@Lazykonkor

لیزی کنکور

@Lazykonkor

۱ در یک همایش ۵ نفر جهت سخنرانی ثبت‌نام کرده‌اند. چند طریق ترتیب سخنرانی برای آنان وجود دارد، به طوری که بین سخنرانی دو نفر موردنظر a و b از آنان فقط یک نفر سخنرانی کند؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۴

۳) ۳۶ ۴) ۴۰

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۷

۲ ارقام ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ را به طریقی کنار هم قرار داده‌ایم که همواره رقم‌های فرد کنار هم باشند. تعداد پنج رقمی های حاصل کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۲۴

۳) ۳۶ ۴) ۴۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۲

۳ چند عدد چهاررقمی با ارقام متمایز و فرد، بزرگ تر از ۳۰۰۰ وجود دارد؟

۱) ۷۲ ۲) ۸۴

۳) ۹۶ ۴) ۱۰۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۴ حروف کلمهٔ $LAGRANGE$ را با جایگشت‌های مختلف کنار هم قرار می‌دهیم. در چند حالت حروف یکسان کنار هم قرار می‌گیرند؟

۱) ۳۶۰ ۲) ۵۴۰

۳) ۷۲۰ ۴) ۱۴۴۰

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۴

۵ تعداد جایگشت‌های حروف کلمهٔ $SYSTEM$ به طوری که S ها کنار هم نباشند کدام است؟

۱) ۱۸۰ ۲) ۲۱۶

۳) ۲۴۰ ۴) ۳۶۰

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۶ اگر $۲۶ = \frac{P(n,۴)}{C(n-۱,۴)}$ ، مقدار n کدام است؟

۱) ۵۲ ۲) ۵۳

۳) ۵۴ ۴) ۵۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

۷ تعداد زیرمجموعه‌های سه عضوی از مجموعهٔ $\{a,b,c,d,e,f\}$ شامل عضو a کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۰

۳) ۱۲ ۴) ۱۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

۸ از هریک از مدارس A، B، C، D و E چهار نفر به اردوگاه دانش‌آموزی دعوت شده‌اند. به چند طریق می‌توان سه دانش‌آموز که دو به دو غیر هم مدرسه باشند، انتخاب کرد؟

۱) ۱۲۰
۲) ۳۲۰
۳) ۴۸۰
۴) ۶۴۰

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

۹ از هریک از ۶ منطقهٔ کشوری ۱۵ دانش‌آموز به یک اردوگاه فرهنگی دعوت شده‌اند. به چند طریق می‌توان ۳ دانش‌آموز از بین آن‌ها که دو به دو غیر هم منطقه‌ای هستند انتخاب نمود؟

۱) ۵۷۶۰۰
۲) ۶۷۵۰۰
۳) ۷۵۶۰۰
۴) ۷۶۵۰۰

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

۱۰ از هریک از ۸ مدرسهٔ علاقمند، ۶ نفر برای بازی تنیس چهار نفری (۲ نفر در مقابل ۲ نفر) انتخاب شده‌اند. به چند طریق این بازی ممکن است انجام شود به طوری که هر دو نفر همیار هم، از یک مدرسه باشند؟
(بازی بین مدارس مختلف انجام می‌شود)

۱) ۴۲۰۰
۲) ۵۴۰۰
۳) ۵۶۰۰
۴) ۶۳۰۰

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۱۱ از ده پرسش موجود، به چند طریق می‌توان ۸ پرسش را جهت پاسخگویی انتخاب کرد به شرط آن که حداقل ۴ پرسش از ۵ پرسش اول انتخاب شود؟

۱) ۲۵
۲) ۳۲
۳) ۳۰
۴) ۳۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

۱۲ از بین ۵ دانش‌آموز تجربی و ۳ دانش‌آموز ریاضی، به چند طریق می‌توان ۳ نفر را برای کار در آزمایشگاه انتخاب کرد به‌طوری که لااقل ۲ نفر از آن‌ها دانش‌آموز تجربی باشند؟

۱) ۲۵
۲) ۳۰
۳) ۳۵
۴) ۴۰

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

۱۳ با ارقام ۹ و ... و ۳ و ۲ و ۱ به چند طریق می‌توان یک عدد پنج‌رقمی ساخت به‌طوری که درست دو رقم آن زوج باشد؟

۱) ۶۴۰۰
۲) ۷۲۰۰
۳) ۸۴۰۰
۴) ۹۶۰۰

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۴

۱۴ با جابه جایی ارقام عدد ۵۷۶۲۲۲ چند عدد شش رقمی می‌توان تشکیل داد به‌طوری که رقم‌های ۲ ، یک‌درمیان قرار بگیرند؟

۱) ۹ ۲) ۱۲
۳) ۱۸ ۴) ۲۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۹

۱۵ بر روی یک دایره ۸ نقطهٔ متمایز وجود دارد. تعداد چهارضلعی‌های محدّب که هر رأس یک چهارضلعی واقع بر نقاط مفروض باشد، کدام است؟

۱) ۵۶ ۲) ۶۸
۳) ۷۰ ۴) ۶۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۰

۱۶ با ارقام ۹ و ۷ و ۵ و ۳ و ۱ چند عدد سه‌رقمی با شرط "رقم یکان > رقم دهگان > رقم صدگان " می‌توان نوشت؟

۱) ۸ ۲) ۹
۳) ۱۰ ۴) ۱۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

۱۷ با ارقام متمایز $۱,۲,۳,۴,\ldots,۹$ به چند طریق می‌توان یک عدد چهاررقمی ساخت، به‌طوری‌که فقط یکی از ارقام آن زوج باشد؟

۱) ۶۴۰ ۲) ۷۲۰
۳) ۷۸۰ ۴) ۹۶۰

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

۱۸ در ظرفی ۴ مهره آبی، ۳ مهره قرمز و ۲ مهره سفید موجود است. به تصادف ۳ مهره از ظرف خارج می‌کنیم. با کدام احتمال، حداقل یک مهره آبی خارج می‌شود؟

۱) $\frac{۳۱}{۴۲}$ ۲) $\frac{۳۷}{۴۲}$
۳) $\frac{۶۷}{۸۴}$ ۴) $\frac{۷۳}{۸۴}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۱۹ دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال مجموع دو عدد رو شده مضرب ۴ است؟

۱) $\frac{۲}{۹}$ ۲) $\frac{۵}{۱۸}$
۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۵}{۱۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

۲۰ در کیسه‌ای ۵ مهره با شماره‌های ۱ تا ۵ وجود دارد. این مهره‌ها را به طور تصادفی پی‌درپی و بدون جایگذاری خارج می‌کنیم. با کدام احتمال دو مهره با شمارهٔ فرد متوالیاً خارج نمی‌شوند؟

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۱۵

۳) ۰/۳ ۴) ۰/۲۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

۲۱ چهار دانش‌آموز یک کلاس که بر یک نیمکت نشسته باشند، با کدام احتمال ماه تولد حداقل دو نفر آنان یکسان است؟

۱) $\frac{۱۹}{۴۸}$ ۲) $\frac{۴۱}{۹۶}$

۳) $\frac{۲۳}{۴۸}$ ۴) $\frac{۵۵}{۹۶}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۲۲ در ظرفی ۴ مهرهٔ سفید و ۵ مهرهٔ سیاه موجود است. به تصادف ۳ مهره از ظرف خارج می‌کنیم. با کدام احتمال مهره‌های خارج شده هم‌رنگ‌اند؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۳}{۱۴}$

۳) $\frac{۲}{۹}$ ۴) $\frac{۵}{۱۴}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۲۳ دو تاس سالم را با هم پرتاب می‌کنیم تا برای اولین بار هر دو عدد رو شده زوج باشند. با کدام احتمال حداکثر در سه پرتاب نتیجه حاصل می‌شود؟

۱) $\frac{۲۷}{۶۴}$ ۲) $\frac{۳۷}{۶۴}$

۳) $\frac{۱۹}{۳۲}$ ۴) $\frac{۳۹}{۶۴}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

۲۴ در پرتاب دو سکه و یک تاس با هم، احتمال این‌که حداقل یک سکه رو و عدد تاس مضرب ۳ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$

۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۲۵ در آزمایشگاهی ۵ موش سفید و ۶ موش سیاه موجود است. به تصادف ۳ موش از بین آن‌ها خارج می‌کنیم. با کدام احتمال لااقل یکی از موش‌ها سفید است؟

۱) $\frac{۸}{۱۱}$ ۲) $\frac{۹}{۱۱}$

۳) $\frac{۲۸}{۳۳}$ ۴) $\frac{۲۹}{۳۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۲۶ در گروه زنان ساکن یک روستا، ۶۰ درصد آنان تحصیلات ابتدایی و ۲۵ درصد آنان مهارت قالی‌بافی دارند. اگر یک فرد از این گروه انتخاب شود، با کدام احتمال این فرد تحصیلات ابتدایی دارد یا مهارت قالی‌بافی دارد؟

۱) ۰/۷
۲) ۰/۷۵
۳) ۰/۸
۴) ۰/۸۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۲۷ حروف کلمهٔ $ATAXIA$ را بریده، به طور تصادف کنار هم قرار می‌دهیم. با کدام احتمال هر سه حرف A کنار هم قرار می‌گیرند؟

۱) $\frac{۱}{۶}$
۲) $\frac{۱}{۵}$
۳) $\frac{۱}{۴}$
۴) $\frac{۱}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۹

۲۸ چهار رقم ۳ و ۲ و ۱ و ۰ را به تصادف کنار هم قرار می‌دهیم تا عددی چهار رقمی حاصل شود. با کدام احتمال یک عدد چهار رقمی مضرب ۶ حاصل می‌شود؟

۱) $\frac{۱}{۳}$
۲) $\frac{۵}{۱۲}$
۳) $\frac{۴}{۹}$
۴) $\frac{۵}{۹}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۹

۲۹ در آزمایشگاهی ۷ موش نگه‌داری می‌شوند که بر روی ۳ موش آزمون مهارت انجام شده است. اگر ۲ موش از بین آنان تصادفی انتخاب شود، با کدام احتمال لااقل بر روی یکی از آن دو، آزمون انجام شده است؟

۱) $\frac{۱۰}{۲۱}$
۲) $\frac{۴}{۷}$
۳) $\frac{۵}{۷}$
۴) $\frac{۱۶}{۲۱}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

۳۰ در آزمایشگاهی ۳ موش سفید و ۵ موش سیاه نگه‌داری می‌شوند. اگر به طور تصادفی ۴ موش از بین آن‌ها جهت انجام آزمایشی برداشته شوند، با کدام احتمال فقط یکی از موش‌های مورد آزمایش سفید است؟

۱) $\frac{۲}{۷}$
۲) $\frac{۲}{۵}$
۳) $\frac{۳}{۷}$
۴) $\frac{۳}{۵}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

۳۱ احتمال این که از سه موش انتخاب شده از ۶ موش سفید و ۵ موش سیاه، هر سه موش سفید باشند، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۸}$
۲) $\frac{۴}{۳۳}$
۳) $\frac{۵}{۳۲}$
۴) $\frac{۵}{۳۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

۳۲ در آزمایشگاهی ۵ موش سالم و ۳ موش دیابتی نگه‌داری می‌شوند. اگر دو موش از محفظه گریخته باشند، با کدام احتمال فقط یکی از موش‌های فراری دیابتی است؟

۱) $\frac{۱۵}{۵۶}$ ۲) $\frac{۵}{۱۴}$
۳) $\frac{۳}{۸}$ ۴) $\frac{۱۵}{۲۸}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۱

۳۳ در یک روستا ۵۴ درصد جمعیت را مردان و ۴۶ درصد را زنان تشکیل می‌دهند. اگر ۶۰ درصد مردان و ۷۵ درصد زنان دفترچه سلامت داشته باشند، با کدام احتمال یک فرد انتخابی به تصادف از بین آن‌ها دفترچهٔ سلامت دارد؟

۱) ۰/۶۵۸ ۲) ۰/۶۶۹
۳) ۰/۶۸۵ ۴) ۰/۶۹۶

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰
قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۶

۳۴ دو تاس را باهم می‌اندازیم، با کدام احتمال دو عدد رو شده، متوالی هستند؟

۱) $\frac{۲}{۹}$ ۲) $\frac{۵}{۱۸}$
۳) $\frac{۷}{۱۸}$ ۴) $\frac{۴}{۹}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۳۵ در جعبه‌ای ۴ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه و ۲ مهرهٔ قرمز است. به‌تصادف ۳ مهره از آن بیرون می‌آوریم، با کدام احتمال فقط یکی از مهره‌ها سفید است؟

۱) $\frac{۸}{۲۱}$ ۲) $\frac{۱۷}{۴۲}$
۳) $\frac{۱۰}{۲۱}$ ۴) $\frac{۹}{۱۴}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۳۶ در جعبه‌ای ۷ مهرهٔ سفید و ۵ مهرهٔ سیاه و ۲ مهرهٔ قرمز موجود است. به‌تصادف ۴ مهره از آن بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال یک مهرهٔ قرمز و حداقل ۲ مهرهٔ سفید، خارج شده است؟

۱) $\frac{۳۰}{۹۱}$ ۲) $\frac{۲۵}{۷۷}$
۳) $\frac{۴۰}{۱۴۳}$ ۴) $\frac{۵۰}{۱۴۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

۳۷ در پرتاب یک سکه، اگر "رو" بیاید یک تیرانداز مجاز است ۵ تیر رها کند، اگر "پشت" بیاید، ۳ تیر رها می‌کند. می‌دانیم احتمال اصابت هر تیر رهاشده $\frac{۳}{۵}$ است. با کدام احتمال فقط یک تیر اصابت می‌کند؟

۱) $\frac{۹۶}{۶۲۵}$ ۲) $\frac{۱۱۴}{۶۲۵}$
۳) $\frac{۱۲۲}{۶۲۵}$ ۴) $\frac{۱۲۸}{۶۲۵}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

۳۸ هریک از ارقام ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱، بر روی پنج کارت یکسان نوشته شده است، به‌تصادف سه کارت از آن‌ها را کنار هم قرار می‌دهیم. با کدام احتمال عدد سه‌رقمی حاصل مضرب ۳ است؟

۱) ۰/۳
۲) ۰/۴
۳) ۰/۵
۴) ۰/۶

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۳۹ احتمال موفقیت عمل جراحی برای شخص A برابر ۰/۹ و برای شخص B برابر ۰/۸ می‌باشد. با کدام احتمال، لااقل عمل جراحی برای یکی از این دو نفر، موفقیت‌آمیز است؟

۱) ۰/۹۲
۲) ۰/۹۴
۳) ۰/۹۶
۴) ۰/۹۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۴۰ در کیسه‌ای ۵ مهرهٔ سفید و ۴ مهرهٔ سیاه و ۳ مهرهٔ آبی وجود دارد. سه مهره به‌تصادف از کیسه خارج می‌کنیم. با کدام احتمال رنگ مهره‌های خارج‌شده متفاوت است؟

۱) $\frac{۵}{۲۲}$
۲) $\frac{۳}{۱۱}$
۳) $\frac{۷}{۲۲}$
۴) $\frac{۴}{۱۱}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

۴۱ در یک خانواده ۴ فرزندی، با کدام احتمال، ۲ فرزند پسر یا ۳ فرزند دختر است؟

۱) $\frac{۳}{۸}$
۲) $\frac{۹}{۱۶}$
۳) $\frac{۵}{۸}$
۴) $\frac{۳}{۴}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۴۲ در یک خانواده سه فرزندی، می‌دانیم یکی از فرزندان پسر است. با کدام احتمال دو فرزند دیگر، دختر است؟

۱) $\frac{۳}{۸}$
۲) $\frac{۳}{۷}$
۳) $\frac{۴}{۷}$
۴) $\frac{۵}{۸}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۹

۴۳ در آزمایشگاهی ۵ موشِ سفید و ۳ موشِ سیاه نگه‌داری می‌شوند. به تصادف متوالیاً سه موش از بین آن‌ها انتخاب می‌شود. با کدام احتمال اولین موش سفید و سومین موش سیاه است؟

۱) $\frac{۱۱}{۵۶}$
۲) $\frac{۱۷}{۵۶}$
۳) $\frac{۱۳}{۵۶}$
۴) $\frac{۱۵}{۵۶}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

۴۴ یک خانوادهٔ سه فرزندی با کدام احتمال، حداقل دو فرزند دختر دارد؟ در صورتی که می‌دانیم حداقل یکی از فرزندان، دختر است.

۱) $\frac{۳}{۸}$
۲) $\frac{۵}{۸}$
۳) $\frac{۳}{۷}$
۴) $\frac{۴}{۷}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

۴۵ در یک خانواده سه فرزندی می‌دانیم فرزند اول آن‌ها دختر است. با کدام احتمال لااقل یکی از فرزندان پسر است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۵}{۸}$
۴) $\frac{۳}{۴}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

۴۶ خانواده‌ای دارای چهار فرزند است. می‌دانیم که دو فرزند اول آن‌ها پسر است. احتمال آن‌که دو فرزند دیگر این خانواده دختر باشند، کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۱۶}$
۲) $\frac{۱}{۴}$
۳) $\frac{۵}{۱۶}$
۴) $\frac{۳}{۸}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۲

۴۷ در یک خانوادهٔ دو فرزندی، می‌دانیم یکی از فرزندان پسر است. با کدام احتمال این خانواده فرزند دختر دارد؟

۱) $\frac{۱}{۳}$
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۲}{۳}$
۴) $\frac{۳}{۴}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

۴۸ ظرف A دارای ۴ مهرهٔ سفید و ۵ مهرهٔ سیاه است و هر یک از دو ظرف یکسان B و C دارای ۶ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه است. به تصادف یکی از سه ظرف را انتخاب کرده و ۴ مهره از آن خارج می‌کنیم. با کدام احتمال دو مهره از مهره‌های خارج شده، سفید است؟

۱) $\frac{۲۵}{۶۳}$
۲) $\frac{۲۶}{۶۳}$
۳) $\frac{۱۰}{۲۱}$
۴) $\frac{۱۱}{۲۱}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۴۹ شصت درصد از کارکنان سازمانی مرد و چهل درصد آنان زن هستند. می‌دانیم که ۲۰ درصد از مردان و ۴۵ درصد از زنان تحصیلات دانشگاهی دارند. اگر به تصادف ۳ نفر از بین آنان انتخاب شود، با کدام احتمال ۲ نفر آنان، تحصیلات دانشگاهی دارند؟

۱) ۰/۱۸۹
۲) ۰/۱۹۲
۳) ۰/۱۹۶
۴) ۰/۱۹۸

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۵۰ در جعبه‌ای ۶ مهرهٔ سفید و ۹ مهرهٔ سـیاه موجود است. دو مهره متوالیاً و بدون جای‌گذاری بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال بدون توجه به اولین مهره، دومین مهرهٔ خارج شده سفید است؟

۱) $\frac{۵}{۱۴}$
۲) $\frac{۳}{۷}$
۳) $\frac{۲}{۵}$
۴) $\frac{۳}{۵}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

۵۱ در جعبهٔ اول ۴ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه و در جعبهٔ دوم ۳ مهرهٔ سفید و ۶ مهرهٔ سیاه موجود است. به تصادف یکی از جعبه‌ها را انتخاب کرده و دو مهره با هم از آن بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال هر دو مهره سفید است؟

۱) $\frac{۳۱}{۱۶۸}$
۲) $\frac{۱۱}{۵۶}$
۳) $\frac{۱۷}{۸۴}$
۴) $\frac{۱۳}{۵۶}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۵۲ از بین ۳ کارت سفید و ۴ کارت سبز یکسان به تصادف یک کارت بـدون جای‌گذاری بیرون می‌آوریم. سـپس کارت دوم را خارج می‌کنیم. با کدام احتمال هر دو کارت همرنگ هستند؟

۱) $\frac{۲}{۷}$
۲) $\frac{۵}{۱۴}$
۳) $\frac{۳}{۷}$
۴) $\frac{۴}{۷}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

۵۳ احتمال انتقال بیماری مسری به افرادی که واکسن زده‌اند ۰/۰۲۵ و احتمال انتقال به افراد دیگر ۰/۲ است. $\frac{۲}{۵}$ کارگران یک کارگاه واکسن زده‌اند. اگر فرد حامل بیماری با یکی از کارگران ملاقات کند، با کدام احتمال، این بیماری منتقل می‌شود؟

۱) ۰/۱۳
۲) ۰/۱۴
۳) ۰/۱۵
۴) ۰/۱۶

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۹

۵۴ ۵۵ درصد دانشـجویان سال اول دختر و بقیه پسر هستند. ۶۰ درصد دختران و ۶۴ درصد پسـران تمام واحدهای درسی خود را گذرانده‌اند. چند درصد کل دانشجویان، تمام واحدهای درسی خود را گذرانده‌اند؟

۱) ۶۱/۴
۲) ۶۱/۸
۳) ۶۲/۴
۴) ۶۲/۸

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

۵۵ انتقال نوعی بیماری ارثی از والدین به فرزند پسـر ۱۰ درصـد و به فرزند دختر ۶ درصـد است. با کـدام احتمال فرزندی که به دنیا می‌آید این نوع بیماری را ندارد؟

۱) ۹۱٪
۲) ۹۲٪
۳) ۹۳٪
۴) ۹۴٪

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

۵۶ هفتاد و پنج درصد محصولات کارخانه‌ای مرغوب‌اند. با کدام احتمال از ۴ کالای خریداری شده این کارخانه لااقل یک کالا مرغوب است؟

۱) $\frac{۲۵۱}{۲۵۶}$
۲) $\frac{۲۵۵}{۲۵۶}$
۳) $\frac{۱۲۷}{۱۲۸}$
۴) $\frac{۶۳}{۶۴}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

۵۷ آزمایشی فقط دو نتیجهٔ شکست و پیروزی دارد. احتمال پیروزی $\frac{۳}{۴}$ و X تعداد پیروزی‌ها در ۱۶ بار تکرار این آزمایش‌ها است. $P\left(۰ \leq X \leq ۱۶\right)$ کدام است؟

۱) $\left(\frac{۳}{۴}\right)^{۱۶}$
۲) $۱-\left(\frac{۱}{۴}\right)^{۱۶}$
۳) $۲\left(\frac{۱۶}{۸}\right)\left(\frac{۳}{۴}\right)$
۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵

۵۸ احتمال انتقال ویروس از فرد بیمار به افراد مستعد ۰/۱ است. اگر بیمار با ۴ نفر مستعد ملاقات کند، با کدام احتمال ۲ یا ۳ نفر آنان مبتلا می‌شوند؟

۱) ۰/۰۴۸۲
۲) ۰/۰۵۲۲
۳) ۰/۰۵۶۴
۴) ۰/۰۵۹۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

۵۹ از نوعی بذر ۸۰ درصد آن‌ها جوانه می‌زند. اگر سه بذر از این نوع کاشته شود، با کدام احتمال لااقل دو بذر جوانه می‌زند؟

۱) ۰/۵۱۲
۲) ۰/۷۸۴
۳) ۰/۸۶۴
۴) ۰/۸۹۶

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۲

۶۰ می‌دانیم ۳۰ درصد از افراد جامعه‌ای دارای گروه خونی A هستند. اگر به طور تصادفی ۳ نفر از این جامعه انتخاب کنیم، با کدام احتمال فقط گروه خونی دو نفر از آن‌ها از نوع Aاست؟

۱) ۰/۱۸۹
۲) ۰/۱۴۷
۳) ۰/۰۴۲
۴) ۰/۰۶۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۱

۶۱ نوعی واکسن با احتمال ۹۰ درصد برای طیور تأثیر مثبت دارد. اگر ۵ مورد از این واکسن به کار رود، با کدام احتمال فقط ۳ مورد آن تأثیر مثبت خواهد داشت؟

۱) ۰/۰۷۲۹
۲) ۰/۰۸۱
۳) ۰/۷۲۹
۴) ۰/۸۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۰

۶۲ احتمال این که از چهار فرزند یک خانواده دو فرزند پسر و دو فرزند دختر باشند، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{۱}{۳}$
۳) $\frac{۳}{۸}$
۴) $\frac{۷}{۱۶}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۴

۶۳ در یک شرکت ۴۵۰ نفر کار می‌کنند که ۳۰۰ نفر آنان تحصیلات دانشگاهی دارند. اگر ۶ نفر از این کارکنان به تصادف انتخاب شوند، با کدام احتمال ۴ نفر آنان تحصیلات دانشگاهی دارند؟

۱) $\frac{۱۶}{۸۱}$
۲) $\frac{۶۴}{۲۴۳}$
۳) $\frac{۸۰}{۲۴۳}$
۴) $\frac{۴۰}{۸۱}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

۶۴ پدر و مادری هر یک دارای یک ژن رنگ چشم مغلوب (b) و یک ژن رنگ چشم غالب (B)اند و $P(B) = ۳P(b)$. اگر این پدر و مادر دارای سه فرزند باشند، با کدام احتمال فقط یکی از فرزندان دارای ژن چشم مغلوب‌اند؟

۱) $\frac{۹}{۶۴}$
۲) $\frac{۹}{۳۲}$
۳) $\frac{۲۷}{۶۴}$
۴) $\frac{۹}{۱۶}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

۶۵ احتمال انتقال نوعی بیماری مسری به افراد مستعد ۰/۲ است. اگر ۵ نفر با فردی که حامل این بیماری است ملاقات کنند، با کدام احتمال ۳ نفر آنان مبتلا می‌شوند؟

۱) ۰/۰۲۵۶
۲) ۰/۰۵۱۲
۳) ۰/۱۰۲۴
۴) ۰/۲۰۴۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۶۶ دانش‌آموزی به ۵ پرسش ۵ گزینه‌ای به تصادف پاسخ می‌دهد. با کدام احتمال فقط به ۳ پرسش پاسخ صحیح داده شده است؟

۱) ۰/۰۲۵۶
۲) ۰/۰۵۱۲
۳) ۰/۰۶۲۵
۴) ۰/۰۷۶۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

۶۷ دانش‌آموزی به ۵ پرسش ۵ گزینه‌ای به تصادف پاسخ می‌دهد. با کدام احتمال فقط به یک پرسش پاسخ صحیح داده شده است؟

۱) ۰/۲۰۴۸
۲) ۰/۴۰۹۶
۳) ۰/۵۱۲
۴) ۰/۷۱۴۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۶۸ در آزمایشگاهی ۶ موش سیاه و ۴ موش سفید موجود است. به طور تصادفی ۲ موش از بین آن‌ها خارج می‌کنیم. X تعداد موش‌های سفید خارج شده است. بیشترین مقدار در توزیع احتمال آن کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۵}$
۲) $\frac{۷}{۱۵}$
۳) $\frac{۸}{۱۵}$
۴) $\frac{۳}{۵}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

۶۹ احتمال انتقال نوعی بیماری از فرد بیمار به افراد مستعد ۰/۲ است. اگر ۶ نفر مستعد با این بیمار ملاقات کنند، با کدام احتمال ۴ نفر آنان به این بیماری مبتلا می‌شوند؟

۱) ۰/۰۱۴۲۸
۲) ۰/۰۱۵۳۶
۳) ۰/۰۱۵۴۸
۴) ۰/۰۱۵۹۶

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۷۰ به طور متوسط از هر ۱۰ مشتری مراجعه کننده به فروشگاهی ۶ نفر خرید می‌کنند. در فاصلهٔ زمانی معین ۴ مشتری به این فروشگاه مراجعه می‌کنند. با کدام احتمال فقط ۳ نفر از آن‌ها خرید می‌کنند؟

۱) ۰/۳۱۷۲
۲) ۰/۳۲۸۲
۳) ۰/۳۴۵۶
۴) ۰/۳۶۵۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

۷۱ از نوعی بذر که ۸۰ درصد آن‌ها جوانه می‌زنند، ۵ عدد کاشته شده است. با کدام احتمال، حداقل دو عدد از آن‌ها جوانه می‌زنند؟

۱) ۰/۹۹۳۲۸
۲) ۰/۹۹۳۶۰
۳) ۰/۹۴۲۰۸
۴) ۰/۹۵۱۲۰

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۹

۷۲ در یک کارخانه ۶۰ درصد کارگران بومی‌اند. اگر ۴ نفر از بین آنان به تصادف انتخاب شوند، با کدام احتمال درست ۳ نفر از آنان بومی‌اند؟

۱) ۰/۱۵۳۶
۲) ۰/۲۹۹۶
۳) ۰/۳۲۷۶
۴) ۰/۳۴۵۶

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۹

۷۳ دانش‌آموزی به ۶ پرسش تستی سه گزینه‌ای به تصادف پاسخ می‌گوید. احتمال این که فقط به ۴ پرسش پاسخ درست بدهد، کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۸۱}$
۲) $\frac{۵}{۸۱}$
۳) $\frac{۱۶}{۲۴۳}$
۴) $\frac{۲۰}{۲۴۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

۷۴ در یک بیمارستان ۵ نوزاد در یک روز متولد شده‌اند. با کدام احتمال لااقل دو نفر از آنان دختر است؟

۱) $\frac{۵}{۱۶}$
۲) $\frac{۳}{۸}$
۳) $\frac{۷}{۱۶}$
۴) $\frac{۱۳}{۱۶}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

۷۵ در جعبه‌ای ۳ مهرهٔ آبی، ۲ مهرهٔ سیاه و ۵ مهرهٔ قرمز موجود است. اگر دو مهره از آن بیرون می‌آوریم، با کدام احتمال این دو مهره هم‌رنگ نیستند؟

۱) $\frac{۲۸}{۴۵}$
۲) $\frac{۲۹}{۴۵}$
۳) $\frac{۳۱}{۴۵}$
۴) $\frac{۳۲}{۴۵}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

۷۶ در پرتاب یک تاس، اگر عدد زوج ظاهر شود، یک تیرانداز مجاز است ۴ تیر رها کند، در غیر این صورت ۳ تیر رها می‌کند. می‌دانیم احتمال موفقیت در هر تیر رها شده $\frac{۲}{۳}$ است. با کدام احتمال فقط ۲ بار موفقیت حاصل شده است؟

۱) $\frac{۸}{۲۷}$
۲) $\frac{۱۰}{۲۷}$
۳) $\frac{۱۱}{۲۷}$
۴) $\frac{۱۳}{۲۷}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

۷۷ احتمال جوانه زدن هر دانه از نوعی بذر $\frac{۲}{۳}$ است. اگر چهار دانه از این بذر در شرایط یکسان کاشته شوند، با کدام احتمال حداقل سه دانه، جوانه می‌زند؟

۱) $\frac{۴۴}{۸۱}$
۲) $\frac{۱۵}{۲۷}$
۳) $\frac{۴۶}{۸۱}$
۴) $\frac{۱۶}{۲۷}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۷۸ آزمایشی فقط دو نتیجه دارد، احتمال پیروزی در هر بار $\frac{۳}{۴}$ است. در تکرار ۶ بار این آزمایش مستقل، احتمال ۴ پیروزی چندبرابر احتمال ۳ پیروزی است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$
۲) $\frac{۴}{۳}$
۳) $\frac{۳}{۲}$
۴) $\frac{۹}{۴}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۷۹ در یک شهر صنعتی ۶۰ درصد جمعیت مرد و ۴۰ درصد آن زن هستند. اگر ۱۸ درصد مردان و ۱۲ درصد زنان تحصیلات دانشگاهی داشته باشند، چند درصد این جمعیت تحصیلات دانشگاهی دارند؟

۱) ۱۵/۲
۲) ۱۵/۶
۳) ۱۵/۸
۴) ۱۶/۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

۸۰ دانش‌آموزی به ۶ پرسش ۴ گزینه‌ای به‌تصادف پاسخ می‌دهد. با کدام احتمال ۳ پرسش را پاسخ درست داده است؟

۱) $\frac{۱۳۵}{۱۰۲۴}$
۲) $\frac{۱۳۵}{۵۱۲}$
۳) $\frac{۴۵}{۵۱۲}$
۴) $\frac{۲۷}{۵۱۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

۸۱ در کیسه‌ای ۵ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه و ۲ مهرهٔ قرمز وجود دارد. سه مهره به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم. با کدام احتمال فقط دو مهرهٔ خارج‌شده، همرنگ هستند؟

۱) $\frac{۴۱}{۱۲۰}$
۲) $\frac{۳۷}{۶۰}$
۳) $\frac{۷۹}{۱۲۰}$
۴) $\frac{۳۱}{۶۰}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۸۲ احتمال قبولی فرد A در یک آزمون ۰/۸۴ و احتمال قبولی فرد B در همان آزمون ۰/۷۵ است. با کدام احتمال لااقل یکی از آنان، در این آزمون قبول می‌شوند؟

۱) ۰/۹۲
۲) ۰/۹۴
۳) ۰/۹۶
۴) ۰/۹۸

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۸۳ می‌دانیم احتمال مغلوب بودن رنگ چشم $\frac{۱}{۴}$ برای هر فرزند، ثابت است. در خانوادهٔ ۴ فرزندی، با کدام احتمال رنگ چشم ۳ فرزند آن‌ها مغلوب است؟

۱) $\frac{۳}{۶۴}$
۲) $\frac{۳}{۳۲}$
۳) $\frac{۹}{۶۴}$
۴) $\frac{۲۷}{۲۵۶}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۱ **گزینه ۳**

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۷

گام اول

الف) ۵ نفر برای سخنرانی ثبت‌نام کرده‌اند. دو نفر a و b را جدا کرده ایم. اگر قرار باشد بین دو نفر a و b فقط یک نفر سخنرانی کند، باید از ۳ نفر باقی مانده یک نفر انتخاب شود و بین این دو نفر قرار گیرد، یعنی انتخاب یک نفر از ۳ نفر باقی مانده.

ب) در صورت تست اشاره نشده است که ابتدا شخص a سخنرانی می‌کند یا شخص b، پس در محاسبهٔ تعداد حالت‌های ممکن باید جابه‌جایی این دو نفر را هم درنظر بگیریم (پس $2!$ حالت برای جابه‌جایی a و b).

ج) حالا a و b و فردی که بین آن‌ها قرار می‌گیرد را یک نفر فرض می‌کنیم که با دو نفر باقی مانده می‌توانند جابه‌جا شوند ($3!$ حالت داریم).

گام دوم

$$\text{تعداد کل حالت ها} = \underbrace{\binom{3}{1}}_{a,b\ \text{انتخاب یک نفر بین}} \times \overbrace{2!}^{a,b\ \text{جابجایی}} \times \underbrace{3!}_{\text{جابجایی ترکیب۳نفره با ۲نفر دیگر}} = 3\times 2\times 6 = 36$$

۲ **گزینه ۳**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۲

گام اول

الف) چون در صورت تست گفته‌شده رقم‌های فرد کنار هم باشند، پس ارقام ۵ و ۳ و ۱ را کنار هم قرار داده و آن‌ها را در یک بسته درنظر می‌گیریم.

ب) ارقام ۵ و ۳ و ۱ می‌توانند به حالت‌های مختلف کنار هم قرار بگیرند پس تعداد جای‌گشت‌های این سه رقم هم محاسبه می‌شود ($3!$ حالت داریم).

ج) سه رقم ۵ و ۳ و ۱ را در کنار هم به عنوان یک عدد جدید فرض می‌کنیم. باید تعداد حالت‌های قرارگیری این عدد جدید در کنار دو رقم ۲ و ۴ را هم حساب کنیم ($3!$حالت داریم).

گام دوم

تعداد کل حالت‌های قرارگیری این ۵ عدد با شرط گفته‌شده برابر است با:

$$\text{تعداد کل حالت ها} = \underbrace{3!}_{\text{جابجایی ارقام۵،۳و۱}} \times \underbrace{3!}_{\text{جابجایی بسته ارقام با۲و۴}} = 6\times 6 = 36$$

۳ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

گام اول

الف) عدد موردنظر ما چهار رقم دارد.

ب) ارقام به‌کار رفته در عدد باید متمایز باشند یعنی رقم تکراری نداشته باشیم.

ج) فقط باید از ارقام فرد ۱ و ۳ و ۵ و ۷ و ۹ استفاده کنیم.

د) این عدد چهاررقمی باید بزرگ تر از ۳۰۰۰ باشد یعنی در جایگاه هزارگان نمی‌شود از رقم ۱ استفاده کرد.

گام دوم

پس تعداد ارقام چهار رقمی با ارقام متمایز و فرد بزرگ تر از ۳۰۰۰ برابر است با:

$$\underbrace{۴}_{\text{یک رقم از بین ۳و۵،۷،۹}} \times \underbrace{۴}_{\text{رقم۱به ارقام موجود اضافه می شود}} \times ۳ \times ۲ = ۹۶$$

۴ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۴

گام اول

الف) در این کلمه دو حرف یکسان A و دو حرف یکسان G مشاهده می‌شود. این حروف یکسان باید کنار هم باشند.

ب) با قرار دادن حروف یکسان در کنار هم ۶ حرف متمایز داریم. تعداد حالت‌های قرارگیری این ۶ حرف را در کنار هم حساب می‌کنیم.

ج) دقت کنید دو حرف یکسان در کنار هم فقط به یک حالت می‌توانند قرار بگیرند و دیگر بین آن‌ها جابجایی نخواهیم داشت.

گام دوم

حروف ما به این صورت در می‌آیند :

$$L\underbrace{AA}\,\underbrace{GG}\,RNE$$

تعداد حالت ها $=۶!=۷۲۰$

۵ **گزینه ۳**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

گام اول

الف) در این تست یک کلمهٔ ۶ حرفی با دو حرف تکراری داریم پس تعداد کل کلمه‌ها برابر $\frac{۶!}{۲!}$ می‌شود.

ب) می‌خواهیم S ها کنار هم نباشند. برای راحتی کار ابتدا حالت هایی که S ها کنار هم باشند را درنظر می‌گیریم، سپس آن را از تعداد کل حالت‌ها کم می‌کنیم.

گام دوم

تعداد کل کلمات $= \frac{۶!}{۲!} = \frac{۷۲۰}{۲} = ۳۶۰$

تعداد کلماتی که دو حرف S کنار هم باشند : $\underbrace{SS}YTEM \rightarrow ۵! = ۱۲۰$

تعداد کلماتی که دو حرف S کنار هم نباشند $= ۳۶۰ - ۱۲۰ = ۲۴۰$

۶ **گزینه ۱**

در حل تست به دو نکتهٔ زیر توجه کنید.

الف) $P(n,r)$ یعنی تبدیل r شئ از میان n شئ که از رابطهٔ $P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$ محاسبه می‌شود.

ب) $C(n,r)$ یا $\binom{n}{r}$ یعنی ترکیب r شئ از بین n شئ که از رابطه‌ی $C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ به دست می‌آید.

$P(n,۴)$ و $C(n-۱,۴)$ را جایگذاری کرده و مقدار n را به دست می‌آوریم:

$$\frac{P(n,۴)}{C(n-۱,۴)} = \frac{\frac{n!}{(n-۴)!}}{\frac{(n-۱)!}{(n-۱-۴)!\times ۴!}} = \frac{\frac{n!}{(n-۴)!}}{\frac{(n-۱)!}{(n-۵)!\times ۴!}} = \frac{n!\times(n-۵)!\times ۴!}{(n-۴)!\times(n-۱)!} = \frac{n\times(n-۱)!\times(n-۵)!\times ۲۴}{(n-۴)\times(n-۵)!\times(n-۱)!} = ۲۶$$

$$\Rightarrow \frac{۲۴n}{n-۴} = ۲۶ \Rightarrow ۲۴n = ۲۶n - ۱۰۴ \Rightarrow ۲n = ۱۰۴ \Rightarrow n = ۵۲$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

۷ **گزینه ۲**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

گام اول

زیرمجموعهٔ سه عضوی موردنظر باید شامل عضو a باشد. بنابراین تکلیف یک عضو از این سه عضو مشخص است. دو عضو باقی مانده را باید از بین ۵ عضو دیگر مجموعه انتخاب کنیم.

گام دوم

باتوجه به این که تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی یک مجموعهٔ n عضوی از رابطهٔ $\binom{n}{r}$ مجاسبه می‌شود، بنابراین تعداد زیرمجموعه‌های سه عضوی با شرط حضور عضو a برابر است با:

$$\binom{۶-۱}{۳-۱}=\binom{۵}{۲}=\frac{۵!}{۲!\times ۳!}=۱۰$$

۸ **گزینه ۴**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

گام اول

الف) قرار است دانش‌آموزان انتخاب شده دو به دو غیر هم مدرسه باشند. چون باید سه دانش‌آموز انتخاب شود، پس از بین ۵ مدرسه هم باید ۳ مدرسه انتخاب کنیم، یعنی $\binom{۵}{۳}$.

ب) هر مدرسه ۴ دانش‌آموز دارد. از بین مـدارس انتخاب شده هرکدام از ۴ دانش‌آموز می‌توانند انتخاب شوند پس برای هرکدام از سه مدرسـه $\binom{۴}{۱}$ انتخاب داریم.

گام دوم

$$\text{تعداد حالت های انتخاب دانش آموزان}=\binom{۵}{۳}\binom{۴}{۱}\binom{۴}{۱}\binom{۴}{۱}=۱۰\times ۴\times ۴\times ۴=۱۰\times ۴^{۳}=۱۰\times ۶۴$$
$$=۶۴۰$$

۹ گزینه ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

گام اول

الف) دانش‌آموزان باید دو به دو غیر هم‌منطقه‌ای باشند. بنابراین برای داشتن ۳ دانش‌آموز باید ۳ منطقه از بین ۶ منطقهٔ کشوری انتخاب شود تا مطمئن باشیم دو دانش‌آموز هم منطقه‌ای نداریم.

ب) هر منطقه ۱۵ دانش‌آموز دارد که هرکدام از این ۱۵ دانش‌آموز می‌توانند انتخاب شوند.

گام دوم

$$\text{تعداد کل حالت ها} = \underbrace{\binom{۶}{۳}}_{\text{انتخاب۳منطقه ازبین۶منطقه}} \times \underbrace{\binom{۱۵}{۱} \times \binom{۱۵}{۱} \times \binom{۱۵}{۱}}_{\text{هرکدام از ۱۵دانش آموز این ۳منطقه می توانند دعوت شوند}} = ۲۰ \times ۱۵ \times ۱۵ \times ۱۵$$

$$= ۶۷۵۰۰$$

۱۰ گزینه ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

گام اول

الف) بازی بین مدارس مختلف انجام می‌شود پس برای یک بازی ۲ نفر در مقابل ۲ نفر، باید از بین ۸ مدرسه دو مدرسه، انتخاب شود.

ب) هر مدرسه ۶ دانش‌آموز برای بازی تنیس دارد. از بین این ۶ نفر باید ۲ نفر برای بازی انتخاب شود، یعنی برای هریک از مدارس $\binom{۶}{۲}$ انتخاب داریم.

گام دوم

$$\text{تعداد کل حالت ها} = \underbrace{\binom{۸}{۲}}_{\text{انتخاب ۲مدرسه از ۸مدرسه}} \times \overbrace{\binom{۶}{۲}}^{\text{انتخاب ۲دانش آموز از مدرسه اول}} \times \underbrace{\binom{۶}{۲}}_{\text{انتخاب ۲دانش آموز از مدرسه دوم}} = ۲۸ \times ۱۵ \times ۱۵$$

$$= ۶۳۰۰$$

۱۱ **گزینه ۴**

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

گام اول

به کلمهٔ "حداقل" در صورت تست خیلی توجه کنید. چون گفته شده حداقل ۴ پرسش از ۵ پرسش اول پاسخ داده شود، یعنی ۴ تا یا بیشتر. پس دو حالت می‌تواند رخ دهد:
یک حالت این است که از ۵ پرسش اول به ۴ پرسش و از ۵ پرسش دوم هم به ۴ پرسش پاسخ داده شود. حالت دوم این است که از ۵ پرسش اول، به هر ۵ پرسش و از ۵ پرسش دوم به ۳ پرسش پاسخ داده شود.

گام دوم

$$\text{تعداد حالت های پاسخگویی} = \underbrace{\binom{5}{4}\times\binom{5}{4}}_{\text{از۵پرسش اول۴پرسش و از۵پرسش دوم۴پرسش}} + \underbrace{\binom{5}{5}\times\binom{5}{3}}_{\text{هر۵پرسش اول و از۵پرسش دوم۳پرسش}} = (5\times5)+(1\times10)=25+10=35$$

۱۲ **گزینه ۴**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

گام اول

دقت کنید که گفته شده حداقل ۲ نفر از بین ۳ نفر انتخاب شده، باید از رشتهٔ تجربی باشند. دو حالت ممکن است رخ دهد: حالت اول این که ۲ نفر تجربی و یک نفر ریاضی باشند و حالت دوم این که هرسه نفر تجربی باشند.

