightarrow{k=0} x = 0$$

$$\xrightarrow{k=1} x = 2\pi$$

جوابهایی بدست آمده چون در این فاصله هستند قابل قبول می باشند ولی اگر k عدد $\frac{2}{2}$ را بدیم جواب بدست آمده از این فاصله خارج می شود و قابل قبول نیست

(۴)

تقریباً معادله معلومی $\sin 2x \cos x = \frac{\sqrt{2}}{4}$ را حل کرده و جواب‌ها را در آن بنویسید

معادله معلومی $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$ را حل کنید

معادله معلومی $\cos(2\cos x - 9) = 5$ را حل کنید

معادله معلومی $\cos^2 x - \sin x = \frac{1}{4}$ را حل کنید

تقریباً را حل کرده تا ساعت ۱۰ بنویسید