لیزی کنکور

@Lazykonkori

نام و نام خانوادگی: زمان برگزاری:

نام آزمون: ریاضی حد و پیوستگی کنکوری

تاریخ آزمون: گروه مشاوره اندیشه جوان

۱ - در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=(x+a)[x]$ اگر $\lim_{x\to ۲^-} f(x) - \lim_{x\to ۲^+} f(x) = ۳$ باشد، عدد حقیقی a کدام است؟

① ۱ ② ۲ ③ -۱ ④ ۰

۲ - تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-\sqrt{۲x}}{۲-x} & ;x\neq ۲ \\ a & ;x=۲ \end{cases}$، به ازای کدام مقدار a، در نقطه‌ی $x=۲$ پیوسته است؟

① -۲ ② -۱ ③ $-\frac{۱}{۲}$ ④ ۱

۳ - حاصل $\lim_{x\to \frac{۳\pi}{۴}} \dfrac{\tan^۲ x-۱}{\cos ۲x}$ کدام است؟

① -۲ ② $\frac{۱}{۲}$ ③ ۱ ④ ۲

۴ - تابع با ضابطه‌ی $\begin{cases} \dfrac{x^۲-۱}{x+۱} & ;|x|>۱ \\ ۲x & ;|x|\leq ۱ \end{cases}$، از نظر پیوستگی در دو نقطه به طول های ۱ و ۱− چگونه است؟

① در ۱− ناپیوسته - در ۱ ناپیوسته ② در ۱− ناپیوسته - در ۱ پیوسته ③ در ۱− پیوسته - در ۱ پیوسته ④ در ۱− پیوسته - در ۱ ناپیوسته

۵ - تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x^۲+x-۲|}{x-۱} & ;x\neq ۱ \\ a & ;x=۱ \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a بر R پیوسته است؟

① هر مقدار a ② -۳ ③ ۳ ④ هیچ مقدار a

۶ - در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{۳-\sqrt{x^۲+۵}}{ax^n+۴}$ اگر $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{۱}{۲}$ باشد آنگاه $\lim_{x\to ۲} f(x)$ کدام است؟

① $\frac{۳}{۲}$ ② $\frac{۲}{۳}$ ③ $\frac{۳}{۴}$ ④ $\frac{۱}{۳}$

۷ - تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin^۲ x}{۱-\cos x} & ,x>۰ \\ a\sin(x+\frac{\pi}{۶}) & ,x\leq ۰ \end{cases}$، به ازای کدام مقدار a، در $x=۰$ پیوسته است؟

① ۲ ② ۴ ③ هیچ مقدار a ④ هر مقدار a

۸ - حد کسر $\dfrac{x^{m+۳}+nx+m}{mx^{n-۲}-mx+n-۱}$ با شرط $n>۳$، وقتی $x\to\infty$ برابر -۲ است $m+n$ کدام است؟

① ۳٫۵ ② ۴ ③ ۴٫۵ ④ ۵

۹ - حد عبارت $\dfrac{\cos x}{۱-\sin x}$ وقتی $x\to(\frac{\pi}{۲})^+$، کدام است؟

① $+\infty$ ② ۲ ③ ۱ ④ $-\infty$

۱۰ - حاصل $\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \dfrac{\tan x-۱}{\cos ۲x}$ کدام است؟

① -۱ ② $-\frac{۱}{۲}$ ③ $\frac{۱}{۲}$ ④ ۱

۱۱- در تابع باضابطه ی $f(x)=\dfrac{ax^n-3x+1}{3x^2+x}$، اگر $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\dfrac{2}{3}$ باشد، $f(-1)$ کدام است؟

① -2 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ 3

۱۲- اگر تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} ax+b & ; \ x>2 \\ x^2+bx-1 & ; \ x<2 \end{cases}$ با شرط $f(2)=5$ بر روی مجموعه‌ی اعداد حقیقی پیوسته باشد، a کدام است؟

① -1 ② 1 ③ 2 ④ 3

۱۳- تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} a\sin 2x & ; \frac{\pi}{4}\le x<\frac{3\pi}{4} \\ \cos(x+\frac{\pi}{4}) & ; \frac{3\pi}{4}\le x\le 2\pi \end{cases}$ بر بازه‌ی $[\frac{\pi}{4},2\pi]$ پیوسته است. مقدار a کدام است؟

① -1 ② 0 ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1

۱۴- در تابع $f(x)=\dfrac{2x-\sqrt{x^2+6x}}{ax-2}$، اگر $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=3$ باشد، آنگاه $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ کدام است؟

① 0 ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{3}{2}$

۱۵- تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3-3x^2+4}{x-2} & ; x>2 \\ 2x+b & ; x\le 2 \end{cases}$، به ازای کدام مقدار b همواره پیوسته است؟

① -4 ② -2 ③ 2 ④ 4

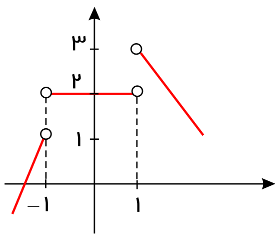
۱۶- حد چپ تابع $f(x)=\dfrac{(3-[x])\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$ در نقطه ی $x=3$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است)

① 1 ② -1 ③ 0 ④ ∞

۱۷- با توجه به شکل مقابل حاصل $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)-\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ کدام است؟

① 1 ② 2

③ 4 ④ 5



۱۸- فرض کنید $f(x)=\begin{cases} 2 & x\ge 1 \\ 1 & x<1 \end{cases}$ می باشد حد تابع $f(x)$ وقتی $x\to 1^-$ کدام است؟

① $f(0)$ ② $f(2)$ ③ $f(1)$ ④ $f(3)$

۱۹- حاصل $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^+} \dfrac{\tan x}{\cot x}$ کدام است؟

① 0^+ ② -1 ③ $+\infty$ ④ $-\infty$

۲۰- مقدار $\lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{x+\sqrt{x+2}}{x+2}$ کدام است؟

① $-\infty$ ② 2 ③ 4 ④ 0^+

۲۱- با کدام مجموعه مقادیر a، تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x+a} & ; \ x\ge -1 \\ x^2+ax & ; \ x<-1 \end{cases}$، در $x=-1$ پیوسته است؟

① $\{1,\sqrt{2}\}$ ② $\{1-\sqrt{2},1+\sqrt{2}\}$ ③ $\varnothing$ ④ $\mathbb{R}$

۲۲- اگر $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{ax+9}{1-x+\sqrt{x+1}}=3$ باشد، آنگاه حدّ این کسر وقتی $x\to 3$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۵

۲۳- حاصل $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt{x}}{2-\sqrt{5-x}}$ کدام است؟

۱) -4 ۲) -2 ۳) ۲ ۴) ۴

۲۴- به ازای کدام مقدار a ، تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} a+\sin^2 x & 0\le x<\dfrac{\pi}{4} \\ \sqrt{2}\cos 3x & \dfrac{\pi}{4}\le x\le 2\pi\end{cases}$، روی بازه‌ی $[0\,,\,2\pi]$ پیوسته است؟

۱) $-\dfrac{3}{2}$ ۲) $-\dfrac{1}{2}$ ۳) $\dfrac{1}{2}$ ۴) هیچ مقدار a

۲۵- تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\tan^2 x}{\cos 2x} & ; \ 0\le x<\dfrac{\pi}{4} \\ a\cos 3x & ; \ \dfrac{\pi}{4}\le x\le\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$ ، به ازای کدام مقدار a، در نقطه‌ی $x=\dfrac{\pi}{4}$ پیوسته است؟

۱) $-2\sqrt{2}$ ۲) -1 ۳) $\sqrt{2}$ ۴) ۲

۲۶- در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{ax^n+15}{3x-\sqrt{4x^2+15x}}$ ، اگر $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-1$ باشد، آنگاه $\lim\limits_{x\to 3}f(x)$ کدام است؟

۱) -6 ۲) -4 ۳) ۳ ۴) ۵

۲۷- به ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} \sin\dfrac{\pi}{x} & ; 1\le x\le 6 \\ a+\cos^2\dfrac{\pi x}{36} & ; \ x>6\end{cases}$، بر روی مجموعه اعداد حقیقی بزرگ‌تر از ۱، پیوسته است؟

۱) $-\dfrac{1}{2}$ ۲) $-\dfrac{1}{4}$ ۳) $\dfrac{1}{4}$ ۴) $\dfrac{1}{2}$

۲۸- حاصل $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{2-\sqrt[3]{x+6}}{\sqrt{x^2-4x+4}}$ کدام است؟

۱) $-\dfrac{1}{6}$ ۲) $-\dfrac{1}{12}$ ۳) $\dfrac{1}{12}$ ۴) $\dfrac{1}{6}$

۲۹- در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{2x+\sqrt{x^2-3x}}{ax^n-6}$ ، اگر $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\dfrac{1}{2}$ باشد، آنگاه $\lim\limits_{x\to-1}f(x)$ ، کدام است؟

۱) $-\dfrac{1}{6}$ ۲) $-\dfrac{1}{8}$ ۳) $\dfrac{1}{4}$ ۴) $\dfrac{1}{3}$

۳۰- نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{ax+1+\sqrt{4x^2+9}}{3x-2}$ از نقطه‌ی $(2,1)$ می‌گذرد. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ کدام است؟

۱) $-\dfrac{1}{3}$ ۲) $\dfrac{1}{3}$ ۳) $\dfrac{2}{3}$ ۴) ۱

۳۱- به ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} x^2+ax-5 & x>2 \\ ax-1 & x\le 2\end{cases}$ بر روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته است؟

۱) هر مقدار حقیقی a ۲) هیچ مقدار a ۳) فقط $a=-2$ ۴) فقط $a=2$

۳۲- حاصل $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x+\sqrt{3-x}}{x^2+x}$ کدام است؟