گام دوم

تعداد حالت‌های انتخاب دانش‌آموزها با شرط انتخاب حداقل ۲ دانش‌آموز تجربی برابراست با:

$$\underbrace{\binom{5}{2}\times\binom{3}{1}}_{\text{دو دانش آموز تجربی و یک دانش آموز ریاضی}} + \underbrace{\binom{5}{3}}_{\text{هر سه تجربی}} = (10\times3)+10=30+10=40$$

۱۳ گزینه ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۴

گام اول

الف) عدد ما پنج‌رقمی است پس به پنج رقم از بین نه رقم موجود نیاز داریم.

ب) در صورت تست گفته شده درست دو رقم زوج باشد یعنی برای تشکیل این عدد پنج‌رقمی، باید دو رقم از بین چهار رقم زوج و سه رقم از بین پنج رقم فرد انتخاب کنیم.

گام دوم

$$\text{تعداد اعداد پنج رقمی با دو رقم زوج} = \underbrace{\binom{4}{2}}_{\text{دورقم از بین ارقام ۲و۴،۶،۸}} \times \underbrace{\binom{5}{3}}_{\text{سه رقم از بین ارقام ۱و۳،۵،۷،۹}} \times \underbrace{5!}_{\text{حالت های مختلف قرار گرفتن ارقام}} = 6 \times 10 \times 120 = 7200$$

۱۴ گزینه ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۹

گام اول

سه رقم ۲ و سه رقم غیر ۲ داریم (۶ و ۷ و ۵). اگر قرار باشد این ارقام به‌صورت یک‌درمیان کنار هم قرار بگیرند، دو حالت وجود دارد: حالت اول این است که عدد شش رقمی ما با رقم ۲ شروع شود و حالت دوم این‌که عدد شش رقمی ما با رقم ۲ تمام شود. در هرکدام از حالت‌ها سه رقم باقی مانده یعنی ۶ و ۷ و ۵ می‌توانند به $3!$ حالت در جاهای خالی قرار گیرند.

گام دوم

حالت اول : ۲ ◯ ۲ ◯ ۲ ◯

$$6 = 3 \times 2 \times 1 = \text{تعداد حالت ها}$$: ۵و۶و۷ در سه دایره باقی مانده

حالت دوم : ◯ ۲ ◯ ۲ ◯ ۲

$$6 = 3 \times 2 \times 1 = \text{تعداد حالت ها}$$: ۵و۶و۷ در سه دایره باقی مانده

پس در مجموع ۱۲ عدد داریم که در آن ارقام ۲ به‌صورت یک‌درمیان قرار گرفته باشند.

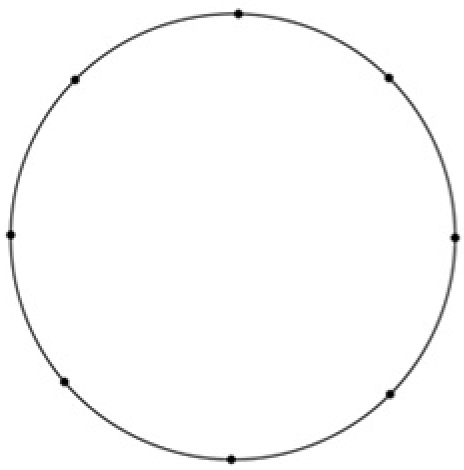
۱۵ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۰

گام اول

اگر قرار باشد یک چهارضلعی داشته باشیم باید ۴ رأس از نقاط موجود انتخاب کنیم، یعنی انتخاب ۴ نقطه از ۸ نقطه ای که روی دایره است.

گام دوم



$$\text{تعداد چهارضلعی های محدب} = \binom{۸}{۴} = \frac{۸!}{۴!\times۴!} = \frac{۸\times۷\times۶\times۵\times۴!}{۲۴\times۴!} = ۷۰$$

۱۶ گزینه ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

گام اول

رقم صدگان باید از ارقام یکان و دهگان بزرگ تر باشد. پس ما نمی‌توانیم دو رقم ۱ و ۳ را در جایگاه صدگان به کار ببریم. برای هریک از ارقام ۵ و ۷ و ۹ که در جایگاه صدگان قرار می‌گیرند، حالت‌های موردنظر را به‌دست می‌آوریم.

گام دوم

۱) رقم صدگان۵ : ۵۳۱ → یک حالت

۲) رقم صدگان۷ : ۷۵۳, ۷۵۱, ۷۳۱ → سه حالت

۳) رقم صدگان۹ : ۹۷۵, ۹۷۳, ۹۷۱, ۹۵۳, ۹۵۱, ۹۳۱ → شش حالت

تعداد کل حالت ها : ۱ + ۳ + ۶ = ۱۰

۱۷ **گزینه ۴**

$$\underset{\text{انتخاب یک رقم از بین ۲,۴,۶,۸}}{\binom{۴}{۱}} \times \overset{\text{انتخاب سه رقم از بین ۱,۳,۵,۷,۹}}{\binom{۵}{۳}} \times \underset{\text{جایگشت ۴ رقم در کنار هم}}{۴!} = ۴ \times ۱۰ \times ۲۴ = ۹۶۰$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

۱۸ **گزینه ۲**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

گام اول

الف) به واژهٔ حداقل در صورت تست توجه کنید. این واژه نقش تعیین‌کننده‌ای در حل تست دارد. وقتی قرار است حداقل یک مهره از ۳ مهرهٔ انتخاب شده، آبی باشد یعنی تعداد مهره‌های آبی می‌تواند یکی، دو تا یا سه تا باشد.

ب) اگر پیشامد A را انتخاب حداقل یک مهرهٔ آبی تعریف کنیم آن‌گاه پیشامد A' انتخاب نشدن مهرهٔ آبی یا انتخاب هر سه مهره از میان مهره‌های قرمز و سفید را بیان می‌کند. این تست را می‌توان با احتمال پیشامد متمم نیز حل کرد.

$$P(A) = ۱ - P(A')$$

گام دوم

روش اول:

فضای نمونه ای شامل انتخاب ۳ مهره از میان ۹ مهرهٔ موجود است. بنابراین

$$P(\text{حداقل یک مهرهٔ آبی}) = P(\text{یک مهرهٔ آبی}) + P(\text{دو مهرهٔ آبی}) + P(\text{سه مهرهٔ آبی})$$

$$= \frac{\binom{۴}{۱}\binom{۵}{۲}}{\binom{۹}{۳}} + \frac{\binom{۴}{۲}\binom{۵}{۱}}{\binom{۹}{۳}} + \frac{\binom{۴}{۳}}{\binom{۹}{۳}} = \frac{۴۰+۳۰+۴}{۸۴} = \frac{۷۴}{۸۴} = \frac{۳۷}{۴۲}$$

روش دوم:

با استفاده از احتمال پیشامد متمم داریم:

$$P(A') = P(\text{مهرهٔ آبی نداشته باشیم}) = \frac{\binom{۵}{۳}}{\binom{۹}{۳}} = \frac{۱۰}{۸۴}$$

$$P(A) = ۱ - P(A') = ۱ - \frac{۱۰}{۸۴} = \frac{۷۴}{۸۴} = \frac{۳۷}{۴۲}$$

۱۹ **گزینه ۳**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

گام اول

الف) تعداد کل حالت‌ها ($n(S)$) در پرتاب دو تاس برابر ۳۶ است.

ب) مجموع اعداد ظاهر شده در پرتاب دو تاس عددی بین ۲ و ۱۲ خواهد بود. بنابراین پیشامد مورد نظر شامل حالت‌هایی می‌شود که جمع دو تاس برابر ۴، ۸ یا ۱۲ است.

ج) احتمال پیشامد A را می‌توان از رابطه زیر محاسبه کرد.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

گام دوم

حالت‌هایی که مجموع دو تاس برابر ۴، ۸ یا ۱۲ شود را مشخص می‌کنیم:

مجموع دو تاس برابر۴ : (۱,۳) , (۲,۲) , (۳,۱)

مجموع دو تاس برابر۸ : (۲,۶) , (۳,۵) , (۴,۴) , (۵,۳) , (۶,۲)

مجموع دو تاس برابر۱۲ : (۶,۶)

بنابراین $n(A) = ۹$ و $n(S) = ۳۶$ و داریم:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۹}{۳۶} = \frac{۱}{۴}$$

۲۰ **گزینه ۱**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

گام اول

الف) ۵ مهره با شماره‌های ۱ تا ۵ داریم. از میان ۵ مهره، ۳ مهر دارای شمارهٔ فرد و ۲ مهره دارای شمارهٔ زوج هستند. پیشامد مورد نظر خارج نشدن دو مهره با شمارهٔ فرد به صورت متوالی است. بنابراین مهره‌ها باید به صورت یک در میان زوج و فرد خارج شوند و چون تعداد مهره‌ها به شماره‌های فرد یکی بیشتر است پس تنها حالت ممکن چنین می‌شود:

پیشامد A : فرد, زوج, فرد, زوج, فرد

ب) احتمال پیشامد A را می توان از رابطهٔ زیر محاسبه کرد:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

گام دوم

فضای حالت به صورت تمام حالت‌هایی که ۵ شماره می‌توانند به صورت پشت سر هم قرار گیرند تعریف می‌شود پس:

$n(S) = ۵! = ۱۲۰$

A : فرد, زوج, فرد, زوج, فرد

$n(A) = ۳ \times ۲ \times ۲ \times ۱ \times ۱ = ۱۲$

بنابراین:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۱۲}{۱۲۰} = \frac{۱}{۱۰} = ۰/۱$$

۲۱ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

گام اول

الف) به واژهٔ حداقل در صورت تست دقت کنیـد. حداقل دو نفر از ۴ نفر ماه تولد یکسان داشـته باشـند یعنی یا دو نفر در یک ماه به دنیا آمده باشند، یا سه نفر در یک ماه به دنیا آمده باشند و یا چهار نفر.

ب) اگر پیشامد A چنین تعریف شود که حـداقل دو نفر از میان ۴ نفر در یک ماه به دنیا آمده باشـند آن‌گاه پیشامد متمم (A') یعنی هیچ دو نفری از میان ۴ نفر ماه تولدشان یکسان نباشد و همگی در ماه‌های متفاوت به دنیا آمده باشند.

ج) می‌دانیم $P(A) = ۱ - P(A')$

گام دوم

$$P(A') = P(\text{هیچ دو نفری متولد یک ماه نباشند}) = \frac{۱۲}{۱۲} \times \frac{۱۱}{۱۲} \times \frac{۱۰}{۱۲} \times \frac{۹}{۱۲} = \frac{۵۵}{۹۶}$$

$$P(A) = P(\text{حداقل دو نفر در یک ماه به دنیا آمده باشند}) = ۱ - P(A') = ۱ - \frac{۵۵}{۹۶} = \frac{۴۱}{۹۶}$$

۲۲ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

گام اول

الف) برای اینکه مهره‌ها همرنگ باشند باید هر ۳ سیاه و یا هر ۳ سفید باشند.

ب) فضای حالت به صورت انتخاب ۳ مهره از میان $۹ = ۵ + ۴$ مهرهٔ موجود است.

ج) پیشامد مورد نظر به صورت انتخاب ۳ مهره از میان ۴ مهرهٔ سفید یا انتخاب ۳ مهره از میان ۵ مهرهٔ سیاه تعریف می‌شود.

د) احتمال پیشامد A را می‌توان از رابطهٔ زیر محاسبه کرد:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

گام دوم

$$n(S) = \binom{۹}{۳} = \frac{۹!}{۳! \times ۶!} = \frac{۹ \times ۸ \times ۷ \times ۶!}{۶ \times ۶!} = ۸۴$$

$$n(A) = \binom{۴}{۳} + \binom{۵}{۳} = ۴ + ۱۰ = ۱۴$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۱۴}{۸۴} = \frac{۱}{۶}$$

۲۳ **گزینه ۲**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

گام اول

الف) به کلمهٔ حداکثر در صورت تست دقت کنید. در تست گفته شده است حداکثر در سه پرتاب هر دو تاس برای اولین بار زوج بیایند پس یکی از سه حالت زیر اتفاق می‌افتد:

حالت اول: هر دو تاس در پرتاب اول زوج ظاهر شوند.

حالت دوم: هر دو تاس برای اولین بار در پرتاب دوم زوج بیایند پس در پرتاب اول هر دو زوج نبوده‌اند (متمم حالت اول).

حالت سوم: دو تاس در پرتاب‌های اول و دوم هر دو زوج نباشند و در پرتاب سوم برای اولین بار هر دو زوج ظاهر شوند.

ب) احتمال زوج یا فرد آمدن یک تاس در هر پرتاب برابر $\frac{۱}{۲}$ است.

ج) احتمال کل مجموع احتمال به دست آمده در سه حالت است.

گام دوم

$$\text{حالت اول}: P_{۱} = \underbrace{\frac{۱}{۲}}_{\text{تاس اول زوج}} \times \underbrace{\frac{۱}{۲}}_{\text{تاس دوم زوج}} = \frac{۱}{۴}$$

$$\text{حالت دوم}: P_{۲} = \underbrace{\left(۱-\frac{۱}{۴}\right)}_{\text{در پرتاپ اول هردو زوج نباشند}} \times \underbrace{\left(\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\right)}_{\text{در پرتاپ دوم هردو زوج باشند}} = \frac{۳}{۴}\times\frac{۱}{۴} = \frac{۳}{۱۶}$$

$$\text{حالت سوم}: P_{۳} = \underbrace{\frac{۳}{۴}}_{\text{در پرتاپ اول هردو زوج نباشند}} \times \underbrace{\frac{۳}{۴}}_{\text{در پرتاپ دوم هردو زوج نباشند}} \times \underbrace{\left(\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\right)}_{\text{در پرتاپ سوم هردو زوج باشند}} = \frac{۳}{۴}\times\frac{۳}{۴}\times\frac{۱}{۴} = \frac{۹}{۶۴}$$

پس احتمال کل برابر است با:

$$P_{\text{کل}} = P_{۱}+P_{۲}+P_{۳} = \frac{۱}{۴}+\frac{۳}{۱۶}+\frac{۹}{۶۴} = \frac{۱۶+۱۲+۹}{۶۴} = \frac{۳۷}{۶۴}$$

۲۴ **گزینه ۳**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

گام اول

الف) اگر قرار باشد حداقل یکی از سکه‌ها رو بیاید، می‌تواند یک سکه رو و دیگری پشت بیاید و یا اینکه هر دو رو بیایند.

ب) اگر قرار باشد عدد تاس مضرب ۳ باشد، عدد رو شده ۳ یا ۶ است.

ج) اگر A پیشامد مطلوب خواسته شده باشد احتمال اتفاق افتادنش به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

گام دوم

تعداد کل حالت‌ها در پرتاب دو سکه و یک تاس برابر است با:

$$n(S) = ۲ \times ۲ \times ۶ = ۲۴$$

حالت‌های مطلوب به صورت زیر است:

$$A = \left\{(\text{ر}, \text{پ}, ۳), (\text{ر}, \text{پ}, ۶), (\text{پ}, \text{ر}, ۳), (\text{پ}, \text{ر}, ۶), (\text{ر}, \text{ر}, ۳), (\text{ر}, \text{ر}, ۶)\right\}$$

$$n(A) = ۶$$

احتمال مورد نظر برابر است با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۶}{۲۴} = \frac{۱}{۴}$$

۲۵ **گزینه ۴**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

گام اول

الف) از بین $۱۱ = ۶ + ۵$ موش، ۳ موش انتخاب می‌شود. قرار است لااقل یک موش سـفید باشد پس می‌تواند یکی، دو تا یا هر سه تای آن‌ها سفید باشد.

ب) متمم این‌که لااقل یک موش از سه موش انتخاب شده سفید باشد، سیاه بودن هر سه موش است.

گام دوم

روش اول:

$$P(\text{لااقل یک موش سفید}) = P(\text{یک موش سفید}) + P(\text{دو موش سفید}) + P(\text{سه موش سفید})$$

$$= \frac{\binom{۵}{۱}\binom{۶}{۲}}{\binom{۱۱}{۳}} + \frac{\binom{۵}{۲}\binom{۶}{۱}}{\binom{۱۱}{۳}} + \frac{\binom{۵}{۳}}{\binom{۱۱}{۳}} = \frac{۷۵}{۱۶۵} + \frac{۶۰}{۱۶۵} + \frac{۱۰}{۱۶۵} = \frac{۱۴۵}{۱۶۵} = \frac{۲۹}{۳۳}$$

روش دوم: حل تست با استفاده از پیشامد احتمال متمم

$$P(A') = P(\text{هر سه موش سیاه}) = \frac{\binom{۶}{۳}}{\binom{۱۱}{۳}} = \frac{۲۰}{۱۶۵} = \frac{۴}{۳۳}$$

$$P(A) = P(\text{لااقل یک موش سفید}) = ۱ - P(A') = ۱ - \frac{۴}{۳۳} = \frac{۲۹}{۳۳}$$

۲۶ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

گام اول

الف) پیشامد داشتن تحصیلات ابتدایی را با A و پیشامد داشتن مهارت قالی‌بافی را با B نشان می‌دهیم. هدف محاسبه $P(A \cup B)$ است.

ب) می‌دانیم

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

ج) دو پیشامد A و B مستقل‌اند پس $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

با محاسبه $P(A \cap B)$ می‌توان $P(A \cup B)$ را حساب کرد.

گام دوم

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = ۰/۶ \times ۰/۲۵ = ۰/۱۵$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = ۰/۶ + ۰/۲۵ - ۰/۱۵ = ۰/۷$$

۲۷ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۹

گام اول

الف) تعداد کلمات ساخته شده با n حرف که m حرف از آن‌ها تکراری باشد برابر است با $\frac{n!}{m!}$.

ب) برای حل تست از روش دسته‌بندی استفاده می‌کنیم. یعنی حروفی که قرار است کنار هم باشند را در یک دسته قرار می‌دهیم و به عنوان یک حرف جدید در نظر می‌گیریم. به این صورت:

$$\underbrace{AAA}_{\text{یک حرف}}\,TXI$$

پس پیشامد مطلوب تعداد کلمات ساخته شده با ۴ حرف است.

گام دوم

$$n(S) = \frac{۶!}{۳!} = ۱۲۰$$
$$n(A) = ۴!$$
$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۴!}{۱۲۰} = \frac{۲۴}{۱۲۰} = \frac{۱}{۵}$$

۲۸ **گزینه ۴**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۹

گام اول

الف) یک عدد در صورتی بر ۶ بخش‌پذیر است که هر بر ۲ و هم بر ۳ بخش‌پذیر باشد.

ب) عددی بر ۳ بخش‌پذیر است که مجموع ارقامش بر ۳ بخش‌پذیر باشد. چون $۶ = ۳ + ۲ + ۱ + ۰$ پس عدد ساخته شده حتماً بر ۳ بخش‌پذیر است.

ج) عددی بر ۲ بخش‌پذیر است که رقم یکانش زوج باشد یعنی ۲ یا صفر. چون یکی از ارقام صفر است، در یک حالت یکان را صفر و در حالت دیگری یکان را ۲ در نظر می‌گیریم.

گام دوم

$$\left.\begin{array}{l} \text{یکان صفر}: ۳ \times ۲ \times ۱ \times ۱ = ۶ \\ \text{یکان دو}: ۲ \times ۲ \times ۱ \times ۱ = ۴ \end{array}\right\} n(A) = ۶ + ۴ = ۱۰$$

$$n(S) = ۳ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۱۸$$

بنابراین احتمال خواسته شده برابر است با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۱۰}{۱۸} = \frac{۵}{۹}$$

۲۹ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

گام اول

الف) چون در صورت تست گفته شده لااقل بر روی یکی از دو موش انتخاب شده آزمایش صورت گرفته باشد، یعنی یا یکی از موش‌ها یا هر دوی آن‌ها مورد آزمایش قرار بگیرند.

ب) اگر پیشامد A را مورد آزمایش واقع شدنِ لااقل یکی از موش‌ها تعریف کنیم، A' یعنی هیچ موشی آزمایش نشده باشد.

گام دوم

روش اول:

$$n(S)=\binom{۷}{۲}=\frac{۷!}{۵!۲!}=\frac{۴۲}{۲}=۲۱$$

$$n(A)=(\text{یکی از موش ها آزمایش شده باشد})+(\text{هردو موش آزمایش شده باشند})=\binom{۳}{۱}\binom{۴}{۱}+\binom{۳}{۲}=۱۲+۳=۱۵$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۵}{۲۱}=\frac{۵}{۷}$$

روش دوم: حل تست با استفاده از احتمال پیشامد متمم

$$P(A')=P(\text{هیچ موشی آزمایش نشده باشد})=\frac{n(A')}{n(S)}=\frac{\binom{۴}{۲}}{\binom{۷}{۲}}=\frac{۶}{۲۱}=\frac{۲}{۷}$$

$$P(A)=۱-P(A')=۱-\frac{۲}{۷}=\frac{۵}{۷}$$

۳۰ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

گام اول

قرار است فقط یکی از ۴ موش انتخاب شده سفید باشد پس باید یک موش از بین ۳ موشِ سفید و ۳ موش از بین ۵ موشِ سیاه انتخاب شود.

گام دوم

$$n(A)=\binom{۳}{۱}\binom{۵}{۳}=۳\times۱۰=۳۰$$

$$n(S)=\binom{۸}{۴}=\frac{۸!}{۴!۴!}=۷۰$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۳۰}{۷۰}=\frac{۳}{۷}$$

۳۱ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

گام اول

به طور کلی $۱۱ = ۶ + ۵$ موش داریم. پیشامد مطلوب این است که هر ۳ موش از بین ۶ موشِ سفید انتخاب شوند.

گام دوم

$$n(S) = \binom{۱۱}{۳} = \frac{۱۱!}{۳!۸!} = \frac{۱۱ \times ۱۰ \times ۹ \times ۸!}{۶ \times ۸!} = ۱۶۵$$

$$n(A) = \binom{۶}{۳} = \frac{۶!}{۳!۳!} = \frac{۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳!}{۶ \times ۳!} = ۲۰$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۲۰}{۱۶۵} = \frac{۴}{۳۳}$$

۳۲ گزینه ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۱

گام اول

به طور کلی $۸ = ۳ + ۵$ موش در آزمایشگاه وجود دارد. پیشامد مطلوب این است که فقط یکی از موش‌ها دیابتی باشد. پس یک موش از بین ۵ موشِ سالم و یک موش از بین ۳ موشِ دیابتی انتخاب می‌شود.

گام دوم

$$n(S) = \binom{۸}{۲} = \frac{۸!}{۲!۶!} = \frac{۸ \times ۷ \times ۶!}{۲ \times ۶!} = \frac{۵۶}{۲} = ۲۸$$

$$n(A) = \binom{۳}{۱}\binom{۵}{۱} = ۳ \times ۵ = ۱۵$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۱۵}{۲۸}$$

۳۳ **گزینه ۲**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰
قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۶

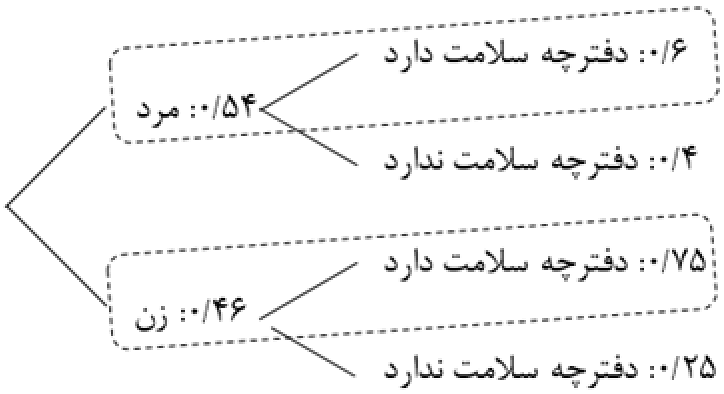
گام اول

فرد انتخاب شده با احتمال ۰/۵۴ مرد و با احتمال ۰/۴۶ زن است.

هر مرد با احتمال ۰/۶ دفترچه دارد و با احتمال $۰/۴ = ۰/۶ - ۱$ دفترچه ندارد. همچنین هر زن با احتمال ۰/۷۵ دفترچه دارد و با احتمال ۰/۲۵ دفترچه ندارد.

گام دوم

با رسم یک نمودار درختی می‌توان احتمال دفترچه‌دار بودن فرد انتخاب شده را محاسبه کرد.



حالت مطلوب می‌تواند به صورت مردی با دفترچه باشد یا یک زن با دفترچه، پس:

$$P(\text{دفترچه دار بودن}) = P(\text{مرد با دفترچه}) + P(\text{زن با دفترچه}) = (۰/۵۴ \times ۰/۶) + (۰/۴۶ \times ۰/۷۵) = ۰/۳۲۴ + ۰/۳۴۵$$
$$= ۰/۶۶۹$$

۳۴ **گزینه ۲**

پیشامد A را رو شدن دو عدد متوالی تعریف می‌کنیم، تمام حالت‌های ممکن به‌صورت زیر است:

$$A = \{(۱,۲),(۲,۱),(۲,۳),(۳,۲),(۳,۴),(۴,۳),(۴,۵),(۵,۴),(۵,۶),(۶,۵)\}$$

تعداد حالت‌های مطلوب برابر ۱۰ و تعداد کل حالت‌ها برابر ۳۶ است؛ بنابراین احتمال پیشامد A برابر می‌شود با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۱۰}{۳۶} = \frac{۵}{۱۸}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۳۵ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

گام اول

از میان ۳ مهرهٔ انتخاب‌شده، فقط یکی سفید است؛ یعنی یک مهره از بین ۴ مهرهٔ سفید و ۲ مهره از بین مهره‌های سیاه و قرمز انتخاب شود (پیشامد A).

گام دوم

انتخاب ۳ مهره از بین ۹ مهره: $\binom{۹}{۳}$

انتخاب یک مهره از بین ۴ مهرهٔ سفید: $\binom{۴}{۱}$

انتخاب دو مهره از مهره‌های سیاه و قرمز: $\binom{۵}{۲}$

$$n(A) = \binom{۴}{۱} \times \binom{۵}{۲} = ۴ \times ۱۰ = ۴۰$$

$$n(s) = \binom{۹}{۳} = \frac{۹!}{۳! \times ۶!} = \frac{۹ \times ۸ \times ۷ \times ۶!}{۶ \times ۶!} = ۸۴$$

بنابراین احتمال اینکه فقط یکی از مهره‌ها سفید باشد برابر است با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۴۰}{۸۴} = \frac{۱۰}{۲۱}$$

۳۶ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

گام اول

الف) می‌خواهیم حداقل ۲ مهرهٔ سفید و یک مهرهٔ قرمز داشته باشیم و در مجموع هم چهار مهره از جعبه خارج می‌کنیم، پس حالات زیر ممکن است رخ دهد:

۱) یک مهرهٔ قرمز، دو مهرهٔ سفید و یک مهرهٔ سیاه.

۲) یک مهرهٔ قرمز، سه مهرهٔ سفید

ب) تعداد کل حالت‌های انتخابی هم، انتخاب ۴ مهره از بین ۱۴ مهرهٔ موجود در جعبه است.

گام دوم

$$n(S) = \binom{۱۴}{۴} = \frac{۱۴!}{۴! \times ۱۰!} = \frac{۱۴ \times ۱۳ \times ۱۲ \times ۱۱ \times ۱۰!}{۲۴ \times ۱۰!} = ۱۳ \times ۱۱ \times ۷$$

$$n(A) = \binom{۲}{۱}\binom{۷}{۲}\binom{۵}{۱} + \binom{۲}{۱}\binom{۷}{۳} = (۲ \times ۲۱ \times ۵) + (۲ \times ۳۵) = ۲۱۰ + ۷۰ = ۲۸۰$$

پس احتمال موردنظر برابر است با:

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۲۸۰}{۱۳ \times ۱۱ \times ۷} = \frac{۴۰}{۱۳ \times ۱۱} = \frac{۴۰}{۱۴۳}$$

۳۷ **گزینه ۲**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

گام اول

با دو حالت روبه‌رو هستیم. اگر رو بیاید از ۵ تیر رهاشده باید یک تیر به هدف بخورد. اگر سکه پشت بیاید از ۳ تیر رهاشده باید یک تیر به هدف اصابت کند.

گام دوم

با استفاده از احتمال توزیع دوجمله‌ای، احتمال برخورد فقط یک تیر به هدف از میان تیرهای رهاشده را به دست می‌آوریم.

به‌احتمال $\frac{1}{2}$ سکه رو می‌آید. احتمال اینکه یک تیر از ۵ تیر به هدف بخورد:

$$P(\text{رو و اصابت یک تیر}) = \frac{1}{2}\binom{5}{1}\left(\frac{3}{5}\right)^1\left(\frac{2}{5}\right)^4 = \frac{1}{2}\times 5\times\frac{3}{5}\times\frac{16}{5^4} = \frac{24}{5^4} = \frac{24}{625}$$

به‌احتمال $\frac{1}{2}$ سکه پشت می‌آید. احتمال اینکه یک تیر از ۳ تیر به هدف بخورد:

$$P(\text{پشت و اصابت یک تیر}) = \frac{1}{2}\binom{3}{1}\left(\frac{3}{5}\right)^1\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{1}{2}\times 3\times\frac{3}{5}\times\frac{4}{25} = \frac{18}{125} = \frac{90}{625}$$

پس احتمال کل برخورد یک تیر از میان تیرهای رهاشده برابر است با:

$$P(\text{اصابت یک تیر}) = P(\text{رو و اصابت یک تیر}) + P(\text{پشت و اصابت یک تیر})$$
$$= \frac{24}{625} + \frac{90}{625} = \frac{114}{625}$$

۳۸ **گزینه ۲**

$$n(A) = \{(1,2,3)(2,3,4)(1,3,5)(3,4,5)\} \Rightarrow n(A) = 4\ ,\ \ n(S) = \binom{5}{3} = 10$$
$$\Rightarrow P = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{10}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۳۹ **گزینه ۴**

پیشامدها مستقل می‌باشند؛بنابراین:

$$P(A\cap B) = P(A)\times P(B)$$
$$P(\text{حداقل یکی ازافرادوموفقیت آمیز باشد}) = 1 - P(\text{هردو عمل ناموفق باشد})$$
$$= 1-(1-0/9)\times(1-0/8) = 1-0/02 = 0/98$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۴۰ **گزینه ۲**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

گام اول

برای اینکه رنگ مهره‌های خارج‌شده متفاوت باشد باید از هر رنگ یک مهره انتخاب کنیم.

گام دوم

$$n(S) = \binom{۱۲}{۳} = \frac{۱۲!}{۳!\times ۹!} = \frac{۱۲\times ۱۱\times ۱۰}{۶} = ۲۲۰$$
$$n(A) = \binom{۵}{۱}\times\binom{۴}{۱}\times\binom{۳}{۱} = ۵\times ۴\times ۳ = ۶۰$$
$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۶۰}{۲۲۰} = \frac{۶}{۲۲} = \frac{۳}{۱۱}$$

۴۱ **گزینه ۳**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

گام اول

الف) پیشامد داشتن ۲ فرزند پسر را A و پیشامد داشتن ۳ فرزند دختر را B می‌نامیم. هدف محاسبه $P(A\cup B)$ است.

ب) یک خانواده ۴ فرزندی در یک زمان نمی‌تواند ۲ فرزند پسر و ۳ فرزند دختر داشته باشد. بنابراین پیشامدهای A و B هیچ اشتراکی ندارند و با هم ناسازگارند، یعنی:

$$A\cap B = \varnothing \Rightarrow P(A\cap B) = ۰$$

ج) $P(A)$ و $P(B)$ را با استفاده از توزیع دو جمله‌ای حساب می‌کنیم.

گام دوم

$P(A) = P($دو فرزند پسر از چهار فرزند خانواده$)$

$$p = \frac{۱}{۲}, q = \frac{۱}{۲}, n = ۴, x = ۲$$

$$P(A) = P(x = ۲) = \binom{۴}{۲}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲} = ۶\times\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۴} = \frac{۶}{۱۶}$$

$P(B) = P($سه فرزند دختر از چهار فرزند خانواده$)$

$$p = \frac{۱}{۲}, q = \frac{۱}{۲}, n = ۴, x = ۳$$

$$P(B) = P(x = ۳) = \binom{۴}{۳}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۳}\left(\frac{۱}{۲}\right) = ۴\times\frac{۱}{۸}\times\frac{۱}{۲} = \frac{۴}{۱۶}$$

پس $P(A\cup B)$ برابر است با:

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = \frac{۶}{۱۶} + \frac{۴}{۱۶} - ۰ = \frac{۱۰}{۱۶} = \frac{۵}{۸}$$

۴۲ **گزینه ۲**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۹

گام اول

با این شرط که می‌دانیم یکی از فرزندان خانوادهٔ سه فرزندی پسر است، فضای نمونه‌ای جدید را تعریف کرده و پیشامد مطلوب را از میان آن مشخص می‌کنیم.

گام دوم

$$S = \{(\text{پ, د, د}), (\text{د, پ, د}), (\text{د, د, پ}), (\text{پ, پ, د}), (\text{پ, د, پ}), (\text{د, پ, پ}), (\text{پ, پ, پ})\}$$

در واقع حالتی که تمام فرزندان دختر باشد، حذف شده است. پس در حالت جدید داریم:

$$n(S) = ۷$$

پیشامد A که داشتن دو دختر از میان سه فرزند را بیان می‌کند، ۳ عضو دارد.

$$A = \{(\text{پ, د, د}), (\text{د, پ, د}), (\text{د, د, پ})\}$$

$$n(A) = ۳$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۳}{۷}$$

۴۳ **گزینه ۴**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

گام اول

الف) به طور کلی $۸ = ۳ + ۵$ موش در آزمایشگاه وجود دارد. قرار است اولین موش سفید و سومین موش سیاه باشد پس موش دوم می‌تواند سفید یا سیاه باشد. یعنی دو حالت داریم.

ب) این دو حالت هیچ اشتراکی با هم ندارند پس احتمال کل برابر مجموع احتمال‌های دو حالت تعریف می‌شود.

گام دوم

حالت اول: موش اول سفید، موش دوم سفید، موش سوم سیاه

$$P_۱ = \frac{۵}{۸} \times \frac{۴}{۷} \times \frac{۳}{۶} = \frac{۶۰}{۳۳۶} = \frac{۵}{۲۸}$$

حالت دوم: موش اول سفید، موش دوم سیاه، موش سوم سیاه

$$P_۲ = \frac{۵}{۸} \times \frac{۳}{۷} \times \frac{۲}{۶} = \frac{۳۰}{۳۳۶} = \frac{۵}{۵۶}$$

پس احتمال خواسته شده برابر است با:

$$P = P_۱ + P_۲ = \frac{۵}{۲۸} + \frac{۵}{۵۶} = \frac{۱۰+۵}{۵۶} = \frac{۱۵}{۵۶}$$

۴۴ **گزینهٔ ۴**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

گام اول

الف) در چنین تست‌های احتمال شرطی بهتر است ابتدا فضای نمونه‌ای جدید را با توجه به شرط داده شده تعریف کنیم. می‌دانیم در یک خانوادهٔ سه فرزندی تعداد اعضای فضای نمونه‌ای $۸ = ۲^۳$ است. چون حداقل یکی از فرزندان حتماً دختر است پس حالتی که هر سه فرزند پسر باشند از فضای نمونه‌ای حذف می‌شود.

ب) پیشامد مطلوب را با توجه به فضای نمونه‌ای جدید تعیین می‌کنیم.

گام دوم

$$n(S) = ۸ - ۱ = ۷$$

اگر پیشامد داشتن حداقل دو فرزند دختر را با A نشان دهیم، داریم:

$$A = \{(\text{د, د, پ}), (\text{د, پ, د}), (\text{پ, د, د}), (\text{د, د, د})\}$$

$$n(A) = ۴$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۴}{۷}$$

۴۵ **گزینهٔ ۴**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

گام اول

الف) با توجه به این‌که مشخص شده فرزند اول خانواده دختر است، اعضای فضای نمونه‌ای را در حالت جدید حساب کرده و احتمال مورد نظر را به دست می‌آوریم.

ب) چون گفته شده لااقل یکی از فرزندان پسر باشد، پس از دو فرزند باقی مانده یکی یا هر دو باید پسر باشد.

گام دوم

$$S = \{(\text{د, پ, پ}), (\text{د, پ, د}), (\text{د, د, پ}), (\text{د, د, د})\}$$

$$n(S) = ۴$$

$$A = \{(\text{د, پ, د}), (\text{د, د, پ}), (\text{د, پ, پ})\}$$

$$n(A) = ۳$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۳}{۴}$$

۴۶ **گزینه ۲**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۲

گام اول

الف) وضعیت دو فرزند اول مشخص شده است پس باید یک فضای نمونه‌ای جدید برای حل تست تعریف کرد.

ب) علاوه بر آن، چون جنسیت دو فرزند اول معلوم است مثل این است که در یک خانواده دو فرزندی، احتمال آن‌که هر دو فرزند دختر باشد را از ما بخواهند.

گام دوم

روش اول:

$$S = \left\{(\text{د}, \text{د}, \text{پ}, \text{پ}), (\text{پ}, \text{د}, \text{پ}, \text{پ}), (\text{د}, \text{پ}, \text{پ}, \text{پ}), (\text{پ}, \text{پ}, \text{پ}, \text{پ})\right\}$$

$$n(S) = ۴$$

$$A = \left\{(\text{د}, \text{د}, \text{پ}, \text{پ})\right\}$$

$$n(A) = ۱$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۱}{۴}$$

روش دوم:

$$P(A) = P(\text{دختر بودن فرزند سوم}) \times P(\text{دختر بودن فرزند چهارم}) = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۴}$$

۴۷ **گزینه ۳**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

گام اول

الف) فضای نمونه‌ای مربوط به یک خانواده دو فرزندی چهار حالت دارد. اما با توجه به اینکه می‌دانیم یکی از فرزندان پسر است، حالتی که هر دو فرزند دختر باشند را حذف می‌کنیم.

ب) با توجه به فضای نمونه‌ای جدید، احتمال پیشامد خواسته شده را حساب می‌کنیم.

گام دوم

$$S = \left\{(\text{پ}, \text{پ}), (\text{پ}, \text{د}), (\text{د}, \text{پ})\right\}$$

$$n(S) = ۳$$

از میان ۳ حالت نوشته شده فقط ۲ حالت مطلوب ماست و حالتی که هر دو فرزند پسر باشد قابل قبول نیست. بنابراین احتمال این‌که این خانواده دارای فرزند دختر باشد برابر $\frac{۲}{۳}$ است.

۴۸ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

گام اول

الف) ابتـدا باید یکی از سه ظرف A، B و C را انتخـاب کرد. می‌دانیم احتمـال انتخـاب شـدن هر یک از ظرف‌ها با هم برابر است پس احتمال انتخاب یک ظرف از بین سه ظرف برابر $\frac{۱}{۳}$ می‌شود.

ب) احتمال سفید بودن دو مهره از بین ۴ مهرهٔ انتخابی را برای هر یک از ظرف‌ها جـداگانه حساب کرده و در نهایت احتمال خواسـته شده را به دست می‌آوریم.

گام دوم

ظرف A : ۴مهرهٔ سفید و ۵ مهرهٔ سیاه

$$P\left(\text{دو مهرهٔ سفید}\right) = \frac{\binom{۴}{۲}\binom{۵}{۲}}{\binom{۹}{۴}} = \frac{۶\times۱۰}{۱۲۶} = \frac{۶۰}{۱۲۶}$$

ظرف B,C: ۶ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه

$$P\left(\text{دو مهرهٔ سفید}\right) = \frac{\binom{۶}{۲}\binom{۳}{۲}}{\binom{۹}{۴}} = \frac{۱۵\times۳}{۱۲۶} = \frac{۴۵}{۱۲۶}$$

و اما احتمال کلی خارج شدن دو مهرهٔ سفید را چنین محاسبه می‌کنیم:

$$P(\text{دومهرهٔ سفید}) = P(\text{ظرف } A \text{ و دو مهرهٔ سفید}) + P(\text{ظرف } B \text{ و دو مهرهٔ سفید}) + P(\text{ظرف } C \text{ و دو مهرهٔ سفید})$$

$$= \left(\frac{۱}{۳}\times\frac{۶۰}{۱۲۶}\right) + \left(\frac{۱}{۳}\times\frac{۴۵}{۱۲۶}\right) + \left(\frac{۱}{۳}\times\frac{۴۵}{۱۲۶}\right) = \frac{۲۰+۱۵+۱۵}{۱۲۶} = \frac{۵۰}{۱۲۶} = \frac{۲۵}{۶۳}$$

۴۹ **گزینه ۱**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

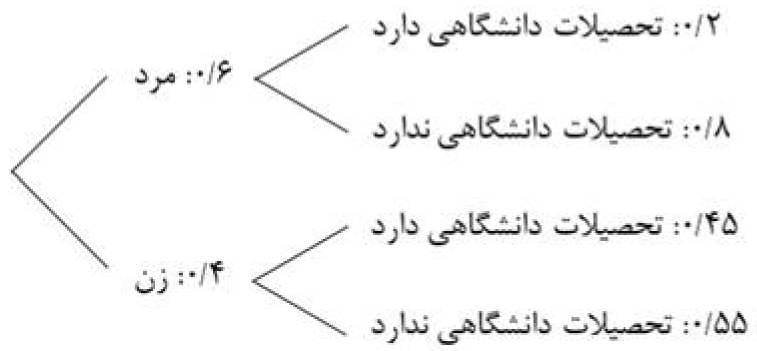
گام اول

الف) برای حل تست ابتدا مسـئله را در یک حالت ساده‌تر حل می‌کنیم. اگر قرار باشد یک نفر از این سازمان انتخاب شود محاسبه می‌کنیم با چه احتمـالی دارای تحصـیلات دانشـگاهی است. دو حالت داریم: یک مرد با تحصـیلات دانشـگاهی و یک زن با تحصـیلات دانشـگاهی. از نمودار درختی برای محاسبه احتمال استفاده می‌کنیم.

ب) ۳ نفر به تصادف انتخاب می‌شوند. برای محاسـبه احتمال این‌که دو نفر از بین ۳ نفر دارای تحصیلات دانشگاهی باشند از توزیع دو جمله‌ای استفاده می‌کنیم.

گام دوم

محاسبه احتمال دارا بودن تحصیلات دانشگاهی:



پس احتمال انتخاب فردی با تحصیلات دانشگاهی برابر است با:

$$P(\text{تحصیلات دانشگاهی دارد}) = P(\text{مرد, تحصیلات دانشگاهی دارد}) + P(\text{زن, تحصیلات دانشگاهی دارد})$$

$$= \left(\frac{۶}{۱۰} \times \frac{۲}{۱۰}\right) + \left(\frac{۴}{۱۰} \times \frac{۵}{۱۰۰}\right) = \frac{۱۲}{۱۰۰} + \frac{۱۸۰}{۱۰۰۰} = \frac{۱۲۰+۱۸۰}{۱۰۰۰} = ۰/۳$$

احتمال این‌که ۲ نفر از ۳ نفر انتخاب شده تحصیلات دانشگاهی داشته باشند برابر است با:

$$p = ۰/۳,\ q = ۰/۷,\ n = ۳,\ x = ۲$$

$$P = \binom{۳}{۲} (۰/۳)^{۲} (۰/۷)^{۱} = ۳ \times \frac{۹}{۱۰۰} \times \frac{۷}{۱۰} = ۰/۱۸۹$$

۵۰ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

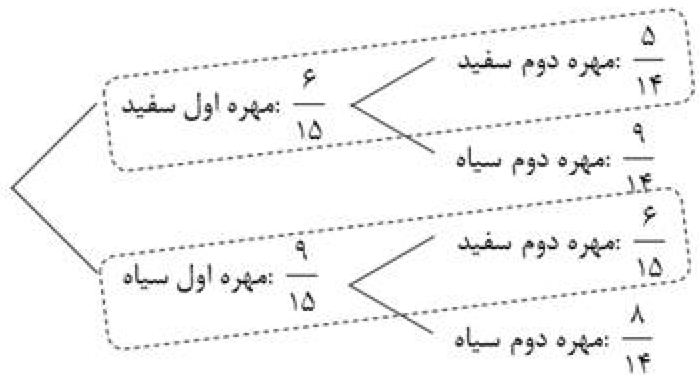
گام اول

الف) مهره اول خارج شده می‌تواند سفید یا سیاه باشد. احتمال سفید بودن مهرهٔ دوم بر اساس حالت مهرهٔ اول قابل محاسبه است.

