دفترچهٔ شمارهٔ ۴
صبح چهارشنبه ۱۳۹۹/۱۰/۲۴

دفترچه پاسخنامه آزمون اختصاصی
گروه‌های آزمایشی علوم ریاضی و فنی

آزمون آنلاین آلاء (سه آ)

ویژهٔ دانش‌آموزان پایهٔ دوازدهم

ردیف	مواد امتحانی	سرگروه	طراحان
۱	حسابان	محمد پورسعید	محمد پورسعید
۲	هندسه	محمدجمال صادقی	نادر حاجی‌زاده - سیدمحمدرضا حسینی‌فرد سوگند روشنی - محمدجمال صادقی - امیرمحمد هویدی
۳	ریاضیات گسسته	محمدجمال صادقی	نادر حاجی‌زاده - سیدمحمدرضا حسینی‌فرد سوگند روشنی - سیدمسعود طایفه
۴	فیزیک	البرز امینیان	مرضیه عصمتی پیله‌ورد - حمید عارف‌پور علیرضا مهرداد
۵	شیمی	احسان گودرزی	احسان گودرزی - محمود ولائی‌آراسته

ویراستاران

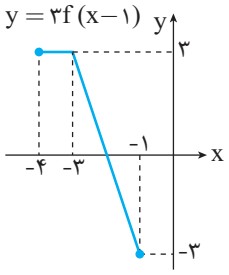
سیدامیرحسین آقا بزرگ افجر - سعید تقوی - علیرضا رضایت - امیرمحمد رفعتی - ترلان سوخکیان - سپهر متولی
شاهین مینایی - آذین ناظمی - جواد نظری - علی نوروزی - متین یعقوبی

ریاضیات

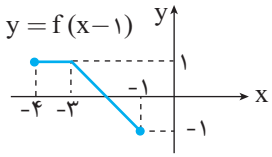
۱۰۱- ۱ **۲ ۳ ۴**

مراحل انتقال و یا انبساط و انقباض را به ترتیب انجام می‌دهیم:

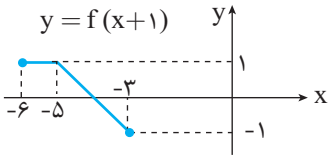
ابتدا نمودار تابع داده شده را دو واحد به پایین منتقل می‌کنیم:



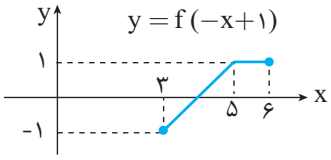
سپس عرض تمامی نقاط را در راستای محور عرض‌ها $\frac{۱}{۳}$ برابر می‌کنیم.



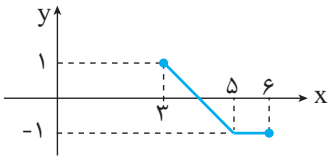
سپس نمودار تابع را دو واحد در راستای محور xها به سمت چپ منتقل می‌کنیم.



سپس نمودار را نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم.



در نهایت، نمودار را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم.



۱۰۲- **۱ ۲ ۳ ۴**

مراحل انتقال و یا انبساط و انقباض تبدیل تابع $y=۲f(۱-x)+a$ به تابع $y=f(۲x-۳)+۱$ را در نظر می‌گیریم. خواهیم داشت:

$$y=۲f(۱-x)+a \xrightarrow[\text{واحد کم می کنیم}]{\text{عرض نقاط را a}} y=۲f(۱-x)$$

$$\xrightarrow[\text{نصف می شود}]{\text{عرض نقاط}} y=f(۱-x) \xrightarrow[\text{yها قرینه می شوند}]{\text{نقاط نسبت به محور}}$$

$$y=f(۱+x) \xrightarrow[\text{راست منتقل می شود}]{\text{طول نقاط ۴ واحد به}} y=f(x-۳)$$

$$\xrightarrow[\text{نصف می شود}]{\text{طول نقاط}} y=f(۲x-۳) \xrightarrow[\text{افزایش می یابد}]{\text{عرض نقاط ۱ واحد}}$$

$$y=f(۲x-۳)+۱$$

این مراحل را روی نقطهٔ A انجام می‌دهیم تا به نقطهٔ B برسیم:

$$A(-۳,۸) \to A_۱(-۳,۸-a) \to A_۲(-۳,\frac{۸-a}{۲})$$

$$\to A_۳(۳,\frac{۸-a}{۲}) \to A_۴(۷,\frac{۸-a}{۲})$$

$$\to A_۵(\frac{۷}{۲},\frac{۸-a}{۲}) \to A_۶(\frac{۷}{۲},\frac{۱۰-a}{۲})$$

$$\to B(\frac{۷}{۲},\frac{۱۰-a}{۲})$$

$$\text{طبق فرض}: B(b,\frac{۳}{۲}) \Rightarrow \begin{cases} b=\frac{۷}{۲} \\ \frac{۱۰-a}{۲}=\frac{۳}{۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۱۰-a=۳ \Rightarrow a=۷$$

$$\Rightarrow a+b=۷+\frac{۷}{۲}=\frac{۲۱}{۲}=۱۰/۵$$

۱۰۳- **۱ **۲** ۳ ۴**

$$f(x)=x^۳-۳x^۲+۳x$$

$$\Rightarrow f(x)=x^۳-۳x^۲+۳x-۱+۱$$

$$\Rightarrow f(x)=(x-۱)^۳+۱$$

$$\xrightarrow[\text{به چپ}]{\text{۱واحد}} y=(x+۱-۱)^۳+۱$$

$$=x^۳+۱ \xrightarrow[\text{به پایین}]{\text{دو واحد}} y=x^۳+۱-۲=x^۳-۱$$

$$\xrightarrow[\text{به محورyها}]{\text{قرینه نسبت}} y=(-x)^۳-۱=-x^۳-۱$$

$$\Rightarrow g(x)=-x^۳-۱$$

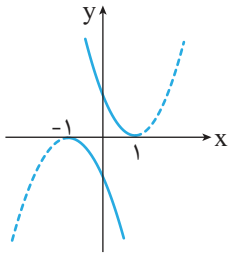
$$\xrightarrow[\text{محور عرض ها}]{\text{محل برخورد با}} x=۰ \Rightarrow y=-۱$$

۱۰۴- ۱ ۲ **۳ ۴**

اگر ضابطهٔ تابع f را به صورت:

$$f(x)=\begin{cases} (x-۱)^۲ & x\le k \\ -(x+۱)^۲ & x>k \end{cases}$$

بنویسیم، در این صورت نمودار آن به صورت زیر خواهد بود.



برای این که تابع روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی باشد، باید هر یک از ضابطه‌ها به تنهایی در دامنهٔ خود اکیداً نزولی باشند و علاوه بر آن مقدار تابع در انتهای بازهٔ اول، بزرگ‌تر یا مساوی مقدار تابع در ابتدای بازهٔ دوم باشد. طبق شکل، ضابطهٔ اول به ازای $k \le ۱$ و ضابطهٔ دوم به ازای $k \ge -۱$ اکیداً نزولی هستند و در این صورت خواهیم داشت:

$$\begin{cases} k \le ۱ \\ k \ge -۱ \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} -۱ \le k \le ۱$$

توجه شود که به ازای هر یک از مقادیر فوق، مقدار تابع f در انتهای بازهٔ اول، بزرگ‌تر از مقدار تابع f در ابتدای بازهٔ دوم است، پس تمامی این مقادیر قابل قبول هستند.

۱۰۵- ۱ **۲ ۳ ۴**

چون فاصلهٔ $-\frac{۳\pi}{۴}$ تا $\frac{۳\pi}{۴}$ برابر ۳ دورهٔ تناوب تابع است، پس خواهیم داشت:

$$۳T = \frac{۳\pi}{۴} - (-\frac{۳\pi}{۴}) \Rightarrow ۳T = \frac{۳\pi}{۲}$$

$$\Rightarrow T = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow \frac{\pi}{|b|} = \frac{\pi}{۲}$$

$$\Rightarrow |b| = ۲ \Rightarrow b = \pm ۲ \xrightarrow[\text{وضعیت نمودار}]{\text{با توجه به}} b = -۲$$

چون تابع f در فاصلهٔ بین دو مجانب قائم متوالی، وضعیت اکیداً نزولی دارد پس $b = -۲$ قابل قبول است. (توجه شود که تابع $y = \tan x$ در فاصلهٔ بین دو مجانب قائم متوالی اکیداً صعودی است)

$$\Rightarrow f(x) = \tan(-۲x) \Rightarrow f(x) = -\tan ۲x$$

برای یافتن طول نقطهٔ A کافی است نمودار تابع را با خط $y = -\sqrt{۳}$ قطع دهیم:

$$-\tan(۲x) = -\sqrt{۳} \Rightarrow \tan ۲x = \sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow ۲x = k\pi + \frac{\pi}{۳} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۶}$$

چون دومین جواب مثبت معادله مورد نظر است (دومین نقطهٔ تلاقی خط $y = -\sqrt{۳}$ با نمودار تابع در $x > ۰$) پس خواهیم داشت:

$$k = ۰ \Rightarrow x = \frac{\pi}{۶}$$

$$k = ۱ \Rightarrow x = \frac{\pi}{۲} + \frac{\pi}{۶} = \frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow x_A = \frac{۲\pi}{۳}$$

۱۰۶- ۱ ۲ ۳ ۴

برای این که وضعیت یکنوایی تابع را بررسی کنیم، ابتدا آن را به تابع دو ضابطه‌ای تبدیل می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} ۳ax - ۲x - ۱ & x \ge -\frac{۱}{۲} \\ ۳ax + ۲x + ۱ & x < -\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

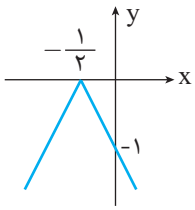
$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} (۳a - ۲)x - ۱ & x \ge -\frac{۱}{۲} \\ (۳a + ۲)x + ۱ & x < -\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

چون نمودار تابع از دو نیم خط تشکیل شده است، اگر شیب نیم‌خط‌ها، مخالف یکدیگر باشد یعنی یکی مثبت و یکی منفی باشد، تابع f غیریکنوا خواهد بود (زیرا یکی از نیم‌خط‌ها در دامنه‌اش صعودی و دیگری در دامنه‌اش نزولی خواهد شد.) پس باید داشته باشیم:

$$(۳a + ۲)(۳a - ۲) < ۰ \Rightarrow -\frac{۲}{۳} < a < \frac{۲}{۳}$$

پس در این محدوده فقط یک مقدار صحیح برای a یافت می‌شود (فقط $a = ۰$)

توجه شود که به ازای $a = ۰$، ضابطهٔ تابع f به صورت $f(x) = -|۲x + ۱|$ خواهد بود که نمودار آن به صورت زیر خواهد بود و بدیهی است که تابع در $\mathbb{R}$ غیریکنواست.