۱) $-\dfrac{7}{4}$ ۲) $-\dfrac{1}{4}$ ۳) $\dfrac{3}{4}$ ۴) $\dfrac{5}{4}$

۳۳- اگر $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{|x^۲-۴|}{ax^۲-x+۲} = -۱$، آن گاه حد راست این عبارت در نقطه ی $x=-۲$ کدام است؟

① $-\frac{۴}{۳}$ ② $-\frac{۲}{۳}$ ③ $\frac{۲}{۳}$ ④ $\frac{۴}{۳}$

۳۴- در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{ax+\sqrt{۴x^۲+۵}}{۲x+۲}$، اگر $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{۵}{۲}$ باشد، آنگاه حد $f(x)$ وقتی $x\to-۱$، کدام است؟

① $\frac{۲}{۳}$ ② $\frac{۵}{۶}$ ③ $\frac{۳}{۲}$ ④ $\frac{۵}{۴}$

۳۵- به ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos x-\sqrt{\cos x}}{\sin^۲ x} & ; x\neq ۰\\ a & ; x=۰\end{cases}$ در نقطه‌ی $x=۰$ پیوسته است؟

① $-\frac{۱}{۴}$ ② $-\frac{۱}{۲}$ ③ $\frac{۱}{۲}$ ④ هیچ مقدار a

۳۶- حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-\sqrt{۴x^۲+۹x}}{۳x+\sqrt{x}}$ کدام است؟

① $-\frac{۱}{۳}$ ② $-\frac{۱}{۴}$ ③ $\frac{۱}{۳}$ ④ $\frac{۲}{۳}$

۳۷- در تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}x^۲+a & ; x<-۲\\ ۳x+۴ & ; x>-۲\end{cases}$ مقدار حد چپ در نقطه‌ی $x=-۲$، عکس مقدار حد راست در این نقطه است. a کدام است؟

① ۳ ② ۳٫۵ ③ -۴ ④ $-۴٫۵$

۳۸- حاصل $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{۱-\sqrt{\cos x}}{\sin^۲ x}$ کدام است؟

① ∞ ② ۳ ③ $\frac{۱}{۲}$ ④ $\frac{۱}{۴}$

۳۹- اگر $f(x)=\begin{cases}x+a & ; x<۱\\ ۱ & ; x\geq ۱\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}x+۱ & ; x<۱\\ \frac{a}{x+۱} & ; x\geq ۱\end{cases}$، به ازای کدام مقدار a، تابع $f+g$ در $x=۱$ پیوسته است؟

① -۴ ② ۴ ③ -۲ ④ ۲

۴۰- تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}-x^۲+۴ & x\geq ۱\\ ax+۵x-a & x<۱\end{cases}$ به ازای کدام مجموعه‌ی مقادیر a، در بازه‌ی $[-۲,۲]$ پیوسته است؟

① $\varnothing$ ② R ③ $\{۰,۱\}$ ④ $\{-۲,۲\}$

۴۱- تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}a+\sin ۳x & ۰\leq x<\frac{\pi}{۲}\\ b\cos ۲x & \frac{\pi}{۲}<x\leq ۲\pi\end{cases}$ با شرط $f(\frac{\pi}{۲})=۲$ در بازه‌ی $[۰,۲\pi]$ پیوسته است $a-b$ کدام است؟

① -۵ ② -۴ ③ ۴ ④ ۵

۴۲- نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=[۴\sin^۲\pi x]$ روی بازه‌ی $\left[۰,\frac{۱}{۲}\right]$ در چند نقطه ناپیوسته است؟

① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

۴۳- تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{۱-\sqrt{۱-x}} & ; x\neq ۰\\ a & ; x=۰\end{cases}$، به ازای کدام مقدار a، در نقطه‌ای به طول $x=۰$ پیوسته است؟

① -۲ ② -۱ ③ ۱ ④ ۲

۴۴- تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-۱}{x-\sqrt{x}} & ; x>۱\\ ax-a+۲ & ; x\leq ۱\end{cases}$، به ازای کدام مقدار a در نقطه‌ای به طول $x=۱$ پیوسته است؟

① ۱ ② ۲ ③ هر مقدار a ④ هیچ مقدار a

۴۵- حاصل $\lim\limits_{x\to ۴} \dfrac{۳x^۲-۱۰x-۸}{\sqrt{۳-\sqrt{x}}-۱}$، کدام است؟

(۱) -۱۱۲ (۲) -۹۶ (۳) -۸۴ (۴) -۷۲

۴۶- تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} ax+۲^{x-۳} & ; x<۳ \\ a\log_۲(۱+x) & ; x\geq ۳ \end{cases}$ در نقطه‌ای به طول $x=۳$ پیوسته است، $f(۲)$ کدام است؟

(۱) -۲ (۲) $-۱/۵$ (۳) ۱ (۴) صفر

۴۷- حاصل $\lim\limits_{x\to -۱} \dfrac{۲x^۲+۵x+۳}{۲-\sqrt{۲+\sqrt{۳-x}}}$، کدام است؟

(۱) ۸ (۲) ۱۲ (۳) ۱۶ (۴) ۲۴

۴۸- اگر تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} \sqrt{ax+۳} & ; x<۱ \\ x^۲+ax & ; x\geq ۱ \end{cases}$ در نقطه‌ی $x=۱$ پیوسته باشد، $f(-\frac{۳}{۴})$ کدام است؟

(۱) $۰/۵$ (۲) $۱/۲۵$ (۳) $۱/۵$ (۴) $۲/۵$

۴۹- حاصل $\lim\limits_{x\to -۲} \dfrac{x+\sqrt{۲x+۸}}{x+۲}$ برابر کدام است؟

(۱) $\frac{۳}{۲}$ (۲) $\frac{۵}{۲}$ (۳) $\frac{-۳}{۲}$ (۴) $\frac{-۵}{۲}$

۵۰- حاصل $\lim\limits_{x\to ۴} \dfrac{۳-\sqrt{۲x+۱}}{۲-\sqrt{x}}$ کدام است؟

(۱) $\frac{۲}{۳}$ (۲) $\frac{۳}{۴}$ (۳) $\frac{۴}{۳}$ (۴) $\frac{۳}{۲}$

۵۱- قدرمطلق تفاضل حد چپ و حد راست تابع f به معادله‌ی $f(x)=\dfrac{۲x^۲-x-۱}{|x-۱|}$ در نقطه‌ی $x=۱$ کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

۵۲- اگر $\lim\limits_{x\to -۳} \dfrac{ax+۳a}{۱-\sqrt{۵x+۱۶}}=۲$ آنگاه a کدام است؟

(۱) $a=۱$ (۲) $a=-۱$ (۳) $a=۵$ (۴) $a=-۵$

۵۳- حاصل $\lim\limits_{x\to \frac{۳\pi}{۴}} \dfrac{۱+\cot x}{۱+\tan x}$ کدام است؟

(۱) -۱ (۲) ۰ (۳) ۱ (۴) $+\infty$

۵۴- به‌ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} \dfrac{۸+x^۳}{|x+۲|} & ; x\neq -۲ \\ a & ; x=-۲ \end{cases}$، در نقطهٔ $x=-۲$، فقط از چپ پیوسته است؟

(۱) -۱۲ (۲) -۶ (۳) ۶ (۴) ۱۲

۵۵- حد عبارت $\dfrac{x^۲+۱۰x+۱۶}{۱۲+۶\sqrt[۳]{x}}$، وقتی $x\to -۸$، کدام است؟

(۱) -۲۴ (۲) -۱۸ (۳) -۱۲ (۴) -۶

۵۶- در مورد تابع با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{x^۲-۱}{x+|x|}$، کدام بیان، درست است؟

(۱) $\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)=+\infty$ (۲) $\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)=-\infty$ (۳) $\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=+\infty$ (۴) $\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=-\infty$

۵۷- اگر $f(x)=۲x+\sqrt{۴x^۲+x}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$، کدام است؟

(۱) -۱ (۲) $-\frac{۱}{۲}$ (۳) $-\frac{۱}{۴}$ (۴) صفر

۵۸- اگر $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x-5}{x^2+ax+b}=-\infty$ باشد، $a+b$ کدام است؟

(۱) -1 (۲) صفر (۳) 1 (۴) 2

۵۹- به‌ازای کدام مجموعهٔ مقادیر x، بازهٔ $(x+1, 2x-1)$ یک همسایگی عدد ۳ می‌باشد؟

(۱) $\varnothing$ (۲) $\{2\}$ (۳) $2<x<2.5$ (۴) $1.5<x<2$

۶۰- حاصل $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sin^2 \pi x}{[x]+\cos \pi x}$، کدام است؟

(۱) 1 (۲) 2 (۳) π (۴) 2π

۶۱- تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{2|x-2|} & ; x\neq 2\\ 2 & ; x=2\end{cases}$، از نظر پیوستگی در $x=2$، چگونه است؟

(۱) از چپ پیوسته (۲) پیوسته (۳) از چپ ناپیوسته و از راست ناپیوسته (۴) از راست پیوسته

۶۲- حدّ عبارت $\dfrac{2-\sqrt[3]{3x+2}}{5x^2-18x+16}$، وقتی $x\to 2$، کدام است؟

(۱) $-\dfrac{1}{3}$ (۲) $-\dfrac{1}{4}$ (۳) $-\dfrac{1}{6}$ (۴) $-\dfrac{1}{8}$

۶۳- در مورد تابع با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+2\cos x}$، کدام بیان، درست است؟

(۱) $\lim\limits_{x\to(\frac{2\pi}{3})^+} f(x)=-\infty$ (۲) $\lim\limits_{x\to(\frac{2\pi}{3})^+} f(x)=+\infty$ (۳) $\lim\limits_{x\to(\frac{2\pi}{3})^-} f(x)=-\infty$ (۴) $\lim\limits_{x\to\frac{4\pi}{3}} f(x)=+\infty$