ب) از نگاهی دیگر، چون رنگ مهرهٔ اول را نمی‌دانیم فرض می‌کنیم هنوز مهره‌ای خارج نشده و احتمال سفید بودن مهرهٔ دوم را محاسبه می‌کنیم.

گام دوم

روش اول:



بنابراین داریم:

$$P\left(\text{دو مهرهٔ سفید}\right) = \left(\frac{6}{15} \times \frac{5}{14}\right) + \left(\frac{9}{15} \times \frac{6}{14}\right) = \frac{30+54}{210} = \frac{84}{210} = \frac{2}{5}$$

روش دوم:

بدون توجه به رنگ مهرهٔ اول و با فرض این‌که هنوز مهره‌ای خارج نشده، احتمال سفید بودن رنگ مهرهٔ دوم برابر $\frac{2}{5}$ است.

۵۱ گزینه ۱

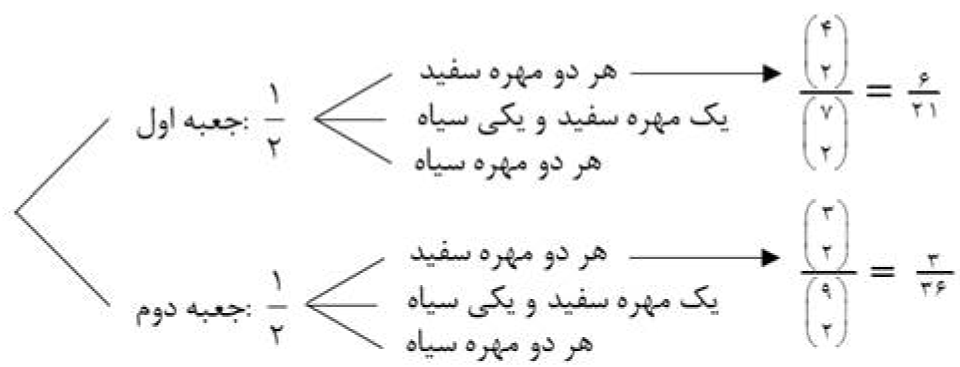
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

گام اول

الف) احتمال انتخاب هر یک از جعبه‌ها برابر $\frac{1}{2}$ است.

ب) احتمال سفید بودن دو مهره خارج شده از هر یک از جعبه‌ها را تعیین کرده و با استفاده از نمودار درختی احتمال کل را محاسبه می‌کنیم.

گام دوم



$$P(\text{هر دو مهره سفید}) = P(\text{جعبهٔ اول و سفید}) + P(\text{جعبهٔ دوم و سفید})$$

$$= \left(\frac{1}{2} \times \frac{6}{21}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{36}\right) = \frac{31}{168}$$

۵۲ **گزینه ۳**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

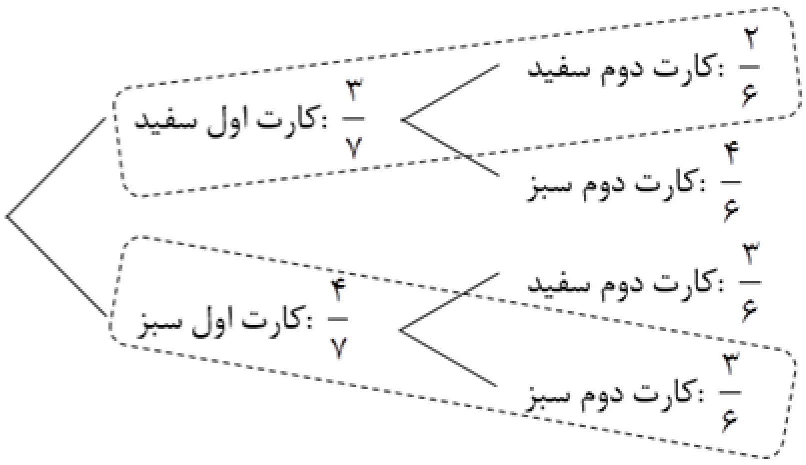
گام اول

کارت اول می‌تواند سـفید یا سبز باشد و کارت دوم هم می‌تواند سفید یا سبز باشد. حالت دلخواه همرنگ بودن دو کارت است یعنی هر دو سبز یا هر دو سفید. دقت کنید که کارت‌ها بدون جای‌گذاری بیرون آورده می‌شوند و کل کارت‌های موجود برابر است با: $۷ = ۴ + ۳$

گام دوم

با استفاده از نمودار درختی احتمال همرنگ بودن دو کارت را محاسبه می‌کنیم.

$$P(\text{همرنگ بودن}) = P(\text{هردو سفید}) + P(\text{هردو سبز}) = \left(\frac{۳}{۷} \times \frac{۲}{۶}\right) + \left(\frac{۴}{۷} \times \frac{۳}{۶}\right) = \frac{۱}{۷} + \frac{۲}{۷} = \frac{۳}{۷}$$



۵۳ **گزینه ۱**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۹

گام اول

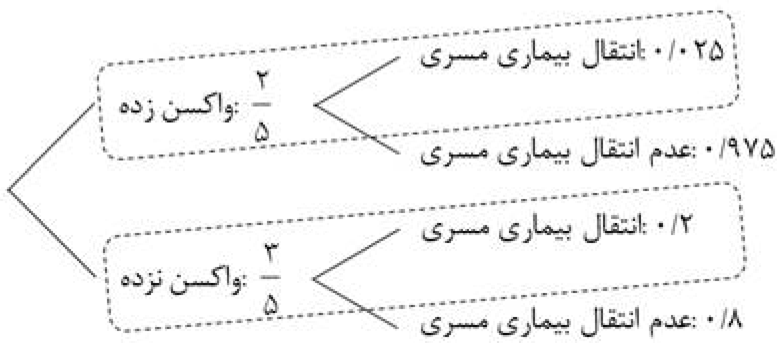
الف) هر یک از کارگران کارگاه می‌تواننـد واکسن زده باشـند یا واکسن نزده باشـند. احتمال این‌که کارگری واکسن زده باشد $\frac{۲}{۵}$ و احتمال این‌که واکسن نزده باشد $\frac{۳}{۵} = \frac{۲}{۵} - ۱$ است.

ب) هر فرد واکسن زده با احتمال ۰/۰۲۵ بیماری مسری را می‌گیرد و با احتمال $۰٫۹۷۵ = ۰٫۰۲۵ - ۱$ بیمار نمی‌شود.

ج) هر فردی که واکسن نزده باشد با احتمال ۰/۲ بیماری مسری را می‌گیرد و با احتمال $۰٫۸ = ۰٫۲ - ۱$ بیمار نمی‌شود.

گام دوم

با استفاده از نمودار درختی احتمال این‌که یک کارگر به بیماری مسری مبتلا شود را محاسبه می‌کنیم.



$$P(\text{انتقال بیماری به کارگر}) = P(\text{انتقال به واکسن زده}) + P(\text{انتقال به واکسن نزده}) = \left(\frac{۲}{۵} \times ۰٫۰۲۵\right) + \left(\frac{۳}{۵} \times ۰٫۲\right) = ۰٫۰۱ + ۰٫۱۲ = ۰٫۱۳$$

۵۴ گزینه ۲

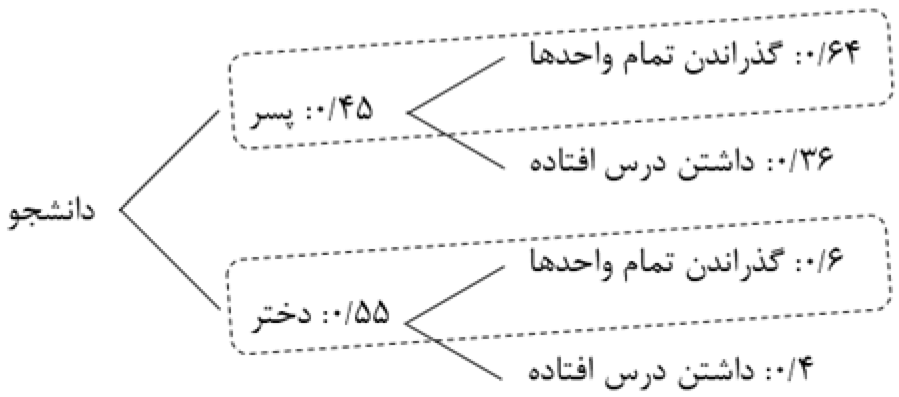
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

گام اول

هر دانشـجوی سال اول با احتمال ۰/۵۵ دختر است و بـا احتمال ۰/۴۵ پسـر است. هر دانشجوی دختر با احتمال ۰/۶ تمام واحدهای درسی خود را گذرانـده و با احتمال ۰/۶ درس افتاده دارد. همچنین هر دانشـجوی پسـر با احتمال ۰/۶۴ تمام واحـدهای درسـی خود را گذرانده و با احتمال ۰/۳۶ درس افتاده دارد.

گام دوم

با استفاده از نمودار درختی می‌توان احتمال این‌که هر دانشجو تمام واحد درسی خود را گذرانده باشد، را حساب کرد:



$$P(\text{گذراندن تمام واحدها}) = P(\text{پسر و گذراندن تمام واحدها}) + P(\text{دختر و گذراندن تمام واحدها}) = (0{,}45 \times 0{,}64) + (0{,}55 \times 0{,}6) = 0{,}618$$

بنابراین ۶۱/۸ درصد از دانشجویان تمام واحدهای درسی را گذرانده‌اند.

۵۵ **گزینه ۲**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

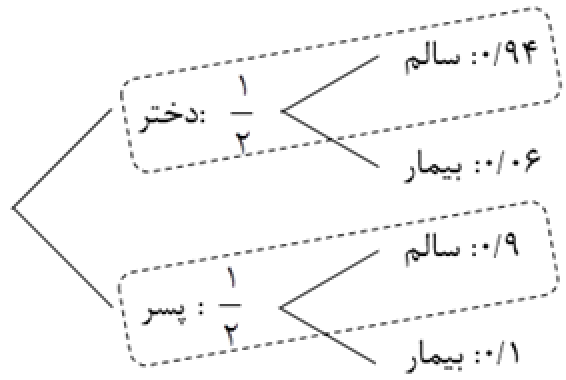
گام اول

الف) هر فرزند پسر با احتمال ۰/۱ بیماری ارثی از والدینش دریافت می‌کند و با احتمال ۰/۹ دریافت نمی‌کند و سالم است. به همین ترتیب هر فرزند دختر با احتمال ۰/۰۶ بیماری ارثی دریافت می‌کند و با احتمال ۰/۹۴ دریافت نمی‌کند و سالم است.

ب) به کلمه ندارد دقت کنید. احتمال سالم بودن فرزند به دنیا آمده را باید حساب کرد.

گام دوم

هر فرزند به دنیا آمده با احتمال $\frac{۱}{۲}$ دختر و با احتمال $\frac{۱}{۲}$ پسر است. دو حالت مطلوب وجود دارد: فرزند پسر و سالم باشد یا فرزند دختر و سالم باشد. با استفاده از نمودار درختی احتمال خواسته شده را محاسبه می‌کنیم.



$$P(\text{سالم بودن فرزند}) = P(\text{دختر و سالم}) + P(\text{پسر و سالم}) = \left(\frac{۱}{۲} \times ۰/۹۴\right) + \left(\frac{۱}{۲} \times ۰/۹\right) = ۰٫۴۷ + ۰٫۴۵ = ۰٫۹۲$$
$$= \%۹۲$$

۵۶ **گزینه ۲**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

گام اول

الف) احتمال مرغوب بودن هر کالا ۰/۷۵ و احتمال نامرغوب بودنش ۰/۲۵ است.

ب) هدف این است که از میان ۴ کالای خریداری شده حداقل یکی مرغوب باشد. پس می‌تواند یک کالا، دو کالا، سه کالا و یا هر چهار کالای خریداری شده مرغوب باشد.

گام دوم

برای حل تست از احتمال توزیع دو جمله‌ای استفاده می‌کنیم. پیروزی را مرغوب بودن کالا و شکست را نامرغوب بودن آن در نظر می‌گیریم. پس داریم: $q = ۰٫۲۵$ و $p = ۰٫۷۵$ و $n = ۴$.

به دلیل زمان‌گیر بودن حل معمولی تست از احتمال پیشامد متمم استفاده می‌کنیم، یعنی احتمال اینکه تمام کالاها نامرغوب باشد را محاسبه می‌کنیم. پیشامد متمم را با A' نشان می‌دهیم، بنابراین:

$$P(A') = P(\text{همگی نامرغوب باشند}) = \left(\frac{۲۵}{۱۰۰}\right)^۴ = \left(\frac{۱}{۴}\right)^۴ = \frac{۱}{۲۵۶}$$
$$P(A) = ۱ - P(A') = ۱ - \frac{۱}{۲۵۶} = \frac{۲۵۵}{۲۵۶}$$

۵۷ **گزینه ۴**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵

گام اول

آزمایش انجام شده چون فقط دو نتیجه دارد که متمم هم هستند پس دارای توزیع دو جمله‌ای است که $p = \frac{۳}{۴}$، $q = \frac{۱}{۴}$ و $n = ۱۶$ است.

$P(۰ \leq X \leq ۱۶)$ یعنی $P(X = ۰) + P(X = ۱) + \ldots + P(X = ۱۶)$

گام دوم

می‌دانیم در هر آزمایش تصادفی مجموع تمام مقادیر توزیع احتمال همواره برابر یک است. این تست نیز مجموع تمام مقادیر توزیع دو جمله‌ای را می‌خواهد، پس $P(۰ \leq X \leq ۱۶) = ۱$

۵۸ **گزینه ۲**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

گام اول

الف) احتمال انتقال ویروس از فرد بیمار به فرد مستعد ۰/۱ و احتمال عدم انتقال آن $۰/۹ = ۰/۱ - ۱$ است. پس با تعریف انتقال ویروس به عنوان پیروزی با یک توزیع احتمالی دو جمله‌ای روبه‌رو هستیم.

ب) چون بیمار شدن دو نفر از چهار نفر مستعد و سه نفر از چهار نفر مستعد مستقل از یکدیگرند، پس آن‌چه قرار است محاسبه شود به صورت زیر خواهد بود:

P(مبتلا شدن دو یا سه نفر از چهار نفر) $= P$(مبتلا شدن دو نفر از چهار نفر) $+ P$(مبتلا شدن سه نفر از چهار نفر)

گام دوم

بیمار شدن دو نفر از چهار نفر : $p = ۰/۱,\ q = ۰/۹,\ n = ۴,\ x = ۲$

$$P_۱ = P(x = ۲) = \binom{۴}{۲}(۰/۱)^۲(۰/۹)^۲ = ۶ \times ۰/۰۱ \times ۰/۸۱ = ۰/۰۴۸۶$$

بیمار شدن سه نفر از چهار نفر : $p = ۰/۱,\ q = ۰/۹,\ n = ۴,\ x = ۳$

$$P_۲ = P(x = ۳) = \binom{۴}{۳}(۰/۱)^۳(۰/۹)^۱ = ۴ \times ۰/۰۰۱ \times ۰/۹ = ۰/۰۰۳۶$$

P(مبتلا شدن دو یاسه نفر از چهار نفر) $= P_۱ + P_۲ = ۰/۰۴۸۶ + ۰/۰۰۳۶ = ۰/۰۵۲۲$

۵۹ **گزینه ۴**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۲

گام اول

الف) هر بذر با احتمال ۰/۸ جوانه می‌زند و با احتمال ۰/۲ جوانه نمی‌زند.

ب) چون گفته شده لااقل دو بذر از سه بذر کاشته شده جوانه بزند پس باید احتمال جوانه زدن دو بذر از سه بذر یا سه بذر از سه بذر موجود محاسبه شود.

گام دوم

می‌توان مسأله را با استفاده از توزیع احتمالی دو جمله‌ای، با تعریف جوانه زدن به عنوان پیروزی حل کرد.

احتمال جوانه زدن دو بذر از سه بذر : $p = ۰/۸ ,\ q = ۰/۲ ,\ n = ۳ ,\ x = ۲$

$$P_۱ = P(x = ۲) = \binom{۳}{۲}(۰/۸)^۲(۰/۲)^۱ = ۳ \times ۰/۶۴ \times ۰/۲ = ۰/۳۸۴$$

احتمال جوانه زدن سه بذر از سه بذر : $p = ۰/۸ ,\ q = ۰/۲ ,\ n = ۳ ,\ x = ۳$

$$P_۲ = P(x = ۳) = \binom{۳}{۳}(۰/۸)^۳(۰/۲)^۰ = ۱ \times ۰/۵۱۲ \times ۱ = ۰/۵۱۲$$

$P($جوانه زدن لااقل دو بذر از سه بذر$) = P_۱ + P_۲ = ۰/۳۸۴ + ۰/۵۱۲ = ۰/۸۹۶$

۶۰ **گزینه ۱**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۱

گام اول

الف) احتمال این‌که فردی دارای گروه خونی A باشد ۰/۳ و احتمال این‌که نباشد ۰/۷ است.

ب) پیروزی را دارا بودن گروه خونی A و شکست را نداشتن این گروه خونی تعریف می‌کنیم. بنابراین:

$$p = ۰/۳,\ q = ۰/۷,\ n = ۳,\ k = ۲$$

گام دوم

با استفاده از توزیع احتمال دو جمله‌ای و با توجه به قسمت ب از گام اول، تست را حل می‌کنیم:

$$P(k = ۲) = \binom{۳}{۲}(۰/۳)^۲(۰/۷)^۱ = ۳ \times ۰/۰۹ \times ۰/۷ = ۰/۱۸۹$$

۶۱ **گزینه ۱**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۰

گام اول

الف) احتمال این‌که واکسن تأثیر مثبت داشته باشد ۰/۹ و احتمال این‌که تأثیر مثبت نداشته باشد $۰/۱ = ۰/۹ - ۱$ است.

ب) از توزیع احتمال دو جمله‌ای استفاده می‌کنیم. پیروزی را تأثیر مثبت داشتن واکسن و شکست را تأثیر مثبت نداشتن آن تعریف می‌کنیم.

هدف پیدا کردن $P(k = ۳)$ است.

گام دوم

با توجه به توزیع احتمال دو جمله‌ای مسأله را چنین حل می‌کنیم:

$$p = ۰/۹,\ q = ۰/۱,\ n = ۵,\ k = ۳$$

$$P(k = ۳) = \binom{۵}{۳}(۰/۹)^{۳}(۰/۱)^{۲} = ۱۰ \times ۰/۷۲۹ \times ۰/۰۱ = ۰/۰۷۲۹$$

۶۲ **گزینه ۳**

در حل تست به نکات زیر توجه داشته باشید:

الف) فرزندی که به دنیا می‌آید یا دختر است و یا پسر. پس در شرایط یکسان احتمال دختر یا پسر بودن $\frac{۱}{۲}$ است.

ب) می‌توان از توزیع دو جمله‌ای استفاده کرده و پیروزی را پسر بودن تعریف کنیم و یا این‌که فضای نمونه‌ای و پیشامد مطلوب را مشخص کنیم و با فرمول اولیه احتمال، آن‌چه خواسته شده را حساب کنیم.

روش اول:

با استفاده از توزیع احتمال دو جمله‌ای مسأله را چنین حل می‌کنیم:

$$p = \frac{۱}{۲},\ q = \frac{۱}{۲},\ n = ۴,\ k = ۲$$

$$P(k = ۲) = \binom{۴}{۲}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲} = ۶ \times \frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{۴} = \frac{۶}{۱۶} = \frac{۳}{۸}$$

روش دوم:

چون خانواده چهار فرزند دارد پس اعضای فضای نمونه‌ای برابر است با:

$$n(S) = ۲^{۴} = ۱۶$$

پیشامد مطلوب را حالت‌هایی تعریف می‌کنیم که دو فرزند پسر و دو فرزند دختر باشد.

$$A = \{(\text{د, د, پ, پ}), (\text{پ, پ, د, د}), (\text{پ, د, پ, د}), (\text{د, پ, د, پ}), (\text{پ, د, د, پ}), (\text{د, پ, پ, د})\}$$

$$n(A) = ۶$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۶}{۱۶} = \frac{۳}{۸}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۴

۶۳ **گزینه ۳**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

گام اول

الف) احتمال این‌که فردی تحصیلات دانشگاهی داشته باشد $\frac{۲}{۳} = \frac{۳۰۰}{۴۵۰}$ و احتمال این‌که تحصیلات دانشگاهی نداشته باشد $۱ - \frac{۲}{۳} = \frac{۱}{۳}$ است.

ب) می‌توان از توزیع دوجمله‌ای استفاده کرده و پیروزی را داشتن تحصیلات دانشگاهی و شکست را نداشتن تحصیلات دانشگاهی تعریف کنیم.
هدف حساب کردن $P\left(k = ۴\right)$ است.

گام دوم

داریم:

$$p = \frac{۲}{۳},\ q = \frac{۱}{۳},\ n = ۶,\ k = ۴$$

$$P\left(k = ۴\right) = \binom{۶}{۴}\left(\frac{۲}{۳}\right)^{۴}\left(\frac{۱}{۳}\right)^{۲} = ۱۵ \times \frac{۱۶}{۸۱} \times \frac{۱}{۹} = \frac{۸۰}{۲۴۳}$$

۶۴ **گزینه ۳**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

گام اول

الف) هر فرزند یا دارای ژن غالب B است یا ژن مغلوب b. بنابراین $P(b) + P(B) = ۱$. از طرفی $P(B) = ۳P(b)$ یعنی احتمال این‌که فرزند ژن غالب داشته باشد سه برابر احتمال این است که ژن مغلوب را داشته باشد.

ب) می‌توان با استفاده از توزیع دو جمله‌ای و تعریفِ داشتنِ ژن مغلوب به عنوان پیروزی، $P\left(k = ۱\right)$ را محاسبه کرد.

گام دوم

ابتدا از دو معادله $P(b) + P(B) = ۱$ و $P(B) = ۳P(b)$ مقدار $P(b)$ و $P(B)$ را حساب می‌کنیم.

$$P(B) + P(b) = ۱ \Rightarrow ۳P(b) + P(b) = ۱ \Rightarrow ۴P(b) = ۱ \Rightarrow P(b) = \frac{۱}{۴}$$

$$P(B) = ۳P(b) = ۳\left(\frac{۱}{۴}\right) = \frac{۳}{۴}$$

حالا با استفاده از توزیع دو جمله‌ای داریم:

$$p = \frac{۱}{۴},\ q = \frac{۳}{۴},\ n = ۳,\ k = ۱$$

$$P\left(k = ۱\right) = \binom{۳}{۱}\left(\frac{۱}{۴}\right)^{۱}\left(\frac{۳}{۴}\right)^{۲} = ۳ \times \frac{۱}{۴} \times \frac{۹}{۱۶} = \frac{۲۷}{۶۴}$$

۶۵ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

گام اول

الف) احتمال انتقال بیماری ۰/۲ و احتمال عدم انتقال بیماری $۰/۸ = ۰/۲ - ۱$ است.

ب) انتقال بیماری را پیروزی تعریف می‌کنیم و با استفاده از توزیع دو جمله‌ای $P\left(k=۳\right)$ را به دست می‌آوریم.

گام دوم

داریم:

$$p=۰/۲,\ q=۰/۸,\ n=۵,\ k=۳$$

$$P\left(k=۳\right)=\binom{۵}{۳}\left(۰/۲\right)^{۳}\left(۰/۸\right)^{۲}=۱۰\times ۰/۰۰۸\times ۰/۶۴=۰/۰۵۱۲$$

۶۶ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

گام اول

الف) هر سؤال ۵ گزینه دارد که فقط یکی از آن‌ها درست است. پس احتمال این‌که دانش‌آموز به یک سؤال پاسخ صحیح بدهد $\frac{۱}{۵}$ و احتمال این‌که پاسخ صحیح ندهد $\frac{۴}{۵}=\frac{۱}{۵}-۱$ است.

ب) از توزیع دو جمله‌ای استفاده می‌کنیم و پاسخ صحیح دادن را پیروزی تعریف می‌کنیم. چون کل سؤالات ۵ تا است، پس $n=۴$ بوده و $P\left(k=۳\right)$ را حساب می‌کنیم.

گام دوم

داریم:

$$p=\frac{۱}{۵},\ q=\frac{۴}{۵},\ n=۵,\ k=۳$$

$$P\left(k=۳\right)=\binom{۵}{۳}\left(\frac{۱}{۵}\right)^{۳}\left(\frac{۴}{۵}\right)^{۲}=۱۰\times\frac{۱}{۱۲۵}\times\frac{۱۶}{۲۵}=\frac{۱۶۰}{۳۱۲۵}=۰/۰۵۱۲$$

۶۷ **گزینه ۲**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

گام اول

الف) هر سؤال ۵ گزینه دارد که فقط یکی از آن‌ها درست است. پس احتمال این‌که دانش‌آموز به یک سؤال پاسخ صحیح بدهد $\frac{۱}{۵}$ و احتمال این‌که پاسخ صحیح ندهد $\frac{۴}{۵} = \frac{۱}{۵} - ۱$ است.

ب) از توزیع دو جمله‌ای استفاده می‌کنیم و پاسخ صحیح دادن را پیروزی تعریف می‌کنیم. هدف یافتن $P(k=۱)$ است.

گام دوم

داریم:

$$p = \frac{۱}{۵},\ q = \frac{۴}{۵},\ n = ۵,\ k = ۱$$

$$P(k=۱) = \binom{۵}{۱}\left(\frac{۱}{۵}\right)^{۱}\left(\frac{۴}{۵}\right)^{۴} = ۵ \times \frac{۱}{۵} \times \frac{۲۵۶}{۶۲۵} = \frac{۲۵۶}{۶۲۵} = ۰/۴۰۹۶$$

۶۸ **گزینه ۳**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

گام اول

در آزمایشگاه $۱۰ = ۶ + ۴$ موش وجود دارد که از بین آن‌ها فقط ۲ موش خارج می‌شود. پس X می‌تواند سه مقدار $X = ۰$ و $X = ۱$ و $X = ۲$ داشته باشد. هدف پیدا کردن بیشترین مقدار $P(X)$ به ازای مقدارهای مختلف X است.

گام دوم

$P(X=۰)$ و $P(X=۱)$ و $P(X=۲)$ را محاسبه می‌کنیم. تعداد کل حالت‌هایی که می‌توان ۲ موش را از میان ۱۰ موش انتخاب کرد چنین به دست می‌آید:

$$n(S) = \binom{۱۰}{۲} = \frac{۱۰!}{۸!۲!} = \frac{۱۰ \times ۹}{۲} = ۴۵$$

$$P(X=۰) = \frac{\binom{۴}{۰}\binom{۶}{۲}}{۴۵} = \frac{۱ \times ۱۵}{۴۵} = \frac{۱}{۳}$$

$$P(X=۱) = \frac{\binom{۴}{۱}\binom{۶}{۱}}{۴۵} = \frac{۴ \times ۶}{۴۵} = \frac{۲۴}{۴۵} = \frac{۸}{۱۵}$$

$$P(X=۲) = \frac{\binom{۴}{۲}\binom{۶}{۰}}{۴۵} = \frac{۶ \times ۱}{۴۵} = \frac{۶}{۴۵} = \frac{۲}{۱۵}$$

با توجه به مقادیر محاسبه شده، بیشترین مقدار توزیع به ازای $X = ۱$ به دست آمد. بنابراین $\frac{۸}{۱۵}$ پاسخ تست است.

۶۹ **گزینه ۲**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

گام اول

الف) احتمال انتقال بیماری ۰/۲ و احتمال عدم انتقال بیماری $۱ - ۰/۲ = ۰/۸$ است.

ب) پیروزی را انتقال بیماری تعریف می‌کنیم و با استفاده از توزیع دو جمله‌ای $P(k = ۴)$ را به دست می‌آوریم.

گام دوم

داریم:

$$p = ۰/۲,\ q = ۰/۸,\ n = ۶,\ k = ۴$$

$$P(k = ۴) = \binom{۶}{۴}(۰/۲)^{۴}(۰/۸)^{۲} = ۱۵ \times ۰/۰۰۱۶ \times ۰/۶۴ = ۰/۰۱۵۳۶$$

۷۰ **گزینه ۳**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

گام اول

الف) احتمال این‌که فردی به فروشگاه مراجعه و خرید کند $\frac{۶}{۱۰}$ و احتمال این‌که خرید نکند $۱ - \frac{۶}{۱۰} = \frac{۴}{۱۰}$ است.

ب) از توزیع دو جمله‌ای استفاده می‌کنیم. خریدار بودن را پیروزی تعریف می‌کنیم بنابراین $p = ۰/۶$ و $q = ۰/۴$ است. هدف محاسبه $P(k = ۳)$ است.

گام دوم

داریم:

$$p = ۰/۶,\ q = ۰/۴,\ n = ۴,\ k = ۳$$

$$P(k = ۳) = \binom{۴}{۳}(۰/۶)^{۳}(۰/۴)^{۱} = ۴ \times ۰/۲۱۶ \times ۰/۴ = ۰/۳۴۵۶$$

۷۱ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۹

گام اول

الف) اگر بذری کاشته شود، با احتمال ۰/۸ جوانه می‌زند و با احتمال $۰٫۲ = ۰٫۸ - ۱$ جوانه نمی‌زند.

ب) چون گفته شده حداقل دو بذر از ۵ بذر کاشته شده جوانه بزنند پس یعنی دو بذر، سه بذر، چهار بذر یا پنج بذر جوانه بزنند.

گام دوم

به دلیل طولانی بودن محاسبه مستقیم پیشامد جوانه زدن حداقل دو بذر (A)، بهتر است پیشامد متمم A' را تعریف کنیم. A' یعنی یا هیچ بذری جوانه نزند یا فقط یک بذر جوانه بزند. با استفاده از توزیع دو جمله‌ای پیروزی را جوانه زدن بذر تعریف می‌کنیم.

$$P(A') = P(k=۰) + P(k=۱) = \binom{۵}{۰}(۰٫۸)^{۰}(۰٫۲)^{۵} + \binom{۵}{۱}(۰٫۸)^{۱}(۰٫۲)^{۴} = ۱ \times ۱ \times ۰٫۰۰۰۳۲ + ۵ \times ۰٫۸ \times ۰٫۰۰۱۶ = ۰٫۰۰۰۳۲ + ۰٫۰۰۶۴ = ۰٫۰۰۶۷۲$$

می‌دانیم $P(A) = ۱ - P(A')$ پس:

$$P(A) = ۱ - ۰٫۰۰۶۷۲ = ۰٫۹۹۳۲۸$$

۷۲ گزینه ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۹

گام اول

الف) احتمال این‌که هر یک از کارگران بومی باشد ۰/۶ و احتمال این‌که بومی نباشد $۰٫۴ = ۰٫۶ - ۱$ است.

ب) از توزیع دو جمله‌ای استفاده کرده و بومی بودن را پیروزی تعریف می‌کنیم. هدف محاسبه $P(k=۳)$ است.

گام دوم

داریم:

$$p = ۰٫۶,\ q = ۰٫۴,\ n = ۴,\ k = ۳$$

$$P(k=۳) = \binom{۴}{۳}(۰٫۶)^{۳}(۰٫۴)^{۱} = ۴ \times ۰٫۲۱۶ \times ۰٫۴ = ۰٫۳۴۵۶$$

۷۳ **گزینه ۴**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

گام اول

الف) هر سؤال سه گزینه دارد که فقط یکی از آن‌ها درست است پس احتمال این‌که به یک سؤال پاسخ درست داده شود $\frac{۱}{۳}$ و احتمال این‌که پاسخ درست ندهد $\frac{۲}{۳} = ۱ - \frac{۱}{۳}$ است.

ب) از توزیع دو جمله‌ای استفاده کرده و پاسخ درست دادن را پیروزی تعریف می‌کنیم. هدف محاسبه $P\left(k=۴\right)$ است.

گام دوم

داریم:

$$p=\frac{۱}{۳},\ q=\frac{۲}{۳},\ n=۶,\ k=۴$$

$$P\left(k=۴\right)=\binom{۶}{۴}\left(\frac{۱}{۳}\right)^{۴}\left(\frac{۲}{۳}\right)^{۲}=۱۵\times\frac{۱}{۸۱}\times\frac{۴}{۹}=\frac{۶۰}{۷۲۹}=\frac{۲۰}{۲۴۳}$$

۷۴ **گزینه ۴**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

گام اول

الف) هر نوزاد متولد شده یا دختر است و یا پسر و چون احتمال دختر و پسر بودن برابر است پس نوزاد متولد شده با احتمال $\frac{۱}{۲}$ دختر است و با احتمال $\frac{۱}{۲}$ پسر است.

ب) گفته شده لااقل دو تا از نوزادان دختر باشد پس متمم آن این است که یا هیچ کدام از نوزادان دختر نباشد یا فقط یک نوزاد دختر داشته باشیم.

گام دوم

از توزیع دو جمله‌ای استفاده می‌کنیم به طوری که دختر بودن پیروزی تعریف شود، یعنی $p=\frac{۱}{۲}$ و $q=\frac{۱}{۲}$. $n=۵$ است و احتمال پیشامد متمم A' به ازای $k=۰$ و $k=۱$ چنین محاسبه می‌شود:

$$P\left(A'\right)=P\left(k=۰\right)+P\left(k=۱\right)=\binom{۵}{۰}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۰}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۵}+\binom{۵}{۱}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۱}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۴}=۱\times۱\times\frac{۱}{۳۲}+۵\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۱۶}=\frac{۱}{۳۲}+\frac{۵}{۳۲}=\frac{۶}{۳۲}=\frac{۳}{۱۶}$$

احتمال پیشامد A یعنی احتمال این‌که لااقل دو تا از نوزادان دختر باشد نیز برابر است با:

$$P(A)=P\left(\text{لااقل دو دختر}\right)=۱-P\left(A'\right)=۱-\frac{۳}{۱۶}=\frac{۱۳}{۱۶}$$

۷۵ **گزینه ۳**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

گام اول

به طور کلی $۱۰ = ۵ + ۲ + ۳$ مهره در جعبه وجود دارد که دو تـا از آن بیرون می‌آوریم. همرنـگ بودن دو مهره یعنی یـا هر دو آبی، یا هر دو سیاه و یا هر دو قرمز باشند. احتمال همرنگ نبودن را خواسته‌اند پس می‌توان از احتمال پیشامد متمم استفاده کرد.

گام دوم

پیشامد متمم به صورت احتمال همرنگ بودن دو مهره خواهد بود، یعنی:

$$P(\text{همرنگ بودن}) = P(\text{هردو آبی}) + P(\text{هردو سیاه}) + P(\text{هردو قرمز}) = \frac{\binom{۳}{۲}}{\binom{۱۰}{۲}} + \frac{\binom{۲}{۲}}{\binom{۱۰}{۲}} + \frac{\binom{۵}{۲}}{\binom{۱۰}{۲}} = \frac{۳}{۴۵} + \frac{۱}{۴۵} + \frac{۱۰}{۴۵} = \frac{۱۴}{۴۵}$$

$$P(\text{غیرهمرنگ بودن}) = ۱ - P(\text{دو مهره همرنگ}) = ۱ - \frac{۱۴}{۴۵} = \frac{۳۱}{۴۵}$$

۷۶ **گزینه ۲**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

گام اول

الف) در پرتاب یک تاس ۳ عدد زوج و ۳ عدد فرد داریم. پس احتمال زوج آمدن یا فرد آمدن در پرتاب تاس $\frac{۱}{۲}$ است.

ب) احتمال موفقیت در تیراندازی $\frac{۲}{۳}$ و احتمال شکست $۱ - \frac{۲}{۳} = \frac{۱}{۳}$ است.

ج) دو حالت ممکن است اتفاق بیفتد.

۱) تاس زوج بیاید و در ۴ بار تیراندازی به ۲ موفقیت برسیم.

۲) تاس فرد بیاید و در ۳ بار تیراندازی به ۲ موفقیت برسیم.

گام دوم

احتمال دو حالت ذکر شده در قسـمت ج از گام اول را محاسـبه می‌کنیم. احتمال کل، مجموع دو احتمال خواهد بود. برای محاسبه احتمال ۲ بار موفقیت در میان ۳ یا ۴ بار تیراندازی از توزیع دو جمله‌ای استفاده می‌کنیم.

$$P(\text{زوج و دوبار موفقیت}) = P(\text{زوج}) \times P(\text{دوبار موفقیت در چهار پرتاب}) = \frac{۱}{۲} \times \binom{۴}{۲} \left(\frac{۲}{۳}\right)^۲ \left(\frac{۱}{۳}\right)^۲ = \frac{۱}{۲} \times ۶ \times \frac{۴}{۹} \times \frac{۱}{۹} = \frac{۴}{۲۷}$$

$$P(\text{فرد و دوبار موفقیت}) = P(\text{فرد}) \times P(\text{دوبار موفقیت در سه پرتاب}) = \frac{۱}{۲} \times \binom{۳}{۲} \left(\frac{۲}{۳}\right)^۲ \left(\frac{۱}{۳}\right)^۱ = \frac{۱}{۲} \times ۳ \times \frac{۴}{۹} \times \frac{۱}{۳} = \frac{۲}{۹}$$

$$P_{\text{کل}} = P(\text{فرد و دوبار موفقیت}) + P(\text{زوج و دوبار موفقیت}) = \frac{۲}{۹} + \frac{۴}{۲۷} = \frac{۶+۴}{۲۷} = \frac{۱۰}{۲۷}$$

۷۷ **گزینه ۴**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

گام اول

الف) یک دانه با احتمال $\frac{۲}{۳}$ جوانه می‌زند و با احتمال $\frac{۱}{۳}$ جوانه نمی‌زند ($\boldsymbol{q} = \frac{۱}{۳}\ ,\ \boldsymbol{p} = \frac{۲}{۳}$).

ب) حداقل سه دانه از بین ۴ دانه جوانه بزند؛ یعنی یا سه دانه از میان چهار دانه یا چهار دانه از میان چهار دانه، جوانه بزند.

گام دوم

با استفاده از توزیع دوجمله‌ای سؤال را حل می‌کنیم:

$$P(\text{جوانه زدن حداقل ۳ دانه}) = \binom{۴}{۳}\left(\frac{۲}{۳}\right)^{۳}\left(\frac{۱}{۳}\right)^{۱} + \binom{۴}{۴}\left(\frac{۲}{۳}\right)^{۴}\left(\frac{۱}{۳}\right)^{۰} = ۴ \times \frac{۸}{۸۱} + \frac{۱۶}{۸۱} = \frac{۳۲}{۸۱} + \frac{۱۶}{۸۱} = \frac{۴۸}{۸۱}$$

$$= \frac{۱۶}{۲۷}$$

۷۸ **گزینه ۴**

از دستور توزیع دو جمله‌ای استفاده می‌کنیم، اگر k بار پیشامد مطلوب رخ دهد، داریم:

$$P(k) = \binom{n}{k} p^{k}(۱-p)^{n-k} \Rightarrow \begin{cases} P(۴) = \binom{۶}{۴}\left(\frac{۳}{۴}\right)^{۴}\left(۱-\frac{۳}{۴}\right)^{۲} = \frac{۶!}{۴! \times ۲!} \times \left(\frac{۳}{۴}\right)^{۴}\left(\frac{۱}{۴}\right)^{۲} \\ P(۳) = \binom{۶}{۳}\left(\frac{۳}{۴}\right)^{۳}\left(۱-\frac{۳}{۴}\right)^{۳} = \frac{۶!}{۳! \times ۳!} \times \left(\frac{۳}{۴}\right)^{۳}\left(\frac{۱}{۴}\right)^{۳} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{P(۴)}{P(۳)} = \frac{\frac{۶!}{۴!\times ۲!}\times\left(\frac{۳}{۴}\right)^{۴}\left(\frac{۱}{۴}\right)^{۲}}{\frac{۶!}{۳!\times ۳!}\times\left(\frac{۳}{۴}\right)^{۳}\left(\frac{۱}{۴}\right)^{۳}} = \frac{۱۵\times ۳}{۲۰} = \frac{۹}{۴}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

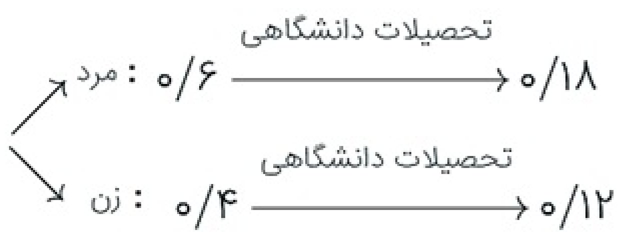
۷۹ **گزینه ۲**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

گام اول

فرد تحصیل‌کرده می‌تواند زن با تحصیلات دانشگاهی یا مرد با تحصیلات دانشگاهی باشد. برای حل سؤال از قانون احتمال کل (نمودار درختی) استفاده می‌کنیم.

گام دوم



$$P(\text{تحصیلات دانشگاهی}) = (۰/۶ \times ۰/۱۸) + (۰/۴ \times ۰/۱۲) = ۰/۱۰۸ + ۰/۰۴۸$$

$$= ۰/۱۵۶ \Rightarrow P(\text{تحصیلات دانشگاهی}) = \%۱۵/۶$$

۸۰ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

گام اول

سؤال را با استفاده از روابط توزیع دوجمله‌ای حل می‌کنیم. احتمال پیروزی در این تست $\frac{۱}{۴}$ و احتمال شکست (غلط جواب دادن تست) برابر $\frac{۳}{۴}$ است.