۱۰۷- ۱ **۲ ۳ ۴**

چون تابع f، فقط یک مجانب قائم با طول منفی دارد، پس باید مخرج کسر دارای ریشهٔ مضاعف باشد، یعنی داریم:

$$۸x^۲ + ax + ۲ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۰ \Rightarrow a^۲ - ۴(۸)(۲) = ۰$$

$$\Rightarrow a^۲ = ۶۴ \Rightarrow a = \pm ۸$$

چون باید طول نقطهٔ مجانب قائم (یعنی ریشهٔ مخرج کسر) منفی باشد، پس $a = ۸$ قابل قبول است، زیرا در این صورت خواهیم داشت:

$$۸x^۲ + ۸x + ۲ = ۰ \Rightarrow ۴x^۲ + ۴x + ۱ = ۰$$

$$\Rightarrow (۲x + ۱)^۲ = ۰ \Rightarrow x = -\frac{۱}{۲}$$

حال ضابطهٔ تابع f به صورت زیر خواهد بود:

$$f(x)=\frac{x^2-2x-1}{8x^2+8x+2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{8x^2}=\frac{1}{8}$$

پس خط $y=\frac{1}{8}$ مجانب افقی نمودار تابع f است. حال خط $y=\frac{1}{8}$ را با نمودار تابع f قطع می‌دهیم:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2-2x-1}{8x^2+8x+2} \\ y=\dfrac{1}{8}\end{cases} \Rightarrow \frac{x^2-2x-1}{8x^2+8x+2}=\frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow 8x^2+8x+2=8x^2-16x-8$$

$$\Rightarrow 24x=-10 \Rightarrow x=-\frac{10}{24}=-\frac{5}{12}$$

۱۰۸- ۱ ۲ ۳ **۴**

چون باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر $(2x+1)$ برابر ۷ است، پس خواهیم داشت:

$$2x+1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2} \Rightarrow p(-\frac{1}{2})=7$$

و چون باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر $(3x+1)$ برابر ۱- است، پس خواهیم داشت:

$$3x+1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{3} \Rightarrow p(-\frac{1}{3})=-1$$

باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر عبارت $6x^2+5x+1$ عبارتی حداکثر از درجهٔ اول و به شکل کلی $(ax+b)$ است، پس خواهیم داشت:

$$p(x)=(6x^2+5x+1)Q(x)+(ax+b)$$

$$\Rightarrow p(x)=(2x+1)(3x+1)Q(x)+(ax+b)$$

$$\begin{cases} p(-\frac{1}{2})=7 \Rightarrow -\frac{1}{2}a+b=7 \\ p(-\frac{1}{3})=-1 \Rightarrow -\frac{1}{3}a+b=-1\end{cases}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{6}a=8 \Rightarrow a=-48 \Rightarrow b=-17$$

پس باقی‌ماندهٔ تقسیم به شکل $R(x)=-48x-17$ است و خواهیم داشت:

$$R(1)=-48-17=-65$$

۱۰۹- **۱** ۲ ۳ ۴

طبق روابط مثلثاتی داریم:

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

$$\tan(\frac{3\pi}{4}-2x)=\frac{\tan\frac{3\pi}{4}-\tan 2x}{1+\tan\frac{3\pi}{4}\tan 2x}$$

$$=\frac{-1-\tan 2x}{1+(-1)\tan 2x}=\frac{-1-\tan 2x}{1-\tan 2x} \qquad (1)$$

$\Rightarrow$ از طرفی داریم: $\tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

$$=\frac{2\times 5}{1-25}=\frac{10}{-24}=-\frac{5}{12}$$

$$\xrightarrow[\text{رابطه (1)}]{\text{جایگذاری در}} \tan(\frac{3\pi}{4}-2x)=\frac{-1+\frac{5}{12}}{1+\frac{5}{12}}$$

$$=\frac{-\frac{7}{12}}{\frac{17}{12}}=-\frac{7}{17}$$

۱۱۰- **۱** ۲ ۳ ۴

$$\tan 5x\cdot\cot 2x=-1 \Rightarrow \tan 5x=-\frac{1}{\cot 2x}$$

$$\Rightarrow \tan 5x=-\tan 2x \Rightarrow \tan 5x=\tan(-2x)$$

$$\Rightarrow 5x=k\pi+(-2x) \Rightarrow 7x=k\pi \Rightarrow x=\frac{k\pi}{7}$$

k	۱	۲	۳
x	$\frac{\pi}{7}$	$\frac{2\pi}{7}$	$\frac{3\pi}{7}$

مجموع جواب ها: $\frac{\pi}{7}+\frac{2\pi}{7}+\frac{3\pi}{7}=\frac{6\pi}{7}$

۱۱۱- ۱ **۲** ۳ ۴

چون خطوط $x=-\frac{1}{2}$ و $x=2$ مجانب‌های قائم تابع f هستند پس ریشه‌های مخرج کسر خواهند بود. یعنی داریم:

$$2x^2+bx+c=0 \xrightarrow{x=-\frac{1}{2}}$$

$$2(-\frac{1}{2})^2+b(-\frac{1}{2})+c=0$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}b+c=-\frac{1}{2} \Rightarrow -b+2c=-1$$

$$2x^2+bx+c=0 \xrightarrow{x=2} 2(2)^2+b(2)+c=0$$

$$\Rightarrow 2b+c=-8$$

$$\begin{cases}-b+2c=-1\\2b+c=-8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b-2c=1\\4b+2c=-16\end{cases}$$

$$\Rightarrow 5b=-15\Rightarrow b=-3\Rightarrow c=-2$$

چون خط $y=3$ مجانب افقی تابع در شاخهٔ $-\infty$ است، پس خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=3\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\frac{-2x+4+ax|x|}{2x^2+bx+c}=3$$

$$\xrightarrow[\text{پرتوان}]{\text{طبق قاعده}} \lim_{x\to-\infty}\frac{ax|x|}{2x^2}=3$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\frac{-ax^2}{2x^2}=3\Rightarrow -\frac{a}{2}=3\Rightarrow a=-6$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{-6x|x|-2x+4}{2x^2-3x-2}$$

$$\Rightarrow f(-2)=\frac{-6(-2)(2)+4+4}{2(-2)^2-3(-2)-2}=\frac{32}{12}=\frac{8}{3}$$

۱۱۲- ۱ ۲ ۳ **۴**

با جایگذاری اولیه در تابع، به حالت مبهم $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ خواهیم رسید، یعنی داریم:

$$\lim_{x\to(-3)^-}\frac{-x^2-x+6}{x^3+5x^2+3x-9}=\frac{0}{0}\ \text{مبهم}$$

برای رفع ابهام کافی است صورت و مخرج را تجزیه کنیم و برای تجزیهٔ مخرج می‌توانیم مخرج را بر $(x+3)$ تقسیم کنیم:

$$\begin{array}{l|l}x^3+5x^2+3x-9 & x+3\\ \hline x^3+3x^2 & x^2+2x-3\\ \hline \quad 2x^2+3x-9 & \\ \quad 2x^2+6x & \\ \hline \qquad -3x-9 & \\ \qquad -3x-9 & \\ \hline \qquad\quad 0 & \end{array}$$

$$x^3+5x^2+3x-9=(x+3)(x^2+2x-3)$$

$$=(x+3)(x+3)(x-1)$$

$$=(x+3)^2(x-1)$$

$$\lim_{x\to(-3)^-}\frac{-x^2-x+6}{x^3+5x^2+3x-9}$$

$$=\lim_{x\to(-3)^-}\frac{-(x^2+x-6)}{(x+3)^2(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to(-3)^-}\frac{-(x+3)(x-2)}{(x+3)^2(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to(-3)^-}\frac{-(x-2)}{(x+3)(x-1)}=\frac{5}{(0^-)(-4)}$$

$$=\frac{5}{0^+}=+\infty$$

۱۱۳- ۱ ۲ **۳** ۴

چون نمودار تابع بر محور xها مماس است پس باید معادلهٔ $f(x)=0$ دارای ریشهٔ مضاعف باشد یعنی باید معادلهٔ $x^2+4x+a=0$ دارای ریشهٔ مضاعف باشد، پس خواهیم داشت:

$$\Delta=0\Rightarrow 16-4a=0\Rightarrow a=4$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{x^2+4x+4}{2bx-x^2-1}$$

چون تابع دارای مجانب قائمی با طول مثبت است و شاخه‌های منحنی در اطراف مجانب قائم هر دو به $-\infty$ میل می‌کنند، پس باید مخرج دارای ریشهٔ مضاعفی با طول مثبت باشد، یعنی داریم:

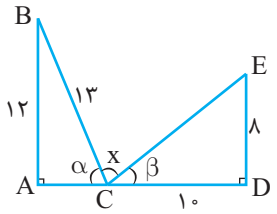
$$2bx-x^2-1\Rightarrow\Delta=0\Rightarrow 4b^2-4(-1)(-1)=0$$

$$\Rightarrow 4b^2-4=0\Rightarrow b^2=1\Rightarrow b=\pm1$$

چون ریشهٔ مخرج باید عددی مثبت باشد، پس $b=1$ قابل قبول است تا ریشهٔ مخرج $x=1$ شود (به ازای $b=-1$ ریشهٔ مخرج $x=-1$ خواهد بود که با شکل، مطابقت ندارد) پس $ab=4(1)=4$ خواهد بود.

۱۱۴- ۱ ۲ ۳ **۴**

با توجه به شکل داده شده و نامگذاری زوایای α و β در شکل، در مثلث‌های ABC و CDE خواهیم داشت:



$$\overset{\Delta}{ABC}:\text{فیثاغورس}:AC=\sqrt{169-144}=5$$

$$\tan\alpha=\frac{AB}{AC}=\frac{12}{5}$$

$$\overset{\Delta}{CDE}:\tan\beta=\frac{DE}{CD}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$$

$$\alpha+\beta+x=180^\circ\Rightarrow x=180^\circ-(\alpha+\beta)$$

$$\Rightarrow \tan x=\tan(\pi-(\alpha+\beta))$$

$$\Rightarrow \tan x=-\tan(\alpha+\beta)$$

$$\Rightarrow \tan x = -\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

$$\Rightarrow \tan x = -\frac{\frac{12}{5}+\frac{4}{5}}{1-\frac{12}{5}\times\frac{4}{5}} = \frac{-\frac{16}{5}}{1-\frac{48}{25}} = \frac{-\frac{16}{5}}{-\frac{23}{25}} = \frac{80}{23}$$

۱۱۵- ۱ ۲ ۳ **۴**

ابتدا توابع $f+g$ و $f-g$ را تشکیل می‌دهیم:

$$f+g = \cos 5x\cos 3x + \sin 5x \sin 3x$$

$$= \cos(5x-3x) = \cos 2x \Rightarrow T_1 = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$f-g = \cos 5x\cos 3x - \sin 5x\sin 3x$$

$$= \cos(5x+3x) = \cos 8x \Rightarrow T_2 = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{\pi}{\frac{\pi}{4}} = 4$$

۱۱۶- ۱ **۲** ۳ ۴

$$\left.\begin{array}{l} A+B+C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \\ 2A-B+C = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} \end{array}\right\} \xrightarrow{+} 3A+2C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} A+B+C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \\ A-B-2C = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \end{array}\right\} \xrightarrow{+} 2A-C = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

طرفین دو رابطهٔ به دست آمده را به ترتیب در اعداد ۲ و ۳- ضرب کرده و نتیجه می‌گیریم:

$$\left.\begin{array}{l} 6A+4C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 14 & 12 \end{bmatrix} \\ -6A+3C = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -12 & -21 \end{bmatrix} \end{array}\right\} \xrightarrow{+} 7C = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 2 & -9 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow C = \begin{bmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{6}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{9}{7} \end{bmatrix} \Rightarrow ? = 1$$

۱۱۷- ۱ ۲ **۳** ۴

کافی است، سطر دوم ماتریس A را در ستون سوم ماتریس B ضرب کنیم:

$$\text{سطر دوم } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{ستون سوم } B = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

اکنون به دست می‌آید:

درایهٔ سطر دوم، ستون سوم AB

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = 5+0 = 5$$

۱۱۸- ۱ ۲ ۳ **۴**

$$AB = \begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & x^2 \\ y^2 & x \end{bmatrix}$$

$$-BA = -\begin{bmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & y \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} x & xy \\ yx & y \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -x & -xy \\ -yx & -y \end{bmatrix}$$

$$AB = -BA \Rightarrow \begin{bmatrix} y & x^2 \\ y^2 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x & -xy \\ -yx & -y \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = -x \Rightarrow x+y = 0 \\ x^2 = -xy \\ y^2 = -xy \\ x = -y \end{cases}$$

اگر $x+y=0$ باشد آنگاه $x=-y$ است و سه تساوی دیگر نیز برقرار است، پس $x+y=0$ است.