۶۴- اگر $f(x)=x-\sqrt{4x^2+x}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$، کدام است؟

(۱) -2 (۲) -1 (۳) 2 (۴) 3

۶۵- به‌ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x-6}{x-\sqrt{x+2}} & ; x>2\\ ax-1 & ; x\leq 2\end{cases}$، بر روی مجموعهٔ اعداد حقیقی، پیوسته است؟

(۱) 1.5 (۲) 2 (۳) 2.5 (۴) 3

۶۶- به‌ازای مقادیری از a و b، تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}x[x] & ; |x|<1\\ ax+b & ; |x|\geq 1\end{cases}$، بر روی $\mathbb{R}$ پیوسته است. a کدام است؟

(۱) $-\dfrac{3}{2}$ (۲) -1 (۳) $-\dfrac{1}{2}$ (۴) $\dfrac{1}{2}$

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۱

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x) - \lim_{x\to ۲^-} f(x) = ۳ \Rightarrow (۲+a)[۲^+] - (۲+a)[۲^-] = ۳$$
$$\Rightarrow (۲+a)(۲) - (۲+a)(۱) = ۳ \Rightarrow ۴ + ۲a - ۲ - a = ۳ \Rightarrow a = ۱$$

آسان- سراسری ۱۳۸۷

۲ - گزینه ۳

شرط پوسیدگی تابع f در $x = a$ این است که حد راست و حد چپ و مقدار تابع در موجود و متناهی و باهم برابر باشند.

$$\lim_{x\to ۲} f(x) = \lim_{x\to ۲} \frac{x - \sqrt{۲x}}{۲ - x} = \frac{۰}{۰} \xrightarrow{Hop} \lim_{x\to ۲} \frac{۱ - \frac{۱(۲)}{۲\sqrt{۲x}}}{-۱} = -\frac{۱}{۲}$$

پس $f(۲) = a = -\frac{۱}{۲}$ است

آسان- سراسری ۱۳۸۷

۳ - گزینه ۱

$$\lim_{x\to \frac{۳\pi}{۴}} \frac{\tan^۲ x - ۱}{\cos ۲x} = \lim_{x\to \frac{۳\pi}{۴}} \frac{\sin^۲ x - \cos^۲ x}{\cos^۲ x(\cos^۲ x - \sin^۲ x)} = \lim_{x\to \frac{۳\pi}{۴}} \frac{-۱}{\cos^۲ x} = \frac{-۱}{\frac{۱}{۲}} = -۲$$

توجه کنید $\tan \frac{۳\pi}{۴} = -۱$ می‌باشد.

متوسط- سراسری ۱۳۸۸

۴ - گزینه ۴ ابتدا تابع داده شده را ساده می‌کنیم.

$$f(x) = \begin{cases} x - ۱ & x > ۱ \text{ یا } x < -۱ \\ ۲x & -۱ \le x \le ۱ \end{cases}$$

حد راست و حد چپ و مقدار تابع را باید در $x = ۱$ و $x = -۱$ بدست آوریم.

$$x = ۱ \ : \ \begin{cases} \lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim_{x\to ۱^+} (x - ۱) = ۱ - ۱ = ۰ \\ \lim_{x\to ۱^-} f(x) = \lim_{x\to ۱^-} f(x) = ۲(۱) = ۲ \\ f(۱) = ۲(۱) = ۲ \end{cases} \Rightarrow \text{تابع در } x = ۱ \text{ ناپیوسته است.}$$

$$x = -۱ \ : \ \begin{cases} \lim_{x\to (-۱)^+} f(x) = \lim_{x\to (-۱)^+} ۲x = ۲(-۱) = -۲ \\ \lim_{x\to (-۱)^-} f(x) = \lim_{x\to (-۱)^-} (x - ۱) = -۱ - ۱ = -۲ \\ f(-۱) = ۲(-۱) = -۲ \end{cases} \Rightarrow \text{تابع در } x = -۱ \text{ پیوسته است.}$$

متوسط- سراسری ۱۳۸۸

۵ - گزینه ۴

کافی است حد راست و حد چپ و مقدار تابع را در $x = ۱$ بدست آوریم.

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim_{x\to ۱^+} \frac{|\overbrace{(x+۲)(x-۱)}^{+}|}{x - ۱} = \lim_{x\to ۱^+} \frac{(x+۲)(x-۱)}{(x-۱)} = ۳$$

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x) = \lim_{x\to ۱^-} \frac{|\overbrace{(x+۲)(x-۱)}^{-}|}{x - ۱} = \lim_{x\to ۱^-} \frac{-(x+۲)(x-۱)}{(x-۱)} = -۳$$

ین تابع در $x = ۱$ پیوسته نمی‌باشد.

توسط- سراسری ۱۳۹۰

۶ - گزینه ۴

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{۳ - \sqrt{x^۲ + ۵}}{ax^n + ۴} \overset{\text{پرتوان}}{=\!=} \lim_{x\to +\infty} \frac{-\sqrt{x^۲}}{ax^n} = \lim_{x\to +\infty} \frac{-|\overbrace{x}^{+}|}{ax^n} = \lim_{x\to +\infty} \frac{-x}{ax^n} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \begin{cases} n = ۱ \\ a = -۲ \end{cases}$$

پس: $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{۳-\sqrt{x^۲+۵}}{-۲x+۴}=\dfrac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{\frac{-۲x}{۲\sqrt{x^۲+۵}}}{-۲}=\dfrac{\frac{-۴}{۶}}{-۲}=\dfrac{۱}{۳}$

متوسط- سراسری- ۱۳۹۰

۷ - گزینه ۲

حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x=۰$ باید با هم برابر باشند.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to ۰^+}f(x)=\lim\limits_{x\to ۰^+}\dfrac{\sin^۲ x}{۱-\cos x}=\lim\limits_{x\to ۰^+}\dfrac{(۱-\cos x)(۱+\cos x)}{(۱-\cos x)}=۲\\ \lim\limits_{x\to ۰^-}f(x)=\lim\limits_{x\to ۰^-}a\sin(x+\dfrac{\pi}{۶})=a\sin\dfrac{\pi}{۶}=\dfrac{a}{۲}\\ f(۰)=a\sin\dfrac{\pi}{۶}=\dfrac{a}{۲}\end{array}\right\}\Rightarrow\dfrac{a}{۲}=۲\Rightarrow a=۴$$

متوسط- سراسری- ۱۳۸۶

۸ - گزینه ۲ در حدهای کسری وقتی x به سمت بی‌نهایت میل کند و جواب عدد شود باید بزرگ‌ترین توان x صورت و مخرج باید با هم برابر باشند و دقت کنید چون $n>۳$ است در نتیجه $n-۲>۱$ و جمله‌ی پر توان مخرج حتماً $mx^{n-۲}$ است.

$m+۳=n-۲\Rightarrow m-n=-۵$

پر توان صورت و مخرج $\rightarrow\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{m+۳}}{mx^{n-۲}}=\dfrac{۱}{m}=-۲\Rightarrow m=\dfrac{-۱}{۲}\ ,\ n=\dfrac{۹}{۲}\Rightarrow m+n=۴$

متوسط- سراسری- ۱۳۸۴

۹ - گزینه ۴

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^+}\frac{\cos x}{(۱-\sin x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^+}\frac{\cos x(۱+\sin x)}{۱-\sin^۲ x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^+}\frac{۱+\sin x}{\cos x}=\frac{۲}{۰^-}=-\infty$$

سخت- سراسری- ۱۳۸۹

۱۰ - گزینه ۱

می‌دانیم $\cos ۲a=\cos^۲ a-\sin^۲ a$ است.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\tan x-۱}{\cos ۲x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-۱}{\cos^۲ x-\sin^۲ x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\frac{\sin x-\cos x}{\cos x}}{\cos^۲ x-\sin^۲ x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\sin x-\cos x}{\cos x(\cos^۲ x-\sin^۲ x)}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{-(\cos x-\sin x)}{\cos x(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{-۱}{\cos x(\cos x+\sin x)}=\frac{-۱}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۲})}=-۱$$

متوسط- خارج از کشور- ۱۳۹۱

۱۱ - گزینه ۴

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\frac{۲}{۳}\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{ax^n-۳x+۱}{۳x^۲+x}\overset{\text{پر توان}}{=\!=}\lim_{x\to\infty}\frac{ax^n}{۳x^۲}\overset{n=۲}{=\!=}\lim_{x\to\infty}\frac{ax^۲}{۳x^۲}=\frac{a}{۳}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow a=۲$$

حال با معلوم بودن مقادیر a و n، مقدار $f(-۱)$ را به دست می آوریم. داریم:

$$\xrightarrow[a=۲]{n=۲}f(x)=\frac{۲x^۲-۳x+۱}{۳x^۲+x}\Rightarrow f(-۱)=\frac{۲(-۱)^۲-۳(-۱)+۱}{۳(-۱)^۲+(-۱)}=\frac{۲+۳+۱}{۳-۱}=\frac{۶}{۲}=۳$$

متوسط- خارج از کشور- ۱۳۹۱

۱۲ - گزینه ۳ برای آن که تابع f بر $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، کافی است در نقطه ای به طول $x=۲$ پیوسته باشد. برای این منظور حد راست، حد چپ و مقدار تابع را در ۲ محاسبه کرده و برابر هم قرار می‌دهیم. داریم:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۲^+}f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^+}(ax+b)=۲a+b\\ \lim\limits_{x\to ۲^-}f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^-}(x^۲+bx-۱)=۴+۲b-۱=۲b+۳\Rightarrow ۲b+۳=۵\Rightarrow b=۱\\ f(۲)=۵\end{cases}$$