گام دوم

$$P(x=۳)=\binom{۶}{۳}\left(\frac{۱}{۴}\right)^{۳}\left(\frac{۳}{۴}\right)^{۳}=۲۰\times\frac{۱}{۶۴}\times\frac{۲۷}{۶۴}=\frac{۱۳۵}{۱۰۲۴}$$

۸۱ گزینه ۳

$$P\,(\text{دو مهرهٔ همرنگ})=P(\text{دو مهرهٔ سفید و یک مهرهٔ غیر از سفید})+P(\text{دو مهرهٔ سیاه و یک مهرهٔ غیر از سیاه})$$
$$+P(\text{دو مهرهٔ قرمز و یک مهرهٔ غیر از قرمز})$$

$$=\frac{\binom{۵}{۲}\binom{۵}{۱}+\binom{۳}{۲}\binom{۷}{۱}+\binom{۲}{۲}\binom{۸}{۱}}{\binom{۱۰}{۳}}=\frac{۵۰+۲۱+۸}{۱۲۰}=\frac{۷۹}{۱۲۰}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۸۲ گزینه ۳

راه‌حل اول:

چون دو پیشامد A و B مستقل هستند، بنابراین داریم:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A).P(B)=\frac{۸۴}{۱۰۰}+\frac{۷۵}{۱۰۰}-\left(\frac{۸۴}{۱۰۰}\times\frac{۷۵}{۱۰۰}\right)=۰/۹۶$$

راه‌حل دوم:

هرگاه در مسائل احتمال لااقل یکی داشتیم از متمم استفاده می‌کنیم (C' : احتمال اینکه هیچ‌کدام قبول نشوند):

$$P(C')=\frac{۱۶}{۱۰۰}\times\frac{۲۵}{۱۰۰}=\frac{۴}{۱۰۰}\Rightarrow P(C)=۱-\frac{۴}{۱۰۰}=\frac{۹۶}{۱۰۰}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۸۳ **گزینه ۱**

با استفاده از احتمال توزیع دوجمله‌ای داریم:

$$n = ۴ \;,\; p = \frac{۱}{۴} \;,\; ۱ - p = \frac{۳}{۴}$$

$$P(x = k) = \binom{n}{k} p^k (۱ - p)^{n-k}$$

$$P(x = ۳) = \binom{۴}{۳} \times \left(\frac{۱}{۴}\right)^{۳} \times \left(\frac{۳}{۴}\right)^{۱} = \frac{۳}{۶۴}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۱ اگر $f(x) = ۳ + \sqrt{۲x}$ آنگاه $f(۸)$ کدام است؟

۱) ۵
۲) ۳
۳) ۷
۴) ۸

۲ در تابع با ضابطه $f(x) = x^۲(۲-x)^۲$ حاصل $f(۱+x) - f(۱-x)$ کدام است؟

۱) صفر
۲) $۴x$
۳) $۲x^۲$
۴) $۴x^۲$

۳ اگر $f(x-۳) = x^۲ - ۴x + ۵$ آنگاه $f(۱-x)$ کدام است؟

۱) $x^۲ + ۱$
۲) $x^۲ + ۳$
۳) $x^۲ + ۴x + ۵$
۴) $x^۲ - ۴x + ۵$

۴ دامنه تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{۱ - log(x-۱)}$ به کدام صورت است؟

۱) $(۱,۲]$
۲) $[۲,۱۰]$
۳) $[۱,۱۱)$
۴) $(۱,۱۱]$

۵ اگر $f(x) = \sqrt{۲x - x^۲}$، دامنه تابع $f(۳-x)$ کدام است؟

۱) $[۰,۲]$
۲) $[۰,۳]$
۳) $[۱,۲]$
۴) $[۱,۳]$

۶ اگر $f(x) = \sqrt{x + ۲|x|}$، مقدار $f\left(f\left(-۱۴۴\right)\right)$ کدام است؟

۱) تعریف نشده
۲) ۶
۳) ۸
۴) ۱۲

۷ اگر $f(x) = \sqrt{۲ - x - x^۲}$، مقدار $f\left(f\left(-۱\right)\right)$ کدام است؟

۱) تعریف نشده
۲) صفر
۳) ۱
۴) $\sqrt{۲}$

۸ در تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x - \sqrt{x+۴} & ; \quad x > ۳ \\ ۲x + ۳ & ; \quad x \leq ۳ \end{cases}$، مقدار $f\left(f\left(۵\right)\right) + f\left(f\left(۱\right)\right)$ کدام است؟

۱) ۶
۲) ۷
۳) ۸
۴) ۹

۹ اگر $f(x) = |x| - x$، ضابطه تابع $fof(x)$ برابر کدام است؟

۱) x
۲) $|x|$
۳) $x + |x|$
۴) صفر

۱۰ اگر $f(x) = |x|$ و $g(x) = x^۲ + ۲x + ۱$، آنگاه حاصل $(gof)(۱-\sqrt{۲}) - (fog)(۱-\sqrt{۲})$، کدام است؟

۱) $۴(۱-\sqrt{۲})$
۲) $۴(\sqrt{۲}-۱)$
۳) ۴
۴) $۴\sqrt{۲}$

۱۱ اگر $f(x) = (۲x-۳)^۲$ و $g(x) = x + ۲$ نمودارهای دو تابع f و fog با کدام طول متقاطع‌اند؟

۱) -۱
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) ۱
۴) $\frac{۳}{۲}$

۱۲ اگر $f(x) = x^۲ + ۳x$ و $g(x) = -\frac{۱}{۲}x + ۲$ آنگاه مجموعهٔ طول نقاطی از منحنی تابع gof که در بالای محور xها قرار می‌گیرند برابر کدام بازه است؟

۱) $(-۴,۱)$
۲) $(-۳,۲)$
۳) $(-۲,۱)$
۴) $(-۱,۴)$

۱۳ اگر توابع f و g به عنوان ماشین به صورت $\xrightarrow{x} f \longrightarrow g \longrightarrow ۲x$ باشند و $g(x) = ۳x + ۴$، آنگاه مقدار $f(۵)$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۱۴ اگر $A = \{۱,۲,۳,۴,۵\}$ و $f = \{(x, ۲x-۱), x \in A\}$ تابع $f(f(x))$ چند عضو دوتایی دارد؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۱۵ اگر $f(x) = x + \sqrt{x}$، $g = \{(۱,۲),(۵,۴),(۶,۵),(۲,۳)\}$ و $g(f(a)) = ۵$، آنگاه عدد a کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۱۶ اگر $f(x) = \sqrt{x + |x|}$ و $g(x) = \frac{۱}{x^۲ - ۴x}$، دامنهٔ تابع gof کدام است؟

۱) $(۰,۸) \cup (۸,+\infty)$
۲) $R - \{۰,۸\}$
۳) $R - \{۰\}$
۴) $(۰,\infty)$

۱۷ اگر $f(x)=\sqrt{x+|x+2|}$، دامنهٔ تابع $f(-x)$ کدام است؟

۱) $x\leq -1$
۲) $x\geq -1$
۳) $x\leq 1$
۴) $x\geq 1$

۱۸ اگر $f(x)=x^2-x-2$ و $f(g(x))=x^2+x-2$، آنگاه $(f+g)(x)$ کدام گزینه می‌تواند باشد؟

۱) x^2-1
۲) x^2+1
۳) x^2-2x
۴) x^2+2x

۱۹ اگر $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ و $fog(x)=\frac{x^2+2}{x^2+1}$، مقدار $g(1)$ کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

۲۰ اگر $f(x)=2x^2+4$ و $f(g(x))=4x^2+6x$، مقدار $g(-2)$ کدام است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) -۱
۴) ۲

۲۱ اگر $f(x)=\sqrt{3-x}$ و $g(x)=\log_2^{(x^2+2x)}$ باشند، دامنهٔ تابع fog کدام است؟

۱) $[-4,2]$
۲) $[-2,0]$
۳) $[-4,-1]\cup(1,2]$
۴) $[-4,-2)\cup(0,2]$

۲۲ در بازهٔ $[x_0,+\infty)$، نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{1}{2}x+2$ بالاتر از خط به معادلهٔ $y=3(x-1)$ قرار نمی گیرد. کمترین مقدار $f(x_0)$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۲۳ مقادیر تابع با ضابطهٔ $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x+6$ در بازهٔ (a,b) بزرگ تر از $\frac{7}{2}$ است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۴
۲) ۵
۳) ۵/۵
۴) ۶

۲۴ مجموعه جواب نامعادلهٔ $\frac{1}{x-3}>\frac{1}{x-1}$ به کدام صورت است؟

۱) $x<3$
۲) $1<x<3$
۳) $2<x<3$
۴) $-2<x<3$

۲۵ مجموعه جواب نامعادلهٔ $\frac{x-۱}{x+۱} > ۲x$ کدام مجموعه است؟

۱) $\{x : x < -۱\}$
۲) $\{x : x > -۱\}$
۳) $\{x : -۱ < x < ۱\}$
۴) $\{x : -۲ < x < -۱\}$

۲۶ در تابع با ضابطهٔ $f(x) = a.b^x \;;\; b > ۰$، داریم $f(۰) = \frac{۳}{۲}$ و $f(-۲) = \frac{۳}{۳۲}$، مقدار $f\left(\frac{۳}{۲}\right)$ کدام است؟

۱) ۶
۲) ۸
۳) ۱۲
۴) ۲۴

۲۷ اگر نمودار تابع $f(x) = a(b)^x - ۱$ از دو نقطهٔ $A\left(-\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲}\right)$ و $B(۱, ۱۱)$ بگذرد، $f(-۱)$ کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۴}$
۲) $-\frac{۱}{۲}$
۳) $-\frac{۱}{۴}$
۴) $\frac{۳}{۴}$

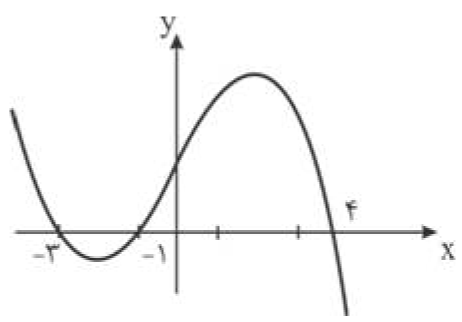
۲۸ اگر $f(x) = x - \sqrt{x}$ و $g(x) = \sin^۴ x$ باشند، ضابطهٔ تابع fog کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۴}\sin^۲ ۲x$
۲) $-\frac{۱}{۲}\sin^۲ ۲x$
۳) $\frac{۱}{۴}\cos^۲ ۲x$
۴) $\frac{۱}{۲}\cos^۲ ۲x$

۲۹ اگر $f(x) = x^۲ + x - ۲$ و $g(x) = \frac{۱}{۲}(x - ۳)$، آنگاه مجموعهٔ طول نقاطی از منحنی تابع fog که در زیر محور xها قرار می گیرند برابر کدام بازه است؟

۱) $(-۵, ۱)$
۲) $(-۱, ۵)$
۳) $(-۲, ۱)$
۴) $(۱, ۵)$

۳۰ شکل زیر، نمودار تابع $y = f(x - ۲)$ است. دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $\sqrt{xf(x)}$، کدام است؟



۱) $[-۱, ۱] \cup [۰, ۶]$
۲) $[-۳, ۱] \cup [۰, ۲]$
۳) $[-۵, -۳] \cup [-۱, ۲]$
۴) $[-۵, -۳] \cup [۰, ۲]$

۳۱ اگر $f(x) = \frac{x}{\sqrt{-x^۲+x+۲}}$ و $g(x) = \left(\frac{۱}{۴}\right)^x$ باشند. دامنهٔ تابع fog کدام است؟

۱) $\left(-\frac{۱}{۲}, +\infty\right)$
۲) $\left(\frac{۱}{۲}, +\infty\right)$
۳) $(-۲, ۰)$
۴) $\left(-۱, \frac{۱}{۲}\right)$

۳۲ اگر $f(x) = x^2 + x$ و $g(x) = \sqrt{4x+1}$ باشند، مساحت ناحیهٔ محدود به نمودار تابع gof و خط به معادلهٔ $y = 3$ کدام است؟

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۴/۵
۴) ۶

۳۳ مجموعه جواب نامعادلهٔ $3 < \frac{3x+1}{x-3} < -1$ به کدام صورت است؟

۱) $x < \frac{1}{2}$
۲) $x < 3$
۳) $-\frac{1}{2} < x < 3$
۴) $\frac{1}{2} < x < 3$

۳۴ اگر $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ و $g(x) = \frac{2x+2}{2-x}$ باشند، ضابطهٔ تابع $g(f(x))$ کدام است؟

۱) $x - 1$
۲) $x + 1$
۳) x
۴) $2x$

۳۵ اگر عبارت $\sqrt[3]{2x - x^2} + \sqrt[4]{\frac{2}{x^2} - \frac{9}{2}}$، عدد حقیقی باشد، مجموعهٔ مقادیر x در کدام بازه است؟

۱) $[\frac{2}{3}, 2]$
۲) $[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$
۳) $[-\frac{2}{3}, 0) \bigcup (0, 2]$
۴) $[-\frac{2}{3}, 0) \bigcup (0, \frac{2}{3}]$

۳۶ اگر $f(x) = \frac{2x+3}{2-x}$ و $g(x) = \frac{1-3x}{x+2}$ باشند، ضابطهٔ تابع $g(f(x))$ کدام است؟

۱) x
۲) $-x$
۳) $-x - 1$
۴) $x + 1$

۳۷ نمودار تابع با ضابطهٔ $y = x^2 - 3x - 10$ را، حداقل چند واحد به‌طرف xهای مثبت انتقال دهیم تا طول نقاط تلاقی نمودار حاصل با محور xها غیرمنفی باشد؟

۱) ۱
۲) ۱/۵
۳) ۲
۴) ۳

۳۸ ضابطهٔ وارون تابع $y = \frac{x}{1+|x|}$ کدام است؟

۱) $y = \frac{x}{1-|x|} \; ; \; |x| < 1$
۲) $y = \frac{1-|x|}{|x|} \; ; \; |x| > 1$
۳) $y = \frac{x}{|x|-1} \; ; \; |x| > 1$
۴) $y = \frac{|x|-1}{x} \; ; \; |x| < 1$

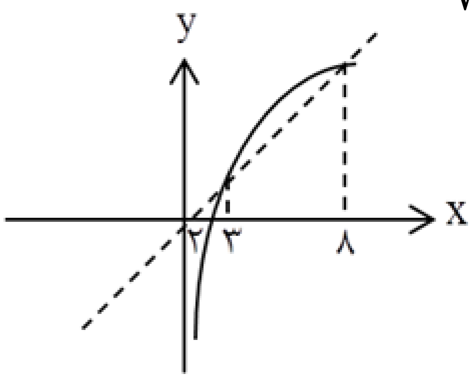
۳۹ ضابطه معکوس تابع $y = \begin{cases} \frac{|x|}{x}\sqrt{|x|} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$، به کدام صورت است؟

۱) $y = x\sqrt{|x|} \; ; \; x \in \mathbb{R}$
۲) $y = x\sqrt{|x|} \; ; \; x \in \mathbb{R} - \{0\}$
۳) $y = x|x| \; ; \; x \in \mathbb{R} - \{0\}$
۴) $y = x|x| \; ; \; x \in \mathbb{R}$

۴۰ اگر $f=\{(۱,۲),(۲,۵),(۰,۳),(۴,-۱)\}$ و $g=\{(۲,۳),(-۱,۴),(۴,۱),(۳,۰)\}$، تابع $gof^{-۱}$ کدام است؟

۱) $\{(۱,۳),(۰,۰)\}$
۲) $\{(۲,۴),(۳,۵)\}$
۳) $\{(۲,۰),(-۱,۴)\}$
۴) $\{(۵,۳),(-۱,۱)\}$

۴۱ شکل زیر، نمودار تابع $y=f(x)$ و نیم ساز ناحیهٔ اول و سوم است. دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $\sqrt{x-f^{-۱}(x)}$ کدام است؟



۱) $[۰,۲]$
۲) $[۲,۳]$
۳) $[۲,۸]$
۴) $[۳,۸]$

۴۲ فاصلهٔ نقطهٔ برخورد تابع نمایی $y=۲^x$ با محور yها و نقطهٔ برخورد معکوس این تابع نمایی با محور xها کدام است؟

۱) ۱
۲) $\sqrt{۲}$
۳) ۲
۴) $۲\sqrt{۲}$

۴۳ ضابطهٔ وارون تابع $\begin{cases}\sqrt{x} & ;x\geq ۰\\ -\sqrt{-x} & ;x<۰\end{cases}$، کدام است؟

۱) $y=x|x|;x\in\mathbb{R}$
۲) $y=-x^۲\,;x<۰$
۳) $y=\pm x^۲\,;x\in\mathbb{R}$
۴) $y=\pm x|x|\,;x\in\mathbb{R}$

۴۴ ضابطهٔ معکوس تابع $y=۲-\sqrt{x-۱}$، به کدام صورت است؟

۱) $y=x^۲-۴x+۵\,;x\leq ۲$
۲) $y=-x^۲-۴x+۵\,;x\leq ۲$
۳) $y=x^۲-۴x+۵\,;x\geq ۱$
۴) $y=-x^۲+۴x-۵\,;x\geq ۱$

۴۵ اگر $f=\{(۱,۲),(۲,۵),(۰,۳),(۴,-۱)\}$ و $g=\{(۲,۳),(-۱,۴),(۴,۱),(۳,۰)\}$، تابع $gof^{-۱}$ کدام است؟

۱) $\{(۱,۳),(۰,۰)\}$
۲) $\{(۲,۴),(۳,۵)\}$
۳) $\{(۲,۰),(-۱,۴)\}$
۴) $\{(۵,۳),(-۱,۱)\}$

۴۶ تابع با ضابطهٔ $y=x|x-۲|$، در یک بازه نزولی است. ضابطهٔ معکوس آن در این بازه، کدام است؟

۱) $۱-\sqrt{۱+x};x<۰$
۲) $۱-\sqrt{۱-x};x<۱$
۳) $۱+\sqrt{۱-x};۰<x<۱$
۴) $۱-\sqrt{۱-x};۰<x<۱$

۴۷ اگر $g(x) = ۲x + ۱$ و $(fog)(x) = ۸x^۲ + ۶x + ۵$ باشند، تابع $f(x)$ برابر کدام است؟

۱) $۲x^۲ + ۳x + ۱$
۲) $۲x^۲ - ۲x + ۳$
۳) $۲x^۲ - x + ۴$
۴) $۲x^۲ + x + ۳$

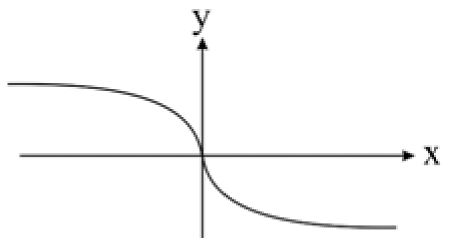
۴۸ تابع با ضابطهٔ $f(x) = |x^۳|$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$، چگونه است؟

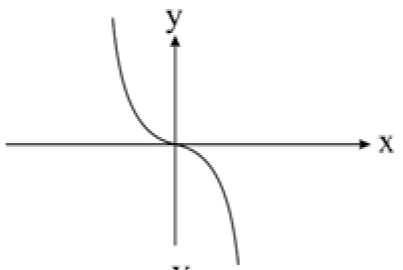
۱) نزولی
۲) صعودی
۳) وارون‌ناپذیر
۴) یک‌به‌یک

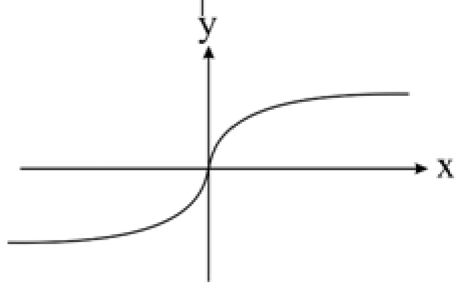
۴۹ تابع با ضابطهٔ $f(x) = |۲x - ۶| - |x + ۱|$ در یک بازه، صعودی است. ضابطهٔ معکوس آن، در این بازه، کدام است؟

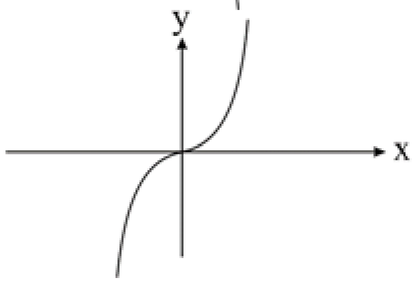
۱) $-x + ۷ \ ; x > ۸$
۲) $\frac{۱}{۳}x + ۲ \ ; x > ۳$
۳) $x + ۷ \ ; x > -۴$
۴) $\frac{۱}{۲}x - ۲ \ ; -۴ < x < ۸$

۵۰ اگر $f(x) = x|x|$ باشد، نمودار تابع $y = f^{-۱}(x)$ کدام است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


۵۱ دو تابع $f = \{(۲,۵),(۶,۳),(۳,۷),(۴,۱),(۱,۹)\}$ و $g(x) = \frac{x}{x-۱}$ مفروض‌اند. اگر $f^{-۱}(g(۲a)) = ۶$ باشد، a کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{۳}{۴}$
۳) $\frac{۳}{۲}$
۴) $\frac{۵}{۲}$

۵۲ ضابطهٔ وارون تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & ; x \geq ۰ \\ -\sqrt{-x} & ; x < ۰ \end{cases}$ کدام است؟

۱) $-x^۲$
۲) $x^۲$
۳) $x|x|$
۴) $-x|x|$

۵۳ دو تابع $f = \{(۵,۲),(۷,۳),(۱,۴),(۳,۶),(۹,۱)\}$ و $g(x) = \sqrt{۵x + ۹}$ مفروض‌اند. اگر $(g^{-۱}of^{-۱})(a) = ۸$ باشد، a کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۶
۴) ۷

۵۴ نمودار تابع $f(x)=\frac{x+4}{x-2}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{2\}$، نمودار وارون خود را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) -4 و -1

۲) 4 و -1

۳) -4 و 1

۴) 4 و 1

۱ گزینه ۳

گام اول

ساده تر از این امکان نـدارد. ضابطهٔ $f(x)$ به ما داده شده است. برای محاسـبهٔ $f(۸)$ کافی است در ضابطـهٔ داده شده به جای x عدد ۸ را قرار دهیم .

گام دوم

$$f(x) = ۳ + \sqrt{۲x} \Rightarrow f(۸) = ۳ + \sqrt{۲ \times ۸} = ۳ + \sqrt{۱۶} = ۳ + ۴ = ۷$$
$$\Rightarrow f(۸) = ۷$$

۲ گزینه ۱

ابتدا با توجه به ضابطهٔ تابع $f(x)$، ضابطهٔ دو تابع $f(۱+x)$ و $f(۱-x)$ را تشـکیل می دهیم. یعنی یک بار در ضابطهٔ $f(x)$ به جای متغیر x متغیر $(۱+x)$ و یک بار متغیر $(۱-x)$ را قرار داده و ضابطهٔ هر یک را تعیین می کنیم.

$$f(۱+x) = (۱+x)^۲(۲-۱-x)^۲ = (۱+x)^۲(۱-x)^۲ = [(۱+x)(۱-x)]^۲ = (۱-x^۲)^۲$$
$$f(۱-x) = (۱-x)^۲(۲-۱+x)^۲ = (۱-x)^۲(۱+x)^۲ = [(۱-x)(۱+x)]^۲ = (۱-x^۲)^۲$$

با داشتن ضوابط دو تابع $f(۱+x)$ و $f(۱-x)$، حاصل $f(۱+x) - f(۱-x)$ را به دست می آوریم:

$$f(۱+x) - f(۱-x) = (۱-x^۲)^۲ - (۱-x^۲)^۲ = ۰$$

۳ گزینه ۴

روش اول:

با استفاده از تغییر متغیر $x - ۳ = t$، x را برحسب t به دست آورده و ضابطهٔ $f(x)$ را به صورت مستقل تعیین می کنیم.

$$f(x-۳) = x^۲ - ۴x + ۵ \xrightarrow[x=t+۳]{x-۳=t} f(t) = (t+۳)^۲ - ۴(t+۳) + ۵$$

$$= t^۲ + ۶t + ۹ - ۴t - ۱۲ + ۵ \Rightarrow f(t) = t^۲ + ۲t + ۲ \Rightarrow f(x) = x^۲ + ۲x + ۲$$

ضابطهٔ $f(x)$ به صورت مستقل تعیین شد. حالا ضابطهٔ $f(۱-x)$ را مشخص می کنیم:

$$f(۱-x) = (۱-x)^۲ + ۲(۱-x) + ۲ = ۱ - ۲x + x^۲ + ۲ - ۲x + ۲ =$$
$$x^۲ - ۴x + ۵ \Rightarrow f(۱-x) = x^۲ - ۴x + ۵$$

روش دوم:روش دیگر برای به دست آوردن $f(۱-x)$ از روی ضابطهٔ $f(x-۳)$ این است که به جای متغیر x متغیر $۴-x$ را جای گذاری کنیم.

$$f(x-۳) = x^۲ - ۴x + ۵ \xrightarrow{x \to ۴-x} f(۴-x-۳) = (۴-x)^۲ - ۴(۴-x) + ۵$$
$$\Rightarrow f(۱-x) = ۱۶ - ۸x + x^۲ - ۱۶ + ۴x + ۵ = x^۲ - ۴x + ۵$$

۴ گزینه ۴

در حل تست به دو نکته زیر توجه داشته باشید:

الف) دامنه تعریف تابع $y = \log g(x)$ به صورت $g(x) > 0$ است.

ب) عبارت زیر رادیکال با فرجهٔ زوج همواره نامنفی است.

$$y = \log(x-1) \Rightarrow x-1 > 0 \Rightarrow x > 1 \quad (I)$$

$$f(x) = \sqrt{1-\log(x-1)} \Rightarrow 1-\log(x-1) \geq 0 \Rightarrow \log(x-1) \leq 1 \Rightarrow$$
$$\log(x-1) \leq \log 10 \Rightarrow x-1 \leq 10 \Rightarrow x \leq 11 \quad (II)$$

دامنه تعریف تابع اصلی اشتراک دو مجموعه جواب (I) و (II) است:

$$(I) \cap (II) : D_f = (1, 11]$$

۵ گزینه ۴

روش اول:

ابتدا دامنه تعریف تابع $f(x)$ را به دست می آوریم. سپس با توجه به محدودهٔ قابل قبول برای x بازه ای که در آن تابع $f(3-x)$ تعریف شده است را مشخص می کنیم.

$$f(x) = \sqrt{2x-x^2} \Rightarrow 2x-x^2 \geq 0 \Rightarrow x(2-x) \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 2$$
$$\overset{\times(-1)}{\Rightarrow} -2 \leq -x \leq 0 \overset{+3}{\Rightarrow} 1 \leq 3-x \leq 3 \Rightarrow D_{f(3-x)} = [1, 3]$$

روش دوم:

ابتدا ضابطهٔ $f(3-x)$ را تعیین کرده و از روی آن دامنه تعریف را به دست می آوریم.

$$f(x) = \sqrt{2x-x^2} \Rightarrow f(3-x) = \sqrt{2(3-x)-(3-x)^2}$$
$$= \sqrt{6-2x-9+6x-x^2} = \sqrt{-x^2+4x-3} \Rightarrow -x^2+4x-3 \geq 0 \overset{\times(-1)}{\Rightarrow}$$
$$x^2-4x+3 \leq 0 \Rightarrow (x-3)(x-1) \leq 0 \Rightarrow 1 \leq x \leq 3 \Rightarrow D_f = [1, 3]$$

۶ گزینه ۲

با توجه به ضابطهٔ $f(x)$ ابتدا $f(-144)$ و سپس $f(f(-144))$ را حساب می کنیم.

$$f(x) = \sqrt{x+2|x|} \Rightarrow f(-144) = \sqrt{-144+2|-144|} =$$
$$\sqrt{-144+288} = \sqrt{144} = 12 \Rightarrow f(-144) = 12$$

حالا $f(12)$ را محاسبه می کنیم:

$$f(f(-144)) = f(12) = \sqrt{12+2|12|} = \sqrt{12+24} = \sqrt{36} = 6$$

۷ **گزینه ۱**

ابتدا $f(-۱)$ و سپس با داشتن مقدار آن $f(\sqrt{۲})$ را محاسبه می کنیم.

$$f(x)=\sqrt{۲-x-x^۲}\Rightarrow f(-۱)=\sqrt{۲-(-۱)-(-۱)^۲}=\sqrt{۲+۱-۱}=\sqrt{۲}$$

برای رسیدن به جواب تست باید حاصل $f(\sqrt{۲})$ را محاسبه کنیم:

$$f(f(-۱))=f(\sqrt{۲})=\sqrt{۲-\sqrt{۲}-(\sqrt{۲})^۲}=\sqrt{۲-\sqrt{۲}-۲}=\sqrt{-\sqrt{۲}}$$

می دانیم عبارت زیر رادیکال با فرجهٔ زوج نباید منفی باشد پس حاصل $f(f(-۱))$ تعریف نشده است.

۸ **گزینه ۴**

گام اول

تابع دو ضابطه ای است. برای محاسبهٔ $f(۱)$ از ضابطهٔ پایین و برای محاسبهٔ $f(۵)$ از ضابطهٔ بالا استفاده می کنیم.

گام دوم

$$x>۳: f(x)=x-\sqrt{x+۴}\Rightarrow f(۵)=۵-\sqrt{۵+۴}=۵-\sqrt{۹}=۵-۳=۲$$
$$x\leq ۳: f(x)=۲x+۳\Rightarrow f(۱)=۲(۱)+۳=۲+۳=۵$$

پس مقدار $f(f(۵))+f(f(۱))$ برابر است با:

$$f(f(۵))+f(f(۱))=f(۲)+f(۵)=۲(۲)+۳+۲=۴+۳+۲=۹$$

۹ **گزینه ۴**

ابتدا ضابطهٔ $f(x)$ را برای دو حالت $x\geq ۰$ و $x<۰$ تعیین می کنیم. برای هر کدام از این دو حالت ضابطهٔ $fof(x)$ را به دست می آوریم.

$$f(x)=|x|-x\Rightarrow\begin{cases}x\geq ۰\Rightarrow |x|=x\Rightarrow f(x)=x-x=۰\\ x<۰\Rightarrow |x|=-x\Rightarrow f(x)=-x-x=-۲x\end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}۰ & x\geq ۰\\ -۲x & x<۰\end{cases}$$

$$۱) x\geq ۰: f(x)=۰\Rightarrow fof(x)=f(f(x))=f(۰)=۰$$
$$۲) x<۰: f(x)=-۲x\Rightarrow fof(x)=f(f(x))=f(-۲x)$$
$$\xrightarrow{x<۰\Rightarrow -۲x>۰} f(-۲x)=۰\Rightarrow fof(x)=۰$$

بنابراین تابع $fof(x)$ به ازای تمام مقادیر x برابر صفر می شود.

۱۰ **گزینه ۱**

در تست حاصل مقادیری از دو تابع fog و gof از ما خواسته شده است. بنابراین با توجه به دو ضابطهٔ $f(x)$ و $g(x)$، ابتدا ضابطهٔ توابع $fog(x)$ و $gof(x)$ را تعیین کرده، سپس حاصل عبارت داده شده را محاسبه می کنیم.

$$f(x)=|x|\ ,\ g(x)=x^۲+۲x+۱=(x+۱)^۲$$

$$(fog)(x)=f(g(x))=|(x+۱)^۲|\xrightarrow{(x+۱)^۲\geq ۰}(fog)(x)=(x+۱)^۲$$

$$(gof)(x)=g(f(x))=(|x|+۱)^۲$$

$$(fog)(۱-\sqrt{۲})-(gof)(۱-\sqrt{۲})=(۱-\sqrt{۲}+۱)^۲-(|۱-\sqrt{۲}|+۱)^۲=$$
$$(۲-\sqrt{۲})^۲-(\sqrt{۲}-۱+۱)^۲=۴-۴\sqrt{۲}+۲-(\sqrt{۲})^۲=۶-۴\sqrt{۲}-۲=۴-۴\sqrt{۲}=۴(۱-\sqrt{۲})$$

۱۱ گزینه ۲

برای تعیین نقطهٔ تلاقی دو تابع f و fog باید اول ضابطهٔ fog مشخص شود. سپس معادلهٔ $f(x) = fog(x)$ را حل کرده و نقطهٔ تلاقی دو تابع که در واقع ریشهٔ همین معادله است را به دست می آوریم.

$$f(x) = (۲x - ۳)^۲ \;,\; g(x) = x + ۲ \Rightarrow fog(x) = f(g(x)) = (۲g(x) - ۳)^۲ =$$
$$(۲(x + ۲) - ۳)^۲ = (۲x + ۴ - ۳)^۲ = (۲x + ۱)^۲ = ۴x^۲ + ۴x + ۱$$

معادلهٔ $f(x) = fog(x)$ را حل می کنیم:

$$f(x) = fog(x) \Rightarrow (۲x - ۳)^۲ = (۲x + ۱)^۲ \Rightarrow ۴x^۲ - ۱۲x + ۹ = ۴x^۲ + ۴x + ۱ \Rightarrow ۱۶x = ۸ \Rightarrow x = \frac{۱}{۲}$$

بنابراین نمودار دو تابع f و fog در نقطه ای به طول $x = \frac{۱}{۲}$ با هم متقاطع اند.

۱۲ گزینه ۱

گام اول

برای پاسخ گویی به این تست داشتن ضابطهٔ تابع $gof(x)$ الزامی است. برای رسیدن به این منظور کافی است در ضابطهٔ تابع $g(x)$ به جای متغیر x ضابطهٔ تابع $f(x)$ را قرار دهیم. حالا ببینیم منظور تابع از جملهٔ "مجموعهٔ طول نقاطی از منحنی تابع gof که در بالای محور xها قرار می گیرند" چیست؟ اگر قرار باشد تابع gof بالای محور xها قرار بگیرد باید مقدار y تابع بزرگ تر از صفر باشد. بنابراین باید مجموعه جواب نامعادلهٔ $gof(x) > ۰$ را تعیین کنیم.

گام دوم

تعیین ضابطهٔ $gof(x)$ و حل نامعادلهٔ $gof(x) > ۰$:

$$g(x) = -\frac{۱}{۲}x + ۲ \;,\; f(x) = x^۲ + ۳x$$

$$gof(x) = g(f(x)) = -\frac{۱}{۲}(x^۲ + ۳x) + ۲ = -\frac{۱}{۲}x^۲ - \frac{۳}{۲}x + ۲$$

$$gof(x) > ۰ \Rightarrow -\frac{۱}{۲}x^۲ - \frac{۳}{۲}x + ۲ > ۰ \overset{\times(-۲)}{\Rightarrow} x^۲ + ۳x - ۴ < ۰ \Rightarrow$$
$$(x + ۴)(x - ۱) < ۰ \Rightarrow -۴ < x < ۱$$

بنابراین در بازهٔ $(-۴, ۱)$ مقادیر تابع $gof(x)$ بزرگ تر از صفر بوده و در نتیجه نمودار این تابع روی این بازه بالای محور xها قرار می گیرد.

۱۳ **گزینه ۲**

گام اول

گاهی اوقات تابع مرکب را به صورت یک ماشین نمایش می دهند. به شکل رسم شده در این تست خوب دقت کنید:

$$\xrightarrow{x} f \xrightarrow{f(x)} g \xrightarrow{g(f(x))} ۲x$$

متغیر x به عنوان ورودی در نظر گرفته می شود. ابتدا وارد ضابطهٔ f می شود که خروجی آن $f(x)$ است. در مرحلهٔ دوم $f(x)$ وارد ضابطهٔ g می شود که در این صورت خروجی آن $g(f(x))$ است. بنابراین در این تست $g(f(x)) = ۲x$ است.

گام دوم

ضابطهٔ $g(f(x))$ و $g(x)$ مشخص است. اول ضابطهٔ $f(x)$ را تعیین کرده، سپس با استفاده از آن مقدار $f(۵)$ را محاسبه می کنیم:

$$g(x) = ۳x + ۴ \ , \ g(f(x)) = ۲x \Rightarrow ۳f(x) + ۴ = ۲x \Rightarrow ۳f(x) = ۲x - ۴ \Rightarrow$$

$$f(x) = \frac{۲}{۳}x - \frac{۴}{۳} \Rightarrow f(۵) = \frac{۲}{۳}(۵) - \frac{۴}{۳} = \frac{۱۰}{۳} - \frac{۴}{۳} = \frac{۶}{۳} = ۲$$

۱۴ **گزینه ۳**

با توجه به اعضای مجموعهٔ A ابتدا تابع $f(x)$ را با مشـخص کردن زوج مرتب های آن تشکیل می دهیم. برای تشکیل تابع $f(f(x))$ یا همان $fof(x)$، مقدار تابع fof را در نقاط دامنه اش حساب می کنیم. دقت کنیـد که اگر $x \in D_f$ باشد اما $f(x) \notin D_f$ آن گاه x در ترکیب شرکت نمی کند. حالا تابع $f(x)$ را با زوج مرتب هایش تشکیل می دهیم:

$$\left.\begin{array}{c} f = \{(x, ۲x - ۱), x \in A\} \\ A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \Rightarrow ۲x - ۱ = ۲ - ۱ = ۱ \\ x = ۲ \Rightarrow ۲x - ۱ = ۴ - ۱ = ۳ \\ x = ۳ \Rightarrow ۲x - ۱ = ۶ - ۱ = ۵ \\ x = ۴ \Rightarrow ۲x - ۱ = ۸ - ۱ = ۷ \\ x = ۵ \Rightarrow ۲x - ۱ = ۱۰ - ۱ = ۹ \end{cases}$$

$$\Rightarrow f = \{(۱, ۱), (۲, ۳), (۳, ۵), (۴, ۷), (۵, ۹)\}$$

تابع $f(f(x))$ را با رعایت شرط گفته شده تشکیل می دهیم:

$$x = ۱ : f(f(۱)) = f(۱) = ۱ \quad , \quad x = ۲ : f(f(۲)) = f(۳) = ۵$$

$$x = ۳ : f(f(۳)) = f(۵) = ۹ \quad , \quad x = ۴ : f(f(۴)) = f(۷) \rightarrow \text{تعریف نشده}$$

$$x = ۵ : f(f(۵)) = f(۹) \rightarrow \text{تعریف نشده}$$

$$fof(x) = f(f(x)) = \{(۱, ۱), (۲, ۵), (۳, ۹)\}$$

بنابراین تابع $f(f(x))$ دارای ۳ عضو دوتایی (زوج مرتب) است.

۱۵ گزینه ۴

گام اول

وقتی تست اشاره کرده $g(f(a)) = ۵$ است، یعنی این که باید از تابع g زوج مرتبی را انتخاب کنیم که در آن مؤلفهٔ دوم برابر ۵ است. در این صورت مؤلفهٔ اول برابر $f(a)$ بوده و با داشتن ضابطهٔ تابع $f(x)$ مقدار a به راحتی محاسبه می شود.

گام دوم

$g(f(a)) = ۵$ است. در بین زوج مرتب های تشکیل دهندهٔ تابع g، زوج مرتب $(۶, ۵)$ دارای مؤلفهٔ دوم ۵ است، بنابراین می توان نتیجه گرفت: $f(a) = ۶$ حال با داشتن ضابطهٔ $f(x)$، مقدار a را به دست می آوریم:

$$f(x) = x + \sqrt{x} \Rightarrow f(a) = a + \sqrt{a} \xrightarrow{f(a)=۶} a + \sqrt{a} = ۶$$

برای حل این معادله می توانیم با تغییر متغیر $t = \sqrt{a}$ معادله را به یک معادلهٔ درجه دو تبدیل کرده و آن را حل کنیم. (فقط حواستان باشد t باید مثبت شود.)

$$a + \sqrt{a} = ۶ \xrightarrow{\sqrt{a}=t} t^۲ + t = ۶ \Rightarrow t^۲ + t - ۶ = ۰ \Rightarrow (t + ۳)(t - ۲) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = -۳ \quad \text{غ ق ق} \\ t = ۲ \Rightarrow \sqrt{a} = ۲ \Rightarrow a = ۴ \end{cases}$$

اما راه سریع تر و راحت تر برای رسیدن به جواب امتحان گزینه هاست. در این صورت هم، $a = ۴$ جواب تست می شود.

۱۶ گزینه ۱

طبق تعریف، دامنهٔ تابع gof از رابطهٔ زیر به دست می آید:

$$D_{gof} = \{x \in D_f | f(x) \in D_g\}$$

بنابراین لازم است برای حل تست دامنهٔ تعریف دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ تعیین شود، سپس با استفاده از تعریف گفته شده D_{gof} را مشخص کنیم.

$$f(x) = \sqrt{x + |x|} = \begin{cases} x \geq ۰ : |x| = x \Rightarrow f(x) = \sqrt{۲x} \\ x < ۰ : |x| = -x \Rightarrow f(x) = \sqrt{x - x} = ۰ \end{cases} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$g(x) = \frac{۱}{x^۲ - ۴x} = \frac{۱}{x(x - ۴)} \Rightarrow x(x - ۴) = ۰ \Rightarrow x = ۰, x = ۴$$

$$\Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{۰, ۴\}$$

حالا دامنهٔ تعریف تابع gof را به دست می آوریم:

$$D_{gof} = \{x \in D_f | f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} | \sqrt{x + |x|} \in \mathbb{R} - \{۰, ۴\}\}$$

$$\sqrt{x + |x|} = ۴ \xrightarrow{x \geq ۰} \sqrt{۲x} = ۴ \xrightarrow{\text{به توان ۲}} ۲x = ۱۶ \Rightarrow x = ۸$$

$$\sqrt{x + |x|} = ۰ \Rightarrow x \in (-\infty, ۰]$$

پس دامنهٔ gof برابر است با: $D_{gof} = (۰, ۸) \cup (۸, +\infty)$

۱۷ گزینه ۳

گام اول

وقتی دامنه تعریف تابع $f(-x)$ از ما خواسته شده است، پس ابتدا باید ضابطهٔ $f(-x)$ را از روی تابع $f(x)$ تشکیل دهیم. تابع داده شده یک تابع رادیکالی با فرجهٔ زوج است، پس عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد.

گام دوم

تشکیل ضابطهٔ $f(-x)$ و تعیین دامنه تعریف آن:

$$f(x)=\sqrt{x+|x+۲|}\Rightarrow f(-x)=\sqrt{-x+|-x+۲|}=\sqrt{|-x+۲|-x}$$

$$|-x+۲|-x\geq ۰\Rightarrow\begin{cases}x>۲: -x+۲<۰\Rightarrow |-x+۲|-x\geq ۰\Rightarrow x-۲-x\geq ۰\Rightarrow -۲\geq ۰ \quad \text{غ ق ق}\\ x\leq ۲: -x+۲\geq ۰\Rightarrow |-x+۲|-x\geq ۰\Rightarrow -x+۲-x\geq ۰\Rightarrow -۲x+۲\geq ۰\\ \Rightarrow ۲x\leq ۲\Rightarrow x\leq ۱\end{cases}$$

با توجه به بازهٔ اولیه دامنه تعریف تابع $f(-x)$ به صورت $x\leq ۱$ در می آید.

۱۸ گزینه ۱

ضابطهٔ $f(x)$ و $f(g(x))$ برای ما مشخص شده است. ابتدا با توجه به این دو ضابطه، ضابطهٔ تابع $g(x)$ را به صورت مستقل تعیین می کنیم، سپس ضابطهٔ تابع $(f+g)(x)$ را به دست می آوریم.

$$f(x)=x^۲-x-۲\ ,\ f(g(x))=x^۲+x-۲\Rightarrow (g(x))^۲-g(x)-۲=x^۲+x-۲\Rightarrow (g(x))^۲-g(x)=x^۲+x$$

برای این که بتوانیم راحت تر ضابطهٔ $g(x)$ را تعیین کنیم، سعی می کنیم دو طرف را به دو عبارت مربع کامل تبدیل کنیم:

$$(g(x))^۲-g(x)=x^۲+x\xrightarrow{\text{به دو طرف } \frac{۱}{۴} \text{ اضافه می کنیم}}(g(x))^۲-g(x)+\frac{۱}{۴}=x^۲+x+\frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow (g(x))-\frac{۱}{۲})^۲=(x+\frac{۱}{۲})^۲\Rightarrow g(x)-\frac{۱}{۲}=\pm(x+\frac{۱}{۲})$$

پس برای ضابطهٔ $g(x)$ دو حالت ممکن است رخ دهد:

$$۱)\ g(x)-\frac{۱}{۲}=x+\frac{۱}{۲}\Rightarrow g(x)=x+۱\Rightarrow (f+g)(x)=f(x)+g(x)=x^۲-x-۲+x+۱=x^۲-۱$$

$$۲)\ g(x)-\frac{۱}{۲}=-x-\frac{۱}{۲}\Rightarrow g(x)=-x\Rightarrow (f+g)(x)=f(x)+g(x)=x^۲-x-۲-x=x^۲-۲x-۲$$

با توجه به گزینه های موجود، گزینهٔ ۱ قابل قبول است.