۱۱۹- ۱ ۲ **۳** ۴

با به دست آوردن توان‌های بالاتر ماتریس A، سعی در یافتن الگویی بین توان‌های آن می‌کنیم:

$$A^1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= 2\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 2A$$

$$A^3 = A^2A = 2AA = 2A^2 = 2(2A) = 2^2A$$

می‌توانیم از روابط بالا نتیجه بگیریم که $A^n = 2^{n-1}A$ و در نتیجه $A^{12} = 2^{11}A$ است و در نتیجه ماتریس A^{12} به‌صورت $\begin{bmatrix} 2^{11} & -2^{11} \\ -2^{11} & 2^{11} \end{bmatrix}$ است، که مجموع درایه‌های قطر اصلی $2^{11}+2^{11} = 2\times 2^{11} = 2^{12}$ است.

نکته: اگر $A^2 = kA$، آنگاه $A^n = k^{n-1}A$

۱۲۰- ۱ ۲ **۳** ۴

در ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی وجود ندارد بنابراین ترتیب ضرب ماتریس‌ها در طرفین بسیار مهم است.

$$ABC = 2I \xrightarrow{A^{-1}\times} A^{-1}ABC = 2A^{-1}I$$

$$\Rightarrow BC = 2A^{-1} \xrightarrow{\times C^{-1}} BCC^{-1} = 2A^{-1}C^{-1}$$

$$\Rightarrow B = 2A^{-1}C^{-1}$$

۱۲۱- ۱ ۲ ۳ ۴

راه‌حل اول:

$$A^2 = A\times A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ b & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 1 \\ b & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^2+b & a-1 \\ ab-b & b+1 \end{bmatrix} \text{ و } A^2 = \begin{bmatrix} a+1 & 0 \\ 0 & a+1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2+b = a+1 \\ a-1 = 0 \Rightarrow a = 1 \\ ab-b = 0 \\ b+1 = a+1 \Rightarrow a = b \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = b = 1$$

$a = b = 1$ در دو تساوی دیگر نیز صدق می‌کند بنابراین

$$a + b = 2$$

راه‌حل دوم:

$$A^2 = (a+1)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = (a+1)I$$

$$\Rightarrow A\times\frac{1}{a+1}(A) = I \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{a+1}(A)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{a}{a+1} & \frac{1}{a+1} \\ \frac{b}{a+1} & \frac{-1}{a+1} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-a-b}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -b & a \end{bmatrix} = \frac{1}{a+b}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ b & -a \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{a+b} & \frac{1}{a+b} \\ \frac{b}{a+b} & \frac{-a}{a+b} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{a+1} = \frac{1}{a+b} \\ \frac{b}{a+1} = \frac{b}{a+b} \Rightarrow a+1 = a+b \Rightarrow b = 1 \\ \frac{1}{a+1} = \frac{1}{a+b} \\ \frac{-1}{a+1} = \frac{-a}{a+b} \end{cases}$$

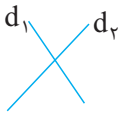
$$\xrightarrow{b=1} \frac{a}{a+1} = \frac{1}{a+1} \Rightarrow a = 1$$

$a = b = 1$ در دو تساوی دیگر نیز صدق می‌کند.

$$\Rightarrow a + b = 2$$

۱۲۲- ۱ ۲ ۳ ۴

نمودار دو معادلهٔ $d_1 : 2x + y = 1$ و $d_2 : x - y = 3$ دو خط متقاطع است، زیرا $\frac{2}{1} \neq \frac{1}{-1}$



حال خط $d_3 : x + my = 2$ باید با d_1 یا d_2 موازی باشد.

$$d_1 \parallel d_3 \Rightarrow \frac{2}{1} = \frac{1}{m} \neq \frac{1}{2} \Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

$$d_2 \parallel d_3 \Rightarrow \frac{1}{1} = \frac{-1}{m} \neq \frac{3}{2} \Rightarrow m = -1$$

پس به ازای دو مقدار برای m دو خط موازی و یک خط متقاطع با آنها داریم.

۱۲۳- ۱ ۲ ۳ ۴

ماتریس قطری، ماتریسی است مربعی که درایه‌های غیر قطر اصلی آن صفر هستند.

$$\begin{bmatrix} -6 & a \\ b & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & 0 \\ 0 & \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} & -18+4a \\ 3b+4 & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & 0 \\ 0 & \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow -18 + 4a = 0 \Rightarrow a = \frac{9}{2}, 3b + 4 = 0$$

$$\Rightarrow b = -\frac{4}{3}$$

دترمینان را بر حسب سطر دوم به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ 1 & 5 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{3}{2}(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - 1(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{3}{2}(-6-2) + 15 + 4 = \frac{3}{2}(-8) + 19$$

$$= -12 + 19 = 7$$

۱۲۴- ۱ ۲ ۳ ۴

از برابری $BA^n = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$ به دست می‌آید:

$$|BA^n| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 10 & 12 \end{vmatrix}$$

بنابراین:

$$|B||A^n| = -۱۲ - ۲۰ = -۳۲$$

$$(-۱+۲)(۰-۲)^n = (-۲)^۵ \Rightarrow (-۲)^n = (-۲)^۵$$

در نتیجه $n = ۵$.

۱۲۵- ۱ ۲ ۳ **۴**

ابتدا از طرفین رابطهٔ داده شده دترمینان می‌گیریم:

$$۳A = \begin{bmatrix} |A| & \frac{۹}{۲} \\ -\frac{۹}{۲} & |A| \end{bmatrix}$$

$$|۳A| = |A|^۲ - (-\frac{۸۱}{۴})$$

عدد از داخل دترمینان بیرون می‌آید به توان مرتبهٔ ماتریس می‌رسد، بنابراین خواهیم داشت:

$$۹|A| = |A|^۲ + \frac{۸۱}{۴} \Rightarrow |A|^۲ - ۹|A| + \frac{۸۱}{۴} = ۰$$

$$\Rightarrow (|A| - \frac{۹}{۲})^۲ = ۰ \Rightarrow |A| = \frac{۹}{۲}$$

حال عبارت خواسته شده در صورت سؤال را به صورتی ساده‌تر می‌نویسیم:

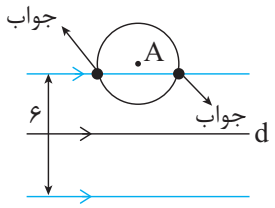
$$\left|\frac{|A|A}{۹}\right| + \left|\frac{A}{|A|}\right| = \frac{|A|^۲}{۸۱}|A| + (\frac{۱}{|A|})^۲|A|$$

$$= \frac{|A|^۳}{۸۱} + \frac{۱}{|A|} = \frac{۱}{۸۱} \times \frac{۹^۳}{۸} + \frac{۲}{۹}$$

$$= \frac{۹}{۸} + \frac{۲}{۹} = \frac{۹۷}{۷۲}$$

۱۲۶- ۱ **۲** ۳ ۴

مکان هندسی نقاطی که از نقطهٔ A به فاصلهٔ ۲ هستند دایره‌ای است به مرکز A وشعاع ۲. همچنین مکان هندسی نقاطی که از خط d به فاصلهٔ ۳ هستند، دو خط موازی d است و به فاصلهٔ ۳ از آن. پاسخ مسئله حداکثر تعداد نقاط برخورد دایره با این دو خط موازی است. چون قطر دایره برابر ۴ و فاصلهٔ این دو خط برابر ۶ است، پس دایره همزمان نمی‌تواند با هر دو خط موازی، نقطهٔ مشترک داشته باشد، در نتیجه حداکثر نقاط برخورد زمانی است که دایره یکی از دو خط را قطع کند.



۱۲۷- **۱** ۲ ۳ ۴

نکته: اندازهٔ مماسی که از نقطهٔ (α,β) برابر دایره‌ای به معادلهٔ $x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$ رسم می‌شود برابر است با:

$$\sqrt{\alpha^۲ + \beta^۲ + a\alpha + b\beta + c}$$

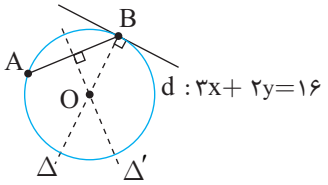
پس طبق نکتهٔ بالا داریم:

$$\sqrt{۷} = \sqrt{(-۲)^۲ + (-۱)^۲ - ۲(-۲) + ۴(-۱) - m}$$

$$\Rightarrow ۷ = ۵ - m \Rightarrow m = -۲$$

۱۲۸- **۱** ۲ ۳ ۴

از نمادگذاری شکل فرضی روبه‌رو استفاده می‌کنیم، که در آن Δ خط گذرنده از B و عمود بر خط d است و Δ' عمودمنصف AB است. با محاسبات به دست می‌آید:



$$m_d = -\frac{۳}{۲} \Rightarrow m_\Delta = \frac{۲}{۳} \Rightarrow y - ۲ = \frac{۲}{۳}(x - ۴)$$

$$\Rightarrow \Delta : ۲x - ۳y = ۲$$

$$m_{AB} = \frac{۲-۳}{۴-۳} = \frac{-۱}{۱} = -۱ \Rightarrow m_{\Delta'} = ۱$$

وسط $AB = (\frac{۴+۳}{۲}, \frac{۲+۳}{۲}) \Rightarrow \Delta' : y - \frac{۵}{۲} = x - \frac{۷}{۲}$

$$\Rightarrow \Delta' : x - y = ۱$$

محل برخورد Δ و Δ' مرکز دایره (O در شکل) است:

$$\begin{matrix} \Delta \\ \Delta' \end{matrix} \begin{cases} ۲x - ۳y = ۲ \\ x - y = ۱ \end{cases} \Rightarrow O(۱,۰)$$

اکنون می‌توان شعاع دایره را به دست آورد:

$$r = |OB| = \sqrt{۲^۲ + ۳^۲} = \sqrt{۱۳}$$

۱۲۹- ۱ ۲ **۳** ۴

دایره بر محور yها مماس است پس $O(۳,\beta)$ مختصات مرکز آن است و فاصلهٔ O (مرکز دایره) تا خط مماس باید برابر با ۳ باشد، پس:

$$۳y + ۶ - ۴x = ۰ \Rightarrow OH = \frac{|۳\beta + ۶ - ۱۲|}{\sqrt{۹+۱۶}} = ۳$$

$$\Rightarrow |۳\beta - ۶| = ۱۵ \Rightarrow \begin{cases} \beta = ۷ \\ \beta = -۳ \end{cases}$$

۱۳۰- ۱ ۲ ۳ **۴**

ابتدا مرکز و شعاع دایره را می‌یابیم:

$$x^۲ + y^۲ + ۲x - ۲y = ۰$$

$$\Rightarrow O(-\frac{a}{۲}, -\frac{b}{۲}) = (-۱,۱)$$

$$r = \frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲ + b^۲ - ۴c} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۴ + ۴ - ۰} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۸} = \sqrt{۲}$$

اندازهٔ خط‌المرکزین برابر است با:

$$OO' = \sqrt{(-۳-(-۱))^۲ + (۳-۱)^۲} = \sqrt{۸} = ۲\sqrt{۲}$$

از آن‌جایی که دو دایره مماس خارج‌اند، پس:

$$OO' = r + r' \Rightarrow ۲\sqrt{۲} = \sqrt{۲} + r'$$

$$\Rightarrow r' = \sqrt{۲}$$

بنابراین معادلهٔ دایره به صورت $(x+۳)^۲ + (y-۳)^۲ = ۲$ است.