$۲a+b=۵\Rightarrow ۲a+۱=۵\Rightarrow a=۲$

متوسط- خارج از کشور- ۱۳۹۱

۱۳ - گزینه ۴ برای پیوستگی f در بازه ی $[\frac{\pi}{۴},۲\pi]$ تنها کافی است شرایط پیوستگی را در نقطه‌ی مرزی $x=\frac{۳\pi}{۴}$ اعمال کنیم. (تساوی حد راست و حد چپ و مقدار تابع)

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to(\frac{۳\pi}{۴})^+} f(x)=\lim\limits_{x\to(\frac{۳\pi}{۴})^+}\cos(x+\frac{\pi}{۴})=\cos\pi=-۱ \\ \lim\limits_{x\to(\frac{۳\pi}{۴})^-} f(x)=\lim\limits_{x\to(\frac{۳\pi}{۴})^-} a\sin ۲x=a\sin\frac{۳\pi}{۲}=-a \\ f(\frac{۳\pi}{۴})=\cos(\frac{۳\pi}{۴}+\frac{\pi}{۴})=\cos\pi=-۱ \end{array}\right\}\Rightarrow -a=-۱\Rightarrow a=۱$$

متوسط- خارج از کشور- ۱۳۹۰

۱۴ - گزینه ۳

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=۳\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\frac{۲x-\sqrt{x^۲+۶x}}{ax-۲}$$

$$\overset{\text{پر توان}}{=\!=}\lim_{x\to-\infty}\frac{۲x-|\overbrace{x}^{-}|}{ax}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۲x-(-x)}{ax}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۳x}{ax}=\frac{۳}{a}=۳\Rightarrow a=۱$$

$$\lim_{x\to۲} f(x)=\lim_{x\to۲}\frac{۲x-\sqrt{x^۲+۶x}}{x-۲}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to۲}\frac{۲-\frac{۲x+۶}{۲\sqrt{x^۲+۶x}}}{۱}=\frac{۲-\frac{۵}{۴}}{۱}=\frac{۳}{۴}$$

متوسط- خارج از کشور- ۱۳۸۹

۱۵ - گزینه ۱ می‌دانیم اگر $x=k$ یکی از ریشه‌های تابع $f(x)$ باشد آن‌گاه $f(x)$ بر $x-k$ بخش‌پذیر است.

کافی است شرط پیوستگی (تساوی حد راست و حد چپ و مقدار تابع) را در ۲ $x=$ اعمال کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to۲^+} f(x)=\lim\limits_{x\to۲^+}\frac{x^۳-۳x^۲+۴}{x-۲}=\frac{۰}{۰}\to\lim\limits_{x\to۲^+}\frac{(x-۲)(x^۲-x-۲)}{(x-۲)}=\lim\limits_{x\to۲^+}(x^۲-x-۲)=۰ \\ \lim\limits_{x\to۲^-} f(x)=\lim\limits_{x\to۲^-}(۲x+b)=۴+b \\ f(۲)=۴+b \end{array}\right\}\Rightarrow ۰=۴+b\Rightarrow b=-۴$$

متوسط- خارج از کشور- ۱۳۸۹

۱۶ - گزینه ۲

$$\lim_{x\to۳^-}\frac{(۳-[x])\sqrt{x^۲-۶x+۹}}{x-۳}=\lim_{x\to۳^-}\frac{(۳-\overset{\overset{۲}{\uparrow}}{[۳^-]})\sqrt{(x-۳)^۲}}{x-۳}$$

$$=\lim_{x\to۳^-}\frac{|\overbrace{x-۳}^{-}|}{x-۳}=\lim_{x\to۳^-}\frac{-(x-۳)}{x-۳}=-۱$$

متوسط- سراسری- ۱۳۷۰

۱۷ - گزینه ۲

$$\lim_{x\to۱^+} f(x)=۳\,,\quad \lim_{x\to(-۱)^-} f(x)=۱\Rightarrow \lim_{x\to۱^+} f(x)-\lim_{x\to(-۱)^-} f(x)=۳-۱=۲$$

آسان- سراسری- ۱۳۷۶

۱۸ - گزینه ۱

$$\lim_{x\to۱^-} f(x)=۱$$

تنها گزینه‌ای که جواب آن عدد یک می‌شود گزینه‌ی اول است زیرا برای محاسبه‌ی $f(۰)$ باید سراغ ضابطه‌ی پایین برویم که جواب یک می‌شود.

آسان- سراسری- ۱۳۶۳

۱۹ - گزینه ۳

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^+}\frac{\tan x}{\cot x}=\lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^+}\frac{\tan x}{\frac{۱}{\tan x}}=\lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^+}\tan^۲ x=(-\infty)^۲=+\infty$$

$(\frac{\pi}{۲})^+$ در ناحیه‌ی دوم است و در این ناحیه تانژانت، منفی است.

آسان- سراسری- ۱۳۸۰

۲۰ - گزینه ۱

$$\lim_{x\to-۲^+}\frac{x+\sqrt{x+۲}}{x+۲}=\frac{-۲+۰}{\underbrace{(-۲)^+}_{-۱,۹}+۲}=\frac{-۲}{۰^+}=-\infty$$

آسان- سراسری- ۱۳۶۶

۲۱ - گزینه ۳

برای این که تابع f در نقطه ی مرزی $x=-۱$ پیوسته باشد، باید حد راست، حد چپ و مقدار تابع در این نقطه برابر باشند.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{1}{x+a}=\dfrac{1}{-1+a}=\dfrac{-1}{1-a}\\ \lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^-}(x^2+ax)=(-1)^2+a(-1)=1-a\\ f(-1)=\dfrac{1}{-1+a}=\dfrac{-1}{1-a}\end{array}\right\}\Rightarrow \dfrac{-1}{1-a}=1-a\Rightarrow(1-a)^2=-1\Rightarrow \text{امکان ندارد}$$

آسان- خارج از کشور- ۱۳۸۷

۲۲ - گزینه ۳

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{ax+9}{1-x+\sqrt{x+1}}\overset{\text{پرتوان}}{=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{ax}{-x}=-a=3\Rightarrow a=-3$$

$$\text{پس}:\lim_{x\to3}\frac{-3x+9}{1-x+\sqrt{x+1}}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to3}\frac{-3}{-1+\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}}=\frac{-3}{-1+\dfrac{1}{4}}=\frac{-3}{-\dfrac{3}{4}}=4$$

متوسط- سراسری- ۱۳۹۲

۲۳ - گزینه ۲

روش اول:

$$\lim_{x\to1}\frac{(1-\sqrt{x})}{2-\sqrt{5-x}}=\lim_{x\to1}\frac{(1-x)(2+\sqrt{5-x})}{(4+x-5)(1+\sqrt{x})}=\lim_{x\to1}\frac{2+\sqrt{5-x}}{-(1+\sqrt{x})}=\frac{4}{-2}=-2$$

روش دوم:

$$\lim_{x\to1}\frac{1-\sqrt{x}}{2-\sqrt{5-x}}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to1}\frac{-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{-\dfrac{-1}{2\sqrt{5-x}}}=\frac{-\dfrac{1}{2}}{\dfrac{1}{4}}=-2$$

آسان- خارج از کشور- ۱۳۸۸

۲۴ - گزینه ۱ برای پیوستگی تابع f در بازه‌ی $[0,2\pi]$، تنها کافی است شرایط پیوستگی تابع را در نقطه‌ی مرزی به طول $x=\frac{\pi}{4}$ اعمال کنیم. (تساوی حد راست و حد چپ و مقدار تابع)

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^+} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^+}\sqrt{2}\cos3x=\sqrt{2}\cos\dfrac{3\pi}{4}=\sqrt{2}(-\dfrac{\sqrt{2}}{2})=-1\\ \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^-} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^-}(a+\sin^2x)=a+\sin^2\dfrac{\pi}{4}=a+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=a+\dfrac{1}{2}\\ f(\dfrac{\pi}{4})=\sqrt{2}\cos\dfrac{3\pi}{4}=\sqrt{2}(-\dfrac{\sqrt{2}}{2})=-1\end{array}\right\}\Rightarrow a+\frac{1}{2}=-1\Rightarrow a=-\frac{3}{2}$$

متوسط- خارج از کشور- ۱۳۸۸

۲۵ - گزینه ۱ باید حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x=\frac{\pi}{4}$ باهم برابر باشند.