۱۹ گزینه ۴

اصلاً نیازی به تعیین ضابطهٔ $g(x)$ نداریم. با داشتن ضابطهٔ دو تابع $f(x)$ و $f(g(x))$، ضابطهٔ تابع $f(g(x))$ را بر حسب $g(x)$ تشکیل می دهیم. سپس x را برابر ۱ قرار داده و مقدار $g(۱)$ را محاسبه می کنیم.

$$f(x)=\frac{x+۱}{x-۱}\ ,\ fog(x)=f(g(x))=\frac{x^۲+۲}{x^۲+۱}\Rightarrow\frac{g(x)+۱}{g(x)-۱}=\frac{x^۲+۲}{x^۲+۱}$$

$$\xrightarrow{x=۱}\frac{g(۱)+۱}{g(۱)-۱}=\frac{۱+۲}{۱+۱}\Rightarrow\frac{g(۱)+۱}{g(۱)-۱}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow ۲g(۱)+۲=۳g(۱)-۳$$

$$\Rightarrow g(۱)=۳+۲=۵\Rightarrow g(۱)=۵$$

۲۰ **گزینه ۱**

با توجه به ضابطه های $f(x)$ و $f(g(x))$، تابع $f(g(x))$ را بر حسب تابع $g(x)$ تشکیل می دهیم. سپس بدون این که ضابطهٔ تابع $g(x)$ را به صورت مستقل تعیین کنیم، x را برابر ۲- در نظر گرفته و مقدار $g(-۲)$ را حساب می کنیم.

$$f(x) = ۲x^۲ + ۴\ ,\ f(g(x)) = ۴x^۲ + ۶x \Rightarrow ۲(g(x))^۲ + ۴ = ۴x^۲ + ۶x$$

$$\xrightarrow{x=-۲} ۲(g(-۲))^۲ + ۴ = ۴(-۲)^۲ + ۶(-۲) = ۴(۴) + ۶(-۲) = ۱۶ - ۱۲ = ۴$$

$$\Rightarrow ۲(g(-۲))^۲ + ۴ = ۴ \Rightarrow ۲(g(-۲))^۲ = ۰ \Rightarrow (g(-۲))^۲ = ۰ \Rightarrow g(-۲) = ۰$$

۲۱ **گزینه ۴**

برای به دست آوردن D_{fog} اول از همه باید D_f و D_g تعیین شود. سپس با استفاده از رابطهٔ $D_{fog} = \{x \in D_g | g(x) \in D_f\}$، دامنهٔ تابع fog را تعیین کنیم.

$$f(x) = \sqrt{۳ - x} \Rightarrow ۳ - x \geq ۰ \Rightarrow x \leq ۳ \Rightarrow D_f = (-\infty, ۳]$$

$$g(x) = log_۲^{(x^۲+۲x)} \Rightarrow x^۲ + ۲x > ۰ \Rightarrow x(x + ۲) > ۰ \Rightarrow x > ۰ \text{ یا } x < -۲$$

$$\Rightarrow D_g = (-\infty, -۲) \cup (۰, +\infty)$$

حالا سراغ تعیین D_{fog} می رویم:

$$D_{fog} = \{x \in D_g | g(x) \in D_f\}$$

$$D_{fog} = \{x \in (-\infty, -۲) \cup (۰, +\infty) | log_۲^{(x^۲+۲x)} \leq ۳\}$$

$$log_۲^{(x^۲+۲x)} \leq ۳ \Rightarrow x^۲ + ۲x \leq ۲^۳ \Rightarrow x^۲ + ۲x \leq ۸ \Rightarrow x^۲ + ۲x - ۸ \leq ۰ \Rightarrow (x + ۴)(x - ۲) \leq ۰$$

$$\Rightarrow -۴ \leq x \leq ۲ \Rightarrow D_{fog} = [-۴, -۲) \cup (۰, ۲]$$

۲۲ **گزینه ۳**

می خواهیم محدوده ای را مشخص کنیم که نمودار تابع $f(x) = \frac{۱}{۲}x + ۲$ بالاتر از خط به معادلهٔ $y = ۳(x - ۱)$ قرار نگیرد پس باید مجموعه جواب نامعادلهٔ زیر را به دست آوریم:

$$\frac{۱}{۲}x + ۲ \leq ۳(x - ۱)$$

$$\frac{۱}{۲}x + ۲ \leq ۳x - ۳$$

$$۳ + ۲ \leq ۳x - \frac{۱}{۲}x$$

$$۵ \leq \frac{۵}{۲}x$$

$$۲ \leq x$$

مجموعه جواب نامعادله بالا به صورت $[۲, +\infty)$ می شود بنابراین نمودار تابع $f(x)$ در این بازه بالای خط y قرار نمی گیرد و $x_۰ = ۲$ است. پس داریم:

$$f(۲) = \frac{۱}{۲}(۲) + ۲ = ۱ + ۲ = ۳$$

۲۳ گزینه ۴

گام اول

مجموعه جواب نامعادلهٔ $f(x) > \frac{۷}{۲}$ را به دست می آوریم.

گام دوم

$$f(x) > \frac{۷}{۲} \Rightarrow -\frac{۱}{۲}x^۲ + ۲x + ۶ > \frac{۷}{۲} \overset{\times ۲}{\Rightarrow} -x^۲ + ۴x + ۱۲ > ۷ \Rightarrow x^۲ - ۴x - ۵ < ۰ \Rightarrow (x-۵)(x+۱) < ۰ \Rightarrow -۱ < x < ۵ \Rightarrow x \in (-۱, ۵)$$

بنابراین بازهٔ (a,b) به صورت $(-۱, ۵)$ در آمده و بیشترین مقدار $b - a$ برابر است با:

$$b - a = ۵ - (-۱) = ۵ + ۱ = ۶$$

۲۴ گزینه ۲

برای به دست آوردن مجموعه جواب نامعادله ابتـدا عبارت های کسـری را به یک طرف منتقل کرده و به عبارتی مانند $P(x) > ۰$ می رسیم. این عبارت را تعیین علامت کرده و محدوده ای که در آن $P(x)$ مثبت است را به عنوان جواب تست در نظر می گیریم.

$$\frac{۱}{x-۱} > \frac{۱}{x-۳} \Rightarrow \frac{۱}{x-۱} - \frac{۱}{x-۳} > ۰ \Rightarrow \frac{x-۳-(x-۱)}{(x-۱)(x-۳)} = \frac{x-۳-x+۱}{(x-۱)(x-۳)} > ۰$$

$$\Rightarrow \frac{-۲}{(x-۱)(x-۳)} > ۰ \Rightarrow (x-۱)(x-۳) < ۰ \Rightarrow ۱ < x < ۳$$

۲۵ گزینه ۱

با ایجاد تغییراتی در نامعادله سـعی می کنیم به نامعادله ای به صورت $Q(x) > ۰$ برسیم. $Q(x)$ را تعیین علامت کرده و محدوده ای که مثبت باشد را به عنوان جواب در نظر می گیریم.

$$\frac{x-۱}{x+۱} > ۲x \Rightarrow \frac{x-۱}{x+۱} - ۲x > ۰ \Rightarrow \frac{x-۱-۲x(x+۱)}{x+۱} > ۰ \Rightarrow \frac{x-۱-۲x^۲-۲x}{x+۱} > ۰$$

$$\Rightarrow \frac{-۲x^۲-x-۱}{x+۱} > ۰ \Rightarrow \frac{-(۲x^۲+x+۱)}{x+۱} > ۰ \overset{\times(-۱)}{\Rightarrow} \frac{۲x^۲+x+۱}{x+۱} < ۰$$

عبارت $۲x^۲ + x + ۱$ همواره مثبت است، چون در این عبارت درجه دو مقـدار $\Delta < ۰$ و ضریب $x^۲$ مثبت است پس مخرج بایـد منفی باشد. داریم:

$$x + ۱ < ۰ \Rightarrow x < -۱ \Rightarrow \{x : x < -۱\}$$

۲۶ گزینه ۳

ابتدا با توجه به دو تساوی $f(0)=\frac{3}{2}$ و $f(-2)=\frac{3}{32}$، مقادیر a و b را محاسبه می کنیم.

$$f(0)=\frac{3}{2}\Rightarrow a\times b^{0}=\frac{3}{2}\Rightarrow a\times 1=\frac{3}{2}\Rightarrow a=\frac{3}{2}$$

$$f(-2)=\frac{3}{32}\Rightarrow \frac{3}{2}b^{-2}=\frac{3}{32}\Rightarrow \frac{1}{2b^{2}}=\frac{1}{32}\Rightarrow 2b^{2}=32\Rightarrow b^{2}=16\xrightarrow{b>0}b=4$$

بنابراین ضابطهٔ $f(x)$ به صورت $f(x)=\frac{3}{2}\times 4^{x}$ در می آید. مقدار $f(\frac{3}{2})$ برابر است با:

$$f(\frac{3}{2})=\frac{3}{2}\times 4^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}\times(2^{2})^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}\times 2^{3}=\frac{3}{2}\times 8=3\times 4=12$$

۲۷ گزینه ۳

برای حل تست گام های زیر را برمی داریم:

الف) مختصات دو نقطهٔ A و B را در ضابطهٔ تابع $f(x)$ قرار داده و مقادیر a و b را تعیین می کنیم.

ب) با مشخص شدن ضابطهٔ $f(x)$، حاصل $f(-1)$ را به دست می آوریم.

$$f(x)=a(b)^{x}-1\xrightarrow{A(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})}\frac{1}{2}=a(b)^{-\frac{1}{2}}-1\Rightarrow\frac{3}{2}=\frac{a}{\sqrt{b}}\Rightarrow a=\frac{3}{2}\sqrt{b}\quad (I)$$

$$f(x)=a(b)^{x}-1\xrightarrow{B(1,11)}11=ab-1\Rightarrow ab=12\quad (II)$$

$$\xrightarrow{(I)}\frac{3}{2}\sqrt{b}\times b=12\Rightarrow b^{\frac{3}{2}}=8\Rightarrow\sqrt{b^{3}}=8$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}}b^{3}=64\Rightarrow b=4\xrightarrow{(II)}4a=12\Rightarrow a=3$$

پس ضابطهٔ $f(x)$ به صورت $f(x)=3(4)^{x}-1$ در می آید. $f(-1)$ برابر است با:

$$f(-1)=3(4)^{-1}-1=\frac{3}{4}-1=-\frac{1}{4}$$

۲۸ گزینه ۱

برای یافتن ضابطهٔ تابع $fog(x)$ یا همان $f(g(x))$، کافی است در ضابطهٔ تابع $f(x)$ به جای متغیر x ضابطهٔ $g(x)$ را قرار دهیم.

$$fog(x)=f(g(x))=g(x)-\sqrt{g(x)}=sin^{4}x-\sqrt{sin^{4}x}=sin^{4}x-sin^{2}x=$$
$$sin^{2}x(sin^{2}x-1)=sin^{2}x(-cos^{2}x)=-sin^{2}xcos^{2}x$$

با توجه به فرمول $sin2x$ داریم:

$$sinxcosx=\frac{1}{2}sin2x$$

پس ضابطهٔ تابع fog به صورت زیر درمی آید:

$$fog(x)=-(\frac{1}{2}sin2x)^{2}=-\frac{1}{4}sin^{2}2x$$

۲۹ گزینه ۲

گام اول

الف) ضابطهٔ تابع $fog(X)$ یعنی $f(g(x))$، با جایگذاری ضابطهٔ $g(x)$ در تابع $f(x)$ به دست می آید.

ب) می خواهیم نمودار تابع $fog(x)$ زیر محور xها قرار بگیرد پس باید مجموعه جواب نامعادلهٔ $fog(x) < ۰$ را به دست آوریم.

گام دوم

$$fog(x) = f(g(x)) = \left(\frac{۱}{۲}(x-۳)\right)^{۲} + \frac{۱}{۲}(x-۳) - ۲ = \frac{۱}{۴}(x-۳)^{۲} + \frac{۱}{۲}x - \frac{۳}{۲} - ۲ =$$

$$\frac{۱}{۴}x^{۲} - \frac{۳}{۲}x + \frac{۹}{۴} + \frac{۱}{۲}x - \frac{۷}{۲} = \frac{۱}{۴}x^{۲} - x - \frac{۵}{۴}$$

حالا مجموعه جواب نامعادلهٔ $fog(x) < ۰$ را تعیین می کنیم:

$$fog(x) < ۰ \Rightarrow \frac{۱}{۴}x^{۲} - x - \frac{۵}{۴} < ۰ \overset{\times ۴}{\Rightarrow} x^{۲} - ۴x - ۵ < ۰ \Rightarrow (x-۵)(x+۱) < ۰ \Rightarrow x \in (-۱, ۵)$$

۳۰ گزینه ۴

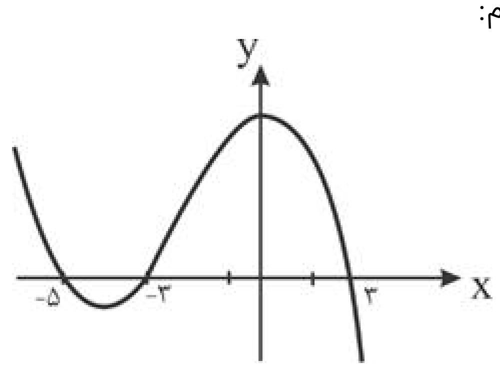
گام اول

الف) عبارت زیر رادیکال با فرجهٔ زوج همواره نامنفی است، پس باید $xf(x) \geq ۰$ باشد، پس x و $f(x)$ باید هر دو هم‌علامت باشند.

ب) برای به دست آوردن نمودار تـابع $f(x)$ از روی نمودار تابع $f(x-۲)$، کافی است نمودار تابع $f(x-۲)$ را دو واحد به سـمت چپ انتقال دهیم.

گام دوم

باتوجه‌به نمودار تابع $f(x-۲)$ و با انتقال دو واحدی آن به سمت چپ، نمودار تابع $f(x)$ را رسم می‌کنیم:



طبق گام اول، محدوده‌ای که در آن x و $f(x)$ هم‌علامت باشـند، قابل‌قبول است پس دامنهٔ تعریف تابع $\sqrt{xf(x)}$ برابر است با: $[-۵, -۳] \bigcup [۰, ۲]$

۳۱ گزینه ۱

گام اول

دامنهٔ تابع fog از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$D_{fog} = \{x \in D_g | g(x) \in D_f\}$$

گام دوم

دامنهٔ دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ را تعیین کرده و با استفاده از رابطهٔ گفته‌شده در گام اول، D_{fog} را مشخص می‌کنیم.

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{-x^۲+x+۲}}$$

$$-x^۲ + x + ۲ > ۰ \xrightarrow{\times(-۱)} x^۲ - x - ۲ < ۰ \Rightarrow (x-۲)(x+۱) < ۰$$

$$\Rightarrow -۱ < x < ۲ \Rightarrow D_f = (-۱, ۲)$$

$$g(x) = (\tfrac{۱}{۴})^x \Rightarrow D_g = \mathbb{R}$$

$$D_{fog} = \{x \in \mathbb{R} | -۱ < (\tfrac{۱}{۴})^x < ۲\}$$

$$\xrightarrow{(\frac{۱}{۴})^x > ۰} (\tfrac{۱}{۴})^x < ۲ \Rightarrow (۲^{-۲})^x < ۲ \Rightarrow ۲^{-۲x} < ۲ \Rightarrow -۲x < ۱$$

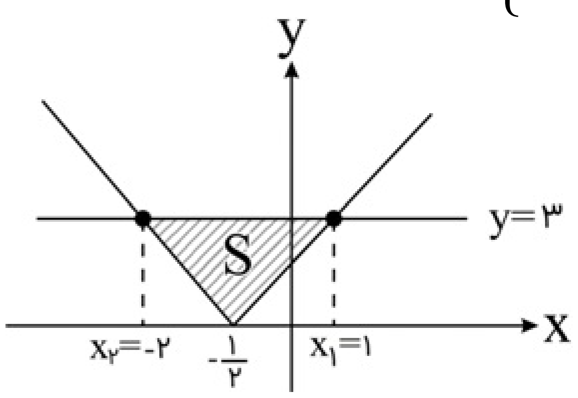
$$\xrightarrow{\div -۲} x > -\tfrac{۱}{۲} \Rightarrow D_{fog} = (-\tfrac{۱}{۲}, +\infty)$$

۳۲ گزینه ۳

ابتدا تابع gof را به دست می‌آوریم:

$$(gof)(x) = g(f(x)) = g(x^۲ + x) = \sqrt{۴x^۲ + ۴x + ۱} \Rightarrow (gof)(x) = |۲x + ۱|$$

$$|۲x+۱| = \begin{cases} ۲x + ۱ & ; x \geq -\frac{۱}{۲} \\ -۲x - ۱ & ; x < -\frac{۱}{۲} \end{cases}$$



نقاط برخورد تابع $|۲x+۱|$ و خط $y = ۳$ را می‌یابیم.

$$۲x_۱ + ۱ = ۳ \Rightarrow x_۱ = ۱$$

$$-۲x_۲ - ۱ = ۳ \Rightarrow x_۲ = -۲$$

$$S = \frac{(|x_۱| + |x_۲|) \times ۳}{۲} = \frac{۹}{۲} = ۴/۵$$

۳۳ گزینه ۱

گام اول

نامعادله را به نامعادله‌ای به فرم $-a < u < a$ تبدیل می‌کنیم تا از ویژگی‌های نامعادلات قدر مطلقی استفاده کنیم.

گام دوم

$$-۱ < \frac{۳x+۱}{x-۳} < ۳ \xrightarrow{-۱} -۲ < \frac{۳x+۱-x+۳}{x-۳} < ۲ \Rightarrow -۲ < \frac{۲x+۴}{x-۳} < ۲$$
$$\Rightarrow \left|\frac{۲(x+۲)}{x-۳}\right| < ۲ \xrightarrow{\div ۲} \left|\frac{x+۲}{x-۳}\right| < ۱ \Rightarrow |x+۲| < |x-۳|$$
$$\xrightarrow{\text{دو طرف به توان ۲}} x^۲ + ۴x + ۴ < x^۲ - ۶x + ۹ \Rightarrow ۱۰x < ۵ \xrightarrow{\div ۱۰} x < \frac{۱}{۲}$$

۳۴ گزینه ۴

گام اول

در ضابطهٔ $g(x)$، به‌جای x ضابطهٔ $f(x)$ را جایگذاری می‌کنیم.

گام دوم

$$g(f(x)) = g\left(\frac{۲x-۱}{x+۱}\right) = \frac{۲\times\frac{۲x-۱}{x+۱}+۲}{۲-\frac{۲x-۱}{x+۱}}$$
$$= \frac{\frac{۴x-۲+۲x+۲}{x+۱}}{\frac{۲x+۲-۲x+۱}{x+۱}} = \frac{۶x}{۳} = ۲x \Rightarrow g(f(x)) = ۲x$$

۳۵ گزینه ۴

راه‌حل تستی:

می‌توانیم از روش رد گزینه استفاده نماییم:

$x = ۰ \Leftarrow$ غ.ق.ق $\Leftarrow$ گزینه ۲ حذف می‌شود.

$x = ۱ \Leftarrow$ غ.ق.ق $\Leftarrow$ گزینهٔ (۱) و (۳) حذف می‌شوند.

راه‌حل تشریحی:

$$\frac{۲}{x^۲} - \frac{۹}{۲} \geq ۰ \Rightarrow \frac{۴-۹x^۲}{۲x^۲} \geq ۰ \Rightarrow ۴ - ۹x^۲ \geq ۰ \xrightarrow{x\neq ۰} x^۲ \leq \frac{۴}{۹} \xrightarrow{x\neq ۰} -\frac{۲}{۳} \leq x \leq \frac{۲}{۳}$$

ازطرفی چون $x \neq ۰$ است، پس گزینهٔ ۴ قابل‌قبول است.

۳۶ گزینه ۳

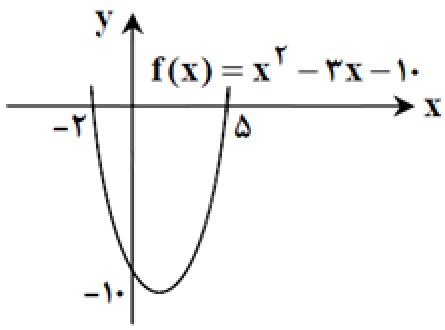
$$g(x)=\frac{1-3x}{x+2}\ ,\ f(x)=\frac{2x+3}{2-x}$$

$$g(f(x))=\frac{1-3(\frac{2x+3}{2-x})}{(\frac{2x+3}{2-x})+2}\Rightarrow g(f(x))=\frac{1-\frac{6x+9}{2-x}}{\frac{2x+3}{2-x}+2}$$

$$\Rightarrow g(f(x))=\frac{\frac{2-x-6x-9}{\cancel{2-x}}}{\frac{\cancel{2x}+3+4-\cancel{2x}}{\cancel{2-x}}}\Rightarrow g(f(x))=\frac{-7x-7}{7}\Rightarrow g(f(x))=-x-1$$

۳۷ گزینه ۳

ابتدا نمودارتابع درجه دوم $y=x^2-3x-10$ را رسم می‌کنیم.



$$y=x^2-3x-10=(x-5)(x+2)=0\Rightarrow\begin{cases}x=5\\x=-2\end{cases}$$

از روی نمودار مشخص است که اگر نمودار را ۲ واحد به‌سمت راست منتقل کنیم، طول نقاط تلاقی با محور xها غیرمنفی می‌شود.

۳۸ **گزینه ۱**

برای حل این تست از دو روش استفاده می کنیم. روش اول حل معمولی تست است، یعنی ابتدا ضابطهٔ تابع اصلی را ساده کرده، سپس با استفاده از آن ضابطهٔ تابع معکوس را به دست می آوریم. روش دوم یک روش بسیار ساده و در عین حال کوتاه برای حل این مدل تست ها است. اگر نقطهٔ $A(\alpha,\beta)$ در ضابطهٔ تابع اصلی صدق کند، در این صورت نقطهٔ $B(\beta,\alpha)$ در ضابطهٔ تابع وارون یا معکوس صدق خواهد کرد. با انتخاب یک نقطهٔ مناسب که متعلق به تابع $f(x)$ باشد، بررسی می کنیم آیا با جابه جایی مؤلفه های اول و دوم، نقطهٔ جدید در ضابطهٔ تابع معکوس صدق می کند یا خیر.

روش اول:

$$y=\frac{x}{1+|x|}=\begin{cases}\frac{x}{1+x} & x\ge 0 \Rightarrow 0\le y<1\\ \frac{x}{1-x} & x<0 \Rightarrow -1<y<0\end{cases}$$

$$y=\frac{x}{1+x}\Rightarrow y+yx=x\Rightarrow x(1-y)=y\Rightarrow x=\frac{y}{1-y}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x}{1-x}$$

$$y=\frac{x}{1-x}\Rightarrow y-yx=x\Rightarrow x(1+y)=y\Rightarrow x=\frac{y}{1+y}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x}{1+x}$$

بنابراین ضابطهٔ تابع معکوس به صورت $f^{-1}(x)=\frac{x}{1-|x|}\ ,\ |x|<1$ درمی‌آید

روش دوم:

نقطهٔ $(0,0)$ در ضابطهٔ تابع اصلی صدق می کند. از بین گزینه ها تنها معادله ای که $x=0$ عضو دامنه تعریفش باشد و نقطهٔ $(0,0)$ هم در ضابطهٔ آن صدق کند، ضابطهٔ $f^{-1}(x)=\frac{x}{1-|x|}$ است، به همین راحتی.

۳۹ **گزینه ۴**

روش اول:

ابتدا با تفکیک دامنه تعریف به دو قسمت $x>0$ و $x<0$ تکلیف قدرمطلق را روشن کرده و تابع را بازنویسی می کنیم. سپس برای هر یک از ضابطه های جدید، ضابطهٔ معکوس تابع را به دست می آوریم. داریم:

$$x\neq 0: y=\frac{|x|}{x}\sqrt{|x|}\Rightarrow\begin{cases}x>0: |x|=x\Rightarrow y=\sqrt{x}; y>0\\ x<0: |x|=-x\Rightarrow y=-\sqrt{-x}; y<0\end{cases}$$

$$y=\sqrt{x}\xrightarrow[\text{به توان ۲}]{x,y>0}y^2=x\Rightarrow f^{-1}(x)=x^2, x>0$$

$$y=-\sqrt{-x}\xrightarrow[\text{به توان ۲}]{x,y<0}y^2=-x\Rightarrow f^{-1}(x)=-x^2, x<0$$

هم چنین نقطهٔ $(0,0)$ باید در ضابطهٔ وارون تابع صدق کند. بنابراین ضابطهٔ معکوس تابع به صورت $y=x|x|\ ;\ x\in\mathbb{R}$ در می آید.

روش دوم:

اگر نقطهٔ $A(\alpha,\beta)$ در ضابطهٔ $f(x)$ صدق کند، در این صورت نقطهٔ $B(\beta,\alpha)$ در ضابطهٔ $f^{-1}(x)$ صدق می کند. نقطهٔ $A(4,2)$ در ضابطهٔ $f(x)$ صدق می کند. پس نقطهٔ $B(2,4)$ باید عضو تابع وارون باشد. (رد گزینه های ۱ و ۲) هم چنین برد تابع $f(x)$ برابر $\mathbb{R}$ است. پس دامنه تعریف تابع $f^{-1}(x)$ باید مجموعهٔ اعداد حقیقی یا همان $\mathbb{R}$ باشد. تنها گزینه ای که تمام این ویژگی ها را دارد، گزینهٔ $y=x|x|\ ;\ x\in\mathbb{R}$ است.

۴۰ **گزینه ۴**

گام اول

در تابع f و g به صورت مجموعه ای از زوج مرتب ها به ما داده شـده و تابع gof^{-1} را می خواهنـد، پس ابتدا باید تابع f^{-1} را با زوج مرتب هایش تشکیل دهیم. برای این کار کافی است در تمامی زوج مرتب های تابع f جای مؤلفه های اول و دوم را با هم عوض کنیم. پس با توجه به دامنه تعریف تابع $f^{-1}(x)$ و زوج مرتب های تابع $g(x)$ تابع gof^{-1} را به دست می آوریم.

گام دوم

برای حل تست اول باید f^{-1} را مشخص کنیم:

$$f=\{(۱,۲),(۲,۵),(۰,۳),(۴,-۱)\}\Rightarrow f^{-1}=\{(۲,۱),(۵,۲),(۳,۰),(-۱,۴)\}$$
$$\Rightarrow D_{f^{-1}}=\{۲,۵,۳,-۱\}$$

حالا بررسی می کنیم برای هر یک از اعضای $D_{f^{-1}}$ تابع gof^{-1} تعریف می شود یا خیر:

$$x=۲\Rightarrow f^{-1}(۲)=۱\Rightarrow g(f^{-1}(۲))=g(۱)\to \text{تعریف نمی شود}$$
$$x=۵\Rightarrow f^{-1}(۵)=۲\Rightarrow g(f^{-1}(۵))=g(۲)=۳\Rightarrow (۵,۳)\in gof^{-1}$$
$$x=۳\Rightarrow f^{-1}(۳)=۰\Rightarrow g(f^{-1}(۳))=g(۰)\to \text{تعریف نمی شود}$$
$$x=-۱\Rightarrow f^{-1}(-۱)=۴\Rightarrow g(f^{-1}(-۱))=g(۴)=۱\Rightarrow (-۱,۱)\in gof^{-1}$$

بنابراین تابع gof^{-1} به صورت $\{(۵,۳),(-۱,۱)\}$ در می آید.

۴۱ **گزینه ۴**

در حل تست به نکات زیر توجه داشته باشید:

الف) عبارت زیر رادیکال با فرجهٔ زوج باید نامنفی باشد.

ب) نمودار دو تابع $y=f(x)$ و $y=f^{-1}(x)$ نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینهٔ یکدیگرند.

دامنهٔ تابع $\sqrt{x-f^{-1}(x)}$ محدوده‌ای است که عبارت $x-f^{-1}(x)$ نامنفی شود پس:

$$x-f^{-1}(x)\geq ۰ \Rightarrow x\geq f^{-1}(x)$$

چون دو نمودار $f(x)$ و $f^{-1}(x)$ نسـبت به نیمسـاز ربع اول و سوم (همان خط $y=x$) قرینـهٔ هم هسـتند، بنابراین در نقاطی که نمودار تابع $y=f(x)$ بالای خط $y=x$ قرار دارد، نمودار $y=f^{-1}(x)$ پایین خط $y=x$ قرار می گیرد و برعکس. در بـازهٔ $[۳,۸]$ نمودار تابع $y=f(x)$ بالای خط $y=x$ قرار دارد بنابراین در همین بازه نمودار $y=f^{-1}(x)$ پایین خط $y=x$ قرار گرفته و در نتیجه $x-f^{-1}(x)$ مثبت می شود (به عبارت صحیح تر نامنفی می شود). بنابراین بازهٔ $[۳,۸]$ دامنه تعریف تابع داده شده است.

۴۲ **گزینه ۲**

گام اول

معکوس تابع نمایی $y = 2^x$، تابع لگاریتمی $y = log_2^x$ است. نقطهٔ برخورد این دو تابع با محورها را A و B نام گذاری کرده و فاصلهٔ دو نقطه را محاسبه می کنیم.

گام دوم

روش اول:

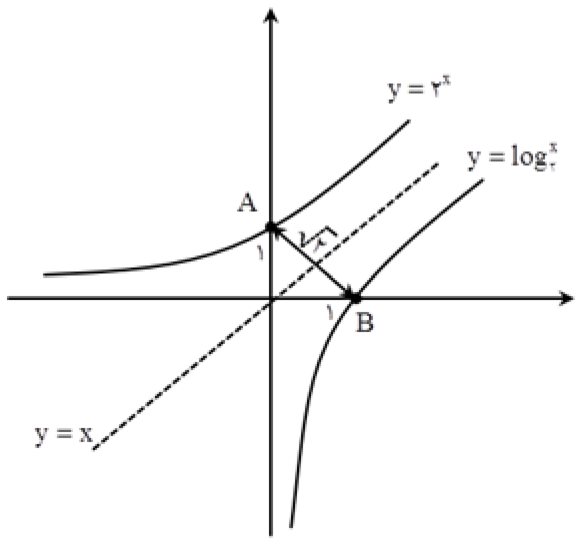
$$y = 2^x \xrightarrow[x=0]{\text{برخورد با محور } y} y = 2^0 = 1$$

پس نقطهٔ برخورد تابع $y = 2^x$ با محور yها نقطهٔ $A(0, 1)$ است. نقطهٔ برخورد تابع معکوس یا همان $y = log_2^x$ با محور xها نقطهٔ $B(1, 0)$ است. فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B برابر است با:

$$AB = \sqrt{(1-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

روش دوم:

با توجه به اینکه معکوس هر نمودار را می‌توانیم با رسم تقارن آن نسبت به خط $y = x$ به دست آوریم، نمودار تابع $y = 2^x$ را رسم کرده و با ترسیم وارون آن نسبت به خط $y = x$ نمودار تابع معکوس را به‌دست می‌آوریم.



۴۳ **گزینه ۱**

یک روش این است که از روی تابع اصلـی، ضابطهٔ وارون تابع را پیدا کنیم. اما روش ساده تری هم برای حل تست وجود دارد: ابتدا بررسی کنیم در بین گزینه ها کدام گزینه می تواند به عنوان تابع در نظر گرفته شود. سـپس با توجه به این که اگر نقطهٔ (α , β) در ضابطهٔ اصلی صدق کند، نقطهٔ (β , α) در وارون آن صدق می کند، گزینهٔ درست را پیدا کنیم.

روش اول:

$$۱)\ y=\sqrt{x}, x\geq ۰, y\geq ۰ \xrightarrow{\text{به توان ۲}} y^{۲}=x \Rightarrow f^{-۱}(x)=x^{۲}, x\geq ۰$$

$$۲)\ y=-\sqrt{-x}, x<۰ \Rightarrow y<۰ \xrightarrow{\text{به توان ۲}} y^{۲}=-x \Rightarrow x=-y^{۲} \Rightarrow f^{-۱}(x)=-x^{۲}, x<۰$$

$$f^{-۱}(x)=\begin{cases} x^{۲} & x\geq ۰ \\ -x^{۲} & x<۰ \end{cases} \Rightarrow y=x|x|, x\in \mathbb{R}$$

روش دوم:

گزینه های ۳ و ۴ اصلاً تابع نیستند. نقطهٔ $(۴ , ۲)$ در ضابطهٔ تابع اصلی صدق می کند. فقط گزینهٔ ۱ است که نقطهٔ $(۲ , ۴)$ در آن صدق می کند و می تواند به عنوان ضابطهٔ وارون در نظر گرفته شود.

۴۴ **گزینه ۱**

ابتدا برد تابع اصلـی که همان دامنه تعریف تابع وارون است را به دست می آوریم. برای به دست آوردن ضابطهٔ تابع وارون از روی ضابطهٔ تابع اصلی x را برحسب y به دست آورده و درنهایت به جای x عبارت $f^{-۱}(x)$ و به جای y، x را جایگذاری کرده و ضابطه را تعیین می کنیم.

$$y=۲-\sqrt{x-۱} \xrightarrow{\text{عدد زیر رادیکال با فرجهٔ زوج، مثبت است}} x\geq ۱ \Rightarrow x-۱\geq ۰ \Rightarrow \sqrt{x-۱}\geq ۰ \Rightarrow -\sqrt{x-۱}\leq ۰$$
$$\Rightarrow ۲-\sqrt{x-۱}\leq ۲ \Rightarrow y\leq ۲ \Rightarrow R_f=(-\infty , ۲] \Rightarrow D_{f^{-۱}}=(-\infty , ۲]$$

اکنون ضابطهٔ تابع وارون را به دست می‌آوریم:

$$y=۲-\sqrt{x-۱} \Rightarrow \sqrt{x-۱}=۲-y \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x-۱=(۲-y)^{۲}$$
$$\Rightarrow x-۱=۴-۴y+y^{۲} \Rightarrow x=۵-۴y+y^{۲} \Rightarrow f^{-۱}(x)=x^{۲}-۴x+۵$$

پس ضابطهٔ تابع وارون به صورت $y=x^{۲}-۴x+۵ ; x\leq ۲$ است.

۴۵ **گزینه ۴**

گام اول

الف) برای به دست آوردن تابع f^{-1} از روی تابع f که به صورت مجموعه ای از زوج‌های مرتب داده‌شده، کافی است جای مؤلفه های اول و دوم را با هم عوض کنیم.

ب) برای تشکیل gof^{-1} ابتدا دامنه تعریف آن را با استفاده از رابطهٔ $D_{gof^{-1}} = \left\{x \in D_{f^{-1}} | f^{-1}(x) \in D_g\right\}$ به دست می‌آوریم، سپس مقادیر gof^{-1} را محاسبه می کنیم.

گام دوم

$f = \{(۱, ۲), (۲, ۵), (۰, ۳), (۴, -۱)\} \Rightarrow f^{-1} = \{(۲, ۱), (۵, ۲), (۳, ۰), (-۱, ۴)\} \Rightarrow D_{f^{-1}}$
$= \{۲, ۵, ۳, -۱\}$

با توجه به این که $g = \{(۲, ۳), (-۱, ۴), (۴, ۱), (۳, ۰)\}$ است $D_{gof^{-1}}$ را تعیین می کنیم و سپس آن را به صورت زوج مرتب می نویسم.

$$D_{gof^{-1}} = \left\{x \in D_{f^{-1}} | f^{-1}(x) \in D_g\right\} = \{۵, -۱\}$$

$$g(f^{-1}(۵)) = g(۲) = ۳, \; g(f^{-1}(-۱)) = g(۴) = ۱ \Rightarrow gof^{-1} = \{(۵, ۳), (-۱, ۱)\}$$

۴۶ **گزینه ۳**

برای حل سؤال به صورت زیر عمل می‌کنیم:

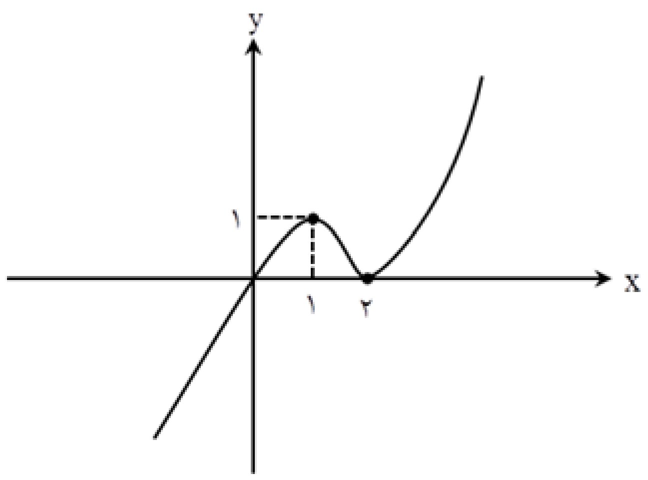
الف) ابتـدا قدرمطلق را ساده می‌کنیم و ضابطهٔ تابع را به صورت تفکیک‌شده می نویسـیم. (یک بار فرض می کنیم $x \geq ۲$ و بار دیگر فرض می کنیم $x < ۲$ باشد و ضابطهٔ تابع را تعیین می کنیم.)

ب) نمودار تابع را رسم کرده و بازه ای که در آن تابع نزولی است را مشخص می کنیم.

ج) با توجه به این نکته که $D_{f^{-۱}} = R_f$، دامنه تعریف تابع معکوس را مشخص کرده و ضابطهٔ آن را نیز تعیین می کنیم.

$$f(x) = x|x-۲| = \begin{cases} x \geq ۲ \Rightarrow |x-۲| = x-۲ \Rightarrow y = x(x-۲) \\ x < ۲ \Rightarrow |x-۲| = -(x-۲) \Rightarrow y = -x(x-۲) \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^۲ - ۲x & x \geq ۲ \\ -x^۲ + ۲x & x < ۲ \end{cases}$$



تنها بازه ای که در آن تابع نزولی باشد، بازهٔ $[۱, ۲]$ است. برد تابع در این بازه $[۰, ۱]$ است. پس $D_{f^{-۱}} = [۰, ۱]$ (رد گزینه های ۱ و ۲). حال در محدودهٔ مشخص‌شده ضابطهٔ $f^{-۱}(x)$ را تعیین می کنیم:

$$۱ < x < ۲ \Rightarrow f(x) = -x^۲ + ۲x \Rightarrow y = -x^۲ + ۲x \Rightarrow -y = x^۲ - ۲x$$

$$\xrightarrow{+۱} ۱ - y = x^۲ - ۲x + ۱ \Rightarrow ۱ - y = (x-۱)^۲ \Rightarrow x - ۱ = \sqrt{۱-y}$$

$$\Rightarrow x = ۱ + \sqrt{۱-y} \Rightarrow f^{-۱}(x) = ۱ + \sqrt{۱-x} \; ; \; ۰ < x < ۱$$

۴۷ **گزینه ۳**

دو تابع $g(x)$ و $(fog)(x)$ را داریم. می‌دانیم:

$$(fog)(x) = f(g(x)) = ۸x^۲ + ۶x + ۵ \quad \Rightarrow \quad f(۲x+۱) = ۸x^۲ + ۶x + ۵ \qquad (I)$$

با استفاده از تغییر متغیر، ضابطهٔ تابع $f(x)$ را به‌دست می‌آوریم. فرض می‌کنیم $۲x + ۱ = t$ باشد، x را برحسب t به‌دست آورده و در ضابطهٔ (I) جایگذاری می‌کنیم؛ داریم:

$$۲x + ۱ = t \quad \Rightarrow \quad ۲x = t - ۱ \quad \Rightarrow \quad x = \frac{t-۱}{۲}$$

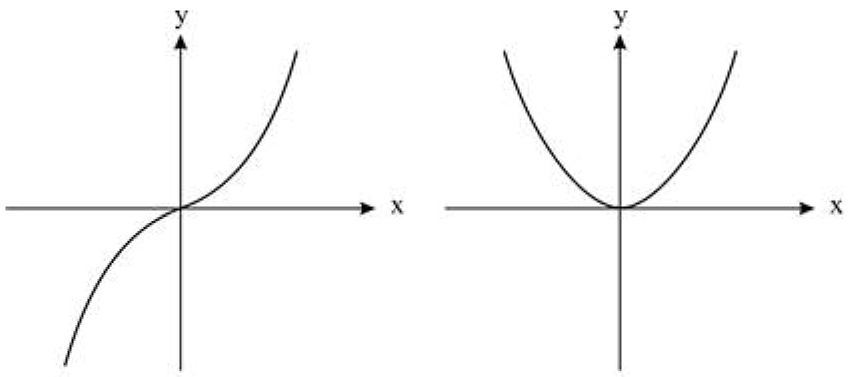
$$f(۲x+۱) = ۸x^۲ + ۶x + ۵ \quad \Rightarrow \quad f(t) = ۸\left(\frac{t-۱}{۲}\right)^۲ + ۶\left(\frac{t-۱}{۲}\right) + ۵ = ۲(t-۱)^۲ + ۳t - ۳ + ۵$$

$$\Rightarrow \quad f(t) = ۲(t^۲ - ۲t + ۱) + ۳t + ۲ = ۲t^۲ - ۴t + ۲ + ۳t + ۲ = ۲t^۲ - t + ۴$$

بنابراین ضابطهٔ $f(x)$ به‌صورت $f(x) = ۲x^۲ - x + ۴$ است.

۴۸ **گزینه ۳**

با رسم نمودار تابع $f(x) = |x^۳|$ به سؤال پاسخ می‌دهیم. ابتدا نمودار $y = x^۳$ را رسم و آن قسمت از منحنی که در پایین محور xها قرار دارد را نسبت به این محور قرینه می‌کنیم.



$f(x) = x^۳$ $\qquad$ $f(x) = |x^۳|$

با توجه به نمودار رسم‌شده، این تابع نه صعودی است و نه نزولی. این تابع یک‌به‌یک هم نیست، درنتیجه وارون‌ناپذیر می‌شود؛ بنابراین فقط گزینهٔ ۳ می‌تواند درست باشد.

۴۹ گزینه ۳

گام اول

الف) ابتدا ضابطهٔ تابع $f(x)$ را باتوجه‌به محدوده‌هایی که برای x در نظر می‌گیریم، ساده می‌کنیم. محدودهٔ x بر اساس ریشهٔ عبارت‌های داخل قدر مطلق تعیین می‌شود.

ب) بازه‌ای که در آن تابع $f(x)$ صعودی است (مقدار $f(x)$ به ازای افزایش x در حال افزایش است) را تعیین کرده و در آن بازه ضابطهٔ $f^{-1}(x)$ را به دست می‌آوریم.

گام دوم

ریشهٔ عبارت‌های درون قدر مطلق، $x=-1$ و $x=3$ است. داریم:

$$x<-1: f(x)=-2x+6-(-x-1)=-2x+6+x+1=-x+7$$

$$-1\le x\le 3: f(x)=-2x+6-(x+1)=-3x+5$$

$$x>3: f(x)=2x-6-(x+1)=x-7$$

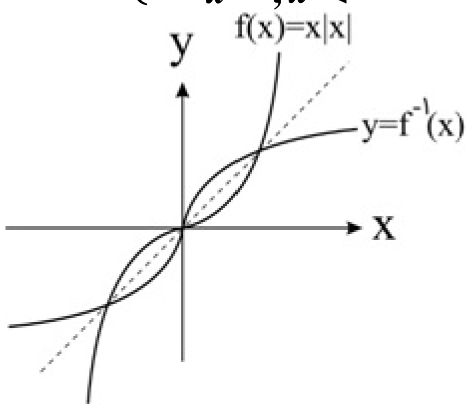
در بازهٔ $x>3$ تابع $f(x)=x-7$ یک تابع صعودی است. در این بازه ضابطهٔ $f^{-1}(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$y=x-7\Rightarrow x=y+7\Rightarrow f^{-1}(x)=x+7\ ,\ x>-4$$

۵۰ گزینه ۳

ابتدا نمودار $f(x)$ را رسم می‌کنیم. نمودار f^{-1} قرینهٔ $f(x)$ نسبت به نیمساز ربع اول و سوم است.

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & ;x\ge 0\\ -x^2 & ;x<0\end{cases}$$



۵۱ گزینه ۲

گام اول

باتوجه‌به اینکه $f^{-1}(g(2a))=6$ است، می‌توان نتیجه گرفت: $g(2a)=f(6)$

گام دوم

$$g(x)=\frac{x}{x-1}\Rightarrow g(2a)=\frac{2a}{2a-1}=f(6)=3$$

$$\Rightarrow 2a=3(2a-1)\Rightarrow 2a=6a-3\Rightarrow 4a=3\Rightarrow a=\frac{3}{4}$$

۵۲ **گزینه ۳**

گام اول

می‌دانیم اگر نقطهٔ $A(\alpha,\beta)$ در ضابطهٔ تابع صدق کند، نقطهٔ به مختصات $A'(\beta,\alpha)$ در ضابطهٔ وارون تابع صدق می‌کند.

گام دوم

$$x=۴ \Rightarrow f(۴)=\sqrt{۴}=۲ \Rightarrow (۴,۲)\in f \Rightarrow (۲,۴)\in f^{-۱}$$

با استفاده از این نقطه گزینه‌های ۱ و ۴ نمی‌توانند جواب تست باشند.

$$x=-۴ \Rightarrow f(-۴)=-\sqrt{۴}=-۲ \Rightarrow (-۴,-۲)\in f \Rightarrow (-۲,-۴)\in f^{-۱}$$

باتوجه‌به این دو مثال ضابطهٔ وارون تابع به صورت $f^{-۱}(x)=x|x|$ خواهد بود.

۵۳ **گزینه ۲**

$$g^{-۱}of^{-۱}(a)=g^{-۱}(f^{-۱}(a))=۸ \Rightarrow (f^{-۱}(a),۸)\in g^{-۱} \Rightarrow (۸,f^{-۱}(a))\in g \Rightarrow g(۸)=f^{-۱}(a) \quad (*)$$
$$g(x)=\sqrt{۵x+۹} \Rightarrow g(۸)=\sqrt{۴۹} \Rightarrow g(۸)=۷$$
$$\xrightarrow{(*)} f^{-۱}(a)=۷ \Rightarrow (a,۷)\in f^{-۱} \Rightarrow (۷,a)\in f \Rightarrow a=۳$$

۵۴ **گزینه ۲**

راه‌حل اول:

ضابطهٔ تابع وارون را به دست می‌آوریم:

$$y=\frac{x+۴}{x-۲} \Rightarrow yx-۲y=x+۴ \Rightarrow yx-x=۲y+۴$$

$$\Rightarrow x(y-۱)=۲y+۴ \Rightarrow x=\frac{۲y+۴}{y-۱} \Rightarrow y^{-۱}=\frac{۲x+۴}{x-۱}$$

با مساوی قرار دادن ضابطهٔ تابع با وارون آن نقطهٔ تقاطع را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{x+۴}{x-۲}=\frac{۲x+۴}{x-۱} \Rightarrow x^۲+۳x-۴=۲x^۲+\cancel{۴x}-\cancel{۴x}-۸$$

$$\Rightarrow x^۲-۳x-۴=۰ \Rightarrow (x-۴)(x+۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=-۱ \\ x=+۴ \end{cases}$$

راه‌حل دوم:

هرگاه نمودار تابعی، نمودار وارون خود را قطع کند، محل تلاقی این دو نمودار دارای مختصات یکسان است.

$$(a,a) \Rightarrow f(a)=a \Rightarrow \frac{a+۴}{a-۲}=a \xrightarrow{a\neq ۲} a^۲-۳a-۴=۰ \Rightarrow \begin{cases} a=-۱ \\ a=+۴ \end{cases}$$

منبع: کنکور سراسری

۱ در یک دنبالهٔ اعداد $a_1 = ۳$ و برای هر $n \geq ۲$ داریم: $a_n = ۲a_{n-1} - ۲$، حاصل $a_8 - a_7$ کدام است؟

۱) ۳۲ ۲) ۴۸

۳) ۵۶ ۴) ۶۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۲ اعداد طبیعی فرد را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات در هر دسته، برابر شمارهٔ آن دسته باشد، $(۱), (۳, ۵), (۷, ۹, ۱۱), \ldots$؛ مجموع دو جملهٔ اول و آخر دستهٔ سی‌ام، کدام است؟

۱) ۱۷۰۰ ۲) ۱۷۵۰

۳) ۱۸۰۰ ۴) ۱۸۵۰

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

۳ در یک دنبالهٔ اعداد، $a_1 = ۱$ و برای هر $n \geq ۲$ داریم $a_n = ۲a_{n-1} + ۱$، جملهٔ هشتم این دنباله کدام است؟

۱) ۱۲۷ ۲) ۱۵۹

۳) ۲۴۷ ۴) ۲۵۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۴ در یک دنبالهٔ هندسی، جملهٔ دوم، دو برابر جملهٔ پنجم و جملهٔ هشتم می‌توانند سه جملهٔ متوالی از یک دنبالهٔ حسابی باشند. بزرگ‌ترین این سه عدد چندبرابر کوچک‌ترین آن‌ها است؟

۱) $۲ + \sqrt{۳}$ ۲) $۵ + ۲\sqrt{۳}$

۳) $۵ + ۴\sqrt{۳}$ ۴) $۷ + ۴\sqrt{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۵ جملات دوم و پنجم و دوازدهم از یک دنبالهٔ حسابی، می‌توانند سه جملهٔ متوالی از دنبالهٔ هندسی باشند. قدر نسبت دنبالهٔ هندسی کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۳}$ ۲) $\frac{۷}{۴}$

۳) $\frac{۹}{۴}$ ۴) $\frac{۷}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

۶ در یک تصاعد هندسی، مجموع سه جملهٔ متوالی ۱۹ و حاصل‌ضرب آن‌ها ۲۱۶ است. تفاضل کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین این سه عدد کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵

۳) ۶ ۴) ۷

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۷ به ازای یک مقدار x، اعداد $x - ۸$، x و $x + ۱۲$، به ترتیب سه جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی نزولی‌اند. حدّ مجموع جملات این دنباله، کدام است؟

۱) ۱۸
۲) ۲۱
۳) ۲۴
۴) ۲۷

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۸ در یک دنبالهٔ عددی، جملهٔ n اُم به صورت $a_n = \frac{۳}{۲}n - ۵$ است. مجموع ۱۵ جملهٔ اول این دنباله، کدام است؟

۱) ۹۰
۲) ۱۰۵
۳) ۱۲۰
۴) ۱۳۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۹

۹ در یک دنبالهٔ عددی، جملهٔ پنجم برابر ۳ و هر جمله از جملهٔ ماقبل خود به اندازهٔ $\frac{۱}{۲}$ کمتر است. مجموع ۱۰ جملهٔ اول آن کدام است؟

۱) ۲۲/۵
۲) ۲۵
۳) ۲۷/۵
۴) ۳۰

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۲

۱۰ در یک دنبالهٔ عددی، مجموع ۱۲ جملهٔ اول آن ۱۳۸ و جملهٔ ششم آن ۱۰ است، جملهٔ اول این دنباله کدام است؟

۱) -۵
۲) -۴
۳) -۳
۴) -۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۰

۱۱ در بیست جملهٔ اول از یک دنبالهٔ عددی، مجموع جملات ردیف فرد، ۱۳۵ و مجموع جملات ردیف زوج، ۱۵۰ است، جملهٔ اول کدام است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

۱۲ در یک دنبالهٔ حسابی، مجموع پنج جملهٔ اول آن، $\frac{۱}{۳}$ مجموع پنج جملهٔ بعدی است. جملهٔ دوم چند برابر جملهٔ اول است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$
۲) $\frac{۵}{۲}$
۳) ۳
۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۱۳ در یک دنبالهٔ عددی، جملهٔ هفتم نصف جملهٔ سوم است، مجموع چند جملهٔ اول از این دنباله، صفر است؟

۱) ۱۸
۲) ۱۹
۳) ۲۰
۴) ۲۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

۱۴ مجموع تمام اعداد طبیعی بخش پذیر بر ۶ بین دو عدد ۱۰۰ و ۲۰۰ کدام است؟

۱) ۲۴۲۰ ۲) ۲۴۵۰

۳) ۲۵۲۰ ۴) ۲۵۵۰

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۱

۱۵ مجموع اعداد طبیعی فرد، بخش پذیر بر ۳ و کوچک تر از ۱۰۱ کدام است؟

۱) ۸۱۶ ۲) ۸۵۲

۳) ۸۶۷ ۴) ۸۸۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵

۱۶ در دنبالهٔ هندسی ... , ۴ , ۲ , ۱، مجموع چهارده جملهٔ اول، چند برابر مجموع هفت جملهٔ اول آن است؟

۱) ۶۵ ۲) ۶۳

۳) ۱۲۷ ۴) ۱۲۹

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

۱۷ به ازای یک مقدار x ، اعداد $x^۲ - ۲$، $۲x$ و $x^۲ + ۴$ به ترتیب سه جملهٔ اول از یک دنبالهٔ هندسی نزولی اند. مجموع هفت جملهٔ اول این دنباله، کدام است؟

۱) $\frac{۱۱۷}{۱۶}$ ۲) $\frac{۱۲۵}{۱۶}$

۳) $\frac{۶۳}{۴}$ ۴) $\frac{۱۲۷}{۸}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۱۸ در یک دنبالهٔ هندسی نزولی، مجموع مجذورات تمام جملات، برابر $\frac{۲}{۳}$ مجذور مجموع تمام جملات آن است. قدر نسبت این دنباله، کدام است؟

۱) ۰/۲ ۲) ۰/۲۵

۳) ۰/۳ ۴) ۰/۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۱۹ اعداد طبیعی را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات هر دسته، برابر شمارهٔ آن دسته باشد... ,(۷,۸,۹,۱۰),(۴,۵,۶) (۲,۳), (۱)، مجموع جملات در دستهٔ بیستم، کدام است؟

۱) ۴۰۱۰ ۲) ۴۰۲۰

۳) ۴۰۳۰ ۴) ۴۰۴۰

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

۲۰ در یک دنبالهٔ هندسی نزولی هر جملهٔ آن، نصف مجموع تمام جملات بعدی می‌باشد. قدر نسبت آن کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

منبع: کنکور سراسری

۱ **گزینه ۴**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

گام اول

این دنباله، بازگشتی است. در دنباله‌های بازگشتی بین هر جمله و جملات قبل‌ازآن، یک رابطه وجود دارد. در این سؤال هر جمله از دنباله، دو واحد کمتر از دو برابر جملهٔ قبلی است.

گام دوم

جملهٔ اول دنباله برابر ۳ است. با توجه به رابطهٔ داده‌شده، جملات دوم به بعد را می‌نویسیم تا به جملهٔ هفتم و هشتم برسیم، سپس اختلاف این دو جمله را محاسبه کنیم.

$$a_1 = 3$$
$$a_2 = 2a_1 - 2 = (2 \times 3) - 2 = 6 - 2 = 4$$
$$a_3 = 2a_2 - 2 = (2 \times 4) - 2 = 8 - 2 = 6$$
$$a_4 = 2a_3 - 2 = (2 \times 6) - 2 = 12 - 2 = 10$$
$$a_5 = 2a_4 - 2 = (2 \times 10) - 2 = 20 - 2 = 18$$
$$a_6 = 2a_5 - 2 = (2 \times 18) - 2 = 36 - 2 = 34$$
$$a_7 = 2a_6 - 2 = (2 \times 34) - 2 = 68 - 2 = 66$$
$$a_8 = 2a_7 - 2 = (2 \times 66) - 2 = 132 - 2 = 130$$

اختلاف دو جملهٔ هفتم و هشتم برابر است با:

$$a_8 - a_7 = 130 - 66 = 64$$

۲ **گزینه ۳**

در دستهٔ اول ۱ جمله، در دستهٔ دوم ۲ جمله، در دستهٔ سوم ۳ جمله و ... وجود دارد، پس تا دستهٔ بیست و نهم که ۲۹ جمله دارد، تعداد جملات استفاده‌شده برابر است با $\frac{29 \times 30}{2} = 435$ یعنی اولین عدد دستهٔ سی‌ام برابر است با جملهٔ ۴۳۶ام دنبالهٔ اعداد طبیعی فرد.

$$a_n = 2n - 1$$

اولین جملهٔ دستهٔ سی‌ام:

$$a_{436} = 2(436) - 1 = 871 = a'_1$$

و چون دستهٔ سی‌ام ۳۰ جمله دارد جملهٔ سی‌ام آن برابر است با:

$$a'_{30} = a'_1 + 29d = 871 + 29(2) = 929 \Rightarrow a'_1 + a'_{30} = 871 + 929 = 1800$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

۳ **گزینه ۴**

با نوشتن چندجملهٔ اول دنباله، رابطهٔ جملهٔ عمومی دنباله را به دست می‌آوریم.

$$a_1 = 1,\ a_2 = 3,\ a_3 = 7, \ldots \Rightarrow a_n = 2^n - 1 \xrightarrow{n=8} a_8 = 2^8 - 1 = 255$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۴ گزینه ۴

$$a_2, 2a_5, a_8 \to aq, 2aq^4, aq^7$$

$$\xrightarrow[\text{حسابی می‌دهند}]{\text{تشکیل تصاعد}} aq + aq^7 = 2(2aq^4) \Rightarrow q^7 - 4q^4 + q = 0$$

$$q(q^6 - 4q^3 + 1) = \begin{cases} q = 0 \\ q^6 - 4q^3 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{q^3 = t} t^2 - 4t + 1 = 0$$

$$\Rightarrow t = 2 \pm \sqrt{3} \Rightarrow q^3 = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$\frac{aq^7}{aq} = q^6 = (q^3)^2 = (2 + \sqrt{3})^2 = 7 + 4\sqrt{3}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۵ گزینه ۴

جملهٔ اول دنبالهٔ حسابی مفروض را a_1 و قدر نسبت آن را d در نظر می‌گیریم. در این صورت، باتوجه‌به اینکه $a_n = a_1 + (n-1)d$، داریم $a_2 = a_1 + d$، $a_5 = a_1 + 4d$ و $a_{12} = a_1 + 11d$.

ازطرفی می‌دانیم که اگر x، y و z به ترتیب جمله‌های متوالی یک دنبالهٔ هندسی باشند، آنگاه $y^2 = x.z$؛ پس باتوجه‌به فرض سؤال داریم:

$$a_5^2 = a_2 . a_{12} \Rightarrow (a_1 + 4d)^2 = (a_1 + d) \times (a_1 + 11d)$$

$$\Rightarrow a_1^2 + 8a_1 d + 16d^2 = a_1^2 + 12a_1 d + 11d^2 \Rightarrow 5d^2 = 4a_1 d \xrightarrow{d \neq 0} a_1 = \frac{5}{4}d \ (*)$$

$$\begin{cases} a_2 = a_1 + d \\ a_5 = a_1 + 4d \end{cases} \xrightarrow{(*)} \begin{cases} a_2 = \frac{5}{4}d + d = \frac{9}{4}d \\ a_5 = \frac{5}{4}d + 4d = \frac{21}{4}d \end{cases}$$

قدر نسبت دنبالهٔ هندسی، از تقسیم دوجملهٔ متوالی آن به دست می‌آید، یعنی اگر قدر نسبت دنبالهٔ هندسی موردنظر سؤال را q در نظر بگیریم، آنگاه:

$$q = \frac{a_5}{a_2} = \frac{\frac{21}{4}d}{\frac{9}{4}d} = \frac{21}{9} = \frac{7}{3}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

۶ **گزینه ۲**

اگر قدرنسبت این تصاعد را q درنظر بگیریم، می‌توانیم سه جملهٔ متوالی آن را $\frac{a}{q}$، a و aq درنظر بگیریم. طبق فرض سؤال داریم:

$$\begin{cases} \frac{a}{q} + a + aq = ۱۹ \quad (*) \\ (\frac{a}{q})(a)(aq) = ۲۱۶ \Rightarrow a^۳ = ۲۱۶ \Rightarrow a^۳ = ۶^۳ \Rightarrow a = ۶ \quad (**) \end{cases}$$

$$(*),(**) \Rightarrow \frac{۶}{q} + ۶ + ۶q = ۱۹ \xrightarrow{\times q} ۶ + ۶q + ۶q^۲ = ۱۹q$$

$$\Rightarrow ۶q^۲ - ۱۳q + ۶ = ۰ \Rightarrow q = \frac{-(-۱۳) \pm \sqrt{(-۱۳)^۲ - ۴(۶)(۶)}}{۲(۶)} = \frac{۱۳ \pm ۵}{۱۲}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} q = \frac{۳}{۲} \\ q = \frac{۲}{۳} \end{cases}$$

در حالتی که $q = \frac{۳}{۲}$، ازآنجاکه $a = ۶$ جمله‌ها به‌صورت $۶\,,\,۶(\frac{۳}{۲}) = ۹$ و $\frac{۶}{\frac{۳}{۲}} = ۴$ درمی‌آیند.

درحالتی که $q = \frac{۲}{۳}$، ازآنجاکه $a = ۶$ جمله‌ها به‌صورت $۶, ۶(\frac{۲}{۳}) = ۴$ و $\frac{۶}{\frac{۲}{۳}} = ۹$ درمی‌آیند.

پس در هر دو حالت، تفاضل کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین این سه عدد برابر است با: $۹ - ۴ = ۵$.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۷ **گزینه ۴**

$$(۸ - x)(۱۲ + x) = x^۲ \Rightarrow -x^۲ - ۴x + ۹۶ = x^۲ \Rightarrow x^۲ + ۲x - ۴۸ = ۰$$

$$\Rightarrow (x + ۸)(x - ۶) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۸ \quad \text{غ ق ق} \\ x = ۶ \end{cases} \Rightarrow ۱۸, ۶, ۲ \Rightarrow a = ۱۸\,,\, q = \frac{۱}{۳}$$

$$\text{حد مجموع}: S = \frac{a}{۱-q} = \frac{۱۸}{۱-\frac{۱}{۳}} = ۲۷$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۸ **گزینه ۲**

برای محاسبهٔ مجموع n جملـهٔ اول در یک تصاعد عددی از رابطهٔ $S_n = \frac{n}{۲}(a_۱ + a_n)$ اسـتفاده می کنیم. در این سؤال با محاسبهٔ $a_۱$ و $a_{۱۵}$ از روی جملهٔ عمومی دنباله، مقدار $S_{۱۵}$ را به آسانی محاسبه می‌کنیم.

$$a_n = \frac{۳}{۲}n - ۵ \Rightarrow \begin{cases} a_۱ = \frac{۳}{۲} - ۵ = -\frac{۷}{۲} \\ a_{۱۵} = \frac{۳}{۲}(۱۵) - ۵ = \frac{۴۵}{۲} - \frac{۱۰}{۲} = \frac{۳۵}{۲} \end{cases}$$

پس $S_{۱۵}$ برابر است با:

$$S_{۱۵} = \frac{۱۵}{۲}(-\frac{۷}{۲} + \frac{۳۵}{۲}) = \frac{۱۵}{۲} \times \frac{۲۸}{۲} = ۷ \times ۱۵ = ۱۰۵$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۹

۹ **گزینه ۳**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۲

گام اول

وقتی سؤال اشاره می کند در یک دنبالهٔ عددی هر جمله از جملهٔ ماقبل خود به اندازهٔ $\frac{۱}{۲}$ کمتر است یعنی قدرنسبت تصاعد برابر $-\frac{۱}{۲}$ است ($d = -\frac{۱}{۲}$).

گام دوم

مقدار $a_۵$ در صورت سؤال دادهشده است. با توجه به رابطهٔ $a_۵ = a_۱ + ۴d$، $a_۱$ را حساب می کنیم.

$$a_۵ = a_۱ + ۴d \xrightarrow[d=-\frac{۱}{۲}]{a_۵=۳} ۳ = a_۱ + ۴(-\frac{۱}{۲}) = a_۱ - ۲ \Rightarrow a_۱ = ۳ + ۲ = ۵$$

برای محاسبهٔ $S_{۱۰}$ از رابطهٔ $S_n = \frac{n}{۲}[۲a_۱ + (n-۱)d]$ استفاده می کنیم.

$$S_{۱۰} = \frac{۱۰}{۲}(۲a_۱ + ۹d) = ۵(۱۰ - \frac{۹}{۲}) = ۵ \times \frac{۱۱}{۲} = \frac{۵۵}{۲} = ۲۷/۵$$

۱۰ **گزینه ۱**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۰

گام اول

با توجه به صورت سؤال $S_{۱۲} = ۱۳۸$ و $a_۶ = ۱۰$ است. یک دستگاه دو معادله و دو مجهول برحسب $a_۱$ و d تشکیل می دهیم.

گام دوم

$$S_{۱۲} = ۱۳۸ \Rightarrow \frac{۱۲}{۲}(۲a_۱ + ۱۱d) = ۱۳۸ \Rightarrow ۶(۲a_۱ + ۱۱d) = ۱۳۸ \Rightarrow ۲a_۱ + ۱۱d = ۲۳$$

$$a_۶ = ۱۰ \Rightarrow a_۱ + ۵d = ۱۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲a_۱ + ۱۱d = ۲۳ \\ a_۱ + ۵d = ۱۰ \xrightarrow{\times(-۲)} \end{cases} \begin{cases} ۲a_۱ + ۱۱d = ۲۳ \\ -۲a_۱ - ۱۰d = -۲۰ \end{cases} \xrightarrow{(+)} d = ۳$$

$$a_۱ + ۵d = ۱۰ \xrightarrow{d=۳} a_۱ + ۱۵ = ۱۰ \Rightarrow a_۱ = -۵$$

۱۱ **گزینه ۱**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

گام اول

الف) اطلاعات سؤال را به زبان ریاضی می‌نویسیم:

$$a_۱ + a_۳ + a_۵ + \cdots + a_{۱۹} = ۱۳۵$$

$$a_۲ + a_۴ + a_۶ + \cdots + a_{۲۰} = ۱۵۰$$

ب) در عبارت‌های نوشته‌شده، سطر اول تشکیل یک دنبالهٔ عددی با جملهٔ اول $a_۱$ و قدرنسبت $۲d$ می دهد. سطر دوم هم تشکیل یک دنبالهٔ عددی با جملهٔ اول $a_۲$ و قدرنسبت $۲d$ می دهد که هر کدام ده جمله دارند.

گام دوم

مجموع ده جملهٔ اول را برای هر کدام از دنباله ها به دست می آوریم:

$a_۱$ دنباله ای با قدرنسبت $۲d$ جملهٔ اول $: S = \frac{۱۰}{۲}(۲a_۱ + ۹(۲d)) = ۵(۲a_۱ + ۱۸d) = ۱۳۵ \Rightarrow ۲a_۱ + ۱۸d = ۲۷$

$a_۲$ دنباله ای با قدرنسبت $۲d$ جملهٔ اول $: S = \frac{۱۰}{۲}(۲a_۲ + ۹(۲d)) = ۵(۲a_۲ + ۱۸d) = ۱۵۰ \Rightarrow ۲a_۲ + ۱۸d = ۳۰$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲a_۲ + ۱۸d = ۳۰ \\ ۲a_۱ + ۱۸d = ۲۷ \end{cases} \xrightarrow{(-)} ۲(a_۲ - a_۱) = ۳ \xrightarrow{a_۲ - a_۱ = d} ۲d = ۳ \Rightarrow d = \frac{۳}{۲}$$

$$۲a_۱ + ۱۸d = ۲۷ \xrightarrow{d = \frac{۳}{۲}} ۲a_۱ + ۱۸(\frac{۳}{۲}) = ۲۷ \Rightarrow ۲a_۱ + ۲۷ = ۲۷ \Rightarrow a_۱ = ۰$$

۱۲ **گزینه ۳**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

گام اول

با توجه به صورت سؤال داریم:

$$S_۵ = \frac{۱}{۳}(S_{۱۰} - S_۵) \xrightarrow{\times ۳} ۳S_۵ = S_{۱۰} - S_۵ \Rightarrow S_{۱۰} = ۴S_۵$$

گام دوم

$$S_{۱۰} = ۴S_۵ \Rightarrow \frac{۱۰}{۲}(۲a_۱ + ۹d) = ۴ \times \frac{۵}{۲}(۲a_۱ + ۴d) \Rightarrow ۵(۲a_۱ + ۹d) = ۱۰(۲a_۱ + ۴d)$$

$$\Rightarrow ۱۰a_۱ + ۴۵d = ۲۰a_۱ + ۴۰d \Rightarrow ۱۰a_۱ = ۵d \Rightarrow d = ۲a_۱$$

اکنون نسبت جملهٔ دوم به جملهٔ اول را به دست می آوریم:

$$\frac{a_۲}{a_۱} = \frac{a_۱ + d}{a_۱} \xrightarrow{d = ۲a_۱} \frac{a_۲}{a_۱} = \frac{a_۱ + ۲a_۱}{a_۱} = \frac{۳a_۱}{a_۱} = ۳$$

۱۳ گزینه ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

گام اول

الف) جملهٔ هفتم نصف جملهٔ سوم است یعنی $a_۷ = \frac{۱}{۲}a_۳$.

ب) می خواهیم n ای را پیدا کنیم که به ازای آن $S_n = ۰$ باشد.

گام دوم

$$a_۷ = \frac{۱}{۲}a_۳ \Rightarrow a_۱ + ۶d = \frac{۱}{۲}(a_۱ + ۲d) \xrightarrow{\times ۲} ۲a_۱ + ۱۲d = a_۱ + ۲d \Rightarrow a_۱ = -۱۰d$$

$$S_n = ۰ \Rightarrow \frac{n}{۲}[۲a_۱ + (n-۱)d] = ۰ \xrightarrow{a_۱ = -۱۰d} \frac{n}{۲}[۲(-۱۰d) + (n-۱)d] = ۰$$

$$\xrightarrow{n \neq ۰} -۲۰d + (n-۱)d = ۰ \Rightarrow (n-۱)d = ۲۰d \Rightarrow n - ۱ = ۲۰ \Rightarrow n = ۲۱$$

بنابراین مجموع بیست‌ویک جملهٔ اول این دنبالهٔ عددی برابر صفر می شود.

۱۴ گزینه ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۱

گام اول

الف) اعداد بخش پذیر بر ۶ هم بر ۲ و هم بر ۳ بخش پذیرند.

ب) اعداد بخش پذیر بر ۶ که بین ۱۰۰ و ۲۰۰ قرار داشته باشند تشکیل یک دنبالهٔ عددی با جملهٔ اول ۱۰۲ و قدرنسبت ۶ می دهند.

گام دوم

تعداد جملات در یک دنبالهٔ عددی از رابطهٔ زیر به دست می آید:

$$\text{جملات دنباله} : ۱۰۲, ۱۰۸, ۱۱۴, \ldots, ۱۹۸ \Rightarrow a_۱ = ۱۰۲, d = ۶$$

$$\text{تعداد جملات دنباله} = \frac{\text{جمله آخر} - \text{جمله اول}}{\text{فاصلهٔ دو جمله}} + ۱ = \frac{۱۹۸-۱۰۲}{۶} + ۱ = \frac{۹۶}{۶} + ۱ = ۱۶ + ۱ = ۱۷$$

$$S_{۱۷} = \frac{۱۷}{۲}(a_۱ + a_{۱۷}) = \frac{۱۷}{۲}(۱۰۲ + ۱۹۸) = \frac{۱۷}{۲} \times ۳۰۰ = ۱۷ \times ۱۵۰ = ۲۵۵۰$$

۱۵ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵

گام اول

اعداد طبیعی فرد بخش پذیر بر ۳ و کوچک تر از ۱۰۱ تشکیل یک دنبالهٔ عددی با جملهٔ اول ۳ و قدرنسبت ۶ می دهند.

گام دوم

با توجه به رابطهٔ:

$$\text{تعداد جملات} = \frac{\text{جملهٔ آخر} - \text{جملهٔ اول}}{\text{فاصلهٔ دو جمله}} + ۱$$

ابتدا تعداد جملات را محاسبه و سپس مجموع جملات را حساب می کنیم:

$$\text{جملات دنباله} : ۳\,,\,۹\,,\,۱۵\,,\,\dots\,,\,۹۹$$

$$\text{تعداد جملات} = \frac{۹۹-۳}{۶} + ۱ = \frac{۹۶}{۶} + ۱ = ۱۶ + ۱ = ۱۷$$

$$S_{۱۷} = \frac{۱۷}{۲}(a_۱ + a_{۱۷}) = \frac{۱۷}{۲}(۳ + ۹۹) = \frac{۱۷}{۲} \times ۱۰۲ = ۱۷ \times ۵۱ = ۸۶۷$$

۱۶ گزینه ۴

در دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول $a_۱$ و قدرنسبت q مجموع n جملهٔ اول از رابطهٔ $S_n = \frac{a_۱(۱-q^n)}{۱-q}$ محاسبه می شود. بنابراین نسبت $\frac{S_{۱۴}}{S_۷}$ برابر است با:

$$\frac{S_{۱۴}}{S_۷} = \frac{\frac{a_۱(۱-q^{۱۴})}{۱-q}}{\frac{a_۱(۱-q^۷)}{۱-q}} = \frac{۱-q^{۱۴}}{۱-q^۷} = \frac{(۱-q^۷)(۱+q^۷)}{۱-q^۷} = (۱+q^۷)$$

قدرنسبت تصاعد را از رابطهٔ $q = \frac{a_۲}{a_۱}$ تعیین کرده و سپس مقدار $\frac{S_{۱۴}}{S_۷}$ را محاسبه می کنیم:

$$q = \frac{a_۲}{a_۱} = \frac{۲}{۱} = ۲$$

$$\frac{S_{۱۴}}{S_۷} = ۱ + q^۷ \xrightarrow{q=۲} \frac{S_{۱۴}}{S_۷} = ۱ + ۲^۷ = ۱ + ۱۲۸ = ۱۲۹$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

۱۷ **گزینه ۴**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

گام اول

الف) اگر سه جملهٔ متوالی از یک تصاعد هندسی را داشته باشیم، جملهٔ وسط، واسطهٔ هندسی دو جملهٔ دیگر است و داریم:

$$(2x)^2 = (x^2+4)(x^2-2)$$

ب) دنبالهٔ هندسی نزولی است اگر قدرنسبت آن عددی بین ۰ و ۱ باشد.

گام دوم

$$(2x)^2 = (x^2+4)(x^2-2) \Rightarrow 4x^2 = x^4+2x^2-8 \Rightarrow x^4-2x^2-8=0$$

$$\Rightarrow (x^2-4)(x^2+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2 \\ x^2=-2 \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

به ازای هر کدام از مقادیر $x=2$ و $x=-2$ بررسی می کنیم دنبالهٔ هندسی نزولی تشکیل می شود یا خیر. داریم:

$x=2 \rightarrow$ جملات دنباله $: 8, 4, 2, \ldots$

دنبالهٔ هندسی نزولی با قدرنسبت $q=\frac{1}{2}$

$x=-2 \rightarrow$ جملات دنباله $: 8, -4, 2, \ldots$

دنباله نوسانی بوده و نزولی نیست.

حال مجموع هفت جملهٔ اول یک تصاعد هندسی نزولی با جملهٔ اول $a_1=8$ و قدرنسبت $q=\frac{1}{2}$ را به دست می آوریم.

$$S_7 = \frac{a_1(1-q^7)}{1-q} = \frac{8(1-(\frac{1}{2})^7)}{1-\frac{1}{2}} = \frac{8(\frac{127}{128})}{\frac{1}{2}} = \frac{127}{8}$$

۱۸ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

گام اول

الف) جملهٔ عمومی یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اولیهٔ a_1 و قدر نسبت q به‌صورت $a_n = a_1q^{n-1}$ تعریف می‌شود.

ب) اگر دنبالهٔ هندسی نزولی باشد آنگاه $0 < q < 1$ است.

ج) مجموع مجذورات تمام جملات، برابر $\frac{2}{3}$ مجذور مجموع تمام جملات است، یعنی:

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots = \frac{2}{3}(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots)^2$$

گام دوم

جملات دنبالهٔ هندسی نزولی نامتناهی را به‌صورت زیر در نظر بگیرید:

$$a_1, a_1q, a_1q^2, a_1q^3, \ldots$$

مجذور هر جمله را می‌نویسیم:

$$a_1^2, a_1^2q^2, a_1^2q^4, \ldots$$

بدین ترتیب یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول a_1^2 و قدر نسبت q^2 داریم. با استفاده از رابطهٔ حد مجموع جملات در یک دنبالهٔ هندسی نزولی می‌توان رابطهٔ قسمت (ج) از گام اول را چنین نوشت:

$$S'_\infty = \frac{2}{3}S_\infty \Rightarrow \frac{a_1^2}{1-q^2} = \frac{2}{3}\left(\frac{a_1}{1-q}\right)^2 \Rightarrow \frac{a_1^2}{(1-q)(1+q)} = \frac{2}{3} \times \frac{a_1^2}{(1-q)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+q} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{1-q} \Rightarrow 3 - 3q = 2 + 2q \Rightarrow 5q = 1 \Rightarrow q = \frac{1}{5} = 0/2$$

۱۹ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

گام اول

جملهٔ اول هر دسته را می‌توان به فرم $\frac{n(n-1)}{2} + 1$ و جملهٔ آخر هر دسته را می‌توان به فرم $(n-1) + 1 + \frac{n(n-1)}{2}$ در نظر گرفت.

گام دوم

جملهٔ اول و آخر دستهٔ بیستم به‌صورت زیر می‌شود:

جملهٔ اول : $\frac{20 \times 19}{2} + 1 = 190 + 1 = 191$

جملهٔ آخر : $191 + (20 - 1) = 191 + 19 = 210$

تعداد اعداد طبیعی از عدد ۱۹۱ تا ۲۱۰ برابر ۲۰ تا است. مجموع این ۲۰ عدد برابر است با:

مجموع اعداد $= \frac{\text{تعداد} \times (\text{جملهٔ اول} + \text{جملهٔ آخر})}{2} = \frac{(191+210) \times 20}{2} = 4010$

۲۰ **گزینه ۳**

چون دنبالهٔ هندسی نزولی است؛ بنابراین حد مجموع جملات برابر است با:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q},\ a_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{a_1}{1-q} - a_1\right) \Rightarrow 2 = \frac{1}{1-q} - 1 \Rightarrow 1 - q = \frac{1}{3} \Rightarrow q = \frac{2}{3}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

منبع: کنکور سراسری

۱ **گزینه ۱**

ابتدا از معادلهٔ نمایی داده‌شده مقدار a را حساب می کنیم.

$$۴^a = ۲\sqrt{۲} \Rightarrow (۲^۲)^a = ۲^۱ \times ۲^{\frac{۱}{۲}} = ۲^{۲a} = ۲^{\frac{۳}{۲}} \Rightarrow ۲a = \frac{۳}{۲} \Rightarrow a = \frac{۳}{۴}$$

با دانستن مقدار a محاسبهٔ لگاریتم داده‌شده کار چندان سختی نیست.

$$log_۴^{(۴a+۱)} = log_۴^{۴(\frac{۳}{۴})+۱} = log_۴^{۳+۱} = log_۴^۴ = ۱$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

۲ **گزینه ۴**

$$log_۳^{(۲x^۲+۱)} - log_۳^{(x+۲)} = ۱ \Rightarrow log_۳^{\frac{۲x^۲+۱}{x+۲}} = ۱ \Rightarrow \frac{۲x^۲+۱}{x+۲} = ۳$$

$$\Rightarrow ۲x^۲ - ۳x - ۵ = ۰ \Rightarrow x = \frac{۳ \pm \sqrt{۹+۴۰}}{۴} = \frac{۳ \pm ۷}{۴} \Rightarrow x = -۱,\ \frac{۱۰}{۴}$$

چون باید $۲x - ۱ > ۰$ باشد، بنابراین جواب $x = \frac{۱۰}{۴}$ قابل‌قبول است.

$$log_۸^{(۲x-۱)} = log_۸^{(\frac{۱۰}{۲}-۱)} = log_۸^۴ = b \Rightarrow ۴ = ۸^b \Rightarrow ۲^۲ = ۲^{۳b} \Rightarrow b = \frac{۲}{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۳ **گزینه ۳**

$$log_x^{(۳x+۸)} + log_x^{(x-۶)} = ۲ \Rightarrow log_x^{(۳x+۸)(x-۶)} = ۲ \Rightarrow x^۲ = ۳x^۲ - ۱۰x - ۴۸ \Rightarrow x^۲ - ۵x - ۲۴ = ۰$$

$$\Rightarrow (x-۸)(x+۳) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۸ \Rightarrow log_۴^۸ = log_{۲^۲}^{۲^۳} = \frac{۳}{۲} \\ x = -۳ \quad \text{غ‌ق‌ق} \end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۴ **گزینه ۳**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

گام اول

معادلات نمایی و لگاریتمی را به‌صورت ساده‌شده می‌نویسیم (از معادلهٔ لگاریتمی y را بر حسب x به دست می‌آوریم) با حل دستگاه دومعادله و دومجهول حاصل x و y را تعیین می‌کنیم.

گام دوم

$$\log y = ۲\log ۳ + \log x \Rightarrow \log y = \log ۳^{۲} + \log x$$
$$\Rightarrow \log y = \log ۹x \Rightarrow y = ۹x \quad (۱)$$
$$۲^{x-۷} \times ۴^{x+y} = ۱ \Rightarrow ۲^{x-۷} \times (۲^{۲})^{x+y} = ۱ \Rightarrow ۲^{x-۷} \times ۲^{۲x+۲y} = ۱$$
$$\Rightarrow ۲^{۳x+۲y-۷} = ۱ = ۲^{\circ} \Rightarrow ۳x + ۲y - ۷ = \circ \xrightarrow{(۱)} ۳x + ۱۸x - ۷ = \circ$$
$$\Rightarrow ۲۱x = ۷ \Rightarrow x = \frac{۷}{۲۱} = \frac{۱}{۳}$$
$$y = ۹x \Rightarrow y = ۹ \times \frac{۱}{۳} = ۳$$

۵ **گزینه ۱**

در معادلهٔ درجه‌دو به فرم $ax^{۲} + bx + c = \circ$، اگر α و β ریشه های معادله باشند، داریم:

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} \ , \ \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

هم چنین از ویژگی های لگاریتم داریم:

$$\log a + \log b = \log ab$$

پس حاصل $a + b$ و $a \times b$ را به دست می آوریم:

$$x^{۲} - ۱\circ x + \circ/۱ = \circ \xrightarrow{\text{ریشه های معادله } a \text{ و} b} \begin{cases} S = a + b = -(\frac{-۱\circ}{۱}) = ۱\circ \\ P = a \times b = \frac{\circ/۱}{۱} = \circ/۱ \end{cases}$$

حاصل عبارت لگاریتمی را محاسبه می کنیم:

$$\log a + \log b - \log(a+b) = \log ab - \log(a+b)$$
$$= \log \circ/۱ - \log ۱\circ = \log ۱\circ^{-۱} - \log ۱\circ = -\log ۱\circ - \log ۱\circ = -۱ - ۱ = -۲$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

۶ **گزینه ۱**

یک رابطهٔ فوق العاده مهم در مبحث لگاریتم وجود دارد که قبل از حل سؤال، ابتدا آن را بیان می کنیم:

$$\log ۱۰ = ۱ \Rightarrow \log ۲ \times ۵ = ۱ \Rightarrow \log ۲ + \log ۵ = ۱$$

پس همواره به خاطر داشته باشید که مجموع $\log ۲$ و $\log ۵$ برابر یک است. یعنی اگر در سؤالی یکی از این دو مورد داده شد، دیگری را هم به صورت غیر مستقیم به ما داده اند.

$$\log \sqrt[۳]{۱/۶} = \log \sqrt[۳]{\frac{۱۶}{۱۰}} = \log \sqrt[۳]{\frac{۸}{۵}} = \log \frac{۲}{\sqrt[۳]{۵}} = \log ۲ - \log \sqrt[۳]{۵} = \log ۲ - \log ۵^{\frac{۱}{۳}}$$

$$= \log ۲ - \frac{۱}{۳}\log ۵ \xrightarrow[\log ۲=۱-۳k]{\log ۵=۳k} \log \sqrt[۳]{۱/۶} = ۱ - ۳k - \frac{۱}{۳}(۳k) = ۱ - ۳k - k = ۱ - ۴k$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

۷ **گزینه ۲**

با استفاده از ویژگی $\log_b^{a^n} = n\log_b^a$ تغییراتی در عبارت $۲\log(۱+\sqrt{۵})$ ایجاد می کنیم.

$$۲\log(۱+\sqrt{۵}) = \log(۱+\sqrt{۵})^۲ = \log(۱+۲\sqrt{۵}+۵) = \log(۶+۲\sqrt{۵})$$

برای محاسبهٔ حاصل عبارت داده‌شده از ویژگی $\log a + \log b = \log ab$ استفاده می کنیم.

$$A = \log(۶-۲\sqrt{۵}) + \log(۶+۲\sqrt{۵}) = \log(۶-۲\sqrt{۵})(۶+۲\sqrt{۵})$$

$$= \log(۳۶-۲۰) = \log ۱۶ = \log ۲^۴ = ۴\log ۲ \xrightarrow{\log ۲=k} A = ۴k$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۸ **گزینه ۳**

با استفاده از ویژگی $\log A^n = n\log A$، ابتدا مقدار K را محاسبه می کنیم.

$$\log ۳ + \log \sqrt[۴]{۳} = \log(۸۱)^K \Rightarrow \log ۳ + \log ۳^{\frac{۱}{۴}} = \log(۳^۴)^K = \log ۳^{۴K}$$

$$\xrightarrow{\log A^n = n\log A} \log ۳ + \frac{۱}{۴}\log ۳ = ۴K\log ۳ \Rightarrow (۱+\frac{۱}{۴})\log ۳ = ۴K\log ۳$$

$$\Rightarrow ۴K = ۱ + \frac{۱}{۴} = \frac{۵}{۴} \Rightarrow K = \frac{۵}{۱۶} \text{ یا } \frac{۵}{K} = ۱۶$$

اکنون حاصل لگاریتم $\frac{۵}{K}$ در پایه ۲ را محاسبه می کنیم:

$$\log_۲^{\frac{۵}{K}} = \log_۲^{\frac{۵}{\frac{۵}{۱۶}}} = \log_۲^{۲^۴} = ۴\log_۲^۲ = ۴ \times ۱ = ۴$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

۹ **گزینه ۳**

با استفاده از ویژگی‌های لگاریتم ضابطه‌های $f(x)$ و $g(x)$ را ساده می کنیم تا بتوانیم به آسانی با یکدیگر مقایسه کنیم.

$$f(x) = log_{۲}^{\frac{۱}{x}} = log_{۲}^{x^{-۱}} = -log_{۲}^{x} \ , \ D_f = (۰ , +\infty)$$

$$g(x) = log_{\frac{۱}{۲}}^{x} = log_{۲^{-۱}}^{x} = -log_{۲}^{x} \ , \ D_g = (۰ , +\infty)$$

مشاهـده می کنیم دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ ضـابطه های برابر و دامنه تعریف یکسان دارنـد. پس دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ با هم مساوی هسـتند و نمودارهای آن‌ها بر هم منطبق اند.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۱۰ **گزینه ۴**

با استفاده از دو ویژگی $log\,ab = log\,a + log\,b$ و $log_{b^n}^{a^m} = \frac{m}{n}log_{b}^{a}$ ، عبارت لگاریتمی را ساده کرده و با توجه به فرض $log_{b}^{a} = \frac{۳}{۲}$، مقدار آن را محاسبه می‌کنیم.

$$log_{\sqrt{b}}^{ab^{۲}} = log_{\sqrt{b}}^{a} + log_{\sqrt{b}}^{b^{۲}} = log_{b^{\frac{۱}{۲}}}^{a} + log_{b^{\frac{۱}{۲}}}^{b^{۲}} = \frac{۱}{\frac{۱}{۲}}log_{b}^{a} + \frac{۲}{\frac{۱}{۲}}log_{b}^{b} = ۲\,log_{b}^{a} + ۴\,log_{b}^{b} = ۲(\frac{۳}{۲}) + ۴(۱) = ۳ + ۴ = ۷$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۱

۱۱ **گزینه ۲**

با استفاده از فرضیات بیان‌شده در صورت سؤال، مقدار $a^{۳}$ را به دست می‌آوریم.

$$log_{\sqrt{۳}}^{a} = \frac{۴}{۳} \Rightarrow log_{۳^{\frac{۱}{۲}}}^{a} = \frac{۴}{۳} \Rightarrow \frac{۱}{\frac{۱}{۲}}log_{۳}^{a} = \frac{۴}{۳} \Rightarrow ۲\,log_{۳}^{a} = \frac{۴}{۳} \Rightarrow log_{۳}^{a} = \frac{۲}{۳}$$

$$\xrightarrow{log_{b}^{a}=c\Rightarrow a=b^{c}} a = ۳^{\frac{۲}{۳}} \Rightarrow a^{۳} = (۳^{\frac{۲}{۳}})^{۳} = ۳^{۲} = ۹$$

با استفاده از ویژگی $log_{b^n}^{a^m} = \frac{m}{n}log_{b}^{a}$ حاصل لگاریتم $(a^{۳} + ۷)$ را در مبنای ۸ حساب می کنیم:

$$log_{۸}^{(a^{۳}+۷)} = log_{۸}^{(۹+۷)} = log_{۸}^{۱۶} = log_{۲^{۳}}^{۲^{۴}} = \frac{۴}{۳}log_{۲}^{۲} = \frac{۴}{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

۱۲ **گزینه ۴**

برای محاسبهٔ A کافی است سـمت چپ تساوی را به صورت یک عدد توان دار با پایه ۲ بنویسـیم. در این صورت در دو طرف تساوی پایه ها با هم مساوی بوده و درنتیجه توان ها نیز باید مساوی باشد.

$$(\frac{۴^{\sqrt{۳۲}}}{۲^{\sqrt{۸}}})^{۲} = (\frac{(۲^{۲})^{۴\sqrt{۲}}}{۲^{۲\sqrt{۲}}})^{۲} = (\frac{۲^{۸\sqrt{۲}}}{۲^{۲\sqrt{۲}}})^{۲} = (۲^{۸\sqrt{۲}-۲\sqrt{۲}})^{۲} = (۲^{۶\sqrt{۲}})^{۲} = ۲^{۱۲\sqrt{۲}} = ۲^{A} \Rightarrow A = ۱۲\sqrt{۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

۱۳ **گزینه ۳**

برای تعیین محدودهٔ x از دو طرف نامعادله در مبنای ۱۰ لگاریتم می گیریم. هم چنین در ساده کردن نامعادلهٔ داده‌شده از ویژگی $log\, a^n = n\, log\, a$ استفاده می کنیم.

$$۲^{-x} < ۰/۰۰۰۰۰۱ \Rightarrow ۲^{-x} < ۱۰^{-۶} \xrightarrow{\text{از دو طرف در مبنای ۱۰ لگاریتم می گیریم}} log\, ۲^{-x} < log\, ۱۰^{-۶}$$

$$\xrightarrow{log\, a^n = n\, log\, a} -x\, log\, ۲ < -۶\, log\, ۱۰ \xrightarrow{log\, ۱۰ = ۱} -x\, log\, ۲ < -۶ \xrightarrow{\times(-۱)} x\, log\, ۲ > ۶$$

در صورت سؤال $log\, ۲ = ۰/۳۰۱$ فرض شده است. بنابراین داریم:

$$x(۰/۳۰۱) > ۶ \Rightarrow x(\frac{۳۰۱}{۱۰۰۰}) > ۶ \Rightarrow x > \frac{۶۰۰۰}{۳۰۱} \Rightarrow x > ۱۹/۹۳۳$$

پس کوچک ترین مقدار x با دو رقم اعشار برابر ۱۹/۹۴ است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

۱۴ **گزینه ۴**

دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ را به صورت $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ نشان می دهیم و از رابطهٔ $|A| = ad - bc$ محاسبه می شود.

$$\begin{vmatrix} log\, ۵ & log\, ۲ \\ log\, ۲ & log\, ۵ \end{vmatrix} = (log\, ۵ \times log\, ۵) - (log\, ۲ \times log\, ۲) = (log\, ۵)^۲ - (log\, ۲)^۲$$

$$= (log\, ۵ - log\, ۲)(log\, ۵ + log\, ۲) = log\, \frac{۵}{۲} \times log\, ۱۰ = log\, \frac{۵}{۲} \times ۱ = log\, \frac{۵}{۲}$$

در حل معادله های لگاریتمی درصورتی‌که مبنای دو عبارت لگاریتمی در دو طرف تساوی با هم برابر بود، کافی است عبارت جلوی لگاریتم ها را با هم مساوی قرار داده و مقدار x را حساب کنیم. دقت کنید مقدار x به دست آمده باعث منفی شدن عبارت جلوی لگاریتم نشود.

$$log(۳x - ۲) = \begin{vmatrix} log\, ۵ & log\, ۲ \\ log\, ۲ & log\, ۵ \end{vmatrix} = log\, \frac{۵}{۲} \Rightarrow ۳x - ۲ = \frac{۵}{۲} \Rightarrow ۳x = \frac{۵}{۲} + ۲ = \frac{۹}{۲} \Rightarrow x = \frac{۳}{۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۲

۱۵ **گزینه ۴**

با استفاده از ویژگی های $log_b^a + log_b^c = log_b^{ac}$ و $log_b^a = c \Rightarrow a = b^c$ معادله را حل می کنیم:

$$log_۲^{(۵x+۱)} + log_۲^x = ۲ \Rightarrow log_۲^{(۵x+۱)x} = ۲ \Rightarrow (۵x + ۱)x = ۲^۲ = ۴ \Rightarrow ۵x^۲ + x = ۴$$

$$\Rightarrow ۵x^۲ + x - ۴ = ۰ \Rightarrow (۵x - ۴)(x + ۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} ۵x - ۴ = ۰ \Rightarrow ۵x = ۴ \Rightarrow x = \frac{۴}{۵} \\ x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = -۱ \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$x = -۱$ به این دلیل قابل‌قبول نیست که عدد جلوی لگاریتم نباید منفی شود. اگر $x = \frac{۴}{۵}$ باشد، مقدار $\frac{۴}{x}$ برابر ۵ به دست می آید.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۰

۱۶ گزینه ۱

با استفاده از ویژگی $\log a + \log b = \log ab$، معادلهٔ لگاریتمی را حل کرده و مقدار x را به دست می آوریم:

$$\log \frac{۲}{x} + \log(x+۱) = ۱ \Rightarrow \log \frac{۲}{x}(x+۱) = ۱ \Rightarrow \frac{۲(x+۱)}{x} = ۱۰$$
$$\Rightarrow ۲(x+۱) = ۱۰x \Rightarrow ۲x + ۲ = ۱۰x \Rightarrow ۸x = ۲ \Rightarrow x = \frac{۱}{۴}$$

برای محاسبهٔ $\log_{۸}^{x}$ از ویژگی $\log_{b^n}^{a^m} = \frac{m}{n}\log_b^a$ استفاده می کنیم.

$$\log_{۸}^{x} = \log_{۸}^{\frac{۱}{۴}} = \log_{۲^۳}^{۲^{-۲}} = -\frac{۲}{۳}\log_{۲}^{۲} = -\frac{۲}{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

۱۷ گزینه ۴

دو معادلهٔ نمایی و لگاریتمی دادەشده را ساده می کنیم. سپس با تشکیل یک دستگاه، مقادیر x و y را به دست می آوریم.