$$x^۲ + ۶x + ۹ + y^۲ - ۶y + ۹ = ۲$$

$$\Rightarrow x^۲ + y^۲ + ۶x - ۶y + ۱۶ = ۰$$

$$\Rightarrow a = ۶, b = -۶, c = ۱۶$$

$$۳a + ۲b + c = ۱۸ - ۱۲ + ۱۶ = ۲۲$$

۱۳۱- ۱ **۲** ۳ ۴

به کمک روش اثبات بازگشتی داریم:

$$a^۲ + ab + b^۲ \geq ۰ \Leftrightarrow a^۲ + ab + \frac{b^۲}{۴} + \frac{۳b^۲}{۴} \geq ۰$$

$$\Leftrightarrow (a + \frac{b}{۲})^۲ + \frac{۳b^۲}{۴} \geq ۰$$

با توجه به رابطهٔ بدیهی به دست آمده نتیجه می‌گیریم:

$k = \frac{۳}{۴}$ ، $n = \frac{۱}{۲}$ ، $m = ۱$ ، بنابراین:

$$m + ۲n + ۴k = ۵$$

۱۳۲- ۱ **۲** ۳ ۴

راه‌حل اول:

با استفاده از قضیهٔ تقسیم داریم:

$$۴۹۵ = b(۱۱) + r \ , \ ۰ \leq r < b$$

$$\Rightarrow r = ۴۹۵ - ۱۱b \Rightarrow ۰ \leq ۴۹۵ - ۱۱b < b$$

$$۴۹۵ - ۱۱b \geq ۰ \Rightarrow ۱۱b \leq ۴۹۵$$

$$\Rightarrow b \leq \frac{۴۹۵}{۱۱} \Rightarrow b \leq ۴۵ \qquad (۱)$$

$$۴۹۵ - ۱۱b < b \Rightarrow ۱۲b > ۴۹۵$$

$$\Rightarrow b > \frac{۴۹۵}{۱۲} \Rightarrow b \geq ۴۲ \qquad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱)\cap(۲)} ۴۲ \leq b \leq ۴۵ \Rightarrow b = ۴۲, ۴۳, ۴۴, ۴۵$$

بنابراین ۴ مقدار برای b وجود دارد.

راه‌حل دوم:

۴۹۵ را بر ۱۱ تقسیم می‌کنیم و داریم:

$$۴۹۵ = b(۱۱) + r \Rightarrow ۴۹۵ = ۴۵ \times ۱۱ + ۰$$

$$= ۴۴ \times ۱۱ + ۱۱$$

$$= ۴۳ \times ۱۱ + ۲۲$$

$$= ۴۲ \times ۱۱ + ۳۳$$

اگر باز هم جلوتر برویم باقی‌مانده از مقسوم‌علیه بزرگ‌تر می شود که قابل قبول نیست، بنابراین ۴ مقدار برای b وجود دارد.

۱۳۳- ۱ **۲** ۳ ۴

a عددی فردی است، با توجه به این که $۴ \mid a + b$ نتیجه می‌گیریم که b نیز عددی فرد است، می‌دانیم مربع هر عدد فرد به صورت $۸q + ۱$ است. داریم:

$$\begin{cases} a^۲ = ۸k + ۱ \\ b^۲ = ۸k' + ۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۴a^۲ + ۴b^۲ + ۱۱ = ۴(۸k + ۱) + ۴(۸k' + ۱) + ۱۱$$

$$= ۳۲k + ۳۲k' + ۱۹$$

$$= (۳۲k + ۳۲k' + ۱۶) + ۳ = ۱۶(۲k + ۲k' + ۱) + ۳$$

$$= ۱۶q' + ۳$$

بنابراین باقی‌ماندهٔ $۴a^۲ + ۴b^۲ + ۱۱$ بر ۱۶ برابر ۳ است.

۱۳۴- ۱ **۲** ۳ ۴

نکته: اگر a و b دو عدد صحیح باشند، به‌طوری که $(a, b) = d$ آنگاه اعداد صحیح a' و b' وجود دارند، به‌طوری که:

$$\begin{cases} a = a'd \\ b = b'd \\ (a', b') = ۱ \end{cases}$$

$$a + b = ۲۴۸ \Rightarrow a'd + b'd = ۲۴۸$$

$$\Rightarrow ۳۱a' + ۳۱b' = ۲۴۸ \Rightarrow a' + b' = ۸$$

چون $(a', b') = ۱$، پس حالت‌های زیر را داریم:

$$\begin{cases} a' = ۳ \\ b' = ۵ \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} a' = ۱ \\ b' = ۷ \end{cases}$$

که در حالت $b' - a' = ۶$، بیشترین مقدار تفاضل را خواهیم داشت:

$$b - a = b'd - a'd = ۳۱b' - ۳۱a'$$

$$= ۳۱(b' - a') = ۳۱ \times ۶ = ۱۸۶$$

۱۳۵- **۱** ۲ ۳ ۴

$$۱۳۹۹ \overset{۱۱}{\equiv} ۹ - ۹ + ۳ - ۱ = ۲$$

$$\Rightarrow ۱۳۹۹^{۲۰۲۰} \overset{۱۱}{\equiv} ۲^{۲۰۲۰}$$

$$۲^۵ \overset{۱۱}{\equiv} -۱ \Rightarrow (۲^۵)^{۴۰۴} \overset{۱۱}{\equiv} (-۱)^{۴۰۴} \Rightarrow ۲^{۲۰۲۰} \overset{۱۱}{\equiv} ۱ \qquad (*)$$

$$۲۰۲۰ \overset{۱۱}{\equiv} ۰ - ۲ + ۰ - ۲ = -۴$$

$$\Rightarrow ۲۰۲۰^{۱۳۹۹} \overset{۱۱}{\equiv} -۴^{۱۳۹۹} = -۲^{۲۷۹۸}$$

$$۲^{۵} \overset{۱۱}{\equiv} -۱ \Rightarrow (۲^{۵})^{۵۵۹} \overset{۱۱}{\equiv} (-۱)^{۵۵۹} \Rightarrow ۲^{۲۷۹۵} \overset{۱۱}{\equiv} -۱$$

$$\xrightarrow{\times ۲^{۳}} ۲^{۲۷۹۸} \overset{۱۱}{\equiv} -۸ \xrightarrow{\times(-۱)} -۲^{۲۷۹۸} \overset{۱۱}{\equiv} ۸ \quad (**)$$

از روابط (*) و (**) نتیجه می‌گیریم:

باقی‌مانده $= ۱ + ۸ = ۹$

۱۳۶- ۱ **۲** ۳ ۴

در اینگونه سؤالات ابتدای فروردین ۹۹ را مبدأ قرار می‌دهیم و محاسبه می‌کنیم تا تاریخ‌های گفته شده چند روز سپری شده است و چون تاریخ بهمن ۱۴۰۰ را نداریم بهتر است ابتدا روز ۱ بهمن ۱۴۰۰ را مشخص کنیم:

۱۶ آذر ۱۳۹۹ : $۶ \times ۳۱ + ۳۰ + ۳۰ + ۱۶ = ۲۶۲$

۱ بهمن ۱۴۰۰ : $۳۶۶ + ۶ \times ۳۱ + ۳۰ + ۳۰ + ۳۰ + ۳۰ + ۱$

$= ۶۷۳$

همیشه اختلاف این دو عدد را به دلیل روزهای هفته به پیمانهٔ ۷ می‌بریم:

$$۶۷۳ - ۲۶۲ \overset{۷}{\equiv} ۴ \overset{۷}{\equiv} ۵$$

حال از روز یکشنبه ۵ روز جلوتر می‌رویم و به روز جمعه می‌رسیم، پس ۱ بهمن ۱۴۰۰ روز جمعه و در نتیجه اولین دوشنبه بهمن ۱۴۰۰ تاریخ ۴ بهمن است، پس سومین دوشنبه $۴ + ۷ + ۷ = ۱۸$ بهمن است.

۱۳۷- ۱ ۲ **۳** ۴

راه‌حل اول:

می‌دانیم $۱۶۵ = ۵ \times ۱۱ \times ۳$ پس اگر عدد داده شده به صورت $\overline{abc}$ باشد آنگاه:

۱) $a + b + c = ۱۲$

۲) c می‌تواند ۰ یا ۵ باشد.

۳) $c + a - b \overset{۱۱}{\equiv} ۰ \Rightarrow \begin{cases} c + a - b = ۰ \\ c + a - b = ۱۱ \end{cases}$

$$c = ۰ \Rightarrow \begin{cases} a + b = ۱۲ \\ a - b = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = ۶ \\ b = ۶ \end{cases}$$

یا $\begin{cases} a + b = ۱۲ \\ a - b = ۱۱ \end{cases}$ تناقض

$$c = ۵ \Rightarrow \begin{cases} a + b = ۷ \\ a - b = -۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = ۱ \\ b = ۶ \end{cases}$$

یا $\begin{cases} a + b = ۷ \\ a - b = ۶ \end{cases}$ تناقض

بنابراین فقط دو عدد ۱۶۵ و ۶۶۰ وجود دارد.

راه‌حل دوم:

با استفاده از رابطهٔ (۱) داریم: $c + a = ۱۲ - b$ با قرار دادن این تساوی در رابطهٔ (۳) داریم:

$$۱۲ - b - b \overset{۱۱}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۲b \overset{۱۱}{\equiv} ۱۲ \xrightarrow[(۲,۱۱)=۱]{\div ۲} b \overset{۱۱}{\equiv} ۶$$

$$\Rightarrow b = ۶ \Rightarrow \begin{cases} c = ۰ \Rightarrow a = ۶ \\ c = ۵ \Rightarrow a = ۱ \end{cases}$$

۱۳۸- ۱ **۲** ۳ ۴

شرط جواب معادله به صورت $(m^{۲} + ۴, ۸) \mid ۱$ است، پس $m^{۲} + ۴$ باید فرد باشد یعنی m فرد است، از طرفی مربع هر عدد فرد به صورت $۸k + ۱$ است، پس:

$$m^{۲} + ۴ \overset{۸}{\equiv} ۸k + ۱ + ۴ \overset{۸}{\equiv} ۵$$

$$\Rightarrow (m^{۲} + ۴)x \overset{۸}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۵x \overset{۸}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۵x \overset{۸}{\equiv} ۱ + ۳ \times ۸$$

$$\Rightarrow ۵x \overset{۸}{\equiv} ۲۵ \xrightarrow[(۵,۸)=۱]{\div ۵} x \overset{۸}{\equiv} ۵$$

۱۳۹- ۱ **۲** ۳ ۴

$$۳x \overset{۵}{\equiv} ۷ \overset{۵}{\equiv} ۱۲ \xrightarrow[(۳,۵)=۱]{\div ۳} x \overset{۵}{\equiv} ۴ \overset{۵}{\equiv} ۱۹$$

$$۷x \overset{۱۲}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۷x \overset{۱۲}{\equiv} ۱ + ۴۸ \Rightarrow ۷x \overset{۱۲}{\equiv} ۴۹$$

$$\xrightarrow[(۷,۱۲)=۱]{\div ۷} x \overset{۱۲}{\equiv} ۷ \overset{۱۲}{\equiv} ۱۹$$

نکته: اگر $a \overset{m}{\equiv} b$ و $a \overset{n}{\equiv} b$ آنگاه $a \overset{[m,n]}{\equiv} b$.

$$\Rightarrow x \overset{۶۰}{\equiv} ۱۹ \Rightarrow x = ۶۰k + ۱۹$$

$$۱۰۰ \le ۶۰k + ۱۹ \le ۹۹۹ \Rightarrow ۸۱ \le ۶۰k \le ۹۸۰$$

$$\Rightarrow \frac{۸۱}{۶۰} \le k \le \frac{۹۸۰}{۶۰} \Rightarrow ۲ \le k \le ۱۶$$

$$\Rightarrow \text{جواب} = ۱۶ - ۲ + ۱ = ۱۵$$

۱۴۰- **۱** ۲ ۳ ۴

نکته: شرط جواب داشتن معادلهٔ سیالهٔ $ax + by = c$ به صورت $(a, b) \mid c$ است.

$$(۵n + ۱, ۹n - ۴) \mid ۸۰ \Rightarrow (۵n + ۱, ۹n - ۴) = d$$

$$\left.\begin{array}{l} d \mid ۵n + ۱ \overset{\times ۹}{\Rightarrow} d \mid ۴۵n + ۹ \\ d \mid ۹n - ۴ \overset{\times ۵}{\Rightarrow} d \mid ۴۵n - ۲۰ \end{array}\right\} \overset{-}{\Rightarrow} d \mid ۲۹$$

$d = ۱$ یا ۲۹

$d = ۲۹$ قابل قبول نیست زیرا $۲۹ \nmid ۸۰$ پس $d = ۱$ است. ابتدا تعداد $d = ۲۹$ را حساب می‌کنیم و سپس از کل کم می‌کنیم:

$$\Rightarrow 5n+1\overset{29}{\equiv}0 \Rightarrow 5n\overset{29}{\equiv}-1 \Rightarrow 5n\overset{29}{\equiv}-30$$

$$\xrightarrow[(5,29)=1]{\div 5} n\overset{29}{\equiv}-6$$

$$n=29k-6$$

$$100\le 29k-6\le 999 \Rightarrow 106\le 29k\le 1005$$

$$\Rightarrow \frac{106}{29}\le k\le \frac{1005}{29} \Rightarrow 4\le k\le 34$$

$$\Rightarrow \text{جواب}=31$$

به ازای ۳۱ مقدار ۳ رقمی $d=29$ می‌شود که قابل قبول نیستند و باید حذف شوند بنابراین تعداد مطلوب برابر است با:

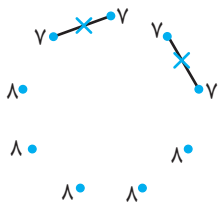
$$900-31=869$$

۱۴۱- ۱ ۲ ۳ ۴

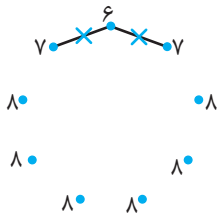
اگر گرافی ۹ رأس داشته باشد، بیشترین یالی که می‌تواند بپذیرد یا به عبارتی تعداد یال‌های گراف کامل آن $\binom{9}{2}=36$ خواهد بود که گراف داده شده ۲ یال کمتر دارد.

به عبارتی گراف کاملی است که ۲ یال آن را حذف کرده‌ایم. گراف کامل مرتبه ۹، همه رئوس آن درجهٔ ۸ است، حال ۲ یال آن را می‌توانیم به صورت‌های زیر حذف و درجه‌های آن را مشخص کنیم.

الف) ۲ یالی را حذف کنیم که اشتراکی ندارند. در این حالت ۴ رأس مینیمم یا درجهٔ ۷ خواهیم داشت.



ب) ۲ یالی را حذف کنیم که با هم اشتراک دارند. در این حالت یک رأس درجه ۶، ۲ رأس درجه ۷ و ۶ رأس درجه ۸ خواهیم داشت، که تعداد رأس‌های مینیمم همان ۱ رأس درجه ۶ است.



۱۴۲- ۱ ۲ ۳ ۴

نکته:

$$q(k_p)=\frac{p(p-1)}{2}$$

نکته: در هر گراف کامل k_p برای رأس مانند a داریم:

$$|N_G(a)|=p-1$$

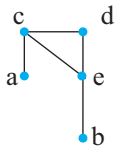
$$p+q=66 \Rightarrow p+\frac{p(p-1)}{2}=66$$

$$\Rightarrow p(\frac{p+1}{2})=66 \Rightarrow p(p+1)=132=11\times 12$$

$$\Rightarrow p=11 \Rightarrow |N_G(a)|=10$$

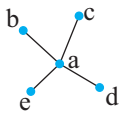
۱۴۳- ۱ ۲ ۳ ۴

مثال نقض گزینهٔ ۱:



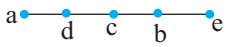
این گراف دارای فقط یک مسیر به طول ۴ بین دو رأس a و b است ولی ۵ یال دارد.

مثال نقض گزینهٔ ۲:



این گراف دارای $\Delta=4$ است ولی مسیری به طول ۴ در آن وجود ندارد.

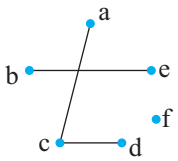
مثال نقض گزینهٔ ۳:



این گراف دارای مسیری به طول ۴ بوده و $\delta=1$ است.

۱۴۴- ۱ ۲ ۳ ۴

با توجه به مجموعه‌های همسایگی رئوس این گراف می‌توانیم نمودار گراف را به صورت زیر رسم کنیم:



با توجه به نمودار این گراف داریم:

۶ = تعداد رأس‌ها = تعداد مسیر به طول صفر

۳ = تعداد یال‌ها = تعداد مسیر به طول یک

مسیر $acd \rightarrow 1$ = تعداد مسیر به طول دو

$6+3+1=10$ = تعداد کل مسیرها

۱۴۵- ۱ ۲ ۳ ۴

نکته: گرافی که تمام رئوس آن دو به دو مجاورند، گراف کامل است.

نکته: در گراف کامل مرتبهٔ p داریم:

$$\forall v_i\in V(G):|N_G[v_i]|=p,|N_G(v_i)|=p-1$$

نکته: تعداد دور به طول m در گراف k_p برابر است با:

$$\binom{p}{m}\times\frac{(m-1)!}{2}$$

با توجه به نکته‌های بالا، گراف G، گراف کامل k_5 بوده و تعداد دور به طول ۴ در آن برابر است با:

$$\binom{5}{4}\times\frac{(4-1)!}{2}=5\times 3=15$$

فیزیک

۱۴۶- ۱ ۲ ۳ ۴

ابتدا می‌توانیم به کمک معادلهٔ مستقل از زمان، شتاب حرکت را به‌دست آورید:

$$V^2 - V_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow 7^2 - 9^2 = 2a \times 2 \Rightarrow a = -8\frac{m}{s^2}$$

حال می‌توان معادلهٔ حرکت را به سادگی نوشت.

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}(-8)t^2 + 9t - 2 = -4t^2 + 9t - 2$$

۱۴۷- ۱ ۲ ۳ ۴

از معادلهٔ مستقل از زمان کمک می‌گیریم.

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow 0 - 10^2 = 2(2)\Delta x$$

$$\Rightarrow \Delta x = -25\,m$$

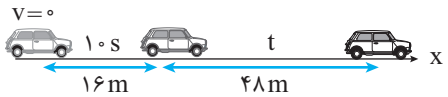
$$\Delta x = x_2 - x_1 \Rightarrow -25 = x_2 - 5$$

$$\Rightarrow x_2 = -20\,m$$

پس متحرک در ۲۰ متری مبدأ متوقف شده است.

۱۴۸- ۱ ۲ ۳ ۴

با توجه به صفر بودن ساعت اولیه به کمک یک رابطهٔ نسبتی با استفاده از $\Delta x = \frac{1}{2}at^2$ مقدار t به‌دست می‌آید.



$$\frac{\Delta x_1}{\Delta x_{کل}} = \left(\frac{t_1}{t_{کل}}\right)^2 \Rightarrow \frac{16}{64} = \left(\frac{10}{10+t}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{10}{10+t} \Rightarrow t = 10s$$

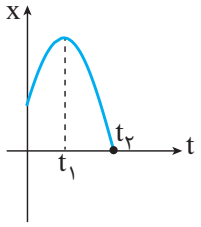
اکنون تندی متوسط بخش دوم حرکت را به‌دست می‌آوریم:

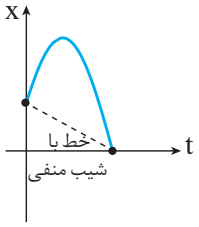
$$S_{av} = \frac{\Delta x_2}{t} = \frac{48}{10} = 4/8\frac{m}{s}$$

۱۴۹- ۱ ۲ ۳ ۴

مورد «ب» نادرست است زیرا متحرک ابتدا در لحظهٔ t_1 جهتش تغییر می‌کند و در بازهٔ صفر تا t_1 بردار مکان تغییر جهت نمی‌دهد.

مورد «پ» نادرست است زیرا شیب خط واصل بین دو نقطهٔ ابتدا و انتهایی حرکت، منفی است.





۱۵۰- ۱ ۲ ۳ ۴

در نمودار سرعت - زمان جهت حرکت زمانی تغییر می‌کند که علامت سرعت عوض شود و تنها در لحظهٔ $t = 7s$ جهت سرعت عوض شده است. همچنین در بازه زمانی $4 < t < 6$ و $9 < t < 10$ سرعت ثابت بوده و حرکتش یکنواخت است.

۱۵۱- ۱ ۲ ۳ ۴

با توجه به تقارن سهمی نسبت به رأس آن، لحظه‌های عبور متحرک از مبدأ مکان $t = 1s$ و $t = 9s$ است که ریشه‌های معادلهٔ مکان - زمان هستند. حال معادلهٔ مکان - زمان را به‌دست آوریم:

$$x = at^2 + bt + c$$

$$x = a(t-1)(t-9) \xrightarrow[x=-32m]{t=5s}$$

$$-32 = a(4)(-4) \Rightarrow a = 2$$

$$\Rightarrow x = 2(t-1)(t-9) \xrightarrow{t=0} x_0 = 18\,m$$

از لحظهٔ شروع حرکت تا لحظهٔ تغییر جهت $(t = 5s)$ متحرک $18 + 32 = 50\,m$ را طی کرده است.

۱۵۲- ۱ ۲ ۳ ۴

ابتدا لحظهٔ عبور اتومبیل‌ها از کنار هم را حساب می‌کنیم.

$$x_A = (90 \times \frac{10}{36})t = 25t$$

$$x_B = -(43/2 \times \frac{10}{36})t + 5550 = -12t + 5550$$

$$\xrightarrow{x_A = x_B} \quad 37t = 5550$$

$$t = 150s$$

$$\left.\begin{array}{l} d_A = 25 \times 150 = 3750\,m \\ d_B = 12 \times 150 = 1800\,m \end{array}\right\} \Rightarrow d_A - d_B = 1950\,m$$

۱۵۳- ۱ ۲ ۳ ۴

با داشتن ۲ حالت $\left|\begin{array}{l} t_1 = 2s \\ x_1 = 6\,m \end{array}\right.$ و $\left|\begin{array}{l} t_2 = 7s \\ x_2 = -14\,m \end{array}\right.$ معادلهٔ حرکت متحرک را می‌نویسیم:

$$x = vt + x_0 \Rightarrow \begin{cases} 6 = 2v + x_0 \\ -14 = 7v + x_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow v = -4\frac{m}{s}\ ,\ x_0 = 14\,m$$

$x=-4t+14$

$\xrightarrow[\text{مبدا مکان}]{\text{عبور از}} 0=-4t+14 \Rightarrow t_1=3/5s$

$\xrightarrow[\text{مکان } -16m]{\text{عبور از}} -16=-4t+14 \Rightarrow t_2=7/5s$

$\Rightarrow t_2-t_1=4s$

۱۵۴- ۱ ۲ ۳ ۴

چون آهو تغییر جهت نداشته است، در هر بازه زمانی، تندی متوسط برابر اندازهٔ سرعت متوسط آن است.

حرکت کندشونده : $14<t<20$

$$S_{av}=|V_{av}|=\frac{V_1+V_2}{2}\Rightarrow 9=\frac{V_1+0}{2}$$

$$\Rightarrow V_1=18\frac{m}{s}$$

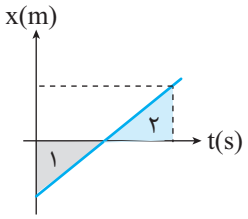
که برابر بیش‌ترین تندی آهو در طول مسیرش است.

حرکت تندشونده : $0<t<14$

$$S_{av}=|V_{av}|=\frac{V_0+V_1}{2}=\frac{11+18}{2}=14/5\frac{m}{s}$$

۱۵۵- ۱ ۲ ۳ ۴

با توجه به تشابه مثلث‌های ۱ و ۲ می‌توان به مکانِ اولیه حرکت پی برد:



$$\frac{-x_0}{2}=\frac{10}{2}\Rightarrow x_0=-10m$$

همچنین با محاسبهٔ شیب نمودار $x-t$ به سرعت متحرک خواهیم رسید:

$$V=+\frac{10}{2}=+5\frac{m}{s}$$

۱۵۶- ۱ ۲ ۳ ۴

ابتدا معادلهٔ حرکت متحرک را با توجه به نقاط روی نمودار می‌نویسیم:

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\Rightarrow 18=\frac{1}{2}a\times 6^2+0\Rightarrow a=1\frac{m}{s^2}$$

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\Rightarrow x=\frac{1}{2}t^2-8$$

لحظهٔ تغییر جهت بردار مکان در لحظهٔ برخورد نمودار با محور t و عبور از آن است.

$$\xrightarrow{x=0}\frac{1}{2}t^2=8\Rightarrow t^2=16\Rightarrow t=4s$$

خواستهٔ سؤال : $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}\xrightarrow[\text{تقریبا}]{\times 100}\%66$

۱۵۷- ۱ ۲ ۳ ۴

ابتدا نمودار سرعت - زمان را رسم می‌کنیم. سطح زیر نمودار شتاب - زمان، تغییر سرعت را در هر بازهٔ زمانی مشخص می‌کند.

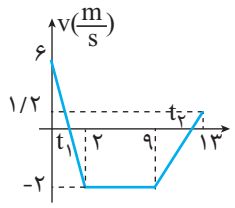
$$\Delta v_{0-2}=2\times(-4)=-8$$

$$\Rightarrow v_{t=2}=6-8=-2\frac{m}{s}$$

$$\Delta v_{2-9}=0\Rightarrow v_{t=9}=-2\frac{m}{s}$$

$$\Delta v_{9-13}=4\times 0/8=3/2\Rightarrow v_{t=13}=-2+3/2$$

$$=1/2\frac{m}{s}$$



حال لحظه‌های t_1 و t_2 که زمان‌های تغییر جهت متحرک است را به کمک تشابه مثلث‌ها به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{6}{2}=\frac{t_1}{2-t_1}\Rightarrow 2t_1=12-6t_1\Rightarrow t_1=\frac{3}{2}s$$

$$\frac{1/2}{2}=\frac{13-t_2}{t_2-9}\Rightarrow 1/2t_2-10/8=26-2t_2$$

$$\Rightarrow t_2=\frac{23}{2}s$$

فاصلهٔ زمانی بین این دو لحظه برابر است با:

$$\Delta t=\frac{23}{2}-\frac{3}{2}=10s$$

۱۵۸- ۱ ۲ ۳ ۴

جابه‌جایی در ۳ ثانیهٔ اول :

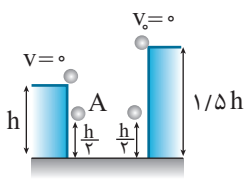
$$\Delta y_{0-3}=\frac{1}{2}gt^2=\frac{1}{2}\times 10\times 9=45m$$

جابه‌جایی در ۴ ثانیهٔ اول :

$$\Delta y_{0-4}=\frac{1}{2}gt^2=\frac{1}{2}\times 10\times 16=80m$$

اختلاف این ۲ جابه‌جایی $\Rightarrow 80-45=35m$

۱۵۹- ۱ ۲ ۳ ۴



$$\text{حالت اول} \rightarrow v_A^2 = 2g\frac{h}{2} \Rightarrow \left(\frac{v'_A}{v_A}\right)^2 = 2$$

$$\text{حالت دوم} \rightarrow v'^2_A = 2gh$$

$$v'_A = \sqrt{2}\, v_A = \sqrt{2}\times 4\sqrt{2} = 8\,\frac{m}{s}$$

$$v'_A - v_A = 8 - 4\sqrt{2} = 4(2-\sqrt{2})$$

۱۶۰- ۱ ۲ ۳ ۴

طناب دارای جرم نیست و نیرویی از طرف زمین به آن وارد نمی‌شود.

نیروهای عمل و عکس‌العمل $\begin{cases} \text{جسم به طناب} \Leftarrow \text{طناب به جسم} \\ \text{سقف به طناب} \Leftarrow \text{طناب به سقف} \end{cases}$

۱۶۱- ۱ ۲ ۳ ۴

جسم ساکن است، بنابراین نیروهای وارد بر آن متوازن‌اند.

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = 0 \Rightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_3 = -(\vec{F}_2 + \vec{F}_4)$$

$$\vec{F}_2 \perp \vec{F}_4 \Rightarrow |\vec{F}_2 + \vec{F}_4| = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13\,N$$

پس از حذف دو نیروی $\vec{F}_2$ و $\vec{F}_4$، جسم تحت تأثیر نیروهای $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_3$ حرکت می‌کند.

$$F_{net} = ma \Rightarrow |\vec{F}_1 + \vec{F}_3| = 1\times a \Rightarrow a = 13\,\frac{m}{s^2}$$

حرکت وزنه شتاب ثابت است، بنابراین برای محاسبه جابه‌جایی در ۲ ثانیهٔ اول می‌توان نوشت:

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow \Delta x = \frac{1}{2}\times 13\times 4 = 26\,m$$

۱۶۲- ۱ ۲ ۳ ۴

حرکت جسم سرعت ثابت است، بنابراین نیروهای وارد بر آن متوازن‌اند.

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0 \Rightarrow \vec{F}_3 = -\vec{i} - 3\vec{j}$$

۱۶۳- ۱ ۲ ۳ ۴

گزینه ۱:

$$|\vec{F}_N| = |\vec{F} + \overrightarrow{mg}| = 48\,N$$

$$\overrightarrow{f_{s,max}} = \vec{F}_N\mu_s = 14\,N$$

$$R = \sqrt{F_N^2 + f_{s,max}^2} = 50\,N$$

گزینه ۲:

$$F_N + F = mg$$

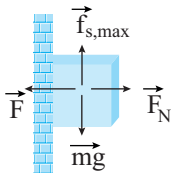
$$F = 30\,N\,,\ mg = 70\,N$$

$$\Rightarrow F_N = mg - F = 40\,N$$

$$f_{s,max} = F_N\mu_s = 30\,N$$

$$R = \sqrt{F_N^2 + f_{s,max}^2} = 50\,N$$

گزینه ۳:



$$F_{net} = 0 \Rightarrow F_N = F = 48\,N$$

$$f_{s,max} = F_N\mu_s = 48\times\frac{5}{12} = 20\,N$$

$$R = \sqrt{F_N^2 + f_s^2} = 52\,N$$

گزینه ۴:

$$F_N + mg = F \Rightarrow F_N = 40\,N$$

$$f_{s,max} = \frac{55}{100}\times 40 = 22\,N$$

$$R = \sqrt{F_N^2 + f_s^2} \simeq 45/2\,N$$

۱۶۴- ۱ ۲ ۳ ۴

عددی که ترازو نشان داده کوچک‌تر از وزن شخص است، بنابراین:

$$mg - F_N = ma \Rightarrow 600 - 420 = 60\,a$$

$$\Rightarrow a = 3\,\frac{m}{s^2} \quad \text{به سمت پایین}$$

هنگامی که آسانسور به صورت کندشونده به بالا یا تندشونده به پایین حرکت کند شتاب آن به سمت پایین است.

۱۶۵- ۱ ۲ ۳ ۴

حالت اول:

$$f_{net} = ma$$

$$T - mg = ma$$

$$T - 5 = 0/5\times 2 \Rightarrow T = 6\,N$$

حالت دوم:

کشش نخ ۲۵% افزایش می‌یابد:

$$\Rightarrow T_2 = 1/25\,T_1 = 7/5\,N$$

$$f_{net} = ma$$

$$T_2 - mg = ma$$

$$7/5 - 5 = 0/5\,a \Rightarrow a = 5\,\frac{m}{s^2}$$

۱۶۶- ۱ ۲ ۳ ۴

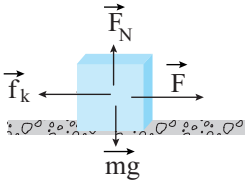
می‌دانیم نیروی مقاومت هوا به تندی جسم و ابعاد آن بستگی دارد و جسم هنگامی به سرعت حدی می‌رسد که نیروی مقاومت هوا و نیروی وزن با یکدیگر برابر شوند.

$$\left.\begin{array}{l} F_{D_2} = m_2 g \\ F_{D_1} = m_1 g \end{array}\right\} \Rightarrow F_{D_2} < F_{D_1}$$

جسم اول نیازمندِ نیروی مقاومت هوای بزرگتری است، پس:

$$\xrightarrow[\text{رابطه مستقیم دارند}]{\text{مقاومت هوا و تندی}} V_{\text{حدی}_2} < V_{\text{حدی}_1}$$

۱۶۷- ۱ **۲** ۳ ۴



$$F_N = mg = 6 \times 10 = 60N$$

$$f_k = f_N \mu_k = 60 \times 0/2 = 12N$$

$$f_e = K\Delta L = 16 \frac{N}{cm} \times 3cm = 48N$$

$$F_{net} = ma \Rightarrow F_e - f_k = ma$$

$$\Rightarrow 36 = 6a \Rightarrow a = 6 \frac{m}{s^2}$$

۱۶۸- ۱ **۲** ۳ ۴

جعبه ساکن است: $F_N = F_2$، با افزایش F_2، F_N نیز افزایش می‌یابد.

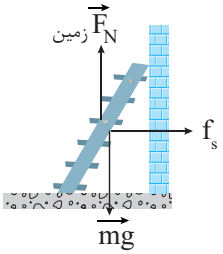
الف) درست

ب) غلط، $F_1 + mg = fs$، نیروی اصطکاک ارتباطی به F_N ندارد.

پ) درست، $f_{s,max} = F_N \mu_s$، با افزایش F_N، $f_{s,max}$ نیز افزایش می‌یابد.

ت) غلط، جسم ساکن است و نیروی خالص وارد بر آن صفر است.

۱۶۹- ۱ ۲ **۳** ۴



$$F_N = mg$$

$$f_s = f_{s,max} = F_N \mu_s$$

نیروی سطح ۲۵٪ بیش‌تر از mg است

$$\Rightarrow R = \frac{125}{100} mg = \frac{5}{4} mg$$

$$R = \sqrt{F_N^2 + f_s^2} \Rightarrow \frac{5}{4} mg = \sqrt{(mg^2) + (mg\mu_s)^2}$$

$$\frac{25}{16} = 1 + \mu_s^2 \Rightarrow \mu_s = \frac{3}{4} = 0/75$$

۱۷۰- ۱ ۲ ۳ **۴**

$$\xrightarrow{v_1 = 54 \frac{km}{h} = 15 \frac{m}{s}}$$

$$\xleftarrow[v_2 = -90 \frac{km}{h} = -25 \frac{m}{s}]{}$$

$$|\overrightarrow{\Delta v}| = 40 \frac{m}{s}$$

$$F_{av} = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{m\Delta v}{\Delta t} = 0/25 \times \frac{40}{50 \times 10^{-3}} = 200N$$

۱۷۱- ۱ **۲** ۳ ۴

$$g_{\text{در سطح زمین}} = G \frac{M_e}{R_e^2} \quad , \quad g'_{r\ \text{در فاصله از مرکز زمین}} = G \frac{M_e}{r^2}$$

$$\frac{g'}{g} = \left(\frac{R_e}{r}\right)^2 \Rightarrow \frac{16}{100} = \left(\frac{R_e}{r}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{4}{10} = \frac{R_e}{r} \Rightarrow r = 2/5 R_e$$

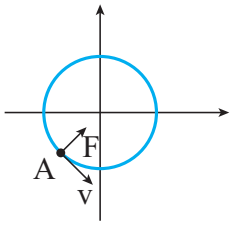
۱۷۲- ۱ ۲ **۳** ۴

$$|\vec{F}| = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10N$$

$$F = m\frac{v^2}{R} \Rightarrow 10 = 2 \times \frac{v^2}{5} \Rightarrow v = 5 \frac{m}{s}$$

در حرکت دایره‌ای سرعت بر نیرو عمود است و نیرو در نقطهٔ A به‌صورت $6i + 8j$ است. چون حرکت ذره پادساعتگرد است جهت سرعت مطابق شکل تعیین می‌شود. یعنی مؤلفه طولی سرعت (مؤلفه $\vec{i}$) مثبت و مؤلف عمودی سرعت (مؤلفه $\vec{j}$) باید منفی باشد بنابراین گزینهٔ ۳ پاسخ صحیح است.

$$\vec{v}\cos 37^\circ \vec{i} - \vec{v}\sin 37^\circ \vec{j} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$$



۱۷۳- ۱ **۲** ۳ ۴

نیروی مرکزگرای وارد بر ماهواره، نیروی گرانشی است بنابراین می‌توان نوشت:

$$F_{\text{مرکزگرا}} = F_{\text{گرانشی}} \Rightarrow G\times\frac{m_{\text{زمین}}\cdot m'_{\text{ماهواره}}}{r^{۲}} = m\frac{v^{۲}}{r}$$

$$\Rightarrow v_{\text{ماهواره}} \sim \frac{۱}{\sqrt{r}}$$

$$\frac{A\ \text{تکانه}}{B\ \text{تکانه}} = \frac{m_A v_A}{m_B v_B} = \frac{m_A\sqrt{r_B}}{m_B\sqrt{r_A}} = ۲\times\sqrt{\frac{۸R_e}{۲R_e}} = ۴$$

۱۷۴- ۱ **۲** **۳** ۴

برای آن که دوره نوسانات آونگی را کاهش هیم باید طول آونگ را کاهش دهیم:

$$\frac{T_۲}{T_۱} = \sqrt{\frac{L_۲}{L_۱}} \Rightarrow \frac{۱/۶}{۲} = \sqrt{\frac{L_۲}{۱۰۰}}$$

$$\Rightarrow \frac{۶۴}{۱۰۰} = \frac{L_۲}{۱۰۰} \Rightarrow L_۲ = ۶۴cm$$

$$\Rightarrow \Delta L = -۳۶cm$$

۱۷۵- **۱** ۲ ۳ ۴

$$K_{max} = E = ۴۰J$$

$$E = U + K \Rightarrow ۴۰ = ۳۵ + K \Rightarrow K = ۵J$$

$$K = \frac{۱}{۲}mv^{۲} \Rightarrow ۵ = \frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۱۰}\times v^{۲}$$

$$\Rightarrow v^{۲} = ۱۰۰ \Rightarrow v = ۱۰\frac{m}{s}$$

۱۷۶- ۱ ۲ **۳** ۴

به‌دلیل پدیده تشدید و برابریِ دوره و بسامد آونگ‌های ۱ و ۳

۱۷۷- ۱ ۲ **۳** ۴

$$a_{max} = ۶۰\frac{m}{s^{۲}} = A\omega^{۲}$$

$$V_{max} = ۲\frac{m}{s} = A\omega$$

$\Rightarrow$ با تقسیم دو رابطه $\omega = ۳۰$

$$A\times ۳۰ = ۲ \Rightarrow A = \frac{۱}{۱۵}m$$

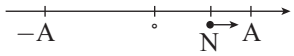
۱۷۸- **۱** ۲ ۳ ۴

$$m\omega^{۲} = \frac{\pi^{۲}}{۲۰} \Rightarrow ۲\times۱۰^{-۳}\omega^{۲} = \frac{\pi^{۲}}{۲۰}$$

$$\omega^{۲} = \frac{\pi^{۲}}{۴\times۱۰^{-۲}} \Rightarrow ۴\pi^{۲}f^{۲} = \frac{\pi^{۲}}{۴\times۱۰^{-۲}}$$

$$\Rightarrow f^{۲} = \frac{۱۰۰}{۱۶} \Rightarrow f = \frac{۱۰}{۴} = ۲/۵Hz$$

۱۷۹- ۱ ۲ **۳** ۴



$$\frac{T}{۴} = ۰/۳ \Rightarrow T = ۱/۲s$$

$$\frac{t}{۲} = \frac{۰/۷}{۱/۲} = \frac{۷}{۱۲} \Rightarrow t = \frac{۷T}{۱۲}$$

مطابق شکل بعد از گذشت $\frac{۷T}{۱۲}$ از این لحظه نوسان‌گر به $-A$ می‌رسد که شتابش بیشینه و مثبت است.

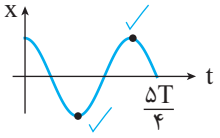
$$a = +A\omega^{۲} = ۰/۱\times\frac{۴\times۹}{\frac{۳۶}{۲۵}} = +۲/۵\frac{m}{s^{۲}}$$

۱۸۰- ۱ **۲** ۳ ۴

$$\omega = \frac{۲\pi}{T} = ۱۰\pi \Rightarrow T = ۰/۲$$

$$\frac{t}{T} = \frac{۰/۲۵}{۰/۲} = \frac{۵}{۴} \Rightarrow t = \frac{۵T}{۴}$$

مطابق شکل در این مدت ۲ مرتبه در هنگام عبور از دامنه‌ها نوسان‌گر تغییر جهت می‌دهد.



شیمی

۱۸۱- ۱ ۲ **۳** ۴

بیشتر آلاینده‌ها ناقطبی بوده و جاذبه قوی‌تری با پارچه‌های پلی‌استری ایجاد می‌کنند و در نتیجه قدرت پاک‌کنندگی صابون در پارچه‌های پلی‌استری کمتر از پارچه‌های نخی است.

۱۸۲- ۱ ۲ ۳ **۴**

فقط عبارت ب درست است.

مولکول‌های اوره می‌توانند با مولکول‌های آب پیوند هیدروژنی برقرار کرده و همین عامل باعث انحلال اوره در آب می‌شود.

بررسی عبارت‌های نادرست:

آ) اگر تعداد گروه‌های هیدروکسیل کم باشد یا تاثیر بخش ناقطبی بر بخش قطبی (هیدروکسیل) غلبه داشته باشد، آن آلاینده در آب حل نمی‌شود، مانند الکل‌های سنگین.

پ) کلوئیدها برخلاف محلول‌ها، جزء مخلوط‌های ناهمگن هستند.

ت) تفاوت ساختاری صابون مایع و جامد در کاتیون آن‌هاست.

۱۸۳- ۱ ۲ ۳ **۴**

فرمول مولکولی چنین اسید چربی به‌صورت $C_{۱۷}H_{۳۲}O_{۲}$ است.

بررسی دیگر گزینه‌ها:

۱) اسیدهای چرب در آب نامحلول بوده ولی در اثر واکنش با سدیم هیدروکسید به صابون تبدیل شده و در آب حل می‌شوند.

۲) جرم مولی اسید چرب مورد نظر $۲۶۸\frac{g}{mol}$ بوده و به واسطهٔ دارا بودن یک پیوند دوگانه هر مول از آن با یک مول گاز هیدروژن (۲ گرم) واکنش می‌دهد، پس ۲/۶۸g از آن با ۰/۰۲ گرم گاز هیدروژن واکنش می‌دهد.

۳) $\frac{۳۲}{\text{جرم اسید چرب}} = \text{درصد جرمی } O = \text{درصد جرمی } H$

۱۸۴- ۱ ۲ ۳ **۴**

ترکیب (۱) پاک‌کننده صابونی و ترکیب (۲) پاک‌کننده غیرصابونی است.

$$۲\overbrace{CH_۳(CH_۲)_{۱۶}COONa(aq)}^{A} + CaCl_۲(aq) \rightarrow \overbrace{(CH_۳(CH_۲)_{۱۶}COO)_۲Ca(s)}^{B} + ۲NaCl(aq)$$

$$\underbrace{\frac{۰/۱mol}{۱}}_{B} = \underbrace{\frac{x}{۲\times۳۰۶g}}_{A} \Rightarrow x = ۶۱/۲g$$

$$\text{جرم ترکیب ۲} \Rightarrow ۶۹ - ۶۱/۲ = ۷/۸g$$

$$\frac{۷/۸}{۶۹}\times۱۰۰ \simeq ۱۱/۳٪$$

۱۸۵- ۱ ۲ **۳** ۴

هرچه غلظت کلسیم کلرید بیشتر باشد، ارتفاع کف کمتر خواهد بود. پس با گذشت زمان غلظت افزایش یافته و ارتفاع کف کم می‌شود. یعنی گزینه ۲ و ۴ حذف می‌شود. از میان دو گزینه دیگر با توجه به نمودار به دست آمده از سؤال ۴ کاوش کنید صفحه ۹ کتاب درسی (رابطه عکس ارتفاع کف و غلظت) که یک نمودار هموگرافیک برای معادله $y = \frac{a}{x}$ است، گزینه یک نیز غلط است.

۱۸۶- ۱ ۲ **۳** ۴

عبارت‌های آ و ب درست هستند.

یکی از فرآورده‌های واکنش مخلوط مورد نظر با آب گاز هیدروژن بوده و واکنش مورد نظر گرماده است.

۱۸۷- **۱** ۲ ۳ ۴

آ) اکسید فلزی { افزایش رسانایی الکتریکی / افزایش pH

ب) اکسید نافلزی { افزایش رسانایی الکتریکی / کاهش pH

پ) باز آرنیوس { افزایش رسانایی الکتریکی / افزایش pH

ت) انحلال مولکولی

۱۸۸- ۱ **۲** **۳** ۴

فرض ← کل مولکول ها = ۱۰۰ ⇒

$$\begin{cases} \text{تعداد یون} = ۲x \Rightarrow \text{مولکول های یونیده شده} = x \\ \text{مولکول های یونیده نشده} = ۱۰۰ - x \end{cases}$$

$$\frac{\text{مولکول های یونیده نشده}}{\text{شمار یون ها}} = ۷۵٪ = \frac{۳}{۴}$$

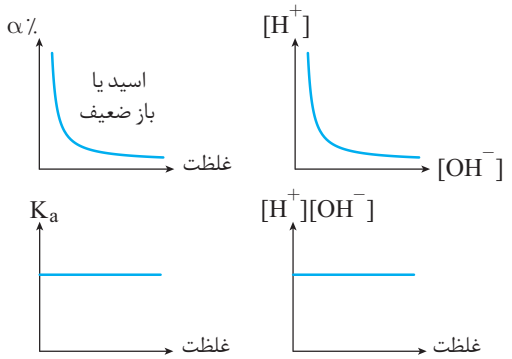
$$\Rightarrow \frac{۱۰۰ - x}{۲x} = \frac{۳}{۴}$$

$$\Rightarrow ۴۰۰ - ۴x = ۶x \Rightarrow ۴۰۰ = ۱۰x \Rightarrow x = ۴۰$$

$$\alpha٪ = \frac{\text{شمار مولکول های یونیده شده}}{\text{کل مولکول ها}}\times۱۰۰$$

$$= \frac{۴۰}{۱۰۰}\times۱۰۰ = ۴۰٪$$

۱۸۹- ۱ **۲** ۳ ۴



۱۹۰- ۱ **۲** **۳** ۴

$$Ka = \frac{[H^+]^۲}{M - [H^+]} \text{ یا } Ka \simeq \frac{[H^+]^۲}{M}$$

$$Ka = \frac{(۶\times۱۰^{-۴})^۲}{۰/۰۲} \simeq ۱/۸\times۱۰^{-۵}\ \frac{mol}{L}$$

۱۹۱- ۱ ۲ **۳** ۴

سرعت تولید گاز وابسته به دما، غلظت یون هیدرونیوم (قدرت اسید) و واکنش‌پذیری فلز است. هرچه اسید قوی‌تر، دما بالاتر و فلز واکنش‌پذیرتر باشد سرعت تولید گاز بیشتر است. (شیب نمودار بیشتر است)

در گزینه ۳ واکنش‌پذیری فلز روی از منیزیم کمتر بود لذا سرعت تولید گاز کمتر خواهد بود

۱۹۲- ۱ ۲ ۳ **۴**

$[H^+]=[HCl]=0/1$

$pH=2/7 \Rightarrow [H^+]=10^{-2/7}=10^{-3}\times 10^{0/3}=2\times 10^{-3}\ \frac{mol}{L}$

$[OH^-]=\frac{10^{-14}}{2\times 10^{-3}}=5\times 10^{-12}$

$\Rightarrow \frac{[H^+]}{[OH^-]}=\frac{0/1}{5\times 10^{-12}}=2\times 10^{10}$

۱۹۳- ۱ ۲ ۳ ۴

$C_{20}H_{41}COOH+NaOH \rightarrow C_{20}H_{41}COONa+H_2O$

$pH=13/5 \Rightarrow pOH=0/5 \Rightarrow [OH^-]=10^{-0/5}$

$=10^{-1}\times 10^{0/5}=0/3$

$\underbrace{\frac{489\times 0/75}{326}}_{\text{اسید چرب}}=\frac{0/3\times \overline{V}}{1000} \Rightarrow \overline{V}=3750$

۱۹۴- ۱ ۲ ۳ ۴

اگر هیدروکلریک اسید و سدیم هیدروکسید با نسبت مولی برابر با یکدیگر واکنش دهند، آنگاه pH برابر ۷ خواهد بود. ولی اگر مقدار آن‌ها برابر نباشد، pH ممکن است کمتر یا بیشتر از ۷ باشد.

۱۹۵- ۱ ۲ ۳ ۴

$Zn+2HCl \rightarrow ZnCl_2+H_2$

$2Na+2H_2O \rightarrow 2NaOH+H_2$

$2LHCl\times \frac{0/03molHCl}{1LHCl}\times \frac{2molNaOH}{2molHCl}$

$=0/06molNaOH$

$[OH^-]=\frac{0/06}{0/75}=0/08$

$[H^+]=\frac{10^{-14}}{0/08}=1/25\times 10^{-13}$

$pH=-\log 1/25\times 10^{-13}=12/9$

۱۹۶- ۱ ۲ ۳ ۴

فقط عبارت آ درست است.

$IO_3^-+5H^++4e^- \rightarrow HIO+2H_2O$

بررسی سایر گزینه‌ها:

ب) عدد اکسایش ید در IO_3^- برابر ۵+ و در HIO به ۱+ کاهش یافته است پس تغییر عدد اکسایش اتم ید برابر ۴ واحد است.

پ) مجموع ضرایب استوکیومتری برابر ۱۳ است.

ت) عدد اکسایش اتم H تغییر نکرده است و گونه اکسنده یون IO_3^- است.

۱۹۷- ۱ ۲ ۳ ۴

$Cu(s)+2Ag^+(aq) \rightarrow Cu^{2+}(aq)+2Ag(s)$

$\overline{R}_{\text{واکنش}}=\overline{R}_{Cu} \Rightarrow 0/01=\frac{\Delta n_{Cu}}{60} \rightarrow \Delta n_{Cu}=0/6mol$

جرم مس خورده شده $=0/6\times 64=38/4g$

$\overline{R}_{\text{واکنش}}=\frac{1}{2}\overline{R}_{Ag} \Rightarrow 0/02=\frac{\Delta n_{Ag}}{60} \Rightarrow \Delta n=1/2mol$

جرم نقره رسوب کرده $=1/2\times 108=129/6g$

مجموع تغییر جرم تیغه‌ها $=129/6+38/4=168g$

۱۹۸- ۱ ۲ ۳ ۴

$A \rightarrow_{30} Zn: 1s^2\ \underbrace{2s^2 2p^6}_{8e}\ \underbrace{3s^2 3p^6 3d^{10}}_{18e}\ \underbrace{4s^2}_{2e}$

(لایه دوم، لایه سوم، لایه چهارم)

$B \rightarrow_8 O: 1s^2 2s^2 2p^4$

$\Rightarrow n+l=[2(2+0)]+[4(2+1)]=16$

* اغلب فلزها با اکسیژن واکنش داده و اکسایش پیدا می‌کنند:

نیم واکنش اکسایش: $2Zn(s) \rightarrow 2Zn^{2+}(s)+4e^-$

نیم واکنش کاهش: $O_2(g)+4e^- \rightarrow 2O^{2-}(s)$

واکنش اصلی: $2Zn(s)+O_2(g) \rightarrow 2ZnO(s)$

۱۹۹- ۱ ۲ ۳ ۴

در این واکنش عدد اکسایش اتم‌های اکسیژن و هیدروژن تغییر نکرده است.

۲۰۰- ۱ ۲ ۳ ۴

$2Ca+O_2 \rightarrow 2CaO$

$6gCa\times \frac{1mol}{40g}\times \frac{2\times 6/02\times 10^{23}}{1mol}=1/806\times 10^{23}e^-$

$=1/806\times 10^{23}H^+ \Rightarrow molH^+=0/3$

$[H^+]=\frac{0/3}{3}=0/1\frac{mol}{L}$

$\Rightarrow pH=-\log 0/1=1 \Rightarrow$ محیط اسیدی

۲۰۱- ۱ ۲ ۳ ۴

عبارت‌های آ و ب درست هستند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

پ) در آند عمل اکسایش و در کاتد عمل کاهش صورت می‌گیرد.

ت) جهت حرکت الکترون‌ها در مدار بیرونی از آند به کاتد است.

۲۰۲- ۱ ۲ ۳ ۴

بر طبق واکنش‌های قدرت اکسندگی به‌صورت

$Sn^{2+} > Cr^{3+} > Fe^{2+}$

بوده و در این صورت عکس آن به صورت گزینه ۲ است و از آن‌جا که واکنش→کاتیون فلز بالاتر + عنصر پایین‌تر به صورت طبیعی انجام می‌شود پس:

$H_2 +$ هیچ کدام $\rightarrow$ فرآورده

۲۰۳- ۱ ۲ **۳** ۴

قدرت اکسندگی کاتیون M بیشتر از Cu^{2+} است.

$Ag^+ / Ag \quad E^\circ > 0$

$M^{n+} / M \quad E^\circ > 0$

$Cu^{2+} / Cu \quad E^\circ > 0$

۲۰۴- ۱ ۲ **۳** ۴

از آن‌جا که جاری شدن الکترون همواره از سمت آند به سمت کاتد است، پس در هر دو سلول M ، E° کوچکتری دارد و با توجه به آن‌که E° سلول SHE برابر صفر است، پس بین M و N قرار دارد، در نتیجه $E^\circ_M < 0$.

۲۰۵- **۱** ۲ ۳ ۴

$$\left.\begin{array}{l} Zn + A^{2+} \rightarrow Zn^{2+} + A \\ E^\circ_{\text{واکنش}} = 0/34 + 0/76 = 1/1 \\ 2B + 3Zn^{2+} \rightarrow 2B^{3+} + 3Zn \\ E^\circ_{\text{واکنش}} = -0/76 + 1/66 = 0/9 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2B + 3A^{2+} \rightarrow 2B^{3+} + 2A \\ E^\circ_{\text{واکنش}} = 0/34 + 1/66 = 2 \end{array}$$

۲۰۶- ۱ **۲** ۳ ۴

$$2H_2 + O_2 \rightarrow 2H_2O$$

در این واکنش به ازای مصرف ۲ مول گاز هیدروژن (۴ گرم)، ۴ مول الکترون مبادله می‌شود:

$$\frac{4gH_2}{0/3gH_2} = \frac{4mole}{xmole} \Rightarrow x = 0/3mole$$

واکنش معمولی سوختن متان →

نیم واکنش اکسایش :

$$CH_4 + 2H_2O \rightarrow CO_2 + 8H^+ + 8e^-$$

نیم واکنش کاهش :

$$2O_2 + 8H^+ + 8e^- \rightarrow 4H_2O$$

واکنش کلی : $\underset{-4}{C}\ H_4 + 2O_2 \rightarrow \underset{+4}{C}\ O_2 + 2H_2O$

۸ درجه اکسایش

در این واکنش به ازای مصرف یک مول گاز متان (۱۶ گرم)، ۸ مول الکترون مبادله می‌شود.

$$\frac{16gCH_4}{xgCH_4} = \frac{8mole}{0/3mole} \Rightarrow x = 0/6gCH_4$$

۲۰۷- ۱ **۲** ۳ ۴

$$2H_2O \rightarrow 2H_2 + O_2$$

جرم گاز آزاد شده در آند (اکسیژن) ۸ برابر جرم گاز آزاد شده در کاتد (هیدروژن) است.

۲۰۸- ۱ ۲ ۳ **۴**

نیم واکنش کاهش در فرایند استخراج آلومینیم به روش هال به‌صورت $Al^{3+} + 3e \rightarrow Al$ و نیم واکنش کاهش در آبکاری یک جسم با نقره به‌صورت $Ag^+ + e \rightarrow Ag$ است.

$$\left.\begin{array}{l} Al^{3+} + 3e^- \rightarrow Al \rightarrow 1molAl = 27g \\ 3Ag^+ + 3e^- \rightarrow 3Ag \rightarrow 1molAg = 3(108)g \end{array}\right\}$$

$$\frac{3(108)}{27} = 12$$

۲۰۹- **۱** ۲ ۳ ۴

تمام موارد درست است.

فلز قلع کاتد بوده ولی کاهیده نمی‌شود و تنها نقش رسانای الکترونی را دارد و الکترون‌ها را در اختیار مولکول‌های اکسیژن می‌گذارد تا آن کاهش یابند.

نیم واکنش اکسایش $\rightarrow 2Fe(s) \rightarrow 2Fe^{2+}(aq) + 4e^-$

نیم واکنش کاهش →

$$O_2(g) + 2H_2O(s) + 4e^- \rightarrow 4OH^-(aq)$$

۲۱۰- ۱ ۲ ۳ **۴**

	کاتد	آند
۱)	$NaCl \rightarrow Na$	$\frac{1}{2}Cl_2 \rightarrow \frac{1}{2}$
۲)	$Al_2O_3 \rightarrow 2Al$	$\frac{3}{2}CO_2 \rightarrow \frac{3}{4}$
۳)	$MgCl_2 \rightarrow Mg$	$Cl_2 \rightarrow 1$
۴)	$AlF_3 \rightarrow Al$	$\frac{3}{2}F_2 \rightarrow \frac{3}{2}$