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{4})^+} f(x)=\lim_{x\to(\frac{\pi}{4})^+} a\cos3x=a\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}a$$

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{4})^-} f(x)=\lim_{x\to(\frac{\pi}{4})^-}\frac{1-\tan^2x}{\cos2x}=\lim_{x\to(\frac{\pi}{4})^-}\frac{\cos^2x-\sin^2x}{\cos^2x(\cos^2x-\sin^2x)}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$$

$$f(\frac{\pi}{4})=a\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}a$$

$$\text{پس}:-\frac{\sqrt{2}}{2}a=2\Rightarrow -a\sqrt{2}=4\Rightarrow a=-\frac{4}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\Rightarrow a=-2\sqrt{2}$$

متوسط- سراسری- ۱۳۹۳

۲۶ - گزینه ۱

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{ax^n+15}{3x-\sqrt{4x^2+15x}}\overset{\text{پرتوان}}{=\!=}\lim_{x\to-\infty}\frac{ax^n}{3x-\sqrt{4x^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{ax^n}{3x-2\underbrace{|x|}_{-}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{ax^n}{5x}$$

چون جواب حد، عدد شده است پس بزرگترین توان x صورت و مخرج با هم برابرند یعنی $n=۱$. پس داریم:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{ax}{۵x}=\frac{a}{۵}=-۱\to a=-۵$$

$$\lim_{x\to ۳}\frac{-۵x+۱۵}{۳x-\sqrt{۴x^۲+۱۵x}}\times\frac{۳x+\sqrt{۴x^۲+۱۵x}}{۳x+\sqrt{۴x^۲+۱۵x}}=\lim_{x\to ۳}\frac{(-۵x+۱۵)(۳x+\sqrt{۴x^۲+۱۵x})}{\underbrace{۹x^۲-۴x^۲-۱۵x}_{۵x^۲-۱۵x}}=\lim_{x\to ۳}\frac{-۵(x-۳)(۳x+\sqrt{۴x^۲+۱۵x})}{۵x(x-۳)}$$

$$=\lim_{x\to ۳}\frac{-(۳x+\sqrt{۴x^۲+۱۵x})}{x}=\frac{-(۹+۹)}{۳}=-۶$$

البته حد را می‌توان از قاعدهٔ هوپیتال نیز محاسبه کرد.

$$\lim_{x\to ۳}f(x)=\lim_{x\to ۳}\frac{-۵x+۱۵}{۳x-\sqrt{۴x^۲+۱۵x}}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to ۳}\frac{-۵}{۳-\frac{۱(۸x+۱۵)}{۲\sqrt{۴x^۲+۱۵x}}}=\frac{-۵}{۳-\frac{۳۹}{۱۸}}=\frac{-۵}{\frac{۱۵}{۱۸}}=-۶$$

متوسط- سراسری ۱۳۹۴

۲۷ - گزینه ۲ چون تابع، بر روی مجموعه اعداد حقیقی بزرگ‌تر از یک پیوسته است پس حتماً در $x=۶$ نیز باید پیوسته باشد. یعنی حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x=۶$ باید با هم برابر باشند.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to ۶^+}f(x)=\lim\limits_{x\to ۶^+}(a+\cos^۲\frac{\pi x}{۳۶})=a+\cos^۲\frac{\pi}{۶}=a+\frac{۳}{۴}\\ \lim\limits_{x\to ۶^-}f(x)=\lim\limits_{x\to ۶^-}\sin\frac{\pi}{x}=\sin\frac{\pi}{۶}=\frac{۱}{۲}\\ f(۶)=\sin\frac{\pi}{۶}=\frac{۱}{۲}\end{array}\right\}\Rightarrow a+\frac{۳}{۴}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow a=\frac{-۱}{۴}$$

متوسط- سراسری ۱۳۹۴

۲۸ - گزینه ۲

$$\lim_{x\to ۲^+}\frac{۲-\sqrt[۳]{x+۶}}{\sqrt{x^۲-۴x+۴}}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۲-\sqrt[۳]{x+۶}}{\sqrt{(x-۲)^۲}}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۲-\sqrt[۳]{x+۶}}{|\underbrace{x-۲}_{+}|}$$

$$=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۲-\sqrt[۳]{x+۶}}{x-۲}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to ۲^+}\frac{-\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{(x+۶)^۲}}}{۱}=-\frac{۱}{۱۲}$$

متوسط- خارج از کشور ۱۳۹۳

۲۹ - گزینه ۲

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x+\sqrt{x^۲-۳x}}{ax^n-۶}\overset{\text{پرتوان}}{=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x+\sqrt{x^۲}}{ax^n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x+|\overbrace{x}^{+}|}{ax^n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۳x}{ax^n}$$

چون جواب حد، عدد شده است پس بزرگترین توان x صورت و مخرج با هم برابرند یعنی $n=۱$ پس داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۳x}{ax}=\frac{۳}{a}=-\frac{۱}{۲}\to a=-۶$$

$$\lim_{x\to -۱}f(x)=\lim_{x\to -۱}\frac{۲x+\sqrt{x^۲-۳x}}{-۶x-۶}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to -۱}\frac{۲+\frac{۱(۲x-۳)}{۲\sqrt{x^۲-۳x}}}{-۶}=\frac{۲-\frac{۵}{۴}}{-۶}=\frac{-۱}{۸}$$

متوسط- خارج از کشور ۱۳۹۴

۳۰ - گزینه ۲ چون نمودار تابع f از نقطه‌ی $(۲,۱)$ می‌گذرد، مختصات آن در ضابطه‌ی تابع f صدق می‌کند، پس داریم:

$$f(۲)=۱\Rightarrow\frac{۲a+۱+\sqrt{۲۵}}{۳(۲)-۲}=۱\Rightarrow\frac{۲a+۶}{۴}=۱\Rightarrow ۲a+۶=۴\Rightarrow ۲a=-۲\Rightarrow a=-۱$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x+۱+\sqrt{۴x^۲+۹}}{۳x-۲}\overset{\text{پرتوان}}{=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{-x+\sqrt{۴x^۲}}{۳x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x+۲|\overbrace{x}^{+}|}{۳x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{۳x}=\frac{۱}{۳}$$

متوسط- سراسری ۱۳۹۱

۳۱ - گزینه ۱ چون هر دو ضابطه پیوسته هستند، برای آنکه تابع دو ضابطه‌ای f روی R (مجموعه‌ی اعداد حقیقی) پیوسته باشد، کافی است شرایط پیوستگی تابع را تنها در نقطه‌ی مرزی آن، یعنی $x=۲$ برقرار نماییم.

$$\begin{cases}\text{حد راست}=\lim\limits_{x\to ۲^+}f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^+}(x^۲+ax-۵)=۴+۲a-۵=۲a-۱\\ \text{حد چپ}=\lim\limits_{x\to ۲^-}f(x)=f(۲)=\lim\limits_{x\to ۲^-}(ax-۱)=۲a-۱\end{cases}$$

چون به ازای هر مقدار a، حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x=۲$ با هم برابر هستند، پس نتیجه می‌گیریم که به ازای هر مقدار حقیقی a، تابع f روی مجموعه‌ی اعداد حقیقی پیوسته است.

آسان- سراسری- ۱۳۹۱

۳۲ - گزینه ۱

روش اول: با ابهام صفر صفرم مواجه هستیم، عبارت را در مزدوج صورت، ضرب و تقسیم می‌کنیم.

$$\lim_{x\to -۱} \frac{۲x+\sqrt{۳-x}}{x^۲+x}\times\frac{۲x-\sqrt{۳-x}}{۲x-\sqrt{۳-x}}=\lim_{x\to -۱}\frac{۴x^۲+x-۳}{x(x+۱)(۲x-\sqrt{۳-x})}$$

$$\xlongequal{\text{صورت را بر } x+۱ \text{ تقسیم می‌کنیم.}}\lim_{x\to -۱}\frac{(x+۱)(۴x-۳)}{x(x+۱)(۲x-\sqrt{۳-x})}=\frac{-۷}{(-۱)(-۴)}=\frac{-۷}{۴}$$

روش دوم:

$$\lim_{x\to -۱}\frac{۲x+\sqrt{۳-x}}{x^۲+x}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to -۱}\frac{۲+\frac{۱(-۱)}{۲\sqrt{۳-x}}}{۲x+۱}=\frac{۲-\frac{۱}{۴}}{-۱}=\frac{-۷}{۴}$$

آسان- قلم چی- ۱۳۹۸

۳۳ - گزینه ۴

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\overbrace{|x^۲-۴|}^{+}}{ax^۲-x+۲}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^۲-۴}{ax^۲-x+۲}\xlongequal{\text{پرتوان}}\lim_{x\to +\infty}\frac{x^۲}{ax^۲}=\frac{۱}{a}=-۱\Rightarrow a=-۱$$

وقتی $x\to(-۲)^+$، $x^۲-۴<۰$ بوده و لذا $|x^۲-۴|=۴-x^۲$ می شود. بنابراین :

$$\lim_{x\to(-۲)^+}\frac{|x^۲-۴|}{ax^۲-x+۲}=\lim_{x\to(-۲)^+}\frac{۴-x^۲}{-x^۲-x+۲}=\lim_{x\to(-۲)^+}\frac{-(x-۲)(x+۲)}{-(x+۲)(x-۱)}=\frac{۴}{۳}$$

دقت کنید $(-۲)^+$ را حدوداً $-۱٫۹۹$ در نظر می گیریم.

متوسط- خارج از کشور- ۱۳۹۰

۳۴ - گزینه ۲

$$\lim_{x\to +\infty}f(x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{ax+\sqrt{۴x^۲+۵}}{۲x+۲}\xlongequal{\text{پرتوان}}\lim_{x\to +\infty}\frac{ax+\sqrt{۴x^۲}}{۲x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{ax+۲|\overbrace{x}^{+}|}{۲x}$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{ax+۲x}{۲x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{(a+۲)x}{۲x}=\frac{a+۲}{۲}=\frac{۵}{۲}\to a=۳$$

$$\lim_{x\to -۱}\frac{۳x+\sqrt{۴x^۲+۵}}{۲x+۲}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to -۱}\frac{۳+\frac{۱(۸x)}{۲\sqrt{۴x^۲+۵}}}{۲}=\frac{۳-\frac{۸}{۶}}{۲}=\frac{\frac{۱۰}{۶}}{\frac{۲}{۱}}=\frac{۱۰}{۱۲}=\frac{۵}{۶}$$

متوسط- سراسری- ۱۳۹۵

۳۵ - گزینه ۱

شرط پیوستگی یک تابع در نقطه‌ای به طول $x=a$ آن است که حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x=a$ با هم برابر باشند.

$$\lim_{x\to ۰}f(x)=\lim_{x\to ۰}\frac{\cos x-\sqrt{\cos x}}{\sin^۲ x}=\lim_{x\to ۰}\frac{\cos x-\sqrt{\cos x}}{۱-\cos^۲ x}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{\cos x}(\sqrt{\cos x}-۱)}{(۱-\cos x)(۱+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{\cos x}(\sqrt{\cos x}-۱)}{(۱-\sqrt{\cos x})(۱+\sqrt{\cos x})(۱+\cos x)}=-\frac{۱}{۲\times ۲}=-\frac{۱}{۴}$$

بنابراین $f(۰)=a=-\frac{۱}{۴}$ است.

متوسط- سراسری- ۱۳۹۵

۳۶ - گزینه ۱

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x-\sqrt{۴x^۲+۹x}}{۳x+\sqrt{x}}\xlongequal{\text{پرتوان}}\lim_{x\to +\infty}\frac{x-\sqrt{۴x^۲}}{۳x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x-۲|\overbrace{x}^{+}|}{۳x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x-۲x}{۳x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{-x}{۳x}=\frac{-۱}{۳}$$

آسان- خارج از کشور- ۱۳۸۶

۳۱ - گزینه ۴

$$\lim_{x\to(-۲)^-}f(x)=\lim_{x\to(-۲)^+}\frac{۱}{f(x)}\to ۴+a=\frac{۱}{-۶+۴}\to ۴+a=\frac{-۱}{۲}$$

$$\to ۸+۲a=-۱\to ۲a=-۹\to a=-\frac{۹}{۲}=-۴٫۵$$

آسان- خارج از کشور- ۱۳۸۴

۳۸ - گزینه ۴

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\sqrt{\cos x})}{(1-\cos x)(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\sqrt{\cos x})}{(1-\sqrt{\cos x})(1+\sqrt{\cos x})(1+\cos x)}=\frac{1}{2\times 2}=\frac{1}{4}$$

متوسط- خارج از کشور- ۱۳۸۴

۳۹ - گزینه ۱ ابتدا $f(x)+g(x)$ را تشکیل می‌دهیم و سپس شرط پیوستگی (یعنی تساوی حد راست و حد چپ و مقدار تابع) را در $x=1$ اعمال می‌کنیم.

$$f(x)+g(x)=\begin{cases}2x+a+1 & x<1\\ \frac{a}{x+1}+1 & x\ge 1\end{cases}$$

حد راست: $\lim_{x\to 1^+}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to 1^+}(\frac{a}{x+1}+1)=\frac{a}{2}+1$

حد چپ: $\lim_{x\to 1^-}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to 1^-}(2x+a+1)=2+a+1=a+3$

مقدار تابع: $(f+g)(1)=\frac{a}{2}+1$

پس: $\frac{a}{2}+1=a+3\to a+2=2a+6\to a=-4$

متوسط- خارج از کشور- ۱۳۸۴

۴۰ - گزینه ۱ کافی است شرط پیوستگی یعنی تساوی حدود راست و چپ و مقدار تابع با هم را در $x=1$ بررسی کنیم.

$$\begin{cases}\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}(-x^2+4)=-1+4=3\\ \lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}(ax+5x-a)=a+5-a=5\\ f(1)=-1+4=3\end{cases}$$

تابع f در $x=1$ پیوسته نمی‌باشد. بنابراین به ازای هیچ مقداری برای a تابع f در بازه‌ی $[-2,2]$ پیوسته نمی‌باشد.

آسان- سراسری- ۱۳۸۴

۴۱ - گزینه ۴ کافی است شرط پیوستگی را در $x=\frac{\pi}{2}$ بررسی کنید (تساوی حد راست و چپ و مقدار تابع در $x=\frac{\pi}{2}$)

$$\begin{cases}\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^+}f(x)=\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^+}b\cos 2x=b\cos\pi=-b\\ \lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}f(x)=\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}(a+\sin 3x)=a+\sin\frac{3\pi}{2}=a-1\\ f(\frac{\pi}{2})=2\end{cases}$$

پس: $-b=2\to b=-2\ ,\ a-1=2\to a=3\to a-b=5$

متوسط- سراسری- ۱۳۸۹

۴۲ - گزینه ۴ روش اول: تابع به فرم $y=[f(x)]$ در نقاطی که داخل جزء صحیح مقداری صحیح شود و به شرط آنکه این نقطه طول Min نسبی پیوسته تابع f نباشد ناپیوسته است.

$$0\le x\le\frac{1}{2}\to 0\le\pi x\le\frac{\pi}{2}\to 0\le\sin^2\pi x\le 1\to 0\le 4\sin^2\pi x\le 4$$

$$4\sin^2\pi x=0\to\sin\pi x=0\to\pi x=0\to x=0$$

$$4\sin^2\pi x=1\to\sin^2\pi x=\frac{1}{4}=\sin^2\frac{\pi}{6}\to\pi x=\frac{\pi}{6}\to x=\frac{1}{6}$$

$$4\sin^2\pi x=2\to\sin^2\pi x=\frac{1}{2}=\sin^2\frac{\pi}{4}\to\pi x=\frac{\pi}{4}\to x=\frac{1}{4}$$

$$4\sin^2\pi x=3\to\sin^2\pi x=\frac{3}{4}=\sin^2\frac{\pi}{3}\to\pi x=\frac{\pi}{3}\to x=\frac{1}{3}$$

$$4\sin^2\pi x=4\to\sin^2\pi x=1=\sin^2\frac{\pi}{2}\to\pi x=\frac{\pi}{2}\to x=\frac{1}{2}$$

ابتدای بازه‌ی بسته پیوستگی راست و انتهای بازه‌ی بسته پیوستگی چپ اگر برقرار باشد نقطه، نقطه‌ی ناپیوستگی نمی‌باشد. تابع در $x=0$ پیوستگی راست دارد پس $x=0$ نقطه‌ی ناپیوستگی نمی‌باشد و تابع در $x=\frac{1}{2}$ پیوستگی چپ ندارد پس نقطه‌ی ناپیوستگی محسوب می‌شود بنابراین مجموعه نقاط ناپیوستگی تابع به‌صورت $\{\frac{1}{6},\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{1}{2}\}$ است.

سخت- خارج از کشور- ۱۳۸۹

۴۲ - گزینه ۴ شرط اینکه تابع f در $x=a$ پیوسته باشد آن است که حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x=a$ موجود و متناهی و باهم برابر باشند.

راه حل اول:

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-\sqrt{1-x}}\times\frac{1+\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x\times(1+\sqrt{1-x})}{1-(1-x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}\times(1+\sqrt{1-x})}{\cancel{x})}=\lim_{x\to 0}1+\sqrt{1-x}=2$$

به علاوه $f(0)=a$ در نتیجه $a=2$.

راه حل دوم:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-\sqrt{1-x}}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 0}\frac{1}{-\frac{1(-1)}{2\sqrt{1-x}}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$$

$$f(0)=a$$

پس $a=2$ است.

آسان- سراسری- ۱۳۹۶

۴۴ - گزینه ۳ شرط پیوسته بودن تابع در نقطه‌ای به طول $x=a$ آن است که حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x=a$ موجود و متناهی و باهم برابر باشند.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{x-\sqrt{x}}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{x(\sqrt{x}-1)}=2$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(ax-a+2)=a-a+2=2$$

$$f(1)=a-a+2=2$$

بنابراین به ازای هر مقدار a، تابع در $x=1$ پیوسته است.

آسان- خارج از کشور- ۱۳۹۶

۴۵ - گزینه ۱

روش اول: با ابهام $\frac{0}{0}$ مواجه هستیم، برای رفع ابهام صورت را بر $x-4$ تقسیم می‌کنیم و عبارت را در مزدوج مخرج، ضرب و تقسیم می‌کنیم.

$$\lim_{x\to 4}\frac{3x^2-10x-8}{\sqrt{3-\sqrt{x}}-1}=\lim_{x\to 4}\frac{3x^2-10x-8}{\sqrt{3-\sqrt{x}}-1}\times\frac{\sqrt{3-\sqrt{x}}+1}{\sqrt{3-\sqrt{x}}+1}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(3x+2)(\sqrt{3-\sqrt{x}}+1)}{3-\sqrt{x}-1}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)(3x+2)(\sqrt{3-\sqrt{x}}+1)}{-(\sqrt{x}-2)}=-(4)(14)(2)=-112$$

روش دوم:

$$\lim_{x\to 4}\frac{3x^2-10x-8}{\sqrt{3-\sqrt{x}}-1}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 4}\frac{6x-10}{\frac{\frac{-1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{3-\sqrt{x}}}}=\frac{14}{\frac{-\frac{1}{4}}{2}}=\frac{14}{-\frac{1}{8}}=-112$$

متوسط- سراسری- ۱۳۹۷

۴۶ - گزینه ۲ شرط پیوستگی تابع f در $x=a$ آن است که حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x=a$ موجود و متناهی با هم برابر باشند.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}(a\log_2^{1+x})=a\log_2^4=a\log_2^{2^2}=2a\\ \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}(ax+2^{x-3})=3a+1\\ f(3)=a\log_2^4=a\log_2^{2^2}=2\end{array}\right\}\to 3a+1=2a\to a=-1$$

$$\text{پس}: f(2)\overset{y\ \text{ضابطه‌ی بالا}}{=\!=\!=}2a+2^{-1}=-2+\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}=-1.5$$

متوسط- سراسری- ۱۳۹۷

۴۷ - گزینه ۳

روش اول: مخرج کسر را گویا می‌کنیم:

$$\lim_{x\to -1}\frac{2x^2+5x+3}{2-\sqrt{2+\sqrt{3-x}}}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(2x+3)(2+\sqrt{2+\sqrt{3-x}})}{(4-2-\sqrt{3-x})}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(1)(4)(2+\sqrt{3-x})}{(2-\sqrt{3-x})(2+\sqrt{3-x})}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(1)(4)(4)}{(4-3+x)}=16$$

روش دوم: با استفاده از هوپیتال:

$$\lim_{x\to -1}\frac{2x^2+5x+3}{2-\sqrt{2+\sqrt{3-x}}}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to -1}\frac{4x+5}{-\frac{\frac{-1}{2\sqrt{3-x}}}{2\sqrt{2+\sqrt{3-x}}}}=\frac{1}{\frac{\frac{1}{4}}{4}}=\frac{1}{\frac{1}{16}}=16$$

متوسط- خارج از کشور- ۱۳۹۷

۴۸ - گزینه ۳

شرط اینکه تابع f در $x=a$ پیوسته باشد آن است که حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x=a$ موجود و متناهی و باهم برابر باشند.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = \lim_{x\to 1^+} (x^2 + ax) = 1 + a$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \sqrt{ax+3} = \sqrt{a+3} \to \sqrt{a+3} = 1 + a \xrightarrow{\text{توان ۲}} a + 3 = a^2 + a + 2a$$

$$a^2 + a - 2 = 0 \to (a+2)(a-1) = 0 \to \begin{cases} a = -2 \ \text{غ ق ق} \\ a = 1 \end{cases}$$

پس: $f(\frac{-3}{4}) = \sqrt{-\frac{3}{4}a + 3} = \sqrt{-\frac{3}{4} + 3} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} = 1/5$

آسان- خارج از کشور- ۱۳۹۷

۴۹ - گزینه ۱ روش اول: عبارت را در مزدوج صورت، ضرب و تقسیم می‌کنیم.

$$\lim_{x\to -2} \frac{x+\sqrt{2x+8}}{x+2} = \lim_{x\to -2} \frac{(x+\sqrt{2x+8})(x-\sqrt{2x+8})}{(x+2)(x-\sqrt{2x+8})}$$

$$= \lim_{x\to -2} \frac{x^2 - 2x - 8}{(x+2)(x-\sqrt{2x+8})} = \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)(x-4)}{(x+2)(x-\sqrt{2x+8})} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}$$

روش دوم:

$$\lim_{x\to -2} \frac{x+\sqrt{2x+8}}{x+2} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x\to -2} \frac{1 + \frac{2}{2\sqrt{2x+8}}}{1} = \frac{1+\frac{1}{2}}{1} = \frac{3}{2}$$

متوسط- سراسری- ۱۳۷۹

۵۰ - گزینه ۳ روش اول: عبارت را در مزدوج صورت و مخرج، ضرب و تقسیم می‌کنیم.

$$\lim_{x\to 4} \frac{3-\sqrt{2x+1}}{2-\sqrt{x}} = \lim_{x\to 4} \frac{(3-\sqrt{2x+1})(3+\sqrt{2x+1})(2+\sqrt{x})}{(2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})(3+\sqrt{2x+1})}$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{(9-2x-1)(2+\sqrt{x})}{(4-x)(3+\sqrt{2x+1})} = \lim_{x\to 4} \frac{-2(x-4)(2+\sqrt{x})}{-(x-4)(3+\sqrt{2x+1})} = \frac{2\times 4}{3+3} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

روش دوم:

$$\lim_{x\to 4} \frac{3-\sqrt{2x+1}}{2-\sqrt{x}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x\to 4} \frac{\frac{-2}{2\sqrt{2x+1}}}{-\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \frac{\frac{-2}{6}}{\frac{-1}{4}} = \frac{4}{3}$$

متوسط- سراسری- ۱۳۸۱

۵۱ - گزینه ۴

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2x^2-x-1}{\underbrace{|x-1|}_{+}} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2x^2-x-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{(x-1)(2x+1)}{(x-1)} = 3 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{2x^2-x-1}{\underbrace{|x-1|}_{-}} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{2x^2-x-1}{-(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{(x-1)(2x+1)}{-(x-1)} = -3 \end{array}\right\} \Rightarrow |-3-(3)| = |-6| = 6$$

متوسط- سراسری- ۱۳۷۷

۵۲ - گزینه ۴

$$\lim_{x\to -3} \frac{ax+3a}{1-\sqrt{5x+16}} = \lim_{x\to -3} \frac{a(x+3)(1+\sqrt{5x+16})}{(1-\sqrt{5x+16})(1+\sqrt{5x+16})}$$

$$\lim_{x\to -3} \frac{a(x+3)(2)}{-5(x+3)} = \frac{2a}{-5} = 2 \Rightarrow 2a = -10 \Rightarrow a = -5$$

سخت- سراسری- ۱۳۷۸

۵۲ - گزینه ۱

$$\lim_{x\to \frac{3\pi}{4}} \frac{1+\cot x}{1+\tan x} = \lim_{x\to \frac{3\pi}{4}} \frac{1+\frac{1}{\tan x}}{1+\tan x} = \lim_{x\to \frac{3\pi}{4}} \frac{(1+\tan x)}{\tan x(1+\tan x)} = \frac{1}{-1} = -1$$

توجه کنید که $\tan\frac{3\pi}{4}=\cot\frac{3\pi}{4}=-1$ است.

متوسط- سراسری- ۱۳۸۲

۵۴ - گزینه ۱ کافی است حد چپ تابع در $x=-2$ و مقدار تابع در $x=-2$ با هم برابر باشند.

$$\lim_{x\to(-2)^-} f(x)=\lim_{x\to(-2)^-}\frac{8+x^3}{\underbrace{|x+2|}_{-}}=\lim_{x\to(-2)^-}\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{-(x+2)}=-12$$

درضمن $f(-2)=a$ است پس $a=-12$ است.

آسان- سراسری- ۱۳۹۸

۵۵ - گزینه ۳ روش اول:

با ابهام $\frac{0}{0}$ مواجه هستیم که برای رفع ابهام از اتحاد چاق‌ولاغر کمک می‌گیریم $\left((a+b)(a^2+b^2-ab)=a^3+b^3\right)$

$$\lim_{x\to-8}\frac{x^2+10x+16}{6(2+\sqrt[3]{x})}\times\frac{4+\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}}{4+\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to-8}\frac{(x+8)(x+2)(4+\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x})}{6(8+x)}$$

$$=\lim_{x\to-8}\frac{(x+2)(4+\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x})}{6}=\frac{-6(12)}{6}=-12$$

روش دوم:

از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x\to-8}\frac{x^2+10x+16}{12+6\sqrt[3]{x}}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to-8}\frac{2x+10}{6(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}})}=\frac{-6}{6(\frac{1}{12})}=-12$$

متوسط- سراسری- ۱۳۹۸

۵۶ - گزینه ۴ گزینهٔ چهارم صحیح است زیرا:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{x^2-1}{x+\underbrace{|x|}_{+}}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^2-1}{x+x}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^2-1}{2x}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

توجه کنید تابع در همسایگی چپ صفر، تعریف نمی‌شود زیرا مخرج به‌صورت $x-x$ یعنی صفر مطلق می‌شود.

آسان- سراسری- ۱۳۹۸

۵۷ - گزینه ۳ حد داده‌شده دارای ابهام $\infty-\infty$ است که از کتاب درسی حذف شده است و متأسفانه طراحان بدون توجه به کتاب درسی این سؤال را طرح کرده‌اند، برای رفع ابهام، عبارت را در مزدوجش ضرب و تقسیم کرده و پس از استفاده از اتحاد مزدوج از صورت و مخرج جملات با توان بیشتر را انتخاب کنید.

$$\lim_{x\to-\infty}(2x+\sqrt{4x^2+x})\times\frac{2x-\sqrt{4x^2+x}}{2x-\sqrt{4x^2+x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2-4x^2-x}{2x-\sqrt{4x^2+x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{2x-2\underbrace{|x|}_{-}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{4x}=-\frac{1}{4}$$

متوسط- سراسری- ۱۳۹۸

۵۸ - گزینه ۲

هرگاه x به سمت عددی میل کند که به موجب آن جواب حد یک نوع بی‌نهایت شود (مثلاً فقط $-\infty$) آن عدد ریشهٔ مضاعف مخرج است. یعنی $x=2$ ریشهٔ مضاعف مخرج است. بنابراین:

$$x^2+ax+b=(x-2)^2=x^2-4x+4\Rightarrow a=-4\ ,\ b=4$$

درنتیجه داریم:

$$a+b=-4+4=0$$

آسان- سراسری- ۱۳۹۸

۵۹ - گزینه ۱ در صورتی بازه برای یک عدد همسایگی محسوب می‌شود که آن عدد درون بازه باشد.

پس:

$$x+1<3<2x-1\Rightarrow\begin{cases}x+1<3\to x<2\\2x-1>3\to x>2\end{cases}\xrightarrow{\text{اشتراک}}\varnothing$$

آسان- سراسری- ۱۳۹۸

۶۰ - گزینه ۲

$$\lim_{x\to1^+}\frac{\sin^2\pi x}{[x]+\cos\pi x}=\lim_{x\to1^+}\frac{1-\cos^2\pi x}{1+\cos\pi x}=\lim_{x\to1^+}\frac{(1-\cos\pi x)(1+\cos\pi x)}{1+\cos\pi x}$$

$$\lim_{x\to1^+}(1-\cos\pi x)=1-\cos\pi=1-(-1)=2$$

آسان- خارج از کشور- ۱۳۹۸

۶۱ - گزینه ۴ کافی است که حد راست و حد چپ و مقدار تابع را در $x=2$ محاسبه کنیم.

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x) = \lim_{x\to ۲^+} \frac{x^۲ - ۴}{۲\underbrace{|x-۲|}_{+}} = \lim_{x\to ۲^+} \frac{(x+۲)(x-۲)}{۲(x-۲)} = \frac{۴}{۲} = ۲$$

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x) = \lim_{x\to ۲^-} \frac{x^۲ - ۴}{۲\underbrace{|x-۲|}_{-}} = \lim_{x\to ۲^-} \frac{(x+۲)(x-۲)}{-۲(x-۲)} = \frac{۴}{-۲} = -۲$$

$$f(۲) = ۲$$

بنابراین تابع در $x = ۲$ از راست پیوسته است.

آسان- خارج از کشور- ۱۳۹۸

۶۲ - گزینه ۴ روش اول:

با ابهام $\frac{۰}{۰}$ مواجه هستیم که برای رفع ابهام از اتحاد چاق‌ولاغر کمک می‌گیریم $\Big((a-b)(a^۲+b^۲+ab) = a^۳ - b^۳\Big)$ و مخرج را بر عامل ابهام یعنی $x - ۲$ تقسیم می‌کنیم.

$$\lim_{x\to ۲} \frac{۲ - \sqrt[۳]{۳x+۲}}{۵x^۲ - ۱۸x + ۱۶} \times \frac{۴ + \sqrt[۳]{(۳x+۲)^۲} + ۲\sqrt[۳]{۳x+۲}}{۴ + \sqrt[۳]{(۳x+۲)^۲} + ۲\sqrt[۳]{۳x+۲}} = \lim_{x\to ۲} \frac{\overbrace{۸ - (۳x+۲)}^{-۳x+۶}}{(x-۲)(۵x-۸)(۴ + \sqrt[۳]{(۳x+۲)^۲} + ۲\sqrt[۳]{۳x+۲})}$$

$$= \lim_{x\to ۲} \frac{-۳(x-۲)}{(x-۲)(۵x-۸)(۴ + \sqrt[۳]{(۳x+۲)^۲} + ۲\sqrt[۳]{۳x+۲})} = \lim_{x\to ۲} \frac{-۳}{(۵x-۸)(۴ + \sqrt[۳]{(۳x+۲)^۲} + ۲\sqrt[۳]{۳x+۲})}$$

$$= \frac{-۳}{(۲)(۴+۴+۴)} = \frac{-۳}{۲۴} = \frac{-۱}{۸}$$

روش دوم:

از قاعدهٔ هوپیتال کمک می‌گیریم.

$$\lim_{x\to ۲} \frac{۲ - \sqrt[۳]{۳x+۲}}{۵x^۲ - ۱۸x + ۱۶} = \frac{۰}{۰} \xrightarrow{HOP} \lim_{x\to ۲} \frac{\frac{-۳}{۳\sqrt[۳]{(۳x+۲)^۲}}}{۱۰x - ۱۸} = \frac{\frac{-۱}{۴}}{۲} = \frac{-۱}{۸}$$

متوسط- خارج از کشور- ۱۳۹۸

۶۳ - گزینه ۱ به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم.

گزینهٔ اول : $\lim_{x\to (\frac{۲\pi}{۳})^+} \frac{\sin x}{۱ + ۲\cos x} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۱ + ۲(\frac{-۱}{۲})^-} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۰^-} = -\infty$: درست

گزینهٔ سوم : $\lim_{x\to (\frac{۲\pi}{۳})^-} \frac{\sin x}{۱ + ۲\cos x} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۱ + ۲(\frac{-۱}{۲})^+} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۰^+} = +\infty$: نادرست

گزینهٔ چهارم : $\lim_{x\to \frac{۴\pi}{۳}} \frac{\sin x}{۱ + ۲\cos x}$ $\begin{cases} \lim_{x\to (\frac{۴\pi}{۳})^+} \frac{\sin x}{۱ + ۲\cos x} = \frac{-\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۱ + ۲(-\frac{۱}{۲})^+} = \frac{-\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۰^+} = -\infty \\ \lim_{x\to (\frac{۴\pi}{۳})^-} \frac{\sin x}{۱ + ۲\cos x} = \frac{-\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۱ + ۲(-\frac{۱}{۲})^-} = \frac{-\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۰^-} = +\infty \end{cases}$ $\rightarrow$ نادرست

توجه کنید:

$$\sin \frac{۲\pi}{۳} = \sin(\pi - \frac{\pi}{۳}) = \sin \frac{\pi}{۳} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\cos\frac{۲\pi}{۳}=\cos(\pi-\frac{\pi}{۳})=-\cos\frac{\pi}{۳}=-\frac{۱}{۲}\to\begin{cases}\cos(\frac{۲\pi}{۳})^+=(-\frac{۱}{۲})^-\\ \cos(\frac{۲\pi}{۳})^-=(-\frac{۱}{۲})^+\end{cases}$$

$$\sin\frac{۴\pi}{۳}=\sin(\pi+\frac{\pi}{۳})=-\sin\frac{\pi}{۳}=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\cos\frac{۴\pi}{۳}=\cos(\pi+\frac{\pi}{۳})=-\cos\frac{\pi}{۳}=-\frac{۱}{۲}\to\begin{cases}\cos(\frac{۴\pi}{۳})^+=(\frac{-۱}{۲})^+\\ \cos(\frac{۴\pi}{۳})^-=(\frac{-۱}{۲})^-\end{cases}$$

متوسط - خارج از کشور - ۱۳۹۸

۶۴ - گزینه ۴

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-\sqrt{۴x^۲+x}}{x}\overset{\text{توان بیشتر}}{=\!=}\lim_{x\to-\infty}\frac{x-\sqrt{۴x^۲}}{x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-۲|\overbrace{x}^{-}|}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+۲x}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۳x}{x}=۳$$

آسان - خارج از کشور - ۱۳۹۸

۶۵ - گزینه ۳ شرط اینکه تابع f در $x=a$ پیوسته باشد آن است که حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x=a$ موجود و متناهی و با هم برابر باشند.

$$\lim_{x\to۲^+}f(x)=\lim_{x\to۲^+}\frac{۳x-۶}{x-\sqrt{x+۲}}\times\frac{x+\sqrt{x+۲}}{x+\sqrt{x+۲}}=\lim_{x\to۲^+}\frac{(۳x-۶)(x+\sqrt{x+۲})}{x^۲-x-۲}$$

$$=\lim_{x\to۲^+}\frac{۳(x-۲)(x+\sqrt{x+۲})}{(x-۲)(x+۱)}=\frac{۳(۴)}{۳}=۴$$

$$\lim_{x\to۲^-}f(x)=f(۲)=۲a-۱\to۲a-۱=۴\to۲a=۵\to a=\frac{۵}{۲}=۲{,}۵$$

البته توجه کنید که حد راست تابع را می‌توان با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال نیز به‌دست آورد.

$$\lim_{x\to۲^+}\frac{۳x-۶}{x-\sqrt{x+۲}}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to۲^+}\frac{۳}{۱-\frac{۱(۱)}{۲\sqrt{x+۲}}}=\frac{۳}{۱-\frac{۱}{۴}}=\frac{۳}{\frac{۳}{۴}}=۴$$

متوسط - سراسری - ۱۳۹۸

۶۶ - گزینه ۳ شرط پیوسته بودن تابع f در $x=a$ آن است که حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x=a$ موجود و متناهی و با هم برابر باشند.

$$f(x)=\begin{cases}x[x] & -۱<x<۱\\ ax+b & x\geq۱ \text{ یا } x\leq-۱\end{cases}$$

چون تابع بر روی $\mathbb{R}$ پیوسته است پس حتما در $x=۱$ و $x=-۱$ نیز پیوسته است.

$$x=۱\begin{cases}\lim\limits_{x\to۱^+}f(x)=\lim\limits_{x\to۱^+}(ax+b)=a+b\\ \lim\limits_{x\to۱^-}f(x)=\lim\limits_{x\to۱^-}x[x]=۱\times۰=۰\quad\to a+b=۰\quad(I)\\ f(۱)=a+b\end{cases}$$

$$x=-۱\begin{cases}\lim\limits_{x\to(-۱)^+}f(x)=\lim\limits_{x\to(-۱)^+}x[x]=-۱[(-۱)^+]=۱\\ \lim\limits_{x\to(-۱)^-}f(x)=\lim\limits_{x\to(-۱)^-}(ax+b)=-a+b\quad\to-a+b=۱\quad(II)\\ f(-۱)=-a+b\end{cases}$$

از I و II نتیجه می‌شود که $b=\frac{۱}{۲}$ و $a=-\frac{۱}{۲}$ است.

متوسط - خارج از کشور - ۱۳۹۸

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۱	۱۱ - ۴	۲۱ - ۳	۳۱ - ۱	۴۱ - ۴	۵۱ - ۴	۶۱ - ۴
۲ - ۳	۱۲ - ۳	۲۲ - ۳	۳۲ - ۱	۴۲ - ۴	۵۲ - ۴	۶۲ - ۴
۳ - ۱	۱۳ - ۴	۲۳ - ۲	۳۳ - ۴	۴۳ - ۴	۵۳ - ۱	۶۳ - ۱
۴ - ۴	۱۴ - ۳	۲۴ - ۱	۳۴ - ۲	۴۴ - ۳	۵۴ - ۱	۶۴ - ۴
۵ - ۴	۱۵ - ۱	۲۵ - ۱	۳۵ - ۱	۴۵ - ۱	۵۵ - ۳	۶۵ - ۳
۶ - ۴	۱۶ - ۲	۲۶ - ۱	۳۶ - ۱	۴۶ - ۲	۵۶ - ۴	۶۶ - ۳
۷ - ۲	۱۷ - ۲	۲۷ - ۲	۳۷ - ۴	۴۷ - ۳	۵۷ - ۳	
۸ - ۲	۱۸ - ۱	۲۸ - ۲	۳۸ - ۴	۴۸ - ۳	۵۸ - ۲	
۹ - ۴	۱۹ - ۳	۲۹ - ۲	۳۹ - ۱	۴۹ - ۱	۵۹ - ۱	
۱۰ - ۱	۲۰ - ۱	۳۰ - ۲	۴۰ - ۱	۵۰ - ۳	۶۰ - ۲	

@LazyKonKori