برای حل از دو ویژگی $\log a + \log b = \log ab$ و $a^n \times a^m = a^{m+n}$ استفاده می کنیم.

$$\left.\begin{array}{r} ۲^x \times ۸^y = ۴ \Rightarrow ۲^x \times (۲^۳)^y = ۲^۲ \Rightarrow ۲^x \times ۲^{۳y} = ۲^۲ \Rightarrow x + ۳y = ۲ \\ \log x = \log ۲ + \log y \Rightarrow \log x = \log ۲y \Rightarrow x = ۲y \end{array}\right\} \Rightarrow$$
$$۲y + ۳y = ۲ \Rightarrow ۵y = ۲ \Rightarrow y = \frac{۲}{۵} \xrightarrow{x=۲y} x = \frac{۴}{۵}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۴

۱۸ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵

گام اول

الف) در صورت سؤال دو معادله یکی به صورت نمایی و دیگری لگاریتمی دادەشـده است. در معادلهٔ نمایی تنها مجهول x و در معادلهٔ لگاریتمی x و y مجهول است. پس ابتـدا معادلهٔ نمایی را حل کرده و x را محاسبه می کنیم. سپس با جایگذاری x در معادلهٔ لگاریتمی مقدار y را هم به دست می آوریم.

ب) برای حل معادلهٔ نمایی دو طرف را به دو عدد توان دار با پایهٔ ۲ تبدیل کرده و با مساوی قرار دادن توان ها مقدار x را حساب می کنیم.

گام دوم

$$۴\sqrt{۲} = ۴^x \Rightarrow ۲^۲ \times ۲^{\frac{۱}{۲}} = (۲^۲)^x \Rightarrow ۲^{\frac{۵}{۲}} = ۲^{۲x} \Rightarrow ۲x = \frac{۵}{۲} \Rightarrow x = \frac{۵}{۴}$$

حال با داشتن مقدار x و حل معادلهٔ لگاریتمی مقدار y را محاسبه می کنیم:

$$۱ + \log\sqrt{x+۱} = \log y \xrightarrow{x=\frac{۵}{۴}} ۱ + \log\sqrt{\frac{۵}{۴}+۱} = \log y \Rightarrow \log ۱۰ + \log\sqrt{\frac{۹}{۴}} = \log y$$
$$\Rightarrow \log ۱۰ + \log\frac{۳}{۲} = \log y \Rightarrow \log ۱۰(\frac{۳}{۲}) = \log ۱۵ = \log y \Rightarrow y = ۱۵$$

۱۹ **گزینه ۱**

با استفاده از ویژگی $log_c^a + log_c^b = log_c^{ab}$ معادلهٔ لگاریتمی را ساده کرده و مقدار xyرا حساب می کنیم.

$$log_۳^x + log_۳^y = ۲ \Rightarrow log_۳^{xy} = ۲ \xrightarrow{log_b^a = c \Rightarrow a = b^c} xy = ۳^۲ = ۹$$

مقادیر $x^۲ + y^۲$ و xy را داریم. با استفاده از اتحاد مربع دو جمله ای و با توجه به این که x و y هر دو مثبت هستند، حاصل $x + y$ را محاسبه می کنیم.

$$(x+y)^۲ = x^۲ + y^۲ + ۲xy \xrightarrow[x^۲+y^۲=۴۶]{xy=۹} (x+y)^۲ = ۴۶ + ۱۸ = ۶۴ \xrightarrow[\text{عدد جلوی لگاریتم}]{x\,,y>۰} x + y = ۸$$

$$log_۴^{(x+y)} = log_۴^۸ = log_{۲^۲}^{۲^۳} = \frac{۳}{۲} log_۲^۲ = \frac{۳}{۲} = ۱/۵$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۹

۲۰ **گزینه ۳**

معادلهٔ توانی را با استفاده از تغییر متغیر $۲^x = t$ حل می کنیم. توجه داشته باشید که مقدار ۲^x همیشه مثبت است.

$$۴^x + ۲^x = ۷۲ \Rightarrow (۲^۲)^x + ۲^x = ۷۲ \Rightarrow (۲^x)^۲ + ۲^x = ۷۲ \xrightarrow{۲^x = t} t^۲ + t = ۷۲ \Rightarrow t^۲ + t - ۷۲ = ۰$$

$$\Rightarrow (t+۹)(t-۸) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t = -۹ \quad \text{غ ق ق} \\ t = ۸ \Rightarrow ۲^x = ۸ \Rightarrow ۲^x = ۲^۳ \Rightarrow x = ۳ \end{cases}$$

حال که مقدار x را به دست آوردیم آن را در معادلهٔ لگاریتمی قرار داده و با استفاده از ویژگی های لگاریتم، مقدار y را به دست می آوریم.

$$log(x+۱) + log(۲y + x^۲) = ۲ \xrightarrow{x=۳} log\,۴ + log(۲y+۹) = ۲ \xrightarrow{log\,a + log\,b = log\,ab} log_{۱۰}^{۴(۲y+۹)} = ۲$$

$$\xrightarrow{log_b^a = c \Rightarrow a = b^c} ۴(۲y+۹) = ۱۰^۲ = ۱۰۰ \Rightarrow ۲y + ۹ = ۲۵ \Rightarrow ۲y = ۱۶ \Rightarrow y = ۸$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۲۱ **گزینه ۳**

با استفاده از معادلهٔ $log(y+۲) = ۱$ به آسانی مقدار y را حساب می کنیم.

$$log(y+۲) = ۱ \Rightarrow log_{۱۰}^{(y+۲)} = ۱ \Rightarrow y + ۲ = ۱۰ \Rightarrow y = ۸$$

y را در معادلهٔ دوم قرار داده و مقدار x را به دست می آوریم.

$$log(y-x) + log(۴x+y) = ۲ \Rightarrow log(۸-x) + log(۴x+۸) = ۲$$

$$\xrightarrow{log\,a + log\,b = log\,ab} log_{۱۰}^{(۸-x)(۴x+۸)} = ۲ \Rightarrow (۸-x)(۴x+۸) = ۱۰^۲ = ۱۰۰$$

$$\Rightarrow -۴x^۲ + ۲۴x + ۶۴ = ۱۰۰ \Rightarrow ۴x^۲ - ۲۴x + ۳۶ = ۰ \xrightarrow{\div ۴} x^۲ - ۶x + ۹ = ۰$$

$$\Rightarrow (x-۳)^۲ = ۰ \Rightarrow x - ۳ = ۰ \Rightarrow x = ۳$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

۲۲ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

گام اول

الف) با توجه به صورت سؤال $f(t)=10000$ است. در رابطهٔ داده‌شده جایگذاری کرده و مقدار t را محاسبه می کنیم.

ب) می دانیم $\ln a=\log_e^a$ است. برای این که بتوانیم t را به صورت مستقل تعیین کنیم از دو طرف در مبنای e لگاریتم می گیریم (درواقع از دو طرف $\ln$ می گیریم).

گام دوم

$$f(t)=10000 \Rightarrow 2000e^{0/012\,t}=10000 \Rightarrow e^{0/012\,t}=5 \xrightarrow{\text{می گیریم } \ln} \ln e^{0/012t}=\ln 5$$

$$\Rightarrow 0/012t\,\ln e=\ln 5 \xrightarrow[\ln 5=1/68]{\ln e=1} 0/012t=1/68 \Rightarrow t=\frac{1/68}{0/012}=140\ \text{min}$$

۱۴۰ دقیقه برابر ۲ ساعت و ۲۰ دقیقه است.

۲۳ گزینه ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

گام اول

الف) اطلاعاتی که در صورت سؤال دربارهٔ زمان شروع کشت داده‌شده است،به زمان $t=0$ مربوط می شود. با همین اطلاعات می توانیم عدد ثابت A را به دست آوریم.

ب) برای محاسبهٔ زمانی که ۷۰۰۰ باکتری موجود است، $f(t)$ را برابر ۷۰۰۰ قرار داده و زمان t را حساب می کنیم. برای حل معادله، از دو طرف در مبنای e لگاریتم می گیریم.

گام دوم

$$f(t)=Ae^{0/04\,t} \Rightarrow 1400=Ae^{0/04\times 0}=Ae^{\circ}=A \Rightarrow A=1400$$

$$f(t)=1400e^{0/04\,t} \Rightarrow 7000=1400e^{0/04\,t} \Rightarrow e^{0/04\,t}=5$$

از دو طرف در مبنای e لگاریتم گرفته و معادله را حل می کنیم:

$$\ln e^{0/04\,t}=\ln 5 \Rightarrow 0/04t\,\ln e=\ln 5 \xrightarrow[\ln 5=1/68]{\ln e=1} 0/04t=1/68 \Rightarrow t=\frac{1/68}{0/04} \Rightarrow t=42\ \text{min}$$

۲۴ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

گام اول

الف) در شروع کشت یعنی در زمان $t=۰$، $f(t)=۸۰۰$ است. با استفاده از همین نکته مقدار ثابت A را تعیین می کنیم.

ب) در ابتـدا ممکن است این‌گونه به نظر برسد که چون مقدار k مشـخص نشده نمی توانیم سؤال را حل کنیم. درواقع، نیازی نیست مقدار k را بدانیم. با توجه به رابطهٔ $f(۲۰)=۳۲۰۰$ رابطه ای بین e و k پیدا کرده و از آن برای حل سؤال استفاده می کنیم.

گام دوم

$$f(t)=Ae^{kt}\xrightarrow[f(t)=۸۰۰]{t=۰}۸۰۰=Ae^{۰}\Rightarrow A=۸۰۰$$

$$f(t)=۸۰۰e^{kt}\xrightarrow[f(t)=۳۲۰۰]{t=۲۰}۳۲۰۰=۸۰۰e^{۲۰k}\Rightarrow e^{۲۰k}=\frac{۳۲۰۰}{۸۰۰}=۴$$

در سؤال مقدار $\ln ۴$ داده نشـده است که از دو طرف $\ln$ بگیریم و مقدار k را حساب کنیم. پس با توجه به رابطـهٔ $e^{۲۰k}=۴$ سؤال را حل می کنیم:

$$f(t)=۸۰۰e^{kt}\Rightarrow f(۳۰)=۸۰۰e^{۳۰k}\Rightarrow f(۳۰)=۸۰۰(e^{۲۰k})^{\frac{۳}{۲}}$$

$$\xrightarrow{e^{۲۰k}=۴}f(۳۰)=۸۰۰(۴)^{\frac{۳}{۲}}=۸۰۰(۲^{۲})^{\frac{۳}{۲}}=۸۰۰\times ۲^{۳}=۸۰۰\times ۸=۶۴۰۰$$

۲۵ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۴

گام اول

الف) فرض می کنیم $f(t)=f(۰)e^{kt}$ باشد. $f(t)$ سرمایهٔ سرمایه گذار بعد از t سال و $f(۰)$ سرمایهٔ اولیهٔ اوست.

ب) بعد از ۱۲/۵ سال سرمایه گذاری، سرمایهٔ اولیه e برابر شده است. یعنی $f(۱۲/۵)=ef(۰)$. با حل این معادله نرخ سود مشارکت را به دست می آوریم. (نرخ سود مشارکت همان k است که باید به درصد بیان شود.)

گام دوم

$$f(t)=f(۰)e^{kt}\Rightarrow f(۱۲/۵)=f(۰)e^{۱۲/۵\,k}\xrightarrow{f(۱۲/۵)=ef(۰)}ef(۰)=e^{۱۲/۵\,k}f(۰)$$

$$\Rightarrow e=e^{۱۲/۵\,k}\Rightarrow ۱۲/۵k=۱\Rightarrow k=\frac{۱}{۱۲/۵}=\frac{۱}{\frac{۲۵}{۲}}=\frac{۲}{۲۵}=\frac{۸}{۱۰۰}\xrightarrow{\times ۱۰۰}k=\%۸$$

بنابراین نرخ سود مشارکت ۸ درصد است.

۲۶ گزینه ۴

$$\log_x^{(x^2+4)} = 1 + \log_x^5 \Rightarrow \log_x^{(x^2+4)} = \log_x^x + \log_x^5 \Rightarrow \log_x^{(x^2+4)} = \log_x^{5x}$$

$$\Rightarrow x^2 + 4 = 5x \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow (x-4)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \quad \text{غ ق ق} \\ x = 4 \end{cases}$$

حال مقدار لگاریتم ۴ در پایهٔ ۲ را حساب می کنیم:

$$\log_2^4 = \log_2^{2^2} = 2\log_2^2 = 2$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۲۷ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

گام اول

باید معادلهٔ $f(t) = 70$ را حل کنیم.

گام دوم

در حل معادله هر جا که لازم شد از طرفین در مبنای e لگاریتم می گیریم (به عبارت دیگر از طرفین $\ln$ می گیریم).

$$f(t) = 90 - 40e^{-0/02t} \Rightarrow 70 = 90 - 40e^{-0/02t} \Rightarrow -20 = -40e^{-0/02t} \Rightarrow e^{-0/02t} = \frac{1}{2} \Rightarrow e^{-0/02t} = 2^{-1}$$

$$\Rightarrow e^{0/02t} = 2 \xrightarrow{\ln \text{ می گیریم}} \ln e^{0/02t} = \ln 2 \Rightarrow 0/02t \ln e = \ln 2 \xrightarrow[\ln 2 = 0/68]{\ln e = 1} 0/02t = 0/68 \Rightarrow t = \frac{0/68}{0/02} = 34$$

۲۸ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

گام اول

الف) می‌دانیم:

$$log\ a - log\ b = log\ \frac{a}{b}$$
$$log_{b^m}^{a^n} = \frac{n}{m} log_b^a$$
$$log_a^a = ۱$$

ب) در تابع لگاریتمی $y = log\ _b^a$، همواره باید $a > ۰$ و $b \neq ۱$ باشد.

گام دوم

ابتدا با حل معادلهٔ لگاریتمی داده‌شده، مقدار x را محاسبه می‌کنیم:

$$log(x^۲ - x - ۶) - log(x - ۳) = log(۲x - ۵) \Rightarrow log(x - ۳)(x + ۲) - log(x - ۳) = log(۲x - ۵)$$
$$\Rightarrow log\ \frac{(x-۳)(x+۲)}{(x-۳)} = log(۲x - ۵) \Rightarrow log(x + ۲) = log(۲x - ۵)$$
$$\Rightarrow x + ۲ = ۲x - ۵ \Rightarrow x = ۷$$

به ازای $x = ۷$ تمام لگاریتم‌ها تعریف شده پس این مقدار قابل‌قبول است. حال مقدار لگاریتم $\sqrt[۳]{x+۱}$ در پایهٔ ۴ را به ازای $x = ۷$ حساب می‌کنیم:

$$log_۴^{\sqrt[۳]{x+۱}} = log_۴^{\sqrt[۳]{۷+۱}} = log_۴^{\sqrt[۳]{۸}} = log_۴^{\sqrt[۳]{۲^۳}} = log_۴^۲ = log_{۲^۲}^۲ = \frac{۱}{۲} log_۲^۲ = \frac{۱}{۲}$$

۲۹ گزینه ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

گام اول

الف) ابتدا ضریب ثابت A را پیدا می‌کنیم. جمعیت اولیهٔ شهر ۵۰۰۰۰ نفر است، پس $f(۰) = ۵۰۰۰۰$ در نظر گرفته می‌شود.

ب) با تعیین مقدار A و با در نظر گرفتن $i = \frac{۲/۵}{۱۰۰}$ معادلهٔ $f(t) = ۶۰۰۰۰$ را تشکیل داده و t را محاسبه می‌کنیم.

گام دوم

$$f(۰) = Ae^۰ = A \Rightarrow A = ۵۰۰۰۰$$
$$f(t) = Ae^{it} \Rightarrow f(t) = ۵۰۰۰۰e^{\frac{۲/۵}{۱۰۰}t}$$
$$\Rightarrow ۶۰۰۰۰ = ۵۰۰۰۰e^{\frac{۲/۵}{۱۰۰}t} \Rightarrow e^{\frac{۲/۵}{۱۰۰}t} = \frac{۶}{۵} = ۱/۲$$

برای به دست آوردن t از دو طرف ln می‌گیریم:

$$lne^{\frac{۲/۵}{۱۰۰}t} = ln\ ۱/۲ \Rightarrow \frac{۲/۵}{۱۰۰}t = ۰/۱۸ \Rightarrow t = \frac{۰/۱۸ \times ۱۰۰}{۲/۵} = ۷/۲$$

۳۰ **گزینه ۴**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

گام اول

با حل دستگاه دومعادله دومجهول مقادیر x و y را تعیین می‌کنیم.

گام دوم

$$\ln(2x+1)+\ln(y-2)-\ln y=\ln 3$$
$$\Rightarrow \ln(2x+1)+\ln(y-2)=\ln y+\ln 3$$
$$\ln(2x+1)(y-2)=\ln 3y \Rightarrow (2x+1)(y-2)=3y \Rightarrow 2xy+y-4x-2=3y$$
$$\Rightarrow 2xy-2y-4x-2=0 \quad (1)$$
$$\ln(2y-3x)+\ln 2=0 \Rightarrow \ln 2(2y-3x)=0$$
$$\Rightarrow \ln(4y-6x)=0 \Rightarrow 4y-6x=1 \Rightarrow 4y=6x+1 \quad (2)$$
$$(1),\ (2): 2xy-2y-4x-2=0 \xrightarrow{\times 2} x(4y)-4y-8x-4=0$$
$$\Rightarrow x(6x+1)-(6x+1)-8x-4=0 \Rightarrow 6x^2+x-6x-1-8x-4=0$$
$$\Rightarrow 6x^2-13x-5=0 \Rightarrow x=\frac{5}{2} \text{ یا } x=-\frac{1}{3}$$

مقدار x را در رابطهٔ (۲) جایگذاری می‌کنیم:

$$x=\frac{5}{2} \Rightarrow 4y=6\times\frac{5}{2}+1=16 \Rightarrow y=4 \Rightarrow xy=\frac{5}{2}\times 4=10$$
$$x=-\frac{1}{3} \Rightarrow 4y=6(-\frac{1}{3})+1=-1 \Rightarrow y=-\frac{1}{4} \Rightarrow xy=\frac{1}{12}$$

۳۱ **گزینه ۴**

$$3^{2x+y}=9\times 3^{x-y} \Rightarrow 3^{2x+y}=3^{2+x-y} \Rightarrow 2x+y=2+x-y \Rightarrow 2y=2-x \quad (1)$$
$$\log(x+2y)=1+\log y \Rightarrow \log(x+2y)-\log y=\log 10$$
$$\log\frac{(x+2y)}{y}=\log 10 \Rightarrow \frac{x+2y}{y}=10 \Rightarrow x+2y=10y \quad (2)$$
$$\xrightarrow{(2)} x+2y=5\times(2y) \xrightarrow{(1)} x+2-x=5(2-x) \Rightarrow x=\frac{8}{5}=1/6$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۳۲ گزینه ۲

$$\ln(x-4y)=2\ln 2 \Rightarrow \ln(x-4y)=\ln 4 \Rightarrow x-4y=4 \Rightarrow x=4y+4$$

$$\ln(y+x-1)+\ln(2y+3)=0 \Rightarrow \ln(y+x-1)(2y+3)=\ln 1 \Rightarrow (y+x-1)(2y+3)=1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=4y+4 \\ (y+x-1)(2y+3)=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (y+4y+4-1)(2y+3)=1 \Rightarrow (5y+3)(2y+3)=1$$

$$10y^2+21y+8=0 \Rightarrow \begin{cases} y=-\frac{1}{2} \Rightarrow x=2 \\ y=-1/6 \quad \text{غ.ق.ق} \end{cases} \Rightarrow xy=-1$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

منبع: کنکور سراسری

۱ اگر $۲\sqrt{۲} = ۴^a$، لگاریتم $(۴a+۱)$ در پایهٔ ۴ کدام است؟

۱) ۱
۲) $\sqrt{۲}$
۳) ۲
۴) $\frac{۳}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

۲ از معادلهٔ لگاریتمی $۱ = log_{۳}^{(x+۲)} - log_{۳}^{(۲x^۲+۱)}$، مقدار لگاریتم $(۲x-۱)$ در پایهٔ ۸، کدام است؟

۱) $-\frac{۲}{۳}$
۲) $-\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) $\frac{۲}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۳ از تساوی $log_{x}^{(x-۶)} - ۲ = log_{x}^{(۳x+۸)}$، مقدار لگاریتم x در پایهٔ ۴، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{۲}{۳}$
۳) $\frac{۳}{۲}$
۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۴ از دو معادلهٔ دومجهولی $۱ = ۴^{x+y} \times ۲^{x-۷}$ و $log\, y = ۲\, log\, ۳ + log\, x$، مقدار y کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

۵ اگر a و b ریشه های معادلهٔ $x^۲ - ۱۰x + ۰/۱ = ۰$ باشند، حاصل $log\, a + log\, b - log(a+b)$ کدام است؟

۱) -۲
۲) -۱
۳) صفر
۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

۶ اگر $log\, ۵ = ۳k$، آنگاه $log \sqrt[۳]{۱/۶}$ کدام است؟

۱) $۱ - ۴k$
۲) $۲ - ۵k$
۳) $۱ - ۲k$
۴) $۱ - k$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

۷ اگر $\log ۲ = k$ باشد، حاصل $\log(۶-۲\sqrt{۵}) + ۲\log(۱+\sqrt{۵})$ کدام است؟

۱) $۲k$
۲) $۴k$
۳) $۱+k$
۴) $۲+۴k$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۸ اگر $\log ۳ + \log \sqrt[۴]{۳} = \log (۸۱)^K$، آنگاه لگاریتم $\frac{۵}{K}$ در پایه ۲ کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

۹ نمودارهای دو تابع $f(x) = \log_۲ \frac{۱}{x}$ و $g(x) = \log_{\frac{۱}{۲}} x$ نسبت به هم چگونه اند؟

۱) $f(x)$ بالاتر
۲) $g(x)$ بالاتر
۳) منطبق اند
۴) فقط در یک نقطه متقاطع

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۱۰ اگر $\log_b^a = \frac{۳}{۲}$ آنگاه $\log_{\sqrt{b}}^{ab^۲}$ کدام است؟

۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۷

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۱

۱۱ اگر لگاریتم a در پایهٔ $\sqrt{۳}$ برابر $\frac{۴}{۳}$ باشد، آنگاه لگاریتم $(a^۳ + ۷)$ در پایهٔ ۸ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$
۲) $\frac{۴}{۳}$
۳) $\sqrt{۲}$
۴) $\frac{۳}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

۱۲ اگر $\left(\frac{۴\sqrt{۳۲}}{۲\sqrt{۸}}\right)^۲ = ۲^A$، عدد A کدام است؟

۱) ۸
۲) ۱۶
۳) $۸\sqrt{۲}$
۴) $۱۲\sqrt{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

۱۳ اگر $۲^{-x} < ۰/۰۰۰۰۰۱$ و $\log ۲ = ۰/۳۰۱$، کوچک ترین عدد x با دو رقم اعشاری کدام است؟

۱) ۱۹/۸۹ ۲) ۱۹/۹۱

۳) ۱۹/۹۴ ۴) ۱۹/۹۷

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

۱۴ اگر $\begin{vmatrix} \log ۵ & \log ۲ \\ \log ۲ & \log ۵ \end{vmatrix} = \log(۳x - ۲)$، مقدار x کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۵}{۲}$

۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۲

۱۵ اگر $\log_۲^{(۵x+۱)} + \log_۲^x = ۲$ باشد، عدد $\frac{۴}{x}$ کدام است؟

۱) -۴ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۰

۱۶ اگر $\log \frac{۲}{x} + \log(x + ۱) = ۱$ باشد، لگاریتم عدد x در پایهٔ ۸ کدام است؟

۱) $-\frac{۲}{۳}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

۱۷ از معادلات $۲^x \times ۸^y = ۴$ و $\log x = \log ۲ + \log y$، مقدار x کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$

۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۴

۱۸ اگر $۴^x = ۴\sqrt{۲}$ و $\log y = ۱ + \log \sqrt{x + ۱}$، مقدار y کدام است؟

۱) ۷/۵ ۲) ۱۲/۵

۳) ۱۵ ۴) ۲۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵

۱۹ از دو معادلهٔ $\log_۳^x + \log_۳^y = ۲$ و $x^۲ + y^۲ = ۴۶$، لگاریتم $(x + y)$ در پایهٔ ۴، کدام است؟

۱) ۱/۵ ۲) ۲

۳) ۲/۵ ۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۹

۲۰ از دو معادلهٔ $۴^x + ۲^x = ۷۲$ و $log(x+۱) + log(۲y + x^۲) = ۲$، مقدار y کدام است؟

۱) ۶
۲) ۷
۳) ۸
۴) ۹

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۲۱ از دو معادلهٔ $log(y+۲) = ۱$ و $log(y-x) + log(۴x + y) = ۲$، مقدار x کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

۲۲ در یک نوع کشت، تعداد باکتری ها پس از گذشت t دقیقه برابر $f(t)$ است که $f(t) = ۲۰۰۰\, e^{۰/۰۱۲\, t}$، پس از چه مدت تعداد باکتری ها ۱۰۰۰۰ می شود؟ $(ln۵ = ۱/۶۸)$

۱) ۲ ساعت و ۱۰ دقیقه
۲) ۲ ساعت و ۲۰ دقیقه
۳) ۲ ساعت و ۲۵ دقیقه
۴) ۲ ساعت و ۳۵ دقیقه

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۲۳ در شروع یک نوع کشت ۱۴۰۰ باکتری موجود است. تعداد باکتری ها پس از t دقیقه به صورت $f(t) = Ae^{۰/۰۴t}$ است، پس از چند دقیقه ۷۰۰۰ باکتری موجود است؟ $(ln۵ = ۱/۶۸)$

۱) ۲۱
۲) ۲۸
۳) ۳۵
۴) ۴۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

۲۴ تعداد باکتری ها در یک نوع کشت، بعد از t دقیقه به صورت $f(t) = Ae^{kt}$ است. اگر تعداد این باکتری ها در شروع کشت ۸۰۰ و در دقیقهٔ بیستم برابر ۳۲۰۰ باشد، در دقیقهٔ سی ام تعداد آن ها کدام است؟

۱) ۴۸۰۰
۲) ۵۶۰۰
۳) ۶۴۰۰
۴) ۷۲۰۰

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

۲۵ بعد از ۱۲/۵ سال سرمایهٔ یک سرمایه گذار e برابر شده است. نرخ سود مشارکت در این سرمایه گذاری چند درصد مرکب پیوسته است؟

۱) ۷
۲) ۷/۵
۳) ۸
۴) ۸/۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۴

۲۶ از تساوی $log_x^{(x^۲+۴)} = ۱ + log_x^۵$، مقدار لگاریتم x در پایهٔ ۲ کدام است؟

۱) -۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۲۷ کـارایی کارگر عادی، در کارخانه ای پس از t ماه، روزانه به تعداد $f(t) = ۹۰ - ۴۰e^{-۰/۰۲t}$ واحـد است. پس از چند ماه تجربهٔ کاری، روزانه ۷۰ واحد را کامل می کند؟ $(ln\,۲ = ۰/۶۸)$

۱) ۱۷   ۲) ۳۴

۳) ۵۱   ۴) ۶۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

۲۸ از معادله لگاریتمی $log(x^۲ - x - ۶) - log(x - ۳) = log(۲x - ۵)$، مقدار لگاریتم $\sqrt[۳]{x+۱}$ در پایهٔ ۴، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۲۹ در شـهری با جمعیت ۵۰۰۰۰ با نرخ رشـد سالیانهٔ جمعیت ۲/۵ درصد، باتوجه‌به $f(t) = Ae^{it}$ پس از چنـد سال، جمعیت این شـهر ۶۰۰۰۰ نفر می‌شود؟ $(ln\,۱/۲ = ۰/۱۸)$

۱) ۶/۲   ۲) ۶/۷

۳) ۶/۸   ۴) ۷/۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

۳۰ از دو معادلهٔ $ln(۲x + ۱) + ln(y - ۲) - ln\,y = ln\,۳$ و $ln(۲y - ۳x) + ln\,۲ = ۰$، مقدار xy کدام است؟

۱) ۶   ۲) ۸

۳) ۹   ۴) ۱۰

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

۳۱ از دو معادلهٔ دومجهولی $۳^{۲x+y} = ۹ \times ۳^{x-y}$ و $log(x + ۲y) = ۱ + log\,y$، مقدار x کدام است؟

۱) ۱/۲   ۲) ۱/۴

۳) ۱/۵   ۴) ۱/۶

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۳۲ از دو معادله‌ $ln(2y+3) + ln(y+x-1) = 2ln2$ و $ln(x-4y)$، مقدار xy کدام است؟

۱) -2 ۲) -1

۳) 1 ۴) 2

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

منبع: کنکور سراسری

۱ نمودار تابع با ضابطهٔ $y = x^{2} - 3x - 10$ را، حداقل چند واحد به‌طرف xهای مثبت انتقال دهیم تا طول نقاط تلاقی نمودار حاصل با محور xها غیرمنفی باشد؟

۱) ۱ ۲) ۱/۵

۳) ۲ ۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۲ در معادلهٔ درجهٔ دوم $2x^{2} + ax + 9 = 0$، یک ریشه دو برابر ریشهٔ دیگر است، مجموع دو ریشهٔ مثبت کدام است؟

۱) ۳/۵ ۲) ۴

۳) ۴/۵ ۴) ۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

۳ اگر هر یک از ریشه های معادلهٔ $3x^{2} + ax + b = 0$، دو برابر معکوس هر ریشه از معادلهٔ $4x^{2} - 7x + 3 = 0$ باشد، a کدام است؟

۱) -14 ۲) -12

۳) -8 ۴) -6

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

۴ ریشه های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^{2} + ax + b = 0$ یک واحد از ریشه های معادلهٔ $3x^{2} + 7x + 1 = 0$ بیشتر است، b کدام است؟

۱) -2 ۲) -1

۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{4}{3}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

۵ به ازای کدام مقادیر a، معادلهٔ درجه دوم $2x^{2} + ax + a - \frac{3}{2} = 0$ دارای دو ریشهٔ حقیقی متمایز است؟

۱) $a > 6$ یا $a < 2$ ۲) $a > 4$ یا $a < 3$

۳) $2 < a < 6$ ۴) $3 < a < 4$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۱

۶ به ازای کدام مقدار m ریشه های حقیقی معادلهٔ $mx^{2} + 3x + m^{2} = 2$، معکوس یکدیگرند؟

۱) -2 ۲) -1

۳) ۱ ۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

۷ اگر معادلهٔ $x^4 - (m+2)x^2 + m + 5 = 0$ دارای چهار ریشهٔ حقیقی متمایز باشد، مجموعهٔ مقادیر m به کدام صورت است؟

۱) $m < -4$
۲) $m > 4$
۳) $-4 < m < 4$
۴) $4 < m < 9$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵

۸ به ازای کدام مقادیر m، از معادلهٔ $mx - 3\sqrt{x} + m - 2 = 0$ فقط یک جواب برای x حاصل می شود؟

۱) $\frac{-3}{2} < m < 2$
۲) $0 < m < 2$
۳) $\frac{3}{2} < m < \frac{5}{2}$
۴) $2 < m < 3$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

۹ به ازای کدام مجموعه مقادیر m، از معادلهٔ $x - 2\sqrt{x} + m - 1 = 0$ دو جواب متمایز برای x حاصل می شود؟

۱) $m \geq 1$
۲) $m < 2$
۳) $1 \leq m < 2$
۴) هیچ مقدار m

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

۱۰ مجموع ریشه های حقیقی معادلهٔ $(x^2+x)^2 - 18(x^2+x) + 72 = 0$، کدام است؟

۱) -4
۲) -2
۳) 2
۴) 4

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۱۱ منحنی توابع با ضابطهٔ $f(x) = -x^2 + bx + 3$ بر خط به معادلهٔ $y = 7$ مماس اند، فاصلهٔ دو نقطهٔ تماس کدام است؟

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

۱۲ اگر یکی از منحنی های تابع درجهٔ دوم $y = (a-1)x^2 + x + 3$ نسبت به خط $x = 2$ متقارن باشد، این منحنی محور xها را با کدام طول مثبت قطع می کند؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۶

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

۱۳ نمودارهای دو تابع با ضابطهٔ $y = 2x^2 + ax + b$ و $y = 2x + b$ در نقطه ای به طول ۲ بر روی محور xها متقاطع اند، a کدام است؟

۱) -2
۲) -1
۳) 3
۴) 4

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۱

۱۴ به ازای کدام مقدار m، مجموع مربعات ریشه های حقیقی معادلهٔ $mx^۲ - (m+۳)x + ۵ = ۰$ برابر ۶ است؟

۱) $-\frac{۹}{۵}$
۲) ۱
۳) ۱ و $-\frac{۹}{۵}$
۴) -۱ و $\frac{۹}{۵}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۱۵ ریشه های کدام معادله، از معکوس ریشه های معادلهٔ درجه دوم $۲x^۲ - ۳x - ۱ = ۰$، یک واحد کمتر است؟

۱) $x^۲ - ۳x + ۱ = ۰$
۲) $x^۲ + ۳x + ۱ = ۰$
۳) $x^۲ - ۵x + ۲ = ۰$
۴) $x^۲ + ۵x + ۲ = ۰$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

۱۶ به ازای کدام مقادیر a، معادلهٔ $x^۳ + (a-۱)x^۲ + (۴-a)x = ۴$ دارای سه ریشهٔ حقیقی متمایز مثبت است؟

۱) $a < -۴$
۲) $a > -۴$
۳) $a < ۴$
۴) $a > ۴$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

۱۷ اگر رابطهٔ $|x+y+z| \leq |x| + |y| + |z|$ به رابطهٔ تساوی تبدیل شود الزاماً سه عدد غیرصفر x و y و z چگونه اند؟

۱) مساوی هم
۲) هم علامت
۳) مثبت
۴) منفی

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

۱۸ مجموعه جواب نامعادلهٔ $\left|\frac{x-۲}{۲x+۱}\right| > ۱$، به صورت کدام بازه هاست؟

۱) $\left(-۳, -\frac{۱}{۲}\right) \cup \left(-\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۳}\right)$
۲) $\left(-۲, -\frac{۱}{۲}\right) \cup \left(-\frac{۱}{۲}, ۱\right)$
۳) $\left(-۳, -\frac{۱}{۲}\right)$
۴) $\left(-\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۳}\right)$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

۱۹ مجموعهٔ جواب نامعادلات $x + |x| \leq \frac{۱}{۲}x + ۳$ به کدام صورت است؟

۱) $[-۴, ۲]$
۲) $[-۶, ۸]$
۳) $[-۶, ۲]$
۴) $[-۲, ۶]$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

۲۰ مجموعه جواب نامعادلهٔ $x^۲ - ۲x < |x-۲|$ به صورت کدام بازه است؟

۱) $(-۱, ۱)$
۲) $(-۱, ۲)$
۳) $(۰, ۲)$
۴) $(۱, ۲)$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۲۱ مساحت ناحیهٔ محدود به نمودارهای دو تابع $y = |x| - x$ و $y = ۲ - \frac{۳}{۲}x$، کدام است؟

۱) $\frac{۸}{۳}$
۲) ۴
۳) $\frac{۱۶}{۳}$
۴) ۶

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۲۲ مجموعه جواب نامعادله $|x^۲ + ۱| > |x - ۲| - ۱ + ۲x$، به‌صورت کدام بازه‌ها است؟

۱) $(-۲, ۱)$
۲) $(-۱, ۱)$
۳) $(-۱, ۲)$
۴) $(۱, ۲)$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۲۳ مساحت ناحیهٔ محدود به نمودارهای دو تابع $y = x + |x|$ و $y = ۲ - |x|$، کدام است؟

۱) ۲
۲) $\frac{۷}{۳}$
۳) $\frac{۸}{۳}$
۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۲۴ مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $\left|\frac{۲-x}{۲x-۳}\right| > ۱$، به‌صورت کدام بازه‌ها است؟

۱) $(۱, \frac{۳}{۲})$
۲) $(۱, \frac{۵}{۳})$
۳) $(\frac{۳}{۲}, \frac{۵}{۳})$
۴) $(\frac{۵}{۳}, ۲)$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۲۵ نمودار تابع $y = |\frac{۱}{۲}x| - ۲$ را ۴ واحد به‌طرف xهای منفی و یک واحد به‌طرف yهای مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار جدید و نمودار اولیه، با کدام طول متقاطع‌اند؟

۱) $-۳/۵$
۲) -۳
۳) $-۲/۵$
۴) -۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۲۶ اگر جزء صحیح $(x^۲ + x)$ برابر (-۱) باشد، آنگاه $[x^{۲۰}]$ کدام است؟ ([ ]: جزء صحیح)

۱) -۱
۲) صفر
۳) ۱
۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

۲۷ اگر $x^{۲} + x < ۰$ باشد، حاصل $[x] + [x^{۲}] + [x^{۳}] + [x^{۴}]$ کدام است؟

۱) -۲
۲) -۱
۳) صفر
۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

۲۸ برای هر عدد طبیعی $n > ۲$ حاصل $[\sqrt{۴n^{۲} - ۳n + ۱}] - ۲[\sqrt{n^{۲} - ۲n}]$ کدام است؟ (نماد [ ] به مفهوم جزء صحیح است.)

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

۲۹ نمودار تابع با ضابطهٔ $x \in [-۲, ۶)$ ، $y = ۲\left[\frac{x}{۲}\right] + ۱$ از چند پاره خط مساوی هم، تشکیل‌شده است؟

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

۳۰ نمودار تابع با ضابطهٔ $x \in [-۲, ۳)$، $y = x - [x]$ از n پاره خط مساوی به اندازهٔ L تشکیل‌شده است. دوتایی مرتب (n, L) کدام است؟

۱) $(۴, ۱)$
۲) $(۴, \sqrt{۲})$
۳) $(۵, ۱)$
۴) $(۵, \sqrt{۲})$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

۳۱ نمودار تابع $y = [x^{۲}]$، روی بازهٔ $x \in (-۲, ۲)$ از چند پاره خط تشکیل‌شده است؟ (نماد [ ] به مفهوم جزء صحیح است)

۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۷

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۳۲ در تابع با ضابطهٔ $f(x) = x^{۲} - ۲[x]$، مقدار $f(-\frac{۱}{۲}f(\sqrt{۳}))$ کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است)

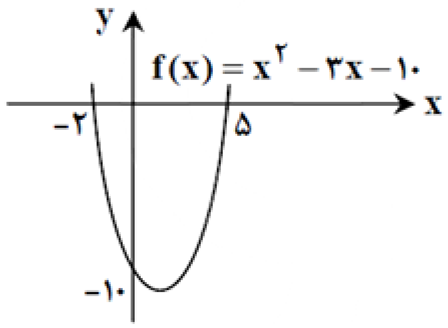
۱) ۱/۷۵
۲) ۲/۲۵
۳) ۲/۵
۴) ۲/۷۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

منبع: کنکور سراسری

۱ **گزینه ۳**

ابتدا نمودارتابع درجه دوم $y = x^۲ - ۳x - ۱۰$ را رسم می‌کنیم.



$$y = x^۲ - ۳x - ۱۰ = (x - ۵)(x + ۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۵ \\ x = -۲ \end{cases}$$

از روی نمودار مشخص است که اگر نمودار را ۲ واحد به‌سمت راست منتقل کنیم، طول نقاط تلاقی با محور xها غیرمنفی می‌شود.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۲ **گزینه ۳**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

گام اول

اگر یکی از ریشه های معادلهٔ $۲x^۲ + ax + ۹ = ۰$ را برابر α در نظر بگیریم، ریشهٔ دیگر برابر ۲α می شود.

گام دوم

روش اول:

حاصل ضرب ریشه ها برابر $\frac{۹}{۲}$ است. هر یک از ریشه ها را تعیین می کنیم:

$$\alpha(۲\alpha) = \frac{۹}{۲} \Rightarrow ۲\alpha^۲ = \frac{۹}{۲} \Rightarrow \alpha^۲ = \frac{۹}{۴} \xrightarrow{\text{ریشه ها مثبت}} \alpha = \frac{۳}{۲} \Rightarrow ۲\alpha = ۲(\frac{۳}{۲}) = ۳$$

بنابراین یکی از ریشه ها برابر $\frac{۳}{۲}$ و دیگری برابر ۳ است. پس مجموع ریشه ها برابر ۴/۵ می شود.

روش دوم:

یکی از ریشه ها α و دیگری ۲α است پس داریم:

$$۲x^۲ + ax + ۹ = (x - \alpha)(x - ۲\alpha) = x^۲ - ۳\alpha x + ۲\alpha^۲ \Rightarrow x^۲ + \frac{a}{۲}x + \frac{۹}{۲} = x^۲ - ۳\alpha x + ۲\alpha^۲$$

$$\Rightarrow \frac{a}{۲} = -۳\alpha \, , \, ۲\alpha^۲ = \frac{۹}{۲} \Rightarrow \alpha^۲ = \frac{۹}{۴} \xrightarrow{\alpha > ۰} \alpha = \frac{۳}{۲} \, , \, ۲\alpha = ۳ \Rightarrow \alpha + ۲\alpha = \frac{۳}{۲} + ۳ = ۴/۵$$

۳ **گزینه ۱**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

گام اول

الف) اگر ریشه های معادلهٔ $۴x^۲ - ۷x + ۳ = ۰$ را α و β فرض کنیم، آنگاه ریشه های معادلهٔ $۳x^۲ + ax + b = ۰$ ، برابر با $\frac{۲}{\alpha}$ و $\frac{۲}{\beta}$ است.

ب) $\alpha + \beta$ و $\alpha\beta$ را از معادلهٔ $۴x^۲ - ۷x + ۳ = ۰$ تعیین کرده و با استفاده از آن مقدار a را در معادلهٔ دوم مشخص می کنیم.

گام دوم

فرض کردیم α و β ریشه های معادلهٔ $۴x^۲ - ۷x + ۳ = ۰$ باشند. داریم:

$$۴x^۲ - ۷x + ۳ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = \frac{۷}{۴} \\ \alpha\beta = \frac{۳}{۴} \end{cases} \quad (I)$$

برای تعیین مقدار a باید حاصل‌جمع ریشه های معادلهٔ دوم را به دست آوریم:

$$۳x^۲ + ax + b = ۰ \xrightarrow{\text{ریشه ها } \frac{۲}{\alpha} \text{ و } \frac{۲}{\beta}} \frac{۲}{\alpha} + \frac{۲}{\beta} = -\frac{a}{۳} \Rightarrow \frac{۲\alpha + ۲\beta}{\alpha\beta} = -\frac{a}{۳} \Rightarrow \frac{۲(\alpha+\beta)}{\alpha\beta} = -\frac{a}{۳}$$

$$\xrightarrow{(I)} \frac{۲(\frac{۷}{۴})}{\frac{۳}{۴}} = -\frac{a}{۳} \Rightarrow \frac{۱۴}{۳} = -\frac{a}{۳} \Rightarrow a = -۱۴$$

۴ **گزینه ۲**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

گام اول

الف) ریشه های معادلهٔ $۳x^۲ + ۷x + ۱ = ۰$ را α و β فرض می‌کنیم. بنابراین ریشه های معادلهٔ $x^۲ + ax + b = ۰$ به صورت $(\alpha + ۱)$ و $(\beta + ۱)$ می شود.

ب) برای به دست آوردن b ، باید حاصل ضرب $(\alpha + ۱)(\beta + ۱)$ را تعیین کنیم.

گام دوم

$$۳x^۲ + ۷x + ۱ = ۰ \xrightarrow{\alpha \text{ و } \beta \text{ ریشه های معادله}} \begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{۷}{۳} \\ \alpha\beta = \frac{۱}{۳} \end{cases}$$

$$x^۲ + ax + b = ۰ \xrightarrow{(\alpha+۱) \text{ و } (\beta+۱) \text{ ریشه های معادله}} (\alpha + ۱)(\beta + ۱) = b$$

$$\Rightarrow \alpha\beta + \alpha + \beta + ۱ = b \xrightarrow[\alpha+\beta=-\frac{۷}{۳}]{\alpha\beta=\frac{۱}{۳}} \frac{۱}{۳} - \frac{۷}{۳} + ۱ = -۱ = b \Rightarrow b = -۱$$

۵ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۱

گام اول

در صورتی یک معادلهٔ درجه‌دو دارای دو ریشهٔ حقیقی متمایز است که مقدار Δ بزرگ تر از صفر باشد. (یعنی $\Delta > 0$)

گام دوم

$$2x^2 + ax + a - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow \Delta = a^2 - 4(2)(a - \frac{3}{2}) > 0 \Rightarrow a^2 - 8(a - \frac{3}{2}) > 0$$
$$\Rightarrow a^2 - 8a + 12 > 0 \Rightarrow (a-6)(a-2) > 0$$

ناحیه ای که $a^2 - 8a + 12 > 0$ باشد را با تعیین علامت معادله به دست می‌آوریم.

پس محدودهٔ قابل‌قبول برای a، به شرط اینکه معادله دارای دو ریشهٔ حقیقی باشد، به صورت $a > 6$ یا $a < 2$ است.

۶ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

گام اول

وقتی گفته می شود معـادله دارای دو ریشه معکوس است دو نتیجه می گیریم : اولاً Δ در این معادله بزرگ تر از صفر است، ثانیاً حاصل ضرب ریشه های معادله برابر یک است.

گام دوم

ابتدا معادله را به فرم استاندارد $ax^2 + bx + c = 0$ در می آوریم:

$$mx^2 + 3x + m^2 = 2 \Rightarrow mx^2 + 3x + m^2 - 2 = 0$$

برای پیدا کردن مقدار m هر دو شرط بیان‌شده را بررسی می کنیم.

$$mx^2 + 3x + m^2 - 2 = 0 \xrightarrow{\text{ریشه ها } x_1 \text{ و } x_2} x_1x_2 = 1 \Rightarrow x_1x_2 = \frac{m^2 - 2}{m} = 1$$
$$\Rightarrow m^2 - 2 = m \Rightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Rightarrow (m-2)(m+1) = 0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} m = 2 \rightarrow 2x^2 + 3x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 9 - 4(2)(2) = 9 - 16 = -7 < 0 \\ m = -1 \rightarrow -x^2 + 3x - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 9 - 4(-1)(-1) = 9 - 4 = 5 > 0 \end{cases}$$

با توجه به شرط $\Delta > 0$ فقط $m = -1$ جواب قابل‌قبول است.

۷ **گزینه ۲**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵

گام اول

الف) معادلهٔ درجه چهار را با تغییر متغیر $x^2 = y$ به معادلهٔ درجه‌دو تبدیل می کنیم.

ب) اگر قرار باشد معادلهٔ درجه چهار داده‌شده دارای چهار ریشهٔ حقیقی متمایز باشد، در این صورت برای معادلهٔ درجه‌دو تشکیل‌شده، باید داشته باشیم $\Delta > 0$.

ج) نکتهٔ دیگر این است که هر دو ریشه باید مثبت باشند. در این صورت هم حاصل ضرب و هم حاصل جمع ریشه ها مثبت است.

گام دوم

$$x^4 - (m+2)x^2 + m + 5 = 0 \xrightarrow{x^2=y} y^2 - (m+2)y + m + 5 = 0$$
$$\Delta > 0 \Rightarrow (m+2)^2 - 4(m+5) > 0 \Rightarrow m^2 + 4m + 4 - 4m - 20 > 0$$
$$\Rightarrow m^2 - 16 > 0 \Rightarrow m^2 > 16 \Rightarrow |m| > 4 \Rightarrow m < -4 \text{ یا } m > 4 \quad (I)$$

حاصل جمع ریشه ها مثبت است پس:

$$-(-\frac{(m+2)}{1}) > 0 \Rightarrow m + 2 > 0 \Rightarrow m > -2 \quad (II)$$

حاصل ضرب ریشه ها نیز مثبت است پس:

$$\frac{m+5}{1} > 0 \Rightarrow m + 5 > 0 \Rightarrow m > -5 \quad (III)$$

برای این که هر سه شرط فوق برقرار باشد بین مجموعه جواب های به‌دست‌آمده اشتراک می گیریم:

$$(I) \bigcap (II) \bigcap (III) : m > 4$$

۸ **گزینه ۲**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

گام اول

الف) با تغییر متغیر $\sqrt{x} = t$ معادلهٔ داده‌شده را به معادلهٔ درجه‌دو تبدیل می کنیم.

ب) برای این که معادلهٔ اولیه فقط یک ریشه داشته باشد، معادلهٔ جدید باید دارای یک ریشهٔ مثبت و یک ریشهٔ منفی باشد (چون در این صورت یک بار $\sqrt{x}$ برابر یک عدد مثبت شده که یک جواب به دست می‌آید و یک بار برابر یک عدد منفی شده که قابل‌قبول نیست) پس در این حالت معادله باید دو ریشهٔ مختلف العلامه داشته باشد.

ج) حالت دیگر این است که معادلهٔ اولیه فقط دارای یک ریشه باشد که در این صورت معادلهٔ جدید یک ریشهٔ مضاعف مثبت دارد.

گام دوم

$$mx - 3\sqrt{x} + m - 2 = 0 \Rightarrow m(\sqrt{x})^2 - 3(\sqrt{x}) + m - 2 = 0 \xrightarrow{\sqrt{x}=t} mt^2 - 3t + m - 2 = 0$$
$$\text{حالت اول} : t_1 t_2 < 0 \Rightarrow \frac{m-2}{m} < 0 \Rightarrow 0 < m < 2 (I)$$
$$\text{حالت دوم} : mt^2 - 3t + m - 2 = 0 \xrightarrow{\Delta=0} 9 - 4m(m-2) = 0 \Rightarrow 9 - 4m^2 + 8m = 0$$
$$\Rightarrow -4m^2 + 8m + 9 = 0 \Rightarrow m = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2} \xrightarrow{m>0} m = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2} \quad (II)$$

جواب سؤال اشتراک (I) و (II) است که باتوجه‌به گزینه‌ها جواب به‌صورت $0 < m < 2$ می‌شود.

۹ **گزینه ۳**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

گام اول

الف) معادله را با تغییر متغیر $\sqrt{x} = t$ به معادلهٔ درجه‌دو تبدیل می کنیم.

ب) برای این که معادلهٔ اولیه دارای دو جواب متمایز باشد، باید معادلهٔ جدید دو ریشهٔ مثبت داشته باشد. پس سه شرط $t_۱ + t_۲ > ۰$ ،$\Delta > ۰$ و $t_۱t_۲ > ۰$ را برای معادلهٔ جدید بررسی می کنیم.

گام دوم

$$x - ۲\sqrt{x} + m - ۱ = ۰ \Rightarrow (\sqrt{x})^۲ - ۲\sqrt{x} + m - ۱ = ۰ \xrightarrow{\sqrt{x}=t} t^۲ - ۲t + m - ۱ = ۰$$

$$۱)\ \Delta > ۰ \Rightarrow ۴ - ۴(m - ۱) > ۰ \Rightarrow ۴ - ۴m + ۴ > ۰ \Rightarrow ۴m < ۸ \Rightarrow m < ۲ \quad (I)$$

$$۲)\ t_۱t_۲ > ۰ \Rightarrow \frac{m-۱}{۱} > ۰ \Rightarrow m - ۱ > ۰ \Rightarrow m > ۱ \quad (II)$$

$$۳)\ t_۱ + t_۲ > ۰ \Rightarrow -(-\frac{۲}{۱}) > ۰ \Rightarrow ۲ > ۰ \Rightarrow \text{همواره برقرار است}$$

توجه داشته باشید که به ازای $m = ۱$، معادلهٔ $x - ۲\sqrt{x} + m - ۱ = ۰$ به معادلهٔ $x - ۲\sqrt{x} = ۰$ تبدیل می‌شود که دارای دو جواب $x = ۰$ و $x = ۴$ است. پس $m = ۱$ نیز قابل‌قبول است:

$$(I) \bigcap (II) \bigcup m = ۱ \Rightarrow ۱ \le m < ۲$$

۱۰ **گزینه ۲**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

گام اول

برای حل ساده‌تر معادله، با تغییر متغیر $x^۲ + x = t$ معادلهٔ داده‌شده را به یک معادلهٔ درجه‌دو تبدیل می کنیم.

گام دوم

$$(x^۲ + x)^۲ - ۱۸(x^۲ + x) + ۷۲ = ۰ \xrightarrow{x^۲+x=t} t^۲ - ۱۸t + ۷۲ = ۰$$

$$\Rightarrow (t - ۱۲)(t - ۶) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t - ۱۲ = ۰ \Rightarrow t = ۱۲ \\ t - ۶ = ۰ \Rightarrow t = ۶ \end{cases}$$

حال مقادیر x را محاسبه می کنیم:

$$t = ۱۲ \Rightarrow x^۲ + x = ۱۲ \Rightarrow x^۲ + x - ۱۲ = ۰ \Rightarrow (x + ۴)(x - ۳) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x_۱ = -۴ \\ x_۲ = ۳ \end{cases}$$

$$t = ۶ \Rightarrow x^۲ + x = ۶ \Rightarrow x^۲ + x - ۶ = ۰ \Rightarrow (x + ۳)(x - ۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x_۳ = -۳ \\ x_۴ = ۲ \end{cases}$$

مجموع ریشه های حقیقی معادلهٔ اولیه برابر است با:

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ = -۴ + ۳ - ۳ + ۲ = -۲$$

۱۱ گزینه ۲

روش اول:

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

گام اول

وقتی منحنی یک تابع درجه‌دو بر یک خط مماس باشد، معادلهٔ تلاقی خط و منحنی ریشهٔ مضاعف دارد. پس معادلهٔ خط و منحنی را تلاقی داده، آن را به یک معادلهٔ درجه‌دو استاندارد تبدیل می کنیم و سپس Δ را برابر صفر قرار می دهیم.

گام دوم

$$-x^2+bx+3=7 \Rightarrow -x^2+bx-4=0 \Rightarrow x^2-bx+4=0$$

$$\xrightarrow{\text{ریشهٔ مضاعف}} \Delta=0 \Rightarrow b^2-16=0 \Rightarrow b^2=16 \Rightarrow b=\pm 4$$

به ازای هر کدام از مقادیر b، نقطهٔ تماس خط و منحنی را تعیین می کنیم:

$$b=4 \Rightarrow x^2-4x+4=0 \Rightarrow (x-2)^2=0 \Rightarrow x=2 \xrightarrow{y=7} A(2\,,\,7)$$

$$b=-4 \Rightarrow x^2+4x+4=0 \Rightarrow (x+2)^2=0 \Rightarrow x=-2 \xrightarrow{y=7} A(-2\,,\,7)$$

بنابراین فاصله دو نقطهٔ A و Bبرابر است با:

$$AB=|2-(-2)|=4$$

روش دوم:

بر اساس صورت مسئله، تابع$f(x)=-x^2+bx+3$ در نقطهٔ $x=\frac{b}{2}$ یک ماکزیمم دارد و چون بر خط $y=7$ مماس است پس $f(\frac{b}{2})=7$

فاصلهٔ دو نقطهٔ تماس همان فاصله بین ماکزیمم توابع به معادله $y=-x^2+bx+3$ است (دو مقدار برای bداریم).

$$f(\frac{b}{2})=7 \Rightarrow -\frac{b^2}{4}+\frac{b^2}{2}+3=7 \Rightarrow \frac{b^2}{4}=4 \Rightarrow b^2=16 \Rightarrow b=\pm 4$$

ماکزیمم دو تابع به معادلهٔ $y=-x^2+4x+3$ و $y=-x^2-4x+3$، به ترتیب نقاط $(+2\,,\,7)$ و $(-2\,,\,7)$ است که فاصله بین آن ها برابر است با:

$$|+2-(-2)|=+4$$

۱۲ گزینه ۴

در تابع درجه‌دو به فرم $y=ax^2+bx+c$، محور تقارن منحنی ، خط $x=-\frac{b}{2a}$ است. با توجه به این نکته، مقدار aرا به دست می آوریم:

$$y=(a-1)x^2+x+3 \xrightarrow{x=2\ \text{محور تقارن}} x=-\frac{1}{2(a-1)}=2 \Rightarrow a-1=-\frac{1}{4}$$

بنابراین ضابطهٔ تابع درجه‌دو به صورت $y=-\frac{1}{4}x^2+x+3$ درمی‌آید. معادلهٔ $y=0$ را حل می کنیم:

$$y=0 \Rightarrow -\frac{1}{4}x^2+x+3=0 \xrightarrow{\times(-4)} x^2-4x-12=0 \Rightarrow (x-6)(x+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=6 \\ x=-2 \ \text{غ ق ق} \end{cases}$$

چون در سؤال ذکرشده نمودار را با طول مثبت قطع کند، فقط $x=6$ قابل‌قبول است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

۱۳ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۱

گام اول

وقتی نمودارهای دو تابع در نقطه ای به طول ۲ و بر روی محور xها متقاطع باشند، در این صورت نقطهٔ $(2, 0)$ در ضابطهٔ هر دو تابع صدق می کند.

گام دوم

$$y = 2x + b \xrightarrow{x=2,\, y=0} 0 = 4 + b \Rightarrow b = -4$$

$$y = 2x^2 + ax + b \xrightarrow[b=-4]{x=2,\, y=0} 0 = 8 + 2a - 4 \Rightarrow 2a + 4 = 0 \Rightarrow 2a = -4 \Rightarrow a = -2$$

۱۴ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

گام اول

الف) اگر α و β ریشه های معادلهٔ درجه‌دو داده‌شده، باشد می دانیم $\alpha^2 + \beta^2 = 6$ است. $\alpha^2 + \beta^2$ برابر است با:

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = S^2 - 2P = 6$$

ب) درصورتی‌که $\Delta > 0$ باشد معادلهٔ درجه‌دو، دو ریشهٔ حقیقی دارد و اگر $\Delta < 0$ باشد، معادله فاقد ریشه است.

گام دوم

$$mx^2 - (m+3)x + 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = \frac{m+3}{m} \\ P = \alpha\beta = \frac{5}{m} \end{cases}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = \left(\frac{m+3}{m}\right)^2 - 2\left(\frac{5}{m}\right) = 6 \Rightarrow \frac{m^2 + 6m + 9}{m^2} - \frac{10}{m} = 6 \xrightarrow{\times m^2}$$

$$m^2 + 6m + 9 - 10m = 6m^2 \Rightarrow 5m^2 + 4m - 9 = 0 \Rightarrow (5m+9)(m-1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = 1 \Rightarrow x^2 - 4x + 5 = 0 \Rightarrow \Delta = -4 < 0 \rightarrow \text{فاقد ریشهٔ حقیقی} \\ m = -\frac{9}{5} \Rightarrow -\frac{9}{5}x^2 - \frac{6}{5}x + 5 = 0 \Rightarrow \Delta > 0 \rightarrow \text{دارای دو ریشهٔ حقیقی} \end{cases}$$

پس فقط به ازای $m = -\frac{9}{5}$ معادله دو ریشهٔ حقیقی دارد.

۱۵ گزینه ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

گام اول

الف) فرض می کنیم ریشهٔ معادلهٔ $2x^2-3x-1=0$ برابر با x باشد، در این صورت ریشهٔ معادلهٔ موردنظر به صورت $X=\frac{1}{x}-1$ است.

ب) برای به دست آوردن معادلهٔ جدید، x را برحسب X پیدا کرده و در معادلهٔ اولیه جایگذاری می کنیم.

گام دوم

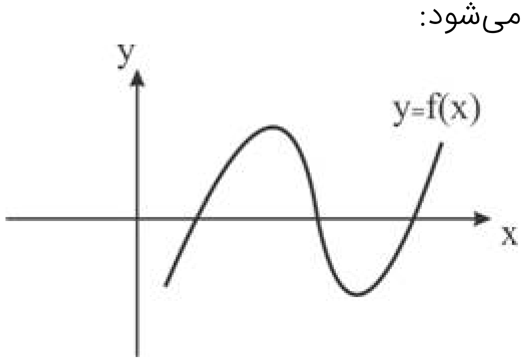
$$X=\frac{1}{x}-1\Rightarrow \frac{1}{x}=X+1\Rightarrow x=\frac{1}{X+1}$$

$$2x^2-3x-1=0\xrightarrow{x=\frac{1}{X+1}}2\left(\frac{1}{X+1}\right)^2-3\left(\frac{1}{X+1}\right)-1=0\xrightarrow{\times(X+1)^2}2-3(X+1)-(X+1)^2=0$$

$$\Rightarrow 2-3X-3-X^2-2X-1=0\Rightarrow -X^2-5X-2=0\Rightarrow X^2+5X+2=0$$

۱۶ گزینه ۱

نمودار یک تابع درجهٔ ۳ که ضریب x^3 مثبت و هر سه ریشهٔ حقیقی آن نیز مثبت باشد، به‌صورت زیر می‌شود:



باتوجه‌به نمودار تابع $f(x)$ این تابع در دو نقط مماس افقی دارد که طول هر دو نقطه نیز مثبت است، پس معادلهٔ $f'(x)=0$ دو ریشه دارد که هر دو ریشهٔ آن نیز مثبت است. ضابطهٔ $f'(x)$ را تشکیل می‌دهیم و باتوجه‌به اینکه $f'(x)$ یک معادلهٔ درجه‌دو است سه شرط $\Delta>0$ و مثبت بودن جمع ریشه‌ها و مثبت بودن ضرب ریشه‌ها را بررسی می‌کنیم تا محدودهٔ قابل‌قبول برای a مشخص شود.

$f(x)=x^3+(a-1)x^2+(4-a)x-4=0$

$f'(x)=3x^2+2(a-1)x+(4-a)$

$\Delta>0\Rightarrow 4(a-1)^2-4(3)(4-a)>0\Rightarrow$

$(a^2-2a+1)-12+3a>0\Rightarrow a^2+a-11>0$

$\Rightarrow a>\frac{-1+\sqrt{45}}{2}$ یا $\Rightarrow a<\frac{-1-\sqrt{45}}{2}$

جمع ریشه‌ها $>0\Rightarrow -\frac{2(a-1)}{3}>0\Rightarrow -(a-1)>0\Rightarrow a-1<0\Rightarrow a<1$

ضرب ریشه‌ها $>0\Rightarrow \frac{4-a}{3}>0\Rightarrow 4-a>0\Rightarrow a<4$

اشتراک بازه‌های به‌دست‌آمده، یعنی بازهٔ $\left(-\infty,\frac{-1-\sqrt{45}}{2}\right)$ محدودهٔ قابل قبول برای a است که از میان گزینه‌ها تنها $a<-4$ در این محدوده قرار می‌گیرد.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

۱۷ **گزینه ۲**

طبق نامساوی مثلثی داریم: اگر a و b دو عدد حقیقی باشند، آنگاه $|a+b| \leq |a|+|b|$ و تساوی در صورتی برقرار است که $ab \geq ۰$ باشد.
یعنی باید a و b هر دو هم علامت باشند تا تساوی برقرار شود.
حال اگر این مطلب را به رابطهٔ $|x+y+z| \leq |x|+|y|+|z|$ تعمیم دهیم و با توجه به این که x و y و z سه عدد غیر صفرند، باید x و y و z هم علامت باشند تا تساوی برقرار شود. (البته جواب سؤال را با عددگذاری و امتحان گزینه ها هم می‌توانستیم به دست آوریم.)

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

۱۸ **گزینه ۱**

با فرض $x \neq -\frac{۱}{۲}$ طرفین نامعادله را در $|۲x+۱|$ ضرب کرده و آن را از حالت کسری خارج می کنیم. وقتی دو طرف نامعادله مثبت باشند، می توان با خیال راحت دو طرف را به توان دو رساند تا از شر قدرمطلق راحت شده و مجموعه جواب نامعادله را به راحتی تعیین کنیم.

$$\left|\frac{x-۲}{۲x+۱}\right| > ۱ \Rightarrow \frac{|x-۲|}{|۲x+۱|} > ۱ \xrightarrow{x\neq -\frac{۱}{۲}} |x-۲| > |۲x+۱| \xrightarrow{\text{به توان ۲ می رسانیم}} (x-۲)^۲ > (۲x+۱)^۲$$

$$\Rightarrow x^۲ - ۴x + ۴ > ۴x^۲ + ۴x + ۱ \Rightarrow ۳x^۲ + ۸x - ۳ < ۰ \Rightarrow (x+۳)(۳x-۱) < ۰ \Rightarrow -۳ < x < \frac{۱}{۳}$$

با توجه به شرط $x = -\frac{۱}{۲}$ در ابتدای حل تست، باید این مقدار x را از مجموعه جواب به دست آمده خارج کنیم:

$$\text{مجموعه جواب نامعادله} = (-۳, \frac{۱}{۳}) - \left\{-\frac{۱}{۲}\right\} = (-۳, -\frac{۱}{۲}) \cup (-\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۳})$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

۱۹ **گزینه ۳**

روش اول:

این نامعادله را در دو حالت حل می کنیم. یک بار $x \geq ۰$ و بار دیگره $x <$ فرض می شود. مجموعه جواب نامعادله را در هر یک از حالت ها به دست آورده و چون هر دوی آن ها برای ما قابل‌قبول است بین آن ها اجتماع می گیریم.

$$۱)\ x \geq ۰ \Rightarrow |x| = x : x + |x| \leq \frac{۱}{۲}x + ۳ \xrightarrow{|x|=x} x + x \leq \frac{۱}{۲}x + ۳$$

$$\Rightarrow ۲x \leq \frac{۱}{۲}x + ۳ \Rightarrow \frac{۳}{۲}x \leq ۳ \Rightarrow x \leq ۲ \xrightarrow{x \geq ۰} ۰ \leq x \leq ۲$$

$$۲)\ x < ۰ \Rightarrow |x| = -x : x + |x| \leq \frac{۱}{۲}x + ۳ \xrightarrow{|x|=-x} x - x \leq \frac{۱}{۲}x + ۳$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}x + ۳ \geq ۰ \Rightarrow \frac{۱}{۲}x \geq -۳ \Rightarrow x \geq -۶ \xrightarrow{x<۰} -۶ \leq x < ۰$$

$$\text{مجموعه جواب نامعادله} = [-۶\,,۰) \bigcup [۰\,,۲] = [-۶\,,۲]$$

روش دوم:

اگر $|x| \leq a$، آنگاه $-a \leq x \leq a$، بنابراین می‌توان نوشت:

$$x + |x| \leq \frac{۱}{۲}x + ۳$$

$$|x| \leq -\frac{۱}{۲}x + ۳ \Rightarrow -(-\frac{۱}{۲}x + ۳) \leq x \leq -\frac{۱}{۲}x + ۳$$

$$x \leq -\frac{۱}{۲}x + ۳ \Rightarrow \frac{۳}{۲}x \leq ۳ \Rightarrow x \leq ۲$$

$$x \geq -(-\frac{۱}{۲}x + ۳) \Rightarrow x \geq \frac{۱}{۲}x - ۳ \Rightarrow \frac{۱}{۲}x \geq -۳ \Rightarrow x \geq -۶$$

بنابراین $-۶ \leq x \leq ۲$ بوده و مجموعه جواب نامعادله به صورت $[-۶\,,۲]$ به دست می آید.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

۲۰ **گزینه ۲**

یک بار عبارت داخل قدر مطلق را مثبت و بار دیگر منفی فرض کرده و نامعادله را حل می کنیم.

$$۱)\ x \geq ۲ \Rightarrow x - ۲ \geq ۰ \Rightarrow |x - ۲| = x - ۲$$

$$x^۲ - ۲x < |x - ۲| \xrightarrow{x \geq ۲} x^۲ - ۲x < x - ۲ \Rightarrow x^۲ - ۳x + ۲ < ۰$$

$$\Rightarrow (x - ۲)(x - ۱) < ۰ \Rightarrow ۱ < x < ۲$$

با توجه به بازه ای که در ابتدا در نظر گرفته شد $(x \geq ۲)$ این جواب قابل‌قبول نیست.

$$۲)\ x < ۲ \Rightarrow x - ۲ < ۰ \Rightarrow |x - ۲| = -(x - ۲) = ۲ - x$$

$$x^۲ - ۲x < |x - ۲| \xrightarrow{x<۲} x^۲ - ۲x < ۲ - x \Rightarrow x^۲ - x - ۲ < ۰$$

$$\Rightarrow (x - ۲)(x + ۱) < ۰ \Rightarrow -۱ < x < ۲$$

این مجموعه جواب با شرط اولیه هم خوانی دارد. پس $-۱ < x < ۲$ جواب نامعادله است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۲۱ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

گام اول

هر تابع شامل قدر مطلق را می‌توان به‌صورت یک تابع دو ضابطه‌ای نوشت. می‌دانیم: $|x| = \begin{cases} x & ;x \geq ۰ \\ -x & ;x < ۰ \end{cases}$

گام دوم

ابتدا ضابطهٔ تابع $y = |x| - x$ را برای مقادیر $x \geq ۰$ و $x < ۰$ به دست می‌آوریم:

$$y = |x| - x = \begin{cases} x - x = ۰ & ;x \geq ۰ \\ -x - x = -۲x & ;x < ۰ \end{cases}$$

نمودار هر دو تابع $y = |x| - x$ و $y = ۲ - \frac{۳}{۲}x$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:

برای محاسبهٔ مساحت ناحیهٔ محصور بین دو منحنی ابتدا مختصات محل تلاقی؛ یعنی نقطهٔ A را با مساوی قرار دادن ضابطه‌ها تعیین می‌کنیم:

$$۲ - \frac{۳}{۲}x = -۲x \Rightarrow -۲x + \frac{۳}{۲}x = ۲ \Rightarrow -\frac{۱}{۲}x = ۲ \Rightarrow x = -۴$$

$$\xrightarrow{y=-۲x} y = ۸ \Rightarrow A\left(-۴, ۸\right)$$

بنابراین ارتفاع مثلث $A\overset{\Delta}{B}C$ برابر ۸ است و مساحتش به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$S_{A\overset{\Delta}{B}C} = \frac{۱}{۲} \times ۸ \times \frac{۴}{۳} = \frac{۱۶}{۳}$$

۲۲ گزینه ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

گام اول

هر تابع شامل قدر مطلق را می‌توان به‌صورت یک تابع دو ضابطه‌ای نوشت. می‌دانیم: $|x| = \begin{cases} x & ;x \geq ۰ \\ -x & ;x < ۰ \end{cases}$

گام دوم

عبارت $x^۲ + ۱$ همواره مثبت است؛ بنابراین:

$$|x^۲ + ۱| = x^۲ + ۱$$

نامعادلهٔ داده‌شده به‌صورت زیر می‌شود:

$$۲x + ۱ - |x - ۲| > x^۲ + ۱$$

نامعادله را در دو حالت $x \geq ۲$ و $x < ۲$ حل می‌کنیم:

$$(I)\quad x \geq ۲ \Rightarrow x - ۲ \geq ۰ \Rightarrow |x - ۲| = x - ۲$$

$$۲x + ۱ - \left(x - ۲\right) > x^۲ + ۱ \Rightarrow ۲x + ۱ - x + ۲ > x^۲ + ۱ \Rightarrow x^۲ - x - ۲ < ۰ \Rightarrow \left(x - ۲\right)\left(x + ۱\right) < ۰$$

$\Rightarrow -۱ < x < ۲ \xrightarrow{x \geq ۲}$ x هیچ مقداری نمی تواند داشته باشد

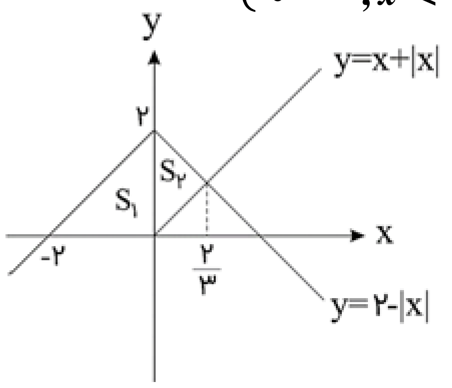
$$(II)\quad x < ۲ \Rightarrow x - ۲ < ۰ \Rightarrow |x - ۲| = -\left(x - ۲\right)$$

$$۲x + ۱ + x - ۲ > x^۲ + ۱ \Rightarrow x^۲ - ۳x + ۲ < ۰ \Rightarrow \left(x - ۲\right)\left(x - ۱\right) < ۰ \Rightarrow ۱ < x < ۲ \xrightarrow{x<۲} ۱ < x < ۲$$

اجتماع دو مجموعه جواب به‌دست‌آمده؛ یعنی بازهٔ $\left(۱, ۲\right)$، مجموعه جواب نامعادلهٔ $۲x + ۱ - |x - ۲| > \left|x^۲ + ۱\right|$ می‌شود.

۲۳ گزینه ۳

$$y = x + |x| = \begin{cases} ۲x & ;x \geq ۰ \\ ۰ & ;x < ۰ \end{cases} \quad , \quad y = ۲ - |x| = \begin{cases} ۲ - x & ;x \geq ۰ \\ x + ۲ & ;x < ۰ \end{cases}$$



$$۲ - x = ۲x \Rightarrow x = \frac{۲}{۳}$$

$$S = S_۱ + S_۲ = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۲ + \frac{۱}{۲} \times \frac{۲}{۳} \times ۲ = ۲ + \frac{۲}{۳} = \frac{۸}{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۲۴ گزینه ۲

$$|\frac{۲ - x}{۲x - ۳}| > ۱ \Rightarrow (\frac{۲ - x}{۲x - ۳})^۲ > ۱ \xrightarrow{x \neq \frac{۳}{۲}} x^۲ - ۴x + ۴ > ۴x^۲ - ۱۲x + ۹$$

$$\Rightarrow ۳x^۲ - ۸x + ۵ < ۰ \Rightarrow ۳x^۲ - ۸x + ۵ = ۰ \Rightarrow x_{۱,۲} = \frac{۴ \pm \sqrt{۴^۲ - ۱۵}}{۳} \Rightarrow x_{۱,۲} = ۱, \frac{۵}{۳}$$

x		۱		$\frac{۵}{۳}$	
$۳x^۲ - ۸x + ۵$	+	۰	−	۰	+

$$\Rightarrow x = (۱, \frac{۵}{۳})$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۲۵ گزینه ۲

با مساوی قرار دادن معادلهٔ $y - ۱ = \frac{۱}{۲}|x + ۴| - ۲$ با معادلهٔ مفروض داریم:

$$\begin{cases} y - ۱ = \frac{۱}{۲}|x + ۴| - ۲ \\ y = \frac{۱}{۲}|x| - ۲ \end{cases} \Rightarrow \frac{۱}{۲}|x + ۴| - ۱ = \frac{۱}{۲}|x| - ۲ \Rightarrow |x + ۴| - ۲ = |x| - ۴ \Rightarrow x = -۳$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۲۶ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

گام اول

با توجه به‌صورت سؤال $[x^۲ + x] = -۱$ بوده و با توجه به ویژگی های جزء صحیح محدودهٔ قابل‌قبول برای $x^۲ + x$ به صورت $-۱ \leq x^۲ + x < ۰$ است.

گام دوم

$$[x^۲ + x] = -۱ \Rightarrow -۱ \leq x^۲ + x < ۰$$

هر یک از طرفین نامعادله را به صورت جداگانه بررسی می کنیم.

$$۱)\ \ x^۲ + x \geq -۱ \Rightarrow x^۲ + x + ۱ \geq ۰ \Rightarrow \begin{cases} \Delta = ۱ - ۴ = -۳ < ۰ \\ \text{ضریب } x^۲ = ۱ > ۰ \end{cases}$$

با توجه به این که $\Delta < ۰$ و ضریب $x^۲$ مثبت است، عبارت $x^۲ + x + ۱$ همواره مثبت و نامعادله همواره برقرار است.

$$۲)\ \ x^۲ + x < ۰ \Rightarrow x(x+۱) < ۰ \Rightarrow -۱ < x < ۰$$

پس $-۱ < x < ۰$ جواب نامعادله است و داریم:

$$-۱ < x < ۰ \Rightarrow ۰ < x^{۲۰} < ۱ \Rightarrow [x^{۲۰}] = ۰$$

۲۷ گزینه ۱

با توجه به نامعادلهٔ $x^۲ + x < ۰$ محدودهٔ قابل‌قبول برای x را باید مشخص کنیم. سپس مقادیر $[x]$، $[x^۲]$، $[x^۳]$ و $[x^۴]$ را محاسبه می کنیم.

		-۱		۰	
$x^۲+x$	$+$	۰	$-$	۰	$+$

$$x^۲ + x < ۰ \Rightarrow x(x+۱) < ۰ \Rightarrow -۱ < x < ۰$$
$$-۱ < x < ۰ \Rightarrow [x] = -۱$$
$$-۱ < x < ۰ \Rightarrow ۰ < x^۲ < ۱ \Rightarrow [x^۲] = ۰$$
$$-۱ < x < ۰ \Rightarrow -۱ < x^۳ < ۰ \Rightarrow [x^۳] = -۱$$
$$-۱ < x < ۰ \Rightarrow ۰ < x^۴ < ۱ \Rightarrow [x^۴] = ۰$$
$$[x] + [x^۲] + [x^۳] + [x^۴] = -۱ + ۰ - ۱ + ۰ = -۲$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

۲۸ **گزینه ۳**

بعضی از تست های جزء صحیح را با یک عددگذاری ساده می توانیم حل کنیم. حال این تست را به دو روش اصلی و عددگذاری حل می کنیم.

روش اول:

به ازای هر عدد طبیعی n داریم:

$$4n^2-4n+1<4n^2-3n+1<4n^2 \Rightarrow (2n-1)^2<4n^2-3n+1<(2n)^2$$

$$\xrightarrow{\text{از نامعادله جذر می گیریم}} 2n-1<\sqrt{4n^2-3n+1}<2n \Rightarrow [\sqrt{4n^2-3n+1}]=2n-1$$

از طرف دیگر وقتی $n>2$ باشد، رابطهٔ زیر برقرار است:

$$n^2-4n+4<n^2-2n<n^2-2n+1 \Rightarrow (n-2)^2<n^2-2n<(n-1)^2$$

$$\xrightarrow{\text{از نامعادله جذر می گیریم}} n-2<\sqrt{n^2-2n}<n-1 \Rightarrow [\sqrt{n^2-2n}]=n-2$$

پس حاصل عبارت دادهشده به ازای $n>2$ برابر است با:

$$[\sqrt{4n^2-3n+1}]-2[\sqrt{n^2-2n}]=2n-1-2(n-2)=2n-1-2n+4=3$$

روش دوم (روش عددگذاری):

در صورت تست به این نکته اشاره‌شده که به ازای هر عدد طبیعی بزرگ تر از ۲ حاصل عبارت یکسان است، کافی است یک عدد طبیعی بزرگ تر از ۲ را انتخاب کرده و حاصل عبارت دادهشده را به ازای آن محاسبه کنیم. برای حل آسان‌تر، n را ۳ در نظر می گیریم:

$$A=[\sqrt{4n^2-3n+1}]-2[\sqrt{n^2-2n}] \xrightarrow{n=3} A=[\sqrt{36-9+1}]-2[\sqrt{9-6}]$$
$$=[\sqrt{28}]-2[\sqrt{3}]=5-2(1)=5-2=3$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

۲۹ **گزینه ۲**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

گام اول

با توجه به ضابطـهٔ تابع که به صورت $y=2\left[\frac{x}{2}\right]+1$ است، محدودهٔ اولیهٔ x را به زیربازه های زیر تقسـیم کرده و در هر زیربازه مقـدار y را تعیین می کنیم.

$$-2\le x<0,\ 0\le x<2,\ 2\le x<4,\ 4\le x<6$$

گام دوم

برای پاسخ گویی به تست نیازی به رسم نمودار تابع نیست. به تعداد ضابطه های به دست آمده، پاره خط در نمودار تابع وجود دارد.

$$-2\le x<0 \Rightarrow -1\le \frac{x}{2}<0 \Rightarrow \left[\frac{x}{2}\right]=-1 \Rightarrow y=2(-1)+1=-2+1=-1$$

$$0\le x<2 \Rightarrow 0\le \frac{x}{2}<1 \Rightarrow \left[\frac{x}{2}\right]=0 \Rightarrow y=1$$

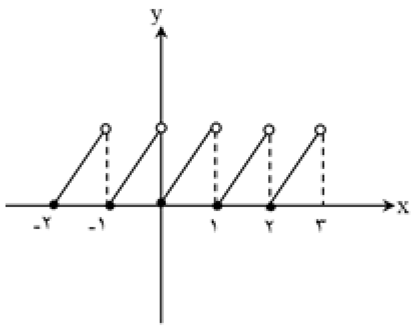
$$2\le x<4 \Rightarrow 1\le \frac{x}{2}<2 \Rightarrow \left[\frac{x}{2}\right]=1 \Rightarrow y=2(1)+1=2+1=3$$

$$4\le x<6 \Rightarrow 2\le \frac{x}{2}<3 \Rightarrow \left[\frac{x}{2}\right]=2 \Rightarrow y=2(2)+1=4+1=5$$

پس نمودار تابع از چهار پاره خط مساوی به طول ۲ تشکیل‌شده است.

۳۰ **گزینه ۴**

برای رسم نمودار تابع، محدودهٔ اولیهٔ x را به پنج زیربازهٔ زیر تقسیم می کنیم:



$$-۲ \le x < -۱, -۱ \le x < ۰, ۰ \le x < ۱, \ ۱ \le x < ۲, ۲ \le x < ۳$$
$$-۲ \le x < -۱ \Rightarrow [x] = -۲ \Rightarrow y = x - (-۲) = x + ۲$$
$$-۱ \le x < ۰ \Rightarrow [x] = -۱ \Rightarrow y = x - (-۱) = x + ۱$$
$$۰ \le x < ۱ \Rightarrow [x] = ۰ \Rightarrow y = x$$
$$۱ \le x < ۲ \Rightarrow [x] = ۱ \Rightarrow y = x - (۱) = x - ۱$$
$$۲ \le x < ۳ \Rightarrow [x] = ۲ \Rightarrow y = x - (۲) = x - ۲$$

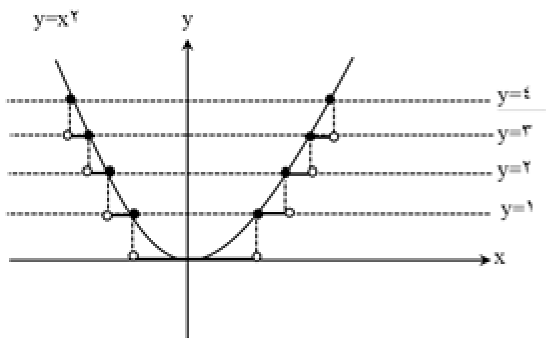
در این بازه تابع از پنج پاره خط به اندازهٔ $\sqrt{۲}$ تشکیل‌شده است. پس دوتایی مرتب (n , L) به صورت $(۵ , \sqrt{۲})$ می شود.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

۳۱ **گزینه ۴**

اول نمودار تابع $y = x^۲$ را در بازهٔ $(-۲ , ۲)$ رسم می کنیم.

برای به دست آوردن نمودار تابع $y = [x^۲]$ از روی نمودار تابع $y = x^۲$ در بازهٔ $(-۲ , ۲)$ خطوطی به موازات محور x ها رسم کرده و قسمت هـایی از نمودار که بین دو خط متوالی $y = k$ و $y = k + ۱$ $(k \in \mathbb{Z})$ قرار می گیرنـد را بر روی خط $y = k$ تصویر می کنیم. درنهـایت نقاط تلاقی خط و نمودار توپر خواهد شد.



با توجه به شکل، نمودار تابع $y = [x^۲]$ در بازهٔ $x \in (-۲ , ۲)$ از هفت پاره خط تشکیل‌شده است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۳۲ **گزینه ۲**

ابتدا توجه کنید که $\sqrt{۳} \approx ۱/۷$، پس:

$$f(x) = x^{۲} - ۲[x] \Rightarrow f(\sqrt{۳}) = (\sqrt{۳})^{۲} - ۲[\sqrt{۳}] = ۳ - ۲ \times ۱ = ۱ \Rightarrow -\frac{۱}{۲}f(\sqrt{۳}) = -\frac{۱}{۲} \times ۱ = