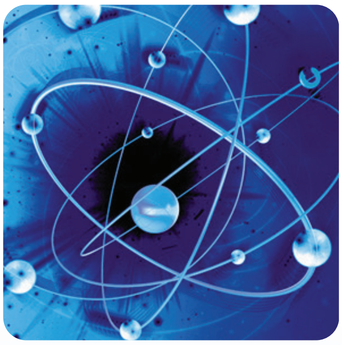
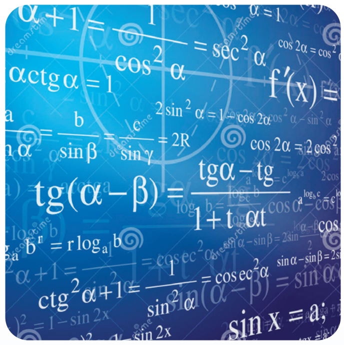
گزینه دو
مؤسسه آموزشی فرهنگی

دفترچهٔ پاسخ‌های تشریحی
آزمون آزمایشی شمارهٔ ۲ (دروس اختصاصی)

ویژهٔ داوطلبان آزمون سراسری سال ۹۸ (نظام جدید)

گروه آزمایشی علوم ریاضی





سال تحصیلی
۹۸-۹۷

گزینه دو
موسسه آموزشی فرهنگی

داوطلبان آزمون سراسری سال ۹۸

نظام جدید

پاسخ تشریحی درس‌های اختصاصی
آزمون شمارهٔ ۲ (گروه آزمایشی علوم ریاضی)

داوطلب گرامی! جهت استفاده از خدمات اختصاصی خود مانند کارنامه‌ها، مشاوره‌های هوشمند آزمون‌ها، بانک سؤال، تست‌های طبقه‌بندی‌شده، تلویزیون اختصاصی گزینه‌دو (دارای فیلم‌های آموزشی و مشاوره‌ای) و ... با استفاده از شمارهٔ داوطلبی (به‌عنوان نام کاربری) و کد ملی خود (به‌عنوان رمز عبور) وارد وب‌سایت گزینه‌دو به آدرس gozine2.ir شوید.

ریاضیات

۱۰۱- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: * ساده * صفحه‌های ۸ و ۹ حسابان ۱

نکته: در هر معادلهٔ درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ اگر جمع ریشه‌ها S و ضرب ریشه‌ها P باشد، این روابط برقرار است:

$$S=\frac{-b}{a}\ ,\ P=\frac{c}{a}$$

α و β ریشه‌های $x^2-3x-2=0$ هستند، پس مطابق نکته داریم:

$$\alpha+\beta=3$$
$$\alpha\beta=-2$$

از طرفی $\frac{2}{\alpha}+1$ و $\frac{2}{\beta}+1$ ریشه‌های $x^2+x+k=0$ هستند. پس می‌توان نوشت:

$$k=\frac{c}{a}=(1+\frac{2}{\alpha})(1+\frac{2}{\beta})=1+\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}+\frac{4}{\alpha\beta}=1+2(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta})+\frac{4}{\alpha\beta}=1+2\times(\frac{3}{-2})+(\frac{4}{-2})=1-3-2=-4$$

بنابراین: $k=-4$

۱۰۲- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: * ساده * صفحهٔ ۲۲ حسابان ۱

نکته: برای حل معادلات دارای عبارات رادیکالی، با به توان رساندن طرفین معادله (و در صورت لزوم تکرار این عمل) و ساده کردن، به معادله‌ای بدون رادیکال می‌رسیم که آن را حل می‌کنیم. جواب‌های به‌دست آمده باید در معادلهٔ اصلی آزمایش شوند.

راه‌حل اول:

عبارت $x-9$ را به‌صورت $(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)$ می‌نویسیم. داریم:

$$\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3}=\frac{4}{x-9}\Rightarrow\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3}=\frac{4}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}\Rightarrow(\sqrt{x}-3)^2(\sqrt{x}+3)-4(\sqrt{x}+3)=0$$

$$\Rightarrow(\sqrt{x}-3)^2(\sqrt{x}+3)=4(\sqrt{x}+3)\Rightarrow(\sqrt{x}+3)((\sqrt{x}-3)^2-4)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{x}+3=0\Rightarrow\sqrt{x}=-3 \ \times\\ \text{یا}\\ (\sqrt{x}-3)^2=4\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{x}-3=2\Rightarrow x=25\\ \text{یا}\\ \sqrt{x}-3=-2\Rightarrow x=1\end{cases}\end{cases}$$

بنابراین گزینهٔ ۲ پاسخ است.

راه‌حل دوم:

ابتدا عبارت سمت چپ تساوی را گویا می‌کنیم:

$$\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3}\times\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-3}=\frac{(\sqrt{x}-3)^2}{x-9}$$

بنابراین داریم:

$$\frac{(\sqrt{x}-3)^2}{x-9}=\frac{4}{x-9}\Rightarrow(\sqrt{x}-3)^2(x-9)=4(x-9)\Rightarrow(\sqrt{x}-3)^2(x-9)-4(x-9)=0\Rightarrow(x-9)((\sqrt{x}-3)^2-4)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x-9=0\Rightarrow x=9 \ \times\\ \text{یا}\\ (\sqrt{x}-3)^2=4\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{x}-3=2\Rightarrow x=25\\ \text{یا}\\ \sqrt{x}-3=-2\Rightarrow x=1\end{cases}\end{cases}$$

چون مقدار $x=9$ مخرج معادلهٔ اولیه را صفر می‌کند، بنابراین معادله فقط دو جواب دارد.

۱۰۳- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: ✲ ساده ✲ صفحهٔ ۹۲ ریاضی ۱

راه‌حل اول:

نکته: فرض کنید a یک عدد حقیقی مثبت و u یک عبارت جبری باشد، در این صورت:

۱- اگر $|u| \le a$، آنگاه: $-a \le u \le a$

۲- اگر $|u| \ge a$، آنگاه: $u \ge a$ یا $u \le -a$

با توجه به نکته داریم:

$$|۲x-۱|>۵ \Rightarrow \begin{cases} ۲x-۱>۵ \Rightarrow ۲x>۶ \Rightarrow x>۳ \\ \text{یا} \\ ۲x-۱<-۵ \Rightarrow ۲x<-۴ \Rightarrow x<-۲ \end{cases}$$

پس جدول تعیین علامت عبارت درجه دوم داده شده به‌صورت زیر است و $x=-۲$ و $x=۳$ ریشه‌های این عبارت هستند.

x		-۲		۳	
$x^۲+ax+b$	+	۰	−	۰	+

$$\begin{cases} x=-۲ \Rightarrow (-۲)^۲-۲a+b=۰ \Rightarrow -۲a+b=-۴ \\ x=۳ \Rightarrow (۳)^۲+۳a+b=۰ \Rightarrow ۳a+b=-۹ \end{cases} \Rightarrow a=-۱, b=-۶$$

بنابراین: $a-b=۵$

راه‌حل دوم:

چون هر دو طرف نامعادله مثبت هستند، پس دو طرف عبارت $|۲x-۱|>۵$ را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$|۲x-۱|>۵ \Rightarrow (۲x-۱)^۲>۲۵ \Rightarrow ۴x^۲-۴x+۱>۲۵ \Rightarrow x^۲-x-۶>۰$$

پس $a=-۱$ و $b=-۶$ و در نتیجه: $a-b=۵$

۱۰۴- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: ✲ ساده ✲ صفحهٔ ۸۱ ریاضی ۱

در ضابطهٔ سهمی داریم $f(۰)=b$. از طرفی طبق نمودار، $f(۰)=a$، پس $a=b$. طبق نمودار $x=a$ ریشهٔ $f(x)=۰$ است، پس می‌توان نوشت:

$$f(a)=۰ \Rightarrow -a^۲+a+a=۰ \Rightarrow ۲a-a^۲=۰ \xrightarrow{a>۰} a=۲$$

پس $ab=۴$.

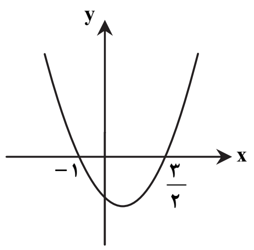
۱۰۵- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: ✲ متوسط ✲ صفحهٔ ۸۷ ریاضی ۱

نکته: در سهمی $y=ax^۲+bx+c$، نقطهٔ $(-\frac{b}{۲a},\frac{۴ac-b^۲}{۴a})$ رأس سهمی است.

با توجه به‌صورت سؤال، تابع در بازهٔ $(-۱,\frac{۳}{۲})$ منفی و در سایر نقاط نامنفی است.

پس نمودار $y=ax^۲+bx-۳$ و جدول تعیین علامت آن به‌صورت مقابل است:

x		-۱		$\frac{۳}{۲}$	
y	+	۰	−	۰	+



چون دهانهٔ سهمی رو به بالاست، $a>۰$ و مطابق جدول $\frac{۳}{۲}$ و ۱- ریشه‌های $ax^۲+bx-۳=۰$ هستند:

$$\begin{cases} x=-۱: a-b-۳=۰ \Rightarrow a-b=۳ \\ x=\frac{۳}{۲}: \frac{۹}{۴}a+\frac{۳}{۲}b-۳=۰ \Rightarrow ۹a+۶b=۱۲ \Rightarrow ۳a+۲b=۴ \end{cases}$$

از دستگاه بالا داریم: $a=۲$ و $b=-۱$. بنابراین ضابطهٔ تابع به‌صورت $y=۲x^۲-x-۳$ است. چون $a>۰$، پس y دارای حداقل مقدار است که برابر است با:

$$\frac{۴ac-b^۲}{۴a}=\frac{۴(۲)(-۳)-(-۱)^۲}{۴(۲)}=-\frac{۲۵}{۸}$$

بنابراین گزینهٔ ۲ پاسخ است.

۱۰۶- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: ✲ متوسط ✲ صفحه‌های ۸۵ و ۸۶ ریاضی ۱

در ناحیهٔ سوم دستگاه مختصات داریم $x<۰$ و $y<۰$. عبارت $f(x)=\frac{۹x^۲-۲۵}{۳x^۲-x}$ را تعیین علامت می‌کنیم:

$$۹x^۲-۲۵=۰ \Rightarrow x=\pm\frac{۵}{۳} \qquad ۳x^۲-x=x(۳x-۱)=۰ \Rightarrow x=۰,\frac{۱}{۳}$$

x	$-\infty$		$-\frac{۵}{۳}$		۰		$\frac{۱}{۳}$		$\frac{۵}{۳}$		$+\infty$
$۹x^۲-۲۵$		+	۰	−		−		−	۰	+	
$۳x^۲-x$		+		+	۰	−	۰	+		+	
$f(x)$		+	۰	−	تعریف نشده	+	تعریف نشده	−	۰	+	

با توجه به جدول تعیین علامت، عبارت داده‌شده، در بازهٔ $\left[-\frac{۵}{۳},۰\right)$، داریم $x<۰$ و $f(x)<۰$؛ یعنی نمودار تابع در ناحیهٔ سوم دستگاه مختصات قرار دارد.

بنابراین بیشترین مقدار $b-a$ برابر $\frac{۵}{۳}$ است.

۱۰۷- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: * متوسط * صفحهٔ ۲۸ حسابان ۱

فاصلهٔ نقطهٔ $A(x,0)$ از نقاط به طول ۱- و ۳ روی محور xها برابر $|x+1|$ و $|x-3|$ است. پس کافی است معادلهٔ زیر را حل کنیم:

$$|x+1|+|x-3|=6$$

$$\begin{cases} x<-1 \Rightarrow -x-1-x+3=6 \Rightarrow x=-2 \checkmark \\ -1\le x\le 3 \Rightarrow x+1-x+3=6 \Rightarrow 4=6 \times \\ x>3 \Rightarrow x+1+x-3=6 \Rightarrow x=4 \checkmark \end{cases}$$

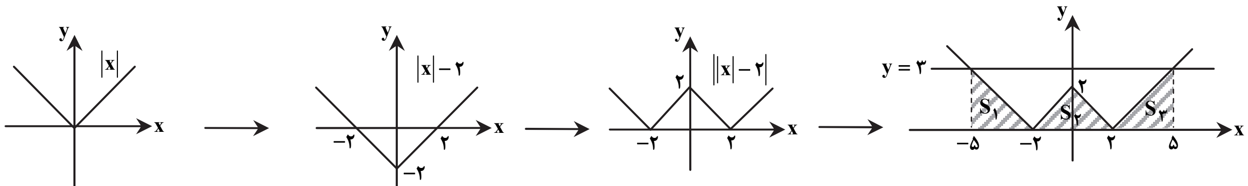
پس $x_A=-2$ و $x_B=4$ و در نتیجه طول پاره‌خط AB برابر $AB=|x_B-x_A|=6$ است. دقت کنید که اگر $x_B=-2$ و $x_A=4$، جواب نهایی تغییری نمی‌کند.

۱۰۸- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: * دشوار * صفحهٔ ۲۸ حسابان ۱

نکته: برای رسم نمودار $y=f(x)+k$، اگر $k>0$، کافی است نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در راستای قائم به سمت بالا انتقال دهیم و برای $k<0$ این انتقال به سمت پایین انجام می‌شود.

نکته: برای رسم نمودار $y=|f(x)|$ کافی است نمودار $y=f(x)$ را رسم کنیم و در جاهایی که نمودار $f(x)$ زیر محور xهاست، تصویر آیینه وار نمودار $f(x)$ را نسبت به محور xها رسم کنیم.

نمودار $y=||x|-2|$ را در چند مرحله رسم می‌کنیم.



سطح بین نمودار تابع $y=||x|-2|$ و خط $y=3$، از تفاضل مساحت سه مثلث هاشورزده از مساحت مستطیل به ابعاد ۱۰ و ۳ به‌دست می‌آید. داریم:

$$S=\text{مساحت مستطیل}-(S_1+S_2+S_3)=10\times 3-\frac{1}{2}(3\times 3+2\times 4+3\times 3)=30-13=17$$

۱۰۹- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: * ساده * صفحهٔ ۲۱ حسابان ۲

نکته: باقیماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $ax+b$ برابر است با: $f(\frac{-b}{a})$

عبارت داده‌شده بر $x-2$ و $x-1$ بخش‌پذیر است. یعنی باقی‌ماندهٔ تقسیم بر این دو عبارت صفر است. مطابق نکته می‌توان نوشت:

$$f(x)=x^4-ax^3+bx^2+6$$

$f(x)$ بر $x-2$ بخش‌پذیر است. $: f(2)=16-8a+4b+6=0 \Rightarrow 2b-4a=-11$

$f(x)$ بر $x-1$ بخش‌پذیر است. $: f(1)=1-a+b+6=0 \Rightarrow a-b=7$

$$a=-\frac{3}{2}, b=-\frac{17}{2} \Rightarrow f(x)=x^4+\frac{3}{2}x^3-\frac{17}{2}x^2+6$$

بنابراین باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $x+1$ برابر است با:

$$f(-1)=1-\frac{3}{2}-\frac{17}{2}+6=-3$$

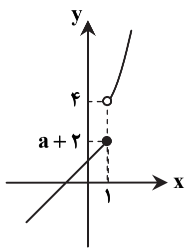
۱۱۰- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: * ساده * صفحهٔ ۱۸ حسابان ۲

نکته: برای رسم نمودار $y=f(x)+k$، اگر $k>0$، کافی است نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در راستای قائم به سمت بالا انتقال دهیم و برای $k<0$ این انتقال به سمت پایین انجام می‌شود.

نکته: تابع f را در یک بازه اکیداً صعودی می‌گوییم، اگر برای هر دو مقدار a و b در این بازه که $a<b$، آنگاه $f(a)<f(b)$. در فاصله‌ای که یک تابع اکیداً صعودی است، با حرکت روی نمودار (از چپ به راست)، همواره رو به بالا خواهیم رفت.

ابتدا دقت کنید برای آنکه $ax+2$ اکیداً صعودی باشد، باید $a>0$ باشد. (به عبارت دیگر شیب خط باید عددی مثبت باشد.)

نمودار تابع $f(x)$ را رسم می‌کنیم:



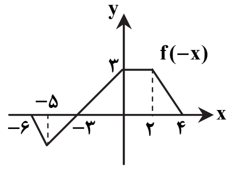
با توجه به شکل و نکته، اگر $f(x)$ بخواهد اکیداً صعودی باشد، باید داشته باشیم $a+2\le 4$، پس $a\le 2$. بنابراین محدودهٔ a به‌صورت $0<a\le 2$ است.

۱۱۱- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: * ساده * صفحهٔ ۱۲ حسابان ۲

نکته: برای رسم نمودار $y=f(x+k)$، اگر $k>0$ کافی است نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در جهت افقی به سمت چپ انتقال دهیم و برای $k<0$، این انتقال به اندازهٔ $|k|$ واحد به سمت راست انجام می‌شود.

نکته: اگر طول نقاط تابع $y=f(x)$ را قرینه کنیم، نقاط تابع $y=f(-x)$ به‌دست می‌آیند. بنابراین نمودار تابع $y=f(-x)$ قرینهٔ نمودار تابع $y=f(x)$ نسبت به محور y است.

ابتدا نمودار $f(-x)$ را از روی نمودار $f(x)$ رسم می‌کنیم.



برای آنکه این تابع از ناحیهٔ سوم عبور نکند، باید حداقل ۶ واحد، نمودار $f(-x)$ را به سمت راست منتقل کنیم. بنابراین a هر عددی بزرگ‌تر یا مساوی ۶ می‌تواند باشد، دقت کنید چون $f(a-x)=f(-(x-a))$ مقدار a باید مثبت باشد.

۱۱۲- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ **مشخصات سؤال: * ساده * صفحهٔ ۲۱ حسابان ۲**

نکته: باقیماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $ax+b$ برابر است با: $f(\frac{-b}{a})$.

برای آنکه باقی‌ماندهٔ $(fog)(x)$ بر $x+۱$ برابر ۲- باشد، مطابق نکته، باید $(fog)(-۱)=-۲$، پس:

$$\begin{cases} f(g(-۱))=-۲ \\ g(-۱)=۲ \end{cases} \Rightarrow f(۲)=-۲ \Rightarrow ۸+۲a+۲=-۲ \Rightarrow ۲a=-۱۲ \Rightarrow a=-۶$$

۱۱۳- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ **مشخصات سؤال: * متوسط * صفحهٔ ۵ حسابان ۲**

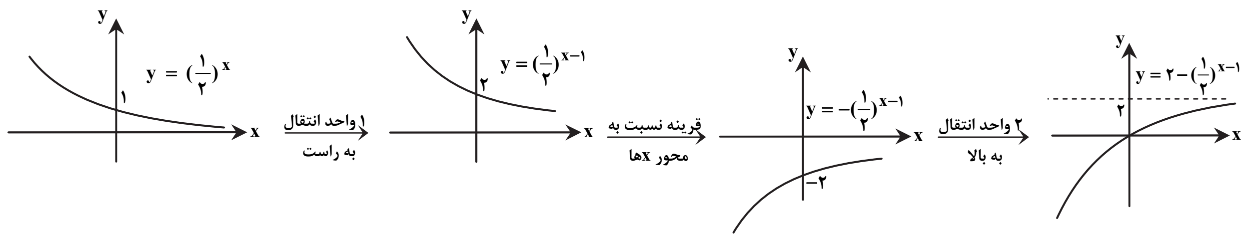
نکته: برای رسم نمودار $y=f(x)+k$، اگر $k>۰$، کافی است نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در راستای قائم به سمت بالا انتقال دهیم و برای $k<۰$ این انتقال به سمت پایین انجام می‌شود.

نکته: برای رسم نمودار $y=f(x+k)$، اگر $k>۰$ کافی است نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در جهت افقی به سمت چپ انتقال دهیم و برای $k<۰$، این انتقال به اندازهٔ $|k|$ واحد به سمت راست انجام می‌شود.

نکته: اگر عرض نقاط تابع $y=f(x)$ را قرینه کنیم، نقاط تابع $y=-f(x)$ به‌دست می‌آیند. بنابراین نمودار تابع $y=-f(x)$ قرینهٔ نمودار تابع $y=f(x)$ نسبت به محور x است.

نکته: اگر طول نقاط تابع $y=f(x)$ را قرینه کنیم، نقاط تابع $y=f(-x)$ به‌دست می‌آیند. بنابراین نمودار تابع $y=f(-x)$ قرینهٔ نمودار تـابع $y=f(x)$ نسبت به محور y است.

مطابق نکات، نمودار را مرحله به مرحله رسم می‌کنیم:



بنابراین مطابق شکل، نمودار این تابع از ناحیهٔ دوم و چهارم نمی‌گذرد.

۱۱۴- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ **مشخصات سؤال: * متوسط * صفحهٔ ۲۰ حسابان ۲**

نکتهٔ ۱: باقیماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $ax+b$ برابر است با: $f(\frac{-b}{a})$

نکتهٔ ۲: برای هر $n\in\mathbb{N}$ داریم:

$$x^n-a^n=(x-a)(x^{n-۱}+x^{n-۲}a+x^{n-۳}a^۲+\cdots+a^{n-۱})$$

با توجه به نکتهٔ ۲، عبارت داده‌شده را تجزیه می‌کنیم.

$$x^{۱۲}-۱=(x^۲)^۶-۱^۶=(x^۲-۱)(x^{۱۰}+x^۸+x^۶+x^۴+x^۲+۱)$$

پس: $f(x)=x^{۱۰}+x^۸+x^۶+x^۴+x^۲+۱$

مطابق نکتهٔ ۱، باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $x+۱$ همان $f(-۱)$ است:

$$f(-۱)=۱+۱+۱+۱+۱+۱=۶$$

۱۱۵- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ **مشخصات سؤال: * متوسط * صفحهٔ ۲۱ حسابان ۲**

نکته: در تابع وارون‌پذیر f، اگر $f(a)=b$ آنگاه: $f^{-۱}(b)=a$

نکته: باقیماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $ax+b$ برابر است با: $f(\frac{-b}{a})$

باقی‌ماندهٔ $f^{-۱}$ بر $x-۲$ برابر ۴ است، یعنی $f^{-۱}(۲)=۴$. پس $f(۴)=۲$. به همین ترتیب $f^{-۱}(۱)=۳$، پس $f(۳)=۱$. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} f(۴)=۲ \Rightarrow f(۴)=a=۲ \quad (*) \\ f(۳)=۱ \Rightarrow f(۳)=a+b(-۱)=۱ \Rightarrow a-b=۱ \xrightarrow{(*)} b=۱ \end{cases}$$

پس نتیجه می‌شود: $a+b=۳$

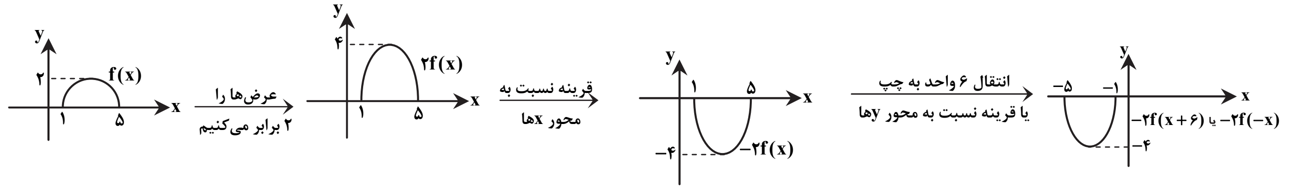
۱۱۶- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ **مشخصات سؤال: * متوسط * صفحه‌های ۳ و ۷ حسابان ۲**

نکته: برای رسم نمودار $y=kf(x)$، کافی است عرض نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را در k ضرب کنیم. اگر $k>۱$، نمودار $y=kf(x)$ از انبساط عمودی نمودار $y=f(x)$ حاصل می‌شود و اگر $۰<k<۱$، نمودار $y=kf(x)$ از انقباض عمودی نمودار $y=f(x)$ به‌دست می‌آید.

نکته: برای رسم نمودار $y=f(x+k)$، اگر $k>۰$ کافی است نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در جهت افقی به سمت چپ انتقال دهیم و برای $k<۰$، این انتقال به اندازهٔ $|k|$ واحد به سمت راست انجام می‌شود.

نکته: اگر عرض نقاط تابع $y=f(x)$ را قرینه کنیم، نقاط تابع $y=-f(x)$ به‌دست می‌آیند. بنابراین نمودار تابع $y=-f(x)$ قرینهٔ نمودار تابع $y=f(x)$ نسبت به محور x است.

مطابق نکات، از نمودار تابع $f(x)$، نمودار تابع $g(x)$ را می‌سازیم:



با توجه به گزینه‌ها، گزینهٔ ۴ پاسخ است.

۱۱۷- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: ٭ متوسط ٭ صفحهٔ ۱۹ حسابان ۲

نکته: برای رسم نمودار $y=f(x+k)$، اگر $k>0$ کافی است نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در جهت افقی به سمت چپ انتقال دهیم و برای $k<0$، این انتقال به اندازهٔ $|k|$ واحد به سمت راست انجام می‌شود.

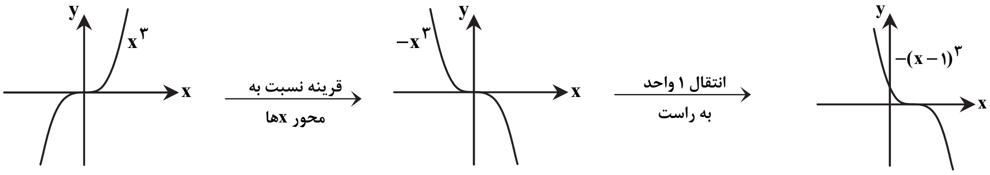
نکته: اگر عرض نقاط تابع $y=f(x)$ را قرینه کنیم، نقاط تابع $y=-f(x)$ به‌دست می‌آیند. بنابراین نمودار تابع $y=-f(x)$ قرینهٔ نمودار تابع $y=f(x)$ نسبت به محور x است.

نکته: باقیماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $ax+b$ برابر است با: $f(\frac{-b}{a})$

به‌ازای $x=1$ مقدار $f(x)$ برابر صفر است:

$$f(1)=0 \Rightarrow -1-a-3+1=0 \Rightarrow a=-3$$

پس $f(x)=-x^3+3x^2-3x+1=-(x-1)^3$. کافی است نمودار $y=x^3$ را نسبت به محور xها قرینه کنیم و سپس یک واحد به راست منتقل کنیم.



۱۱۸- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: ٭ دشوار ٭ صفحهٔ ۱۴ حسابان ۲

مطابق شکل نمودارهای f و g در $x=1$ با محور xها برخورد کرده‌اند و چون تابع $g(x)$ درجهٔ دوم است، پس $x=1$ ریشهٔ مضاعف آن است (بر محور xها مماس است).

چون ضریب x^2 برابر ۱ است. پس ضابطهٔ g به‌صورت $(x-1)^2$ است. بنابراین $b=1$. از طرفی مطابق شکل، $x=c$ محل برخورد نمودار دو تابع (به‌جز $x=1$) است. پس:

$$(x-1)^3=(x-1)^2 \Rightarrow (x-1)^3-(x-1)^2=0 \Rightarrow (x-1)^2\left[(x-1)-1\right]=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ \text{یا} \\ x=2 \end{cases}$$

پس $c=2$. در نتیجه: $b+c=1+2=3$

۱۱۹- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: ٭ دشوار ٭ صفحهٔ ۱۶ حسابان ۲

نکته: اگر f و g دو تابع باشند، تابع $f+g$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)\ ,\ D_{f+g}=D_f\cap D_g$$

نکته: تابع f را در یک بازه نزولی می‌گوییم، اگر برای هر دو مقدار a و b در این بازه که $a<b$، آنگاه $f(a)\ge f(b)$.

ابتدا تابع $f+g$ را به‌دست می‌آوریم:

$$D_f\cap D_g=\{1,2,4\}$$
$$f+g=\{(1,2a-1),(2,3a-3),(4,-a+5)\}$$

مطابق نکته، اگر این تابع بخواهد نزولی باشد، باید داشته باشیم:

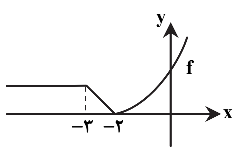
$$\begin{cases}(1,2a-1)\\(2,3a-3)\end{cases} \xrightarrow{1<2} 2a-1\ge 3a-3 \Rightarrow a\le 2$$
$$\begin{cases}(2,3a-3)\\(4,-a+5)\end{cases} \xrightarrow{2<4} 3a-3\ge -a+5 \Rightarrow a\ge 2$$
$$\begin{cases}(1,2a-1)\\(4,-a+5)\end{cases} \xrightarrow{1<4} 2a-1\ge -a+5 \Rightarrow a\ge 2$$

از اشتراک این ۳ محدوده نتیجه می‌شود: $a=2$

۱۲۰- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: ٭ دشوار ٭ صفحهٔ ۱۷ حسابان ۲

نکته: برای رسم نمودار تابع $y=f(kx)$، کافی است طول نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را در $\frac{1}{k}$ ضرب کنیم. اگر $k>1$، نمودار $y=f(kx)$ از انقباض افقی نمودار $y=f(x)$ در راستای محور xها به‌دست می‌آید و اگر $0<k<1$، این نمودار از انبساط افقی نمودار $y=f(x)$ حاصل می‌شود.

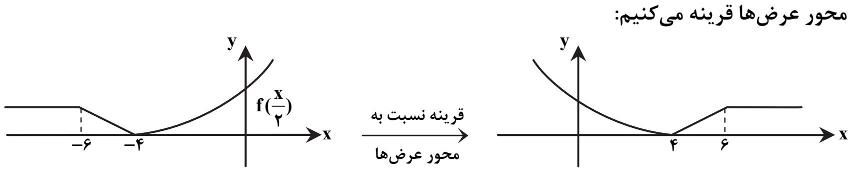
نکته: برای رسم نمودار $y=f(x+k)$، اگر $k>0$ کافی است نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در جهت افقی به سمت چپ انتقال دهیم و برای $k<0$، این انتقال به اندازهٔ $|k|$ واحد به سمت راست انجام می‌شود.



نکته: اگر طول نقاط تابع $y=f(x)$ را قرینه کنیم، نقاط تابع $y=f(-x)$ به‌دست می‌آیند. بنابراین نمودار تابع $y=f(-x)$ قرینهٔ نمودار تابع $y=f(x)$ نسبت به محور y است.

برای آنکه نمودار $y=f(x)$ را با توجه به نمودار $y=f(x-2)$ رسم کنیم، باید نمودار $y=f(x-2)$ را ۲ واحد به چپ انتقال دهیم، پس:

می‌خواهیم با توجه به نمودار $y=f(x)$ نمودار $y=f(-\frac{x}{2})$ را رسم کنیم. برای این منظور در ۲ مرحله این عمل را انجام می‌دهیم. ابتدا $y=f(\frac{x}{2})$ را با یک انبساط طولی رسم می‌کنیم و سپس نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم:



پس این تابع در بازهٔ $[4,6]$ اکیداً صعودی است.

۱۲۱- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: * ساده * صفحهٔ ۳۳ هندسه ۱

نکته: عدد c را واسطهٔ هندسی بین دو عدد a و b می‌نامیم، هرگاه: $ab = c^{۲}$

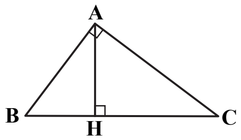
طبق فرض داریم:

$$\begin{cases} a+b=۳۴ \\ ab=۱۵^{۲} \end{cases} \Rightarrow a(۳۴-a)=۲۲۵ \Rightarrow a^{۲}-۳۴a+۲۲۵=۰ \Rightarrow (a-۹)(a-۲۵)=۰ \Rightarrow \begin{cases} a=۹ \\ a=۲۵ \end{cases}$$

بنابراین عدد بزرگ‌تر ۲۵ است.

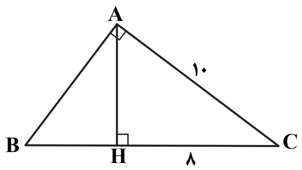
۱۲۲- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: * ساده * صفحهٔ ۴۲ هندسه ۱

نکته: در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، اگر AH ارتفاع وارد بر وتر باشد، داریم:



$$AB^{۲} = BH \times BC$$
$$AC^{۲} = CH \times BC$$
$$AH^{۲} = BH \times CH$$
$$AB \times AC = AH \times BC$$
$$BC^{۲} = AB^{۲} + AC^{۲}$$

با استفاده از نکتهٔ بالا داریم:



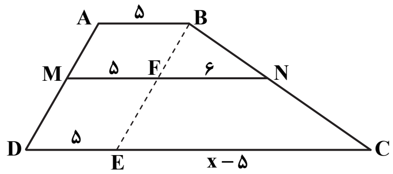
$$\overset{\Delta}{ACH}: AH = \sqrt{AC^{۲} - CH^{۲}} = \sqrt{۱۰۰-۶۴} = ۶$$
$$\overset{\Delta}{ABC}: AH^{۲} = BH \times CH \Rightarrow ۳۶ = BH \times ۸ \Rightarrow BH = \frac{۳۶}{۸} = \frac{۹}{۲}$$

بنابراین طول وتر مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC برابر است با:

$$BC = BH + CH = \frac{۹}{۲} + ۸ = ۴/۵ + ۸ = ۱۲/۵$$

۱۲۳- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: * متوسط * صفحهٔ ۳۵ هندسه ۱

از B خطی موازی AD رسم می‌کنیم. در این صورت داریم: $MF = DE = AB = ۵$



بنابراین:

$$\begin{cases} FN = MN - MF = ۱۱ - ۵ = ۶ \\ EC = DC - DE = x - ۵ \end{cases}$$

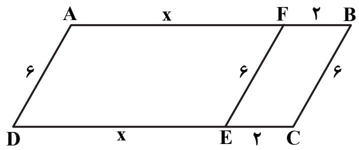
اکنون با استفاده از تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث BEC داریم:

$$\frac{FN}{EC} = \frac{BF}{BE} = \frac{AM}{AD} \Rightarrow \frac{۶}{x-۵} = \frac{۳}{۷} \Rightarrow ۴۲ = ۳x - ۱۵ \Rightarrow ۳x = ۵۷ \Rightarrow x = ۱۹$$

۱۲۴- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: * متوسط * صفحهٔ ۴۸ هندسه ۱

نکته: در دو n ضلعی متشابه، اضلاع متناظر، متناسب‌اند.

با توجه به نکتهٔ بالا در شکل روبه‌رو داریم:



$$ABCD \sim BFEC$$
$$\Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{BC}{EC} \Rightarrow \frac{x+۲}{۶} = \frac{۶}{۲} \Rightarrow \frac{x+۲}{۶} = ۳ \Rightarrow x+۲ = ۱۸ \Rightarrow x = ۱۶$$

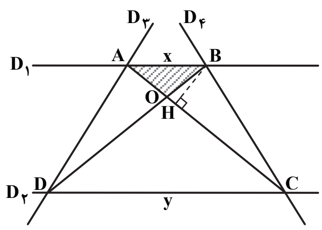
۱۲۵- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: * دشوار * صفحه‌های ۳۹ و ۴۶ هندسه ۱

نکته: در دو مثلث متشابه، نسبت مساحت‌ها، برابر توان دوم نسبت تشابه است.

نکته: اگر ارتفاع دو مثلث برابر باشد، نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر نسبت قاعده‌های نظیر آن ارتفاع است.

$$D_{۱} \parallel D_{۲} \Rightarrow \overset{\Delta}{AOB} \sim \overset{\Delta}{COD} \Rightarrow \frac{S_{\overset{\Delta}{AOB}}}{S_{\overset{\Delta}{COD}}} = (\frac{x}{y})^{۲} = \frac{۱}{۹} \Rightarrow \frac{۲}{S_{\overset{\Delta}{COD}}} = \frac{۱}{۹} \Rightarrow S_{\overset{\Delta}{COD}} = ۱۸$$

اکنون با توجه به اینکه $S_{\overset{\Delta}{ADC}} = S_{\overset{\Delta}{BDC}}$، داریم: $S_{\overset{\Delta}{AOD}} = S_{\overset{\Delta}{BOC}}$



$$\frac{S_{\overset{\Delta}{AOB}}}{S_{\overset{\Delta}{BOC}}} = \frac{\frac{۱}{۲}BH \times OA}{\frac{۱}{۲}BH \times OC} = \frac{OA}{OC} \Rightarrow \frac{۲}{S_{\overset{\Delta}{BOC}}} = \frac{OA}{OC}$$

$$\xlongequal{\text{تشابه دو مثلث}} \frac{AB}{CD} = \frac{x}{y} = \frac{۱}{۳}$$

$$S_{\overset{\Delta}{BOC}} = ۶ \Rightarrow S_{\overset{\Delta}{AOD}} = ۶$$

بنابراین مساحت محدود به چهار خط برابر است با:

$$S_{ABCD} = S_{\overset{\Delta}{AOB}} + S_{\overset{\Delta}{BOC}} + S_{\overset{\Delta}{COD}} + S_{\overset{\Delta}{AOD}} = ۲ + ۶ + ۱۸ + ۶ = ۳۲$$

۱۲۶- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: ＊ ساده ＊ صفحهٔ ۱۸ هندسه ۳

نکته: اگر $A_{m\times p}\times B_{p\times n}=C_{m\times n}$ ، آنگاه درایهٔ c_{ij} در ماتریس C از ضرب سطر iاُم A در ستون jاُم B به‌دست می‌آید.

با استفاده از نکتهٔ بالا داریم:

$$B\cdot A=\begin{bmatrix}-۴\\-۳\\۲\end{bmatrix}_{۳\times۱}\begin{bmatrix}۲ & -۱ & ۳\end{bmatrix}_{۱\times۳}=\begin{bmatrix}-۴\times۲ & -۴\times(-۱) & -۴\times۳\\-۳\times۲ & -۳\times(-۱) & -۳\times۳\\۲\times۲ & ۲\times(-۱) & ۲\times۳\end{bmatrix}_{۳\times۳}=\begin{bmatrix}-۸ & ۴ & -۱۲\\-۶ & ۳ & -۹\\۴ & -۲ & ۶\end{bmatrix}_{۳\times۳}$$

۱۲۷- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: ＊ ساده ＊ صفحه‌های ۱۰ و ۱۱ هندسه ۳

طبق فرض در ماتریس $A=\left[۲i+۳j-۱\right]_{n\times n}$ داریم:

$$a_{۱n}=\frac{۴}{۳}a_{n۱}\Rightarrow(۲+۳n-۱)=\frac{۴}{۳}(۲n+۳-۱)\Rightarrow ۳n+۱=\frac{۴}{۳}(۲n+۲)\Rightarrow ۹n+۳=۸n+۸\Rightarrow n=۵$$

بنابراین ماتریس $A_{۵\times۵}$ دارای ۵ سطر است.

۱۲۸- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: ＊ متوسط ＊ صفحهٔ ۲۰ هندسه ۳

نکته: اگر A ماتریسی مربعی باشد، توان‌های A به‌صورت $A^۲=A\times A$ ، $A^۳=A\times A^۲$ ، ... و $A^n=A\times A^{n-۱}$ تعریف می‌شود.

نکته: $\begin{bmatrix}a & ۰\\۰ & b\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}a^n & ۰\\۰ & b^n\end{bmatrix}$

با استفاده از نکات بالا داریم:

$$A^۲=\begin{bmatrix}۴ & ۶\\-۲ & -۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۴ & ۶\\-۲ & -۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴ & ۰\\۰ & ۴\end{bmatrix}$$

$$A^۶=(A^۲)^۳=\begin{bmatrix}۴ & ۰\\۰ & ۴\end{bmatrix}^۳=\begin{bmatrix}۴^۳ & ۰\\۰ & ۴^۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۶۴ & ۰\\۰ & ۶۴\end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های ماتریس $A^۶$ برابر است با: $۶۴+۰+۰+۶۴=۱۲۸$

۱۲۹- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: ＊ متوسط ＊ صفحه‌های ۱۹ و ۲۱ هندسه ۳

نکته: اگر A و B دو ماتریس تعویض‌پذیر باشند؛ یعنی $AB=BA$ ، آنگاه همهٔ اتحادهای جبری برای آن‌ها برقرار است.

ابتدا داریم:

$$A=۳B^۲-۲B+I\Rightarrow\begin{cases}AB=۳B^۳-۲B^۲+B\\BA=۳B^۳-۲B^۲+B\end{cases}\Rightarrow AB=BA$$

بنابراین A و B تعویض‌پذیرند، پس اتحادهای جبری برای آن‌ها برقرار است. بنابراین با استفاده از اتحاد مزدوج داریم:

$$(A+B)^۲-(A-B)^۲=\left[(A+B)-(A-B)\right]\left[(A+B)+(A-B)\right]=(۲B)(۲A)=۴BA=۴AB$$

تذکر: اگر ماتریس A را بتوان به‌صورت یک چند جمله‌ای برحسب B نوشت، آنگاه A و B تعویض‌پذیرند؛ یعنی: $AB=BA$

۱۳۰- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: ＊ متوسط ＊ صفحهٔ ۱۸ هندسه ۳

نکته: اگر $A_{m\times p}\times B_{p\times n}=C_{m\times n}$ ، آنگاه درایهٔ c_{ij} در ماتریس C، از ضرب سطر iام A در ستون jام B به‌دست می‌آید.

نکته: ماتریس قطری، ماتریسی مربعی است که تمام درایه‌های غیر واقع بر قطر اصلی آن، صفر هستند.

$$A\times B=\begin{bmatrix}۲x & ۱\\-۱ & y\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۱ & ۱\\-۱ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲x-۱ & ۲x+۲\\-۱-y & -۱+۲y\end{bmatrix}$$

باید درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی برابر صفر باشند، پس:

$$\begin{cases}۲x+۲=۰\Rightarrow x=-۱\\-۱-y=۰\Rightarrow y=-۱\end{cases}$$

بنابراین مجموع درایه‌های ماتریس $A\times B=\begin{bmatrix}-۳ & ۰\\۰ & -۳\end{bmatrix}$ برابر است با: $-۳+(-۳)=-۶$

۱۳۱- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: ＊ متوسط ＊ صفحه‌های ۱۰ تا ۱۲ هندسه ۳

نکته: $\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$

با توجه به نکتهٔ بالا در ماتریس $A=\left[\tan(i^۲-j^۲)\right]_{n\times n}$ داریم:

$$\tan(i^۲-j^۲)=-\tan(j^۲-i^۲)$$

پس به‌ازای هر i و j داریم $a_{ij}=-a_{ji}$. بنابراین درایه های متناظر بالا و پایین قطر اصلی A قرینهٔ یکدیگرند. از طرفی $\tan(i^۲-i^۲)=\tan ۰=۰$. پس درایه‌های روی قطر اصلی نیز صفر است. بنابراین مجموع تمام درایه‌های A برابر صفر است.

۱۳۲- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: ＊ متوسط ＊ صفحه‌های ۲۰ و ۲۱ هندسه ۳

نکته: $\begin{bmatrix}a & ۰\\۰ & b\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}a^n & ۰\\۰ & b^n\end{bmatrix}$

ابتدا داریم:

$$A=\begin{bmatrix}۱ & -\sqrt{۳}\\\sqrt{۳} & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{۳} & -۱\\۱ & \sqrt{۳}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰ & -۴\\۴ & ۰\end{bmatrix}$$

$$A^۲=\begin{bmatrix}۰ & -۴\\۴ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰ & -۴\\۴ & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱۶ & ۰\\۰ & -۱۶\end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$A^{۲۰}=(A^۲)^{۱۰}=\begin{bmatrix}(-۱۶)^{۱۰} & ۰\\۰ & (-۱۶)^{۱۰}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴^{۲۰} & ۰\\۰ & ۴^{۲۰}\end{bmatrix}$$

پس درایهٔ سطر دوم و ستون دوم این ماتریس برابر $۴^{۲۰}$ است.

۱۳۳- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: * دشوار * صفحه‌های ۲۰ و ۲۱ هندسه ۳

نکته: اگر A و B دو ماتریس تعویض‌پذیر باشند؛ یعنی $AB = BA$ ، آنگاه همهٔ اتحادهای جبری برای آن‌ها برقرار است.

نکته: ماتریس همانی (I) با هر ماتریس دیگری تعویض‌پذیر است.

نکته : $(a+b)^n = \binom{n}{۰}a^n + \binom{n}{۱}a^{n-۱}b + \binom{n}{۲}a^{n-۲}b^۲ + \cdots + \binom{n}{n}b^n$

طبق فرض داریم:

$$A(A-I) = \overline{O} \Rightarrow A^۲ - A = \overline{O} \Rightarrow A^۲ = A$$
$$A^۲ = A \Rightarrow A^۳ = A^۲ = A \Rightarrow A^۴ = A^۳ = A$$

پس همهٔ توان‌های A برابر خود A است (به این ماتریس‌ها، خود توان می‌گوییم). اکنون داریم:

$$(A+I)^۴ = \binom{۴}{۰}A^۴ + \binom{۴}{۱}A^۳I + \binom{۴}{۲}A^۲I^۲ + \binom{۴}{۳}AI^۳ + \binom{۴}{۴}I^۴ = \left[\binom{۴}{۰}+\binom{۴}{۱}+\binom{۴}{۲}+\binom{۴}{۳}\right]A + \binom{۴}{۴}I = (۲^۴-۱)A + I = ۱۵A + I$$

۱۳۴- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: * ساده * صفحه‌های ۱۰ و ۱۲ ریاضیات گسسته

نکته: برای عدد صحیح b و عدد صحیحِ مخالف صفر a می‌نویسیم $a \mid b$ و می‌خوانیم a عاد می‌کند b را، اگر و فقط اگر «a شمارندهٔ b باشد» یا «b بر a بخش‌پذیر باشد».

نکته: اگر $a \mid b$ آنگاه عدد صحیحی چون q موجود است به‌طوری که: $b = aq$

نکته: اگر $a \mid b$ ، آنگاه به‌ازای هر $m \in \mathbb{Z}$ داریم: $a \mid mb \ , \ ma \mid mb \ , \ a^m \mid b^m$

با توجه به نکتهٔ سوم، گزینه‌های ۱، ۳ و ۴ درست است. یک مثال نقض برای گزینهٔ ۲ به‌صورت زیر است:

$a = ۲ \ , \ b = ۴ \ , m = ۳$

۱۳۵- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: * ساده * صفحه‌های ۱۰ و ۱۱ ریاضیات گسسته

نکتهٔ ۱ : $a \mid b \ , \ b \mid c \Rightarrow a \mid c$

نکتهٔ ۲ : $a \mid b \Rightarrow a \mid b^n \qquad (n \in \mathbb{N})$

با توجه به نکات بالا، گزینهٔ ۱ پاسخ است؛ زیرا:

$$a \mid b \ , \ b \mid c \xrightarrow{\text{نکتهٔ ۱}} a \mid c \xrightarrow[n=۲]{\text{نکتهٔ ۲}} a \mid c^۲$$

یک مثال نقض برای سایر گزینه‌ها به‌صورت زیر است:

$a = ۲ \ , \ b = ۶ \ , \ c = ۱۸$

۱۳۶- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: * متوسط * صفحهٔ ۱۰ ریاضیات گسسته

نکته: برای هر عدد صحیح a داریم $a \mid ۰$ ؛ یعنی صفر بر هر عدد صحیح بخش‌پذیر است و همهٔ اعداد صحیح شمارندهٔ صفر هستند.

با توجه به نکته و رابطهٔ $n^۳ + ۲n^۲ + n \mid ۰$ ، عدد n می‌تواند هر مقدار صحیحی باشد $(n \in \mathbb{Z})$.

بنابراین گزینهٔ ۴ پاسخ است.

۱۳۷- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: * متوسط * صفحهٔ ۱۲ ریاضیات گسسته

نکتهٔ ۱ : $a \mid b \ , \ c \mid d \Rightarrow ac \mid bd$

نکتهٔ ۲ : $a \mid b \Rightarrow a \mid nb \qquad (n \in \mathbb{Z})$

نکتهٔ ۳ : $a \mid b \ , \ a \mid c \Rightarrow a \mid mb + nc \quad (m,n \in \mathbb{Z})$

طبق فرض $۴ \mid ۵k - ۳$ و $۵ \mid ۴k + ۳$ ، پس با توجه به نکتهٔ ۱ داریم:

$$(۴ \times ۵) \mid (۵k-۳)(۴k+۳) \Rightarrow ۲۰ \mid ۲۰k^۲ + ۳k - ۹ \quad (*)$$

همچنین با توجه به نکتهٔ ۲ داریم:

$$۲۰ \mid ۲۰k^۲ \quad (**)$$

از $(*)$ و $(**)$ با توجه به نکتهٔ ۳ نتیجه می‌شود:

$$۲۰ \mid ۲۰k^۲ + ۳k - ۹ - ۲۰k^۲ \Rightarrow ۲۰ \mid ۳k - ۹$$

۱۳۸- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: * متوسط * صفحهٔ ۱۳ ریاضیات گسسته

نکته: عدد طبیعی d را بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد صحیح a و b می‌نامیم و می‌نویسیم $(a,b) = d$ ، هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد:

الف) $d \mid a , d \mid b$ ب) $\forall m > ۰ ; (m \mid a \wedge m \mid b \Rightarrow m \le d)$

نکته : $a \mid b \Rightarrow a \mid nb \quad (n \in \mathbb{Z})$

نکته : $a \mid b \ , \ a \mid c \Rightarrow a \mid nb + mc \quad (n,m \in \mathbb{Z})$

با فرض $(۲n+۷ , ۱۱n-۳) = d$ داریم:

$$\begin{cases} d \mid ۲n+۷ \xrightarrow{\times ۱۱} d \mid ۲۲n+۷۷ \\ d \mid ۱۱n-۳ \xrightarrow{\times ۲} d \mid ۲۲n-۶ \end{cases} \Rightarrow d \mid (۲۲n+۷۷)-(۲۲n-۶) \Rightarrow d \mid ۸۳ \Rightarrow d = ۱ \text{ یا } ۸۳$$

بنابراین بزرگ‌ترین مقدار ممکن برای $(۲n+۷ , ۱۱n-۳)$ برابر ۸۳ است.

۱۳۹- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: ٭ متوسط ٭ صفحهٔ ۱۳ ریاضیات گسسته

نکته: عدد طبیعی d را بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد صحیح a و b می‌نامیم و می‌نویسیم $(a,b)=d$، هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد:

الف) $d\,|\,a, d\,|\,b$ ب) $\forall m>0 ; (m\,|\,a \wedge m\,|\,b \Rightarrow m \le d)$

چون ضریب a در $a+13$ برابر یک است، پس $a+13$ هر عدد صحیحی می‌تواند باشد. بنابراین هر مقسوم علیه مثبت ۲۴ می‌تواند ب.م.م این دو عدد باشد؛ یعنی ب.م.م این دو عدد می‌تواند ۸ مقدار مختلف زیر باشد:

$\{1,2,3,4,6,8,12,24\}$

۱۴۰- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: ٭ متوسط ٭ صفحهٔ ۱۳ ریاضیات گسسته

نکته: $a\,|\,b \Rightarrow \begin{cases}(a,b)=|a| \\ [a,b]=|b|\end{cases}$

با توجه به نکتهٔ بالا داریم:

$$6a^2\,|\,36a^3 \Rightarrow [6a^2,36a^3]=|36a^3|$$

$$4a\,|\,24a^2 \Rightarrow (24a^2,4a)=|4a|$$

با جای‌گذاری این مقادیر داریم:

$$([6a^2,36a^3],(24a^2,4a))=(|36a^3|,|4a|)\xlongequal{|4a|\,\big|\,|36a^3|}|4a|=4|a|$$

۱۴۱- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: ٭ متوسط ٭ صفحه‌های ۳ و ۴ ریاضیات گسسته

نکته: به مثالی که نشان می‌دهد یک حکم در حالت کلی درست نیست، مثال نقض می‌گویند.

ابتدا درستی گزینهٔ ۴ را اثبات می‌کنیم:

اگر فرض کنیم $a=2k$ ، $b=2k+2$ و $c=2k+4$، آنگاه داریم:

$$abc=(2k)(2k+2)(2k+4)=\underbrace{8k\times(k+1)(k+2)}_{\text{حاصل‌ضرب ۳ عدد صحیح متوالی مضرب ۶ است.}}=8\times 6q=48q$$

اکنون برای سایر گزینه‌ها، مثال نقض ارائه می‌کنیم:

گزینهٔ ۱: اگر $a=5$ و $b=0$، آنگاه $ab=5\times 0=0$، ولی a و b هر دو با هم صفر نیستند.

گزینهٔ ۲: به‌ازای $n=4$، مقدار عبارت $3^4+4=81+4=85$ عددی اول نیست.

گزینهٔ ۳: اگر $a=\sqrt{2}$ و $b=-\sqrt{2}$، آنگاه $a+b$ مساوی صفر خواهد شد که عددی گویا است.

۱۴۲- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: ٭ متوسط ٭ صفحه‌های ۶ تا ۸ ریاضیات گسسته

نکته: اگر ارزش دو گزاره یکسان باشد، آن‌ها را گزاره‌های هم‌ارز (هم‌ارزش) می‌نامیم.

$$x^2+y^2+1\ge xy+x+y \Leftrightarrow 2x^2+2y^2+2\ge 2xy+2x+2y$$

$$\Leftrightarrow x^2+x^2+y^2+y^2+1+1-2xy-2x-2y\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2+y^2-2xy)+(x^2+1-2x)+(y^2+1-2y)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2+(x-1)^2+(y-1)^2\ge 0$$

بنابراین گزینهٔ ۲ پاسخ است.

۱۴۳- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: ٭ دشوار ٭ صفحه‌های ۵ و ۶ ریاضیات گسسته

نکته: در روش برهان خلف، فرض می‌کنیم که حکم نادرست باشد. سپس با استفاده از قوانین منطق گزاره‌ها و دنباله‌ای از استدلال‌های درست و مبتنی بر فرض، به یک نتیجهٔ غیرممکن یا متضاد با فرض می‌رسیم و از آنجا نتیجه می‌گیریم که فرض نادرست بودنِ حکم، باطل است و حکم درست است.

هریک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ ۱: در کتاب به‌روش برهان خلف اثبات شده است.

گزینهٔ ۲: اگر a گنگ نباشد، گویا است، در نتیجه a^3 نیز گویاست که با فرض تناقض دارد. پس حکم درست است.

گزینهٔ ۳: اگر a مضرب ۳ باشد؛ یعنی $a=3k$، آنگاه $a^3=27k^3=3(9k^3)=3k'$ نیز مضرب ۳ است.

گزینهٔ ۴: اگر $\frac{5}{a}$ گنگ نباشد، گویاست و از آنجا که حاصل تقسیم دو عدد گویای ناصفر همواره گویاست، پس $\frac{5}{\frac{5}{a}}=a$ نیز گویاست که با فرض در تناقض است، پس حکم درست است.

بنابراین اثبات گزینهٔ ۳ به برهان خلف نیاز ندارد.

۱۴۴- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: ٭ دشوار ٭ صفحهٔ ۱۴ ریاضیات گسسته

نکته: عدد اول p تنها دو مقسوم علیه طبیعی دارد (۱و p). بنابراین تنها چهار مقسوم‌علیه صحیح دارد (± 1 و $\pm p$).

طبق فرض x تنها چهار مقسوم‌علیه صحیح دارد، پس x عددی اول است. (٭)

همچنین طبق فرض داریم:

$$x \nmid 105 \Rightarrow x \nmid 3\times 5\times 7 \quad (٭٭)$$

از (٭) و (٭٭) نتیجه می‌شود عدد اول x، اعداد ۳، ۵ و ۷ نیست. بنابراین: $(x,21)=1$

۱۴۵- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: * دشوار * صفحه‌های ۱۰ و ۱۱ ریاضیات گسسته

نکته: $a\,|\,b \Rightarrow a\,|\,nb \qquad (n\in\mathbb{Z})$

نکته: $a\,|\,b\,,\,a\,|\,c \Rightarrow a\,|\,mb+nc \quad (m,n\in\mathbb{Z})$

با استفاده از نکات بالا داریم:

$$\begin{cases} ۱۹\,|\,۵a+۲ \xrightarrow{\times ۴} ۱۹\,|\,۲۰a+۸ \\ ۱۹\,|\,۱۹ \Rightarrow ۱۹\,|\,۱۹a \end{cases} \Rightarrow ۱۹\,|\,۲۰a+۸-۱۹a \Rightarrow ۱۹\,|\,a+۸ \Rightarrow a+۸=۱۹k \Rightarrow a=۱۹k-۸$$

برای دورقمی بودن a، باید داشته باشیم:

$$۱۰\le ۱۹k-۸\le ۹۹ \Rightarrow \frac{۱۸}{۱۹}\le k\le \frac{۱۰۷}{۱۹} \Rightarrow ۱\le k\le ۵$$

بنابراین به‌ازای ۵ مقدار دورقمی برای a، رابطهٔ $۱۹\,|\,۵a+۲$ برقرار است.

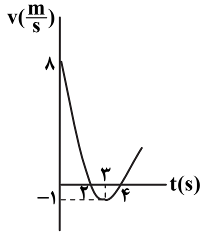
فیزیک

۱۴۶- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: * متوسط * صفحه‌های ۳، ۱۳ و ۱۴ فیزیک ۳

$$v_{av}=\frac{\Delta x_{\text{کل}}}{\Delta t_{\text{کل}}}=\frac{v_۱\Delta t_۱+۰+v_۳\Delta t_۳}{\Delta t_۱+\Delta t_۲+\Delta t_۳}=\frac{۲۰\times ۴۵\times ۶۰+۴۰\times ۲۷\times ۶۰}{(۴۵+۵+۴۰)\times ۶۰}=۲۲\frac{m}{s}$$

$$۲۲\frac{m}{s}\times\frac{۱km}{۱۰^۳m}\times\frac{۳۶۰۰s}{۱h}=۷۹/۲\frac{km}{h}$$

۱۴۷- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: * متوسط * صفحهٔ ۱۹ فیزیک ۳



$$v=t^۲-۶t+۸ \Rightarrow v=(t-۲)(t-۴)$$

نمودار سرعت- زمان سهمی رو به بالا است و بنابراین در لحظهٔ $t=-\frac{b}{۲a}$، سهمی دارای مینیمم خواهد بود.

$$t=\frac{-(-۶)}{۲}=۳s$$

$$t=۳s \Rightarrow v=-۱\frac{m}{s}$$

با توجه به نمودار سرعت- زمان، در ۲ ثانیهٔ اول $(۰\le t<۲s)$ و ثانیهٔ چهارم $(۳s\le t<۴s)$، اندازهٔ سرعت متحرک در حال کاهش و در نتیجه حرکت کندشونده است؛ بنابراین در مجموع، ۳ ثانیه حرکت کندشونده است.

۱۴۸- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: * متوسط * صفحه‌های ۳، ۹ تا ۱۱ فیزیک ۳

شیب خط مماس بر نمودار مکان- زمان برابر سرعت لحظه‌ای است.

$$v(۰)=v(۲۵s)=۰ \Rightarrow a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{۰-۰}{۲۵}=۰$$

تندی متوسط برابر است با:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{(۳۰-۱۰)+|-۲۰-۳۰|+(۲۰-(-۲۰))}{۲۵}=\frac{۱۱۰}{۲۵}=۴/۴\frac{m}{s}$$

سرعت متوسط برابر است با:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x(۲۵s)-x(۰)}{۲۵}=\frac{۲۰-۱۰}{۲۵}=۰/۴\frac{m}{s}$$

۱۴۹- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: * ساده * صفحهٔ ۱۳ فیزیک ۳

نمودار مکان- زمان خط راست است، پس یک حرکت با سرعت ثابت داریم که سرعت لحظه‌ای متحرک در هر لحظه و سرعت متوسط آن در تمامی بازه‌های زمانی یکسان است.

$$v_{av}=v=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{۰-۱۰۰}{۸}=-۱۲/۵\frac{m}{s} \Rightarrow |v_{av}|=۱۲/۵\frac{m}{s}$$

۱۵۰- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: * ساده * صفحه‌های ۱۳ و ۱۴ فیزیک ۳

چون نمودار مکان- زمان هر دو متحرک خط راست است، حرکت هر دو متحرک، با سرعت ثابت است. لحظهٔ برخورد (تلاقی) نمودارهای مکان- زمان دو متحرک، زمانی است که دو متحرک به هم می‌رسند $(x_A=x_B)$.

$$\left.\begin{aligned} &x_A=v_At+x_{\circ A} \Rightarrow x_A=۲۰t-۱۰۰ \xrightarrow{t=۱۵s} x_B=x_A=۲۰\times ۱۵-۱۰۰=۲۰۰m \\ &x_B=v_Bt+x_{\circ B} \end{aligned}\right\} \Rightarrow ۲۰۰=۱۵v_B+۵۰ \Rightarrow v_B=۱۰\frac{m}{s}$$

چون سرعت متحرک B ثابت است، در تمام لحظات سرعت آن $۱۰\frac{m}{s}$ است.

۱۵۱- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: * متوسط * صفحهٔ ۱۶ فیزیک ۳

$$v_۱=۰ \text{ و } v_۲=۱۲۰\frac{km}{h} \;،\; \Delta t=\frac{۱۲}{۳۶۰۰}h$$

$$\Delta x=\frac{v_۱+v_۲}{۲}\cdot\Delta t=\frac{۰+۱۲۰}{۲}\times\frac{۱۲}{۳۶۰۰}=\frac{۱۲\times ۶۰}{۳۶۰۰}=\frac{۲\times ۱۰}{۱۰۰}=۰/۲km=۲۰۰m$$

۱۵۲- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: * متوسط * صفحهٔ ۱۸ فیزیک ۳

$$v_1 = 108 \div 3/6 = 30\frac{m}{s}$$

راه‌حل اول:

در مدت ۰/۴ ثانیه (زمان واکنش راننده) اتومبیل همچنان با سرعت ثابت $30\frac{m}{s}$ جلو می‌رود.

$$\Delta x_1 = v\cdot\Delta t = 30\times 0/4 = 12m$$

هنگام ترمز گرفتن، مسافت طی شده (Δx_2) برابر است با:

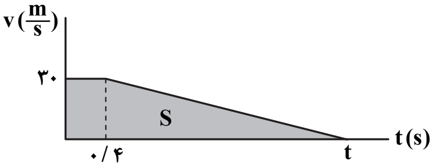
$$v_2^2 - v_1^2 = 2a\Delta x_2 \Rightarrow 0 - 900 = 2\times(-15)\times\Delta x_2 \Rightarrow \Delta x_2 = 30m$$

بنابراین اتومبیل پس از طی مسافت $\ell = 30 + 12 = 42m$ متوقف می‌شود و فاصلهٔ آن تا مانع برابر است با:

$$d = 50 - 42 = 8m$$

راه‌حل دوم:

می‌توانیم نمودار سرعت- زمان اتومبیل را از لحظهٔ دیدن مانع تا توقف، رسم کنیم.



$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow -15 = \frac{0-30}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = 2s$$

$$\Delta t = t - 0/4 \Rightarrow t = 2/4s$$

کل مسافت طی شده تا توقف اتومبیل برابر است با سطح محصور به نمودار $v-t$ و محور زمان. بنابراین:

$$\Delta x = \ell = S = \frac{(0/4 + 2/4)}{2}\times 30 = 42m$$

فاصلهٔ اتومبیل تا مانع هنگام توقف برابر است با:

$$d = 50 - 42 = 8m$$

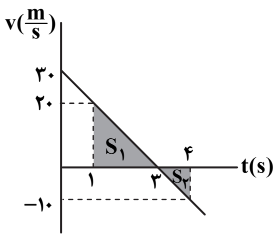
۱۵۳- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: * متوسط * صفحه‌های ۱۵ تا ۱۷ فیزیک ۳

$$\begin{cases} x = -5t^2 + 30t + 20 \\ x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}a = -5 \Rightarrow a = -10\frac{m}{s^2} \\ v_0 = 30\frac{m}{s} \\ x_0 = 20m \end{cases}$$

$$v = at + v_0 \Rightarrow v = -10t + 30$$

نمودار سرعت- زمان را رسم می‌کنیم:

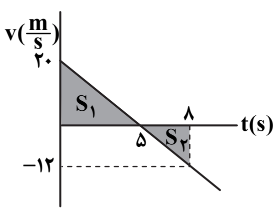
مساحت سطح زیر نمودار سرعت- زمان با رعایت علامت، برابر جابه‌جایی و مجموع تمام مساحت‌ها با علامت مثبت، برابر مسافت طی شده است.



$$\Delta x = S_1 - S_2 = \left(\frac{2\times 20}{2}\right) + \left(\frac{-10\times 1}{2}\right) = 15\ m \Rightarrow \Delta x = 15m$$

$$\ell = S_1 + S_2 = \frac{2\times 20}{2} + \frac{10\times 1}{2} = 25m$$

۱۵۴- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: * دشوار * صفحه‌های ۱۵ تا ۱۷ فیزیک ۳



چون سرعت متوسط در ۲ ثانیهٔ سوم حرکت $(4s \le t \le 6s)$ صفر است، طبق رابطهٔ $v_{av} = \frac{v_{4s} + v_{6s}}{2}$ سرعت جسم در لحظه‌های $t_1 = 4s$ و $t_2 = 6s$ قرینهٔ یکدیگر است؛ بنابراین سرعت در لحظهٔ وسط این بازه یعنی $t = 5s$، صفر خواهد بود.

$$v = at + v_0 \xrightarrow{t=5s,\ v=0} 0 = -4\times 5 + v_0 \Rightarrow v_0 = 20\frac{m}{s}$$

$$v = -4t + 20 \xrightarrow{t=8s} v_{8s} = -12\frac{m}{s}$$

$$\ell = S_1 + S_2 = \frac{20\times 5}{2} + \frac{3\times 12}{2} = 50 + 18 = 68m$$ (مسافت طی‌شده)

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{68}{8} = 8/5\frac{m}{s}$$

۱۵۵- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: * متوسط * صفحه‌های ۱۵ و ۱۷ فیزیک ۳

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \xrightarrow{x(7s)=0} 0 = \frac{49}{2}a + 7v_0 + 28 \Rightarrow 3/5a + v_0 = -4$$

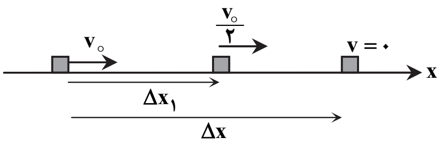
طبق تقارن سهمی، در $t = \frac{0+6}{2} = 3s$ (رأس سهمی)، سرعت صفر است.

$$v = at + v_0 \Rightarrow 0 = 3a + v_0 \Rightarrow \begin{cases} 3a + v_0 = 0 \\ 3/5a + v_0 = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -8\frac{m}{s^2} \\ v_0 = +24\frac{m}{s} \end{cases}$$

$$x(3s) = \frac{1}{2}\times(-8)\times 3^2 + 3\times 24 + 28 = -36 + 72 + 28 = 36 + 28 = 64m$$

$$\ell = \left|\Delta x_{(0,3s)}\right| + \left|\Delta x_{(3s,7s)}\right| = (64 - 28) + \left|0 - 64\right| = 36 + 64 = 100m$$

۱۵۶- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: ٭ متوسط ٭ صفحهٔ ۱۸ فیزیک ۳



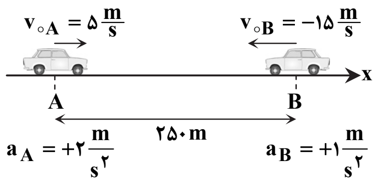
$$v^۲ - v_\circ^۲ = ۲a\Delta x \Rightarrow \begin{cases} \frac{v_\circ^۲}{۴} - v_\circ^۲ = ۲a\Delta x_۱ & (۱) \\ ۰ - v_\circ^۲ = ۲a\Delta x & (۲) \end{cases}$$

از تقسیم دو رابطهٔ (۱) و (۲) داریم:

$$\frac{\Delta x_۱}{\Delta x} = \frac{-\frac{۳}{۴}v_\circ^۲}{-v_\circ^۲} \Rightarrow \frac{\Delta x_۱}{\Delta x} = \frac{۳}{۴}$$

۱۵۷- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: ٭ متوسط ٭ صفحهٔ ۲۵ فیزیک ۳

مطابق شکل ابتدا علامت‌های سرعت اولیه و شتاب دو جسم را با توجه به محور انتخابی تعیین می‌کنیم. وقتی دو اتومبیل به هم می‌رسند، داریم:



$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_\circ t + x_\circ \\ x_A = x_B \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{۱}{۲}\times ۲t^۲ + ۵t = \frac{۱}{۲}\times ۱\times t^۲ - ۱۵t + ۲۵۰$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}t^۲ + ۲۰t - ۲۵۰ = ۰ \Rightarrow t^۲ + ۴۰t - ۵۰۰ = ۰ \Rightarrow (t+۵۰)(t-۱۰) = ۰$$

$$\Rightarrow t = ۱۰s$$

۱۵۸- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: ٭ متوسط ٭ صفحهٔ ۲۴ فیزیک ۳ (تمرین ۱-۱۳)

ابتدا مدت‌زمان رسیدن متحرک A از $x=۰$ تا $x=۱۰m$ را محاسبه می‌کنیم:

$\Delta x_A = \frac{۱}{۲}a_A t^۲ + v_{\circ A}t \Rightarrow ۱۰ = \frac{۵}{۲}t^۲ \Rightarrow t = ۲s \Rightarrow$ بنابراین B دو ثانیه بعد از A شروع به حرکت می‌کند.

در لحظه‌ای که سرعت B صفر است، A مقداری سرعت گرفته است و از این به بعد با یک آهنگ، سرعت هر دو زیاد می‌شود و در نتیجه همیشه سرعت A از B بیشتر است و فاصلهٔ آن‌ها زیاد می‌شود. این وضع ادامه دارد تا زمانی‌که A به $x = ۱۶۰m$ برسد و متوقف شود و از این زمان به بعد، فاصلهٔ آن‌ها کم می‌شود. پس بیشترین فاصلهٔ آن‌ها در زمانی است که متحرک A به $x = ۱۶۰m$ می‌رسد.

$$\Delta x_A = \frac{۱}{۲}a_A t^۲ + v_{\circ A}t \Rightarrow ۱۶۰ = \frac{۵}{۲}t^۲ \Rightarrow t_A = ۸s \text{ و } t_B = t_A - ۲ = ۶s$$

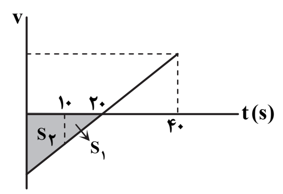
$$t = ۸s \Rightarrow x_A = ۱۶۰ \text{ و } x_B = \frac{۵}{۲}\times ۶^۲ = ۹۰m \Rightarrow x_A - x_B = ۷۰m$$

۱۵۹- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: ٭ ساده ٭ صفحهٔ ۱۷ فیزیک ۳

چون سرعت اولیه صفر است، باید شیب خط مماس بر نمودار مکان- زمان در لحظهٔ $t=۰$ برابر صفر باشد، که گزینه‌های ۱ و ۲ این شرط را دارند.

در گزینهٔ ۱، جهت تقعر نمودار به‌سمت بالا و شتاب مثبت و در جهت محور مکان است و در گزینهٔ ۲ تقعر نمودار به‌سمت پایین و شتاب منفی و خلاف جهت محور مکان است.

۱۶۰- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: ٭ دشوار ٭ صفحه‌های ۱۹ و ۲۰ فیزیک ۳



متحرک در مدت $t=۰$ تا $t=۴۰s$ یک حرکت با شتاب ثابت دارد. با توجه به تقارن نمودار سرعت- زمان در این ۴۰ ثانیه می‌توان گفت که در $t=۲۰s$ جهت حرکت (علامت سرعت) عوض می‌شود. پس بیشترین فاصلهٔ متحرک از نقطهٔ شروع در $t=۲۰s$ است.

برای بازهٔ $t=۰$ تا $t=۱۰s$:

$$S_۲ = |\Delta x| = ۳۰۰m$$

با توجه به تشابه مثلث‌ها، می‌توان نوشت:

$$\frac{S_۱}{S_۱+S_۲} = (\frac{۱۰}{۲۰})^۲ \Rightarrow \frac{S_۱}{S_۱+۳۰۰} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow S_۱ = ۱۰۰ \Rightarrow |\Delta x_{(۰,۲۰s)}| = S_۱+S_۲ = ۴۰۰ \Rightarrow |x(۲۰s)-x(۰)| = ۴۰۰m$$

راه‌حل دوم:

$$\left.\begin{array}{l} v = at + v_\circ \text{ و } v(۲۰s) = ۰ \Rightarrow ۲۰a + v_\circ = ۰ \\ \Delta x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_\circ t \Rightarrow -۳۰۰ = ۵۰a + ۱۰v_\circ \Rightarrow ۵a + v_\circ = -۳۰ \end{array}\right\} \Rightarrow a = ۲\frac{m}{s^۲} \text{ و } v_\circ = -۴۰\frac{m}{s}$$

$$x(۲۰s) - x(۰) = \frac{۱}{۲}\times ۲\times ۲۰^۲ + ۲۰\times(-۴۰) = -۴۰۰m \Rightarrow |x(۲۰s)-x(۰)| = ۴۰۰m$$

۱۶۱- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: ٭ دشوار ٭ صفحه‌های ۱۳، ۱۷، ۱۹ و ۲۰ فیزیک ۳

$$x_A = ۱۰t - ۵۰$$

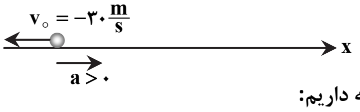
$$x_B = \begin{cases} -\frac{۵}{۲}t^۲ + ۳۰t + ۱۵۰ & ۰ \le t \le ۱۰s \\ -۲۰(t-۱۰) + ۲۰۰ & t \ge ۱۰s \end{cases}$$

به هم رسیدن دو متحرک یعنی $x_A = x_B$. می‌دانیم که مساحت زیر نمودار سرعت- زمان با رعایت علامت برابر جابه‌جایی است.

با توجه به $x_{\circ A} = -۵۰m$ و $x_{\circ B} = +۱۵۰m$ و نمودارهای سرعت- زمان، مشخص است که جواب کمتر از $t = ۱۰s$ نداریم. (چرا؟)

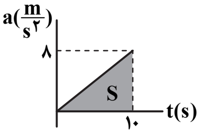
$$۱۰t - ۵۰ = ۲۰۰ - ۲۰(t-۱۰) \Rightarrow ۱۰t - ۵۰ = ۴۰۰ - ۲۰t \Rightarrow ۳۰t = ۴۵۰ \Rightarrow t = ۱۵s$$

۱۶۲- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ **مشخصات سؤال:** * متوسط * صفحه‌های ۱۰ و ۱۱ فیزیک ۳



در ابتدا حرکت کندشونده است، زیرا $v_\circ < 0$ و $a > 0$ و در نتیجه $av < 0$ است.

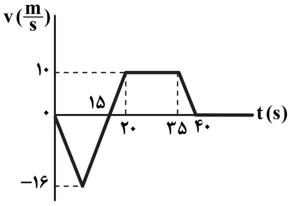
مساحت سطح زیر نمودار شتاب- زمان برابر تغییرات سرعت در بازهٔ زمانی موردنظر است. در بازهٔ صفر تا ۱۰ ثانیه داریم:



$$S = v_{10s} - v_\circ = \frac{8\times 10}{2} = 40 \Rightarrow v_{10s} - (-30) = 40 \Rightarrow v_{10s} = 10\frac{m}{s}$$

بنابراین سرعت از $v_\circ = -30\frac{m}{s}$ به $v = +10\frac{m}{s}$ رسیده است. بنابراین ابتدا اندازهٔ سرعت کاهش می‌یابد و حرکت کندشونده است و پس از مدتی سرعت صفر شده و متحرک تغییر جهت می‌دهد و بعد از تغییر جهت اندازهٔ سرعت افزایش می‌یابد و حرکت تندشونده خواهد بود.

۱۶۳- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ **مشخصات سؤال:** * متوسط * صفحه‌های ۱۹ و ۲۰ فیزیک ۳



در $t = 15s$ جهت حرکت متحرک عوض می‌شود و در $t = 40s$ متحرک متوقف می‌شود، پس جواب $t = 15s$ یا $t = 40s$ است. (البته مکان متحرک در زمان‌های بعد از $t = 40s$ هم، مساوی $x_{t=40s}$ است.)

جابه‌جایی برابر است با مساحت سطح زیر نمودار سرعت- زمان.

$$x(15s) - x(0) = -S_1 = \frac{-15\times 16}{2} = -120m$$

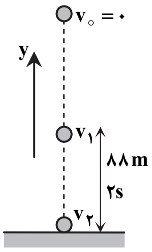
$$x(40s) - x(0) = -S_1 + S_2 = \frac{-15\times 16}{2} + \frac{25+15}{2}\times 10 = -120 + 200 = 80m$$

پس در $t = 15s$ فاصلهٔ متحرک از نقطهٔ شروع ۱۲۰ متر و در $t = 40s$ و بعد از آن این فاصله ۸۰ متر است. بنابراین بیشترین فاصله از نقطهٔ شروع حرکت ۱۲۰ متر است که در لحظهٔ $t = 15s$ رخ می‌دهد.

۱۶۴- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ **مشخصات سؤال:** * ساده * صفحهٔ ۲۲ فیزیک ۳

$$v^2 = -2g\Delta y \Rightarrow 22\times 22 = -2\times 10\times \Delta y \Rightarrow \Delta y = -\frac{22\times 22}{2\times 10} = -\frac{11\times 22}{10} = -24/2\,m \Rightarrow \ell = |\Delta y| = 24/2\,m$$

۱۶۵- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ **مشخصات سؤال:** * متوسط * صفحه‌های ۲۲ و ۲۳ فیزیک ۳



راه‌حل اول:

برای ۲ ثانیهٔ آخر سقوط داریم:

$$v_2 = -g\Delta t + v_1 \xrightarrow{\Delta t = 2s} v_2 = -20 + v_1$$

$$\Delta y = \frac{v_1 + v_2}{2}\Delta t \Rightarrow -88 = \frac{v_1 + (v_1 - 20)}{2}\times 2 \Rightarrow \begin{cases} v_1 = -34\frac{m}{s} \\ v_2 = -54\frac{m}{s} \end{cases}$$

$$v^2 = -2g\Delta y_{\text{کل}} \Rightarrow 54\times 54 - 0 = -20\times \Delta y_{\text{کل}} \Rightarrow \Delta y_{\text{کل}} = -145/8\,m$$

$$\ell = |\Delta y_{\text{کل}}| = 145/8\,m$$

راه‌حل دوم:

اگر کل مدت‌زمان سقوط t باشد، داریم:

$$y_{(t-2s)} - y_t = 88 \Rightarrow -\frac{1}{2}g(t-2)^2 + \frac{1}{2}gt^2 = 88 \Rightarrow -5t^2 + 20t - 20 + 5t^2 = 88 \Rightarrow t = 5/4\,s$$

$$y_t = -\frac{1}{2}gt^2 + y_\circ \Rightarrow y_t - y_\circ = -\frac{1}{2}\times 10\times (5/4)^2 = -145/8$$

$$\Rightarrow \ell = |\Delta y| = 145/8\,m$$

۱۶۶- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ **مشخصات سؤال:** * دشوار * صفحهٔ ۲۴ فیزیک ۳

مبدأ مکان را محل رها شدن سنگ‌ها در نظر می‌گیریم. $(y_\circ = 0)$. بنابراین:

$$y_1 = -\frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow -11/25 = -5t^2 \Rightarrow t = 1/5\,s$$

یعنی سنگ دوم ۱/۵ ثانیه پس از شروع حرکت سنگ اول، رها شده است و معادلهٔ حرکت آن به‌صورت $y_2 = -\frac{1}{2}g(t - 1/5)^2$ خواهد بود.

فاصلهٔ دو سنگ از یکدیگر: $y_2 - y_1 = 48/75 \Rightarrow -\frac{1}{2}g(t-1/5)^2 - (-\frac{1}{2}gt^2) = 48/75$

$$\Rightarrow -5(t^2 - 3t + 2/25) + 5t^2 = 48/75 \Rightarrow 15t - 11/25 = 48/75 \Rightarrow t = 4s$$

۱۶۷- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ **مشخصات سؤال:** * متوسط * صفحهٔ ۲۴ فیزیک ۳

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow -491 = -\frac{1}{2}g(10)^2 \Rightarrow g = \frac{2\times 491}{100} = 9/82\frac{m}{s^2}$$

۱۶۸- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: ❋ متوسط ❋ صفحهٔ ۵۰ فیزیک ۱

$$E_A=E_B=E_C=E_D \Rightarrow \begin{cases} K_B-K_A=U_A-U_B \Rightarrow \frac{1}{2}m(9v_1^2-v_1^2)=4mgh \to gh=v_1^2 \\ K_C-K_A=U_A-U_C \Rightarrow \frac{1}{2}m(v_C^2-v_1^2)=2mgh \\ K_D-K_A=U_A-U_D \Rightarrow \frac{1}{2}m(v_D^2-v_1^2)=3mgh \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_C^2-v_1^2=4v_1^2 \Rightarrow v_C=v_1\sqrt{5} \\ v_D^2-v_1^2=6v_1^2 \Rightarrow v_D=v_1\sqrt{7} \end{cases}$$

۱۶۹- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: ❋ متوسط ❋ صفحهٔ ۵۰ فیزیک ۱

$$AB=d=v\cdot\Delta t=1\times 3=3\,m$$

$$E=U+K \Rightarrow \Delta E=\Delta U+\Delta K$$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta U=mg\Delta h=mg(AB\,Sin30^\circ)=100\times\frac{3}{2}=150\,J \\ \Delta K=0 \ \text{(تندی ثابت است)} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta E=150\,J \Rightarrow$$ انرژی مکانیکی جسم ۱۵۰ ژول زیاد شده است

تذکر: ΔE برابر است با حاصل جمع جبری کار نیروهایی به‌غیر از وزن، نیروی فنر و نیروی میدان الکتریکی که بر جسم وارد می‌شوند.
در اینجا کار نیروی F برابر ۱۸۰ ژول است اما ΔE برابر ۱۵۰ نیوتن است. یعنی کار نیروی اصطکاک وارد بر جسم ۳۰- ژول است.

۱۷۰- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: ❋ متوسط ❋ صفحه‌های ۵۰ و ۵۱ فیزیک ۱

$$Sin53^\circ=\frac{h}{5} \Rightarrow 0/8=\frac{h}{5} \Rightarrow h=4m$$

$$E_B-E_A=W_f \Rightarrow \frac{1}{2}mv_B^2-mgh=-0/2mgh \Rightarrow \frac{1}{2}mv_B^2=0/8mgh \Rightarrow v_B^2=1/6gh=1/6\times 10\times 4$$

$$\Rightarrow v_B^2=16\times 4 \Rightarrow v_B=4\times 2=8\frac{m}{s}$$

۱۷۱- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: ❋ دشوار ❋ صفحه‌های ۵۱ و ۵۳ فیزیک ۱

توان مکانیکی (مفید) = $0/8\times$ توان الکتریکی (مصرفی) = $0/8\times 1000 = 800\,W$

کاری که موتور روی وزنه انجام می‌دهد انرژی مکانیکی وزنه را زیاد می‌کند. چون انرژی جنبشی بار تغییر نمی‌کند (تندی ثابت است) پس این مقدار به انرژی پتانسیل جسم اضافه می‌شود.

$$W=P\cdot\Delta t=800\times 30=24000\,W$$

$$W=\Delta E=\Delta U \Rightarrow 24000=m\times 10\times 2 \Rightarrow m=1200\,kg$$

۱۷۲- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: ❋ ساده ❋ صفحه‌های ۶۸ تا ۷۲ فیزیک ۱

وقتی لولهٔ مویین شیشه‌ای در ظرف محتوی جیوه قرار می‌گیرد، چون نیروی دگرچسبی بین مولکول‌های جیوه و شیشه کمتر از نیروی هم‌چسبی بین مولکول جیوه است، جیوه در لولهٔ مویین بالا می‌رود ولی سطح آن پایین‌تر از سطح جیوهٔ ظرف قرار می‌گیرد. توجه کنید هر چه قطر لولهٔ مویین در این حالت کمتر باشد، ارتفاع ستون جیوه در آن نیز کمتر می‌شود.

۱۷۳- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: ❋ ساده ❋ صفحه‌های ۷۱، ۷۲ و ۷۵ فیزیک ۱

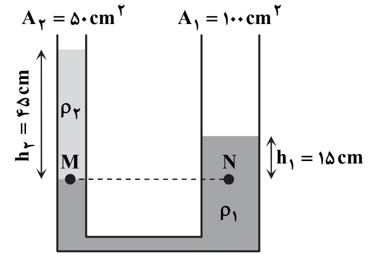
$$P=P_\circ+\rho gh \Rightarrow \Delta P=\rho g\Delta h \Rightarrow 1/5\times 10^5-1/2\times 10^5=\rho\times 10\times 5 \Rightarrow \rho=\frac{3\times 10^4}{50}=600\frac{kg}{m^3}=0/6\frac{g}{cm^3}$$

تذکر: توجه کنید فشار هوا در این محل را می‌توانیم از معادلات زیر به‌دست آوریم.

$$\begin{cases} 1/2\times 10^5=P_\circ+5\times 10\times\rho \\ 1/5\times 10^5=P_\circ+10\times 10\times\rho \end{cases}$$

و با توجه به $\rho=600\frac{kg}{m^3}$، مقدار فشار هوا در این محل $P_\circ=9\times 10^4\,Pa$ به‌دست می‌آید.

۱۷۴- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: ❋ متوسط ❋ صفحه‌های ۷۵، ۷۸ و ۹۱ و ۸۹ فیزیک ۱



فشار در نقاط هم‌تراز یک مایع برابر است.

فشار مایع به شکل ظرف و مساحت مقطع آن بستگی ندارد و از رابطهٔ $P=P_\circ+\rho gh$ حساب می‌شود.

$$P_M=P_N$$

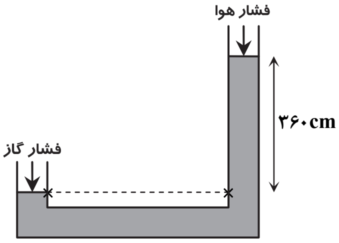
$$\rho_2gh_2+P_\circ=\rho_1gh_1+P_\circ \Rightarrow \rho_2h_2=\rho_1h_1 \Rightarrow 45\rho_2=15\rho_1$$

$$\Rightarrow \rho_2=\frac{1}{3}\rho_1=\frac{1}{3}\times 1/8=0/6\frac{g}{cm^3}=600\frac{kg}{m^3}$$

۱۷۵- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: ❋ دشوار ❋ صفحه‌های ۷۲ تا ۷۴ فیزیک ۱

- نیروی وارد بر میز برابر با حاصل جمع وزن ظرف و مایع است که در دو ظرف برابر است.
- فشار در کف ظرف برابر است با $P=P_\circ+\rho gh$ و یا اگر فقط فشار حاصل از مایع موردنظر باشد، $P=\rho gh$ است که در هر صورت در دو ظرف یکسان است.
- با توجه به‌شکل ظرف‌ها و اینکه حجم و ارتفاع مایع در دو ظرف یکسان است مساحت کف ظرف (۱) بیشتر است، پس نیروی وارد بر کف ظرف $(F=\rho ghA)$ در ظرف (۱) بیشتر است.
- نیروی وارد بر کل ظرف، برابر با وزن مایع درون ظرف است، که در دو ظرف یکسان است.

۱۷۶- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: * متوسط * صفحهٔ ۹۲ فیزیک ۱



فشارسنج روی مخزن گاز، فشار پیمانه‌ای گاز (P_g) را نشان می‌دهد.

۹۰ کیلوپاسکال فشار حاصل از ۳۶۰ سانتی‌متر ستون مایع است. $(۳۶۰cm = ۴۱۰ - ۵۰)$

$$\underset{\text{فشار حاصل از ستون مایع}}{P_۱} + \underset{\text{فشار هوا}}{P_\circ} = \underset{\text{فشار مطلق گاز}}{P} \Rightarrow P_۱ = P - P_\circ = P_g = ۹۰\times ۱۰^۳ \Rightarrow \rho g h = ۹۰\times ۱۰^۳$$

$$\Rightarrow \rho \times ۱۰ \times ۳/۶ = ۹۰\times ۱۰^۳ \Rightarrow \rho = ۲۵۰۰\frac{kg}{m^۳} = ۲/۵\frac{g}{cm^۳}$$

۱۷۷- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: * دشوار * صفحهٔ ۹۲ فیزیک ۱

$$P_A = P_\circ + \underbrace{(\text{فشار حاصل از ۱۶۰ سانتی‌متر مایع ۱})} = ۷۵ + ۲۰ = ۹۵cmHg$$

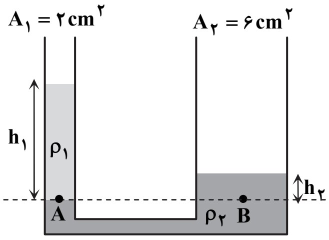
$$۱۶۰\rho_۱ = \rho_{Hg} h_۱ \Rightarrow h_۱ = ۲۰cmHg$$

$$P_B = P_A + \underbrace{(\text{فشار حاصل از ۱۰۰ سانتی‌متر مایع ۲})} = ۹۵ + ۱۰ = ۱۰۵cmHg$$

$$۱۰۰\rho_۲ = \rho_{Hg} h_۲ \Rightarrow h_۲ = ۱۰cmHg$$

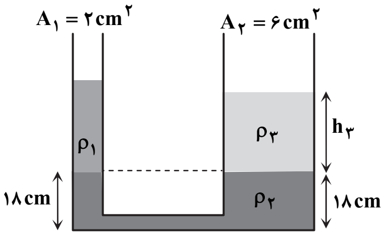
۱۷۸- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: * دشوار * صفحهٔ ۷۵ فیزیک ۱

با توجه به‌شکل:



$$P_A = P_B$$
$$\Rightarrow P_\circ + \rho_۱ g h_۱ = P_\circ + \rho_۲ g h_۲$$
$$\Rightarrow \rho_۱ h = \rho_۲ h_۲ \Rightarrow \rho_۱ \times ۳۸ = ۲ \times ۸$$
$$\Rightarrow \rho_۱ = \frac{۸}{۱۹}\frac{g}{cm^۳}$$

پس از ریختن مایع (۳) روی مایع (۲) وضعیت جدید مطابق شکل ایجاد می‌شود. با توجه به‌شکل:



$$\rho_۱ h_۱ = \rho_۳ h_۳ \Rightarrow \frac{۸}{۱۹}\times ۳۸ = \rho_۳ h_۳$$
$$\Rightarrow \rho_۳ h_۳ = ۱۶$$

حجم مایع برابر است با:

$$m_۳ = \rho_۳ V_۳ = \rho_۳ (h_۳ A_۲) = ۱۶ \times ۶ = ۹۶g$$

تذکر ۱: با توجه به اینکه در وضعیت قبل $\rho_۱ h_۱ = \rho_۲ h_۲$ است، می‌توانستیم $\rho_۱$ را محاسبه نکنیم و به‌جای $\rho_۱ h_۱$ معادل آن ۱۶ $= \rho_۲ h_۲$ را قرار دهیم.

تذکر ۲: عدد ۱۸cm (ارتفاع مایع (۲) در هر ستون) اثری در حل تست ندارد؛ ولی به‌عنوان تمرین، می‌توانید نحوهٔ به‌دست آمدن آن را بررسی کنید.

۱۷۹- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: * متوسط * صفحه‌های ۷۹ تا ۹۰ فیزیک ۱

a و b شناور هستند، پس چگالی آن‌ها از چگالی آب کمتر است.

c غوطه‌ور است، پس چگالی آن برابر چگالی آب است.

d یا غوطه‌ور است یا غرق شده، پس چگالی آن مساوی یا بیشتر از آب است.

ضمناً چگالی a از b کمتر است زیرا کسر بیشتری از حجم b وارد مایع شده است. گزاره‌های الف، ب و ت درست هستند اما درمورد c و d گزارهٔ درست $\rho_c \leq \rho_d$ و $\rho_b < \rho_d$ است، پس پ و ث درست نیستند. گزارهٔ ج هم که قطعاً نادرست است.

۱۸۰- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحهٔ ۸۳ فیزیک ۱

$$r_۱ = \frac{۸}{۲} = ۴cm \quad , \quad r_۲ = \frac{۲}{۲} = ۱cm$$

$$A_۱ v_۱ = A_۲ v_۲ \Rightarrow \pi r_۱^۲ \times v_۱ = \pi r_۲^۲ \times v_۲$$

$$۴^۲ \times ۱۰ = ۱^۲ \times v_۲ \Rightarrow v_۲ = ۱۶۰\frac{cm}{s} = ۱/۶\frac{m}{s}$$

شیمی

۱۸۱- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط: * متوسط * صفحه‌های ۴، ۵، ۶ و ۱۱ شیمی ۳

ترکیب داده شده یک استر با جرم مولی زیاد است و دارای فرمول مولکولی $C_{۵۷}H_{۱۱۰}O_۶$ می‌باشد.

۱۸۲- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: ٭ ساده ٭ صفحهٔ ۷ شیمی ۳

در کلوئید و سوسپانسیون، اندازهٔ ذرات پخش‌شونده به‌گونه‌ای است که مسیر حرکت نور در آن‌ها مشخص می‌شود. (پرتوهای نورانی توسط ذرات سوسپانسیون و کلوئید پخش می‌شوند.)

۱۸۳- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: ٭ ساده ٭ صفحه‌های ۷ تا ۱۰ شیمی ۳

عبارت «پ» نادرست است. صابون کلسیم نامحلول در آب است و نمی‌تواند خاصیت پاک‌کنندگی داشته باشد.

۱۸۴- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: ٭ ساده ٭ صفحه‌های ۹، ۱۱ و ۱۲ شیمی ۳

عبارت‌های «ب» و «پ» درست هستند.

الف) صابون گوگرددار برای از بین بردن جوش صورت و قارچ پوستی تهیه می‌شود.

ت) هر چه شوینده‌ای مواد شیمیایی بیشتری داشته باشد، احتمال ایجاد عوارض جانبی آن بیشتر است.

۱۸۵- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: ٭ ساده ٭ صفحه‌های ۱۲ و ۱۳ شیمی ۳

پاک‌کننده‌های صابونی و غیرصابونی خاصیت بازی دارند.

۱۸۶- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: ٭ ساده ٭ صفحه‌های ۱۳ و ۱۴ شیمی ۳

فقط عبارت «ت» نادرست است و باید به‌جای آمونیاک، آهک نوشته شود تا عبارت درست حاصل شود.

۱۸۷- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: ٭ ساده ٭ صفحه‌های ۱۴ و ۱۵ شیمی ۳

بر اساس تعریف آرنیوس از اسیدها و بازها، گاز هیدروژن کلرید و هر ماده‌ای که پس از انحلال در آب، غلظت یون هیدرونیوم را افزایش دهد، یک اسید است.

۱۸۸- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: ٭ متوسط ٭ صفحه‌های ۱۵ و ۱۶ شیمی ۳

۱۸۹- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: ٭ متوسط ٭ صفحه‌های ۱۷ تا ۱۹ شیمی ۳

فقط عبارت «ب» نادرست است.

الف) در محلول آبی اسید ضعیف، هم مولکول اسید یونش نیافته و هم یون وجود دارد؛ ولی در محلول آبی اسید قوی تک پروتون‌دار، فقط یون وجود دارد. (شکل صفحهٔ ۱۸ کتاب)

ب) در غلظت‌های برابر از دو اسید، غلظت یون‌ها در محلول اسید قوی‌تر بیشتر است.

۱۹۰- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: ٭ متوسط ٭ صفحه‌های ۱۷ و ۱۸ شیمی ۳

هر چه غلظت یون‌ها در محلول بیشتر باشد، رسانایی بیشتر خواهد بود.

$HCl(۰/۰۰۱M) \xrightarrow{\text{اسید قوی } (\alpha=۱)}$ غلظت یون‌ها $= ۰/۰۰۲$ مولار

$CH_3COOH(۰/۱M) \xrightarrow{\alpha=۰/۰۱}$ غلظت یون‌ها $= ۰/۰۰۲$ مولار

$HCN(۰/۵M) \xrightarrow{\alpha=۰/۰۰۰۱}$ غلظت یون‌ها $= ۲\times۵\times۱۰^{-۵}\times۱۰ = ۱۰^{-۴} = ۰/۰۰۰۱$ مولار

$HF(۰/۰۲M) \xrightarrow{\alpha=۰/۰۸}$ غلظت یون‌ها $= ۲\times(۰/۰۲\times۰/۰۸) = ۰/۰۰۳۲$ مولار

۱۹۱- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: ٭ متوسط ٭ صفحهٔ ۱۸ شیمی ۳

$$HA \rightleftharpoons H^+ + A^- \quad \Rightarrow [HA]\text{(پیش از یونش)} = ۰/۶ + ۰/۲ = ۰/۸ \Rightarrow \alpha = \frac{۰/۲}{۰/۸} = ۰/۲۵$$

پس از یونش: ۰/۶ ، ۰/۲ ، ۰/۲

۱۹۲- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: ٭ متوسط ٭ صفحهٔ ۱۹ شیمی ۳

$$\left.\begin{array}{l} \text{نیتریک اسید (اسید قوی)}: \alpha = ۱ \Rightarrow [H^+] = ۰/۲ \\ \text{استیک اسید}: \begin{cases}\alpha = ۰/۰۱۲۵ \\ M = ۰/۱\end{cases} \Rightarrow [H^+] = ۰/۰۱۲۵\times۰/۱ = ۱/۲۵\times۱۰^{-۳} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{۰/۲}{۱/۲۵\times۱۰^{-۳}} = \frac{۲۰۰}{۱/۲۵} = ۱۶۰$$

۱۹۳- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: ٭ ساده ٭ صفحهٔ ۱۸ شیمی ۳

برای تشکیل یون H^+ به مقدار ۰/۵ مولار، باید ۰/۵ مولار HA یونیده شود؛ بنابراین غلظت HA پیش از یونش ۱ مولار است و به میزان ۰/۵ مولار یونیده شده است.

$$\Rightarrow \alpha = \frac{۰/۵}{۱} = ۰/۵$$

۱۹۴- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: ٭ متوسط ٭ صفحه‌های ۱۸ و ۲۲ شیمی ۳

مولکول‌های یونیده شده $= \frac{۲۴}{۲} = ۱۲ \Rightarrow \alpha = \frac{۱۲}{۱۰۰۰} = ۰/۰۱۲ \Rightarrow$ مولار یونیده شده $= ۰/۰۱۲ \times ۱ = ۰/۰۱۲$

$$HF \rightleftharpoons H^+ + F^-$$

غلظت پیش از یونش: ۱ ، ۰ ، ۰

غلظت پس از یونش: $۱-۰/۰۱۲$ ، ۰/۰۱۲ ، ۰/۰۱۲

$$K_a = \frac{۰/۰۱۲\times۰/۰۱۲}{۰/۹۸۸} \simeq ۱/۴۵\times۱۰^{-۴}$$

۱۹۵- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: ＊ دشوار ＊ صفحه‌های ۱۸ و ۲۲ شیمی ۳

$$\begin{cases}\alpha_{HA} = ۴\alpha_{HB} \\ M_{HB} = ۱۰M_{HA}\end{cases}$$

$$K_{a_{HA}} = \frac{M_{HA} \times (\alpha_{HA})^۲}{۱ - \cancel{\alpha_{HA}}}$$

$$K_{a_{HB}} = \frac{M_{HB} \times (\alpha_{HB})^۲}{۱ - \cancel{\alpha_{HB}}}$$

$$\frac{K_{a_{HA}}}{K_{a_{HB}}} = \frac{۰/۱\cancel{M_{HB}} \times ۱۶\cancel{\alpha^۲_{HB}}}{\cancel{M_{HB}} \times \cancel{\alpha^۲_{HB}}} = ۱/۶$$

۱۹۶- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: ＊ ساده ＊ صفحه‌های ۱۹ تا ۲۱ شیمی ۳

وقتی واکنش‌ها به تعادل می‌رسند، مقدار یا غلظت واکنش‌دهنده‌ها و فراورده‌ها ثابت می‌ماند، اما الزاماً با هم برابر نمی‌شود.

۱۹۷- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: ＊ متوسط ＊ صفحهٔ ۲۳ شیمی ۳

سرعت واکنش فلزات (مثلاً فلز Mg) با اسیدها، به غلظت یون H^+ در محلول بستگی دارد. بنابراین می‌توان دریافت غلظت H^+ در ظرف «الف» بیشتر از ظرف «ب» است و در صورتی که غلظت مولی یکسانی از دو اسید در دو ظرف وجود داشته باشد، اسید ظرف «الف» می‌تواند اسید قوی و ظرف «ب» ضعیف باشد (اسید ظرف «الف» قوی‌تر از ظرف «ب» است)، بنابراین عبارت گزینهٔ ۱ هرگز نمی‌تواند درست باشد.

۱۹۸- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: ＊ ساده ＊ صفحه‌های ۳۴ و ۳۵ شیمی ۱

فقط عبارت «الف» درست است.

ب) He آرایش هشت‌تایی ندارد.

پ) به‌عنوان مثال اتم آهن دارای ۸ الکترون ظرفیتی بوده و در واکنش‌های شیمیایی شرکت می‌کند.

ت) آرایش الکترون- نقطه‌ای هلیم به‌صورت $He:$ است.

۱۹۹- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: ＊ ساده ＊ صفحه‌های ۳۷ و ۳۸ شیمی ۱

در عبارت گزینهٔ ۲ باید به‌جای ۴، عدد ۳ باشد تا به گزینه‌ای درست تبدیل شود.

۲۰۰- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: ＊ دشوار ＊ صفحهٔ ۳۵ شیمی ۱

$$X: ۱s^۲۲s^۲۲p^۶۳s^۲۳p^۶\underline{۳d^۶۴s^۲}$$

$$Y: ۱s^۲۲s^۲۲p^۶۳s^۲۳p^۶۳d^{۱۰}\underline{۴s^۲۴p^۶}$$

تعداد الکترون‌های لایهٔ ظرفیت = ۸

مجموع الکترون‌های زیرلایه‌های s = ۸

۲۰۱- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: ＊ متوسط ＊ صفحه‌های ۳۵ تا ۳۷ شیمی ۱

بررسی عبارت‌های نادرست:

پ) در بین عناصر گروه ۱۳، فقط آلومینیم با از دست دادن الکترون به آرایش الکترونی گاز نجیب دورهٔ قبل از خود می‌رسد.

ت) بسیاری از فلزات واسطه و بعضی از فلزات دستهٔ p و همچنین فلز Li، با از دست دادن الکترون، آرایش هشت‌تایی پیدا نمی‌کنند.

۲۰۲- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: ＊ متوسط ＊ صفحه‌های ۳۸ و ۳۹ شیمی ۱

$$\left.\begin{matrix}{}_{۱۲}A \to Mg \\ {}_{۱۷}B \to Cl\end{matrix}\right\} \Rightarrow MgCl_۲(Mg^{۲+}, ۲Cl^-) \Rightarrow \frac{\text{تعداد آنیون‌ها}}{\text{تعداد کاتیون‌ها}} = \frac{۲}{۱} = ۲$$

گزینهٔ ۱: ${}_{۷}N$ و ${}_{۱۱}Na$: $Na_۳N(۳Na^+, N^{۳-}) \Rightarrow \frac{\text{تعداد کاتیون‌ها}}{\text{تعداد آنیون‌ها}} = ۳$

گزینهٔ ۲: ${}_{۱۶}S$ و ${}_{۱۹}K$: $K_۲S(۲K^+, S^{۲-}) \Rightarrow \frac{\text{تعداد کاتیون‌ها}}{\text{تعداد آنیون‌ها}} = ۲$

گزینهٔ ۳: ${}_{۷}N$ و ${}_{۲۰}Ca : Ca_۳N_۲(۳Ca^{۲+}, ۲N^{۳-}) \Rightarrow \frac{\text{تعداد کاتیون‌ها}}{\text{تعداد آنیون‌ها}} = \frac{۳}{۲}$

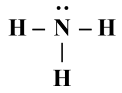
گزینهٔ ۴: ${}_{۹}F$ و ${}_{۲۰}Ca : CaF_۲(Ca^{۲+}, ۲F^-) \Rightarrow \frac{\text{تعداد کاتیون‌ها}}{\text{تعداد آنیون‌ها}} = \frac{۱}{۲}$

۲۰۳- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: ＊ ساده ＊ صفحه‌های ۴۰ و ۴۱ شیمی ۱

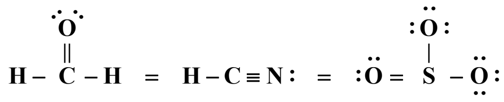
گزینهٔ ۱: N با N ⇒ $:N\equiv N:$ ۳ پیوند

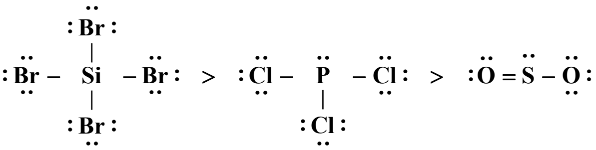
گزینهٔ ۲: C با H ⇒ $\begin{array}{c} H \\ | \\ H-C-H \\ | \\ H \end{array}$ ۴ پیوند

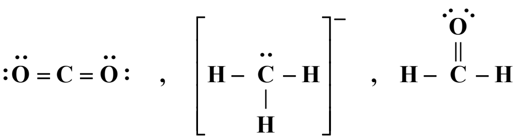
گزینهٔ ۳: H با O ⇒ $H-\ddot{\underset{\cdot\cdot}{O}}-H$ ۲ پیوند

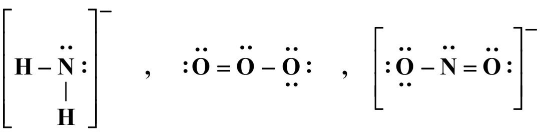
گزینهٔ ۴ : H با N $\Rightarrow$  ۳ پیوند

۲۰۴- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: ＊ دشوار ＊ صفحه‌های ۶۴ و ۶۵ شیمی ۱

الف) 

ب) 

پ) 

ت) 

۲۰۵- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: ＊ متوسط ＊ صفحه‌های ۴۶ تا ۴۸ شیمی ۱

تنها گازهای $N_۲$ و $O_۲$ در همهٔ نواحی هواکره مشاهده می‌شوند.

۲۰۶- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: ＊ دشوار ＊ صفحه‌های ۵۴ و ۵۵ شیمی ۱

عبارت‌های «الف»، «ب» و «پ» درست هستند.

ت) ساختار کربن مونوکسید به‌صورت $:C \equiv O:$ می‌باشد.

$$\frac{\text{تعداد الکترون‌های ناپیوندی}}{\text{تعداد الکترون‌های پیوندی}} = \frac{۴}{۶} = \frac{۲}{۳}$$

۲۰۷- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: ＊ دشوار ＊ صفحه‌های ۳۷، ۵۰، ۵۵ و ۵۷ شیمی ۱

فرمول مولکولی $AO_۲$ را می‌توان به ترکیبات زیر نسبت داد. با توجه به ساختار $SO_۲$ که به‌صورت $:\ddot{O}=\ddot{S}-\ddot{\underset{..}{O}}:$ می‌باشد، A گوگرد است کـه توانـایی تشکیل آنیون $A^{۲-}$ را دارد.

$$AO_۲\begin{cases} SiO_۲ \\ CO_۲ \\ NO_۲ \\ SO_۲ \end{cases}$$

۲۰۸- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: ＊ ساده ＊ صفحهٔ ۵۷ شیمی ۱

$$۲Ag \quad + \quad S \quad \rightarrow \quad Ag_۲S$$

$$\frac{۲۱۵/۸}{۲\times۱۰۷/۹} = \frac{x}{۳۲} \Rightarrow x = ۳۲g$$

۲۰۹- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: ＊ متوسط ＊ صفحهٔ ۶۰ شیمی ۱

معادلهٔ موازنه شده به شرح زیر است:

$$۴C_۳H_۵N_۳O_۹ \rightarrow ۱۲CO_۲ + ۱۰H_۲O + ۶N_۲ + O_۲$$

۳۳ = مجموع ضرایب

۲۱۰- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: ＊ متوسط ＊ صفحه‌های ۵۸ و ۵۹ شیمی ۱

الف) $۳NO_۲ + H_۲O \rightarrow ۲HNO_۳ + NO$

ب) $۴NH_۳ + ۵O_۲ \rightarrow ۴NO + ۶H_۲O$

پ) $۲KMnO_۴ + ۱۶HCl \rightarrow ۲KCl + ۲MnCl_۲ + ۵Cl_۲ + ۸H_۲O$

ت) $MnO_۲ + ۴HCl \rightarrow MnCl_۲ + Cl_۲ + ۲H_۲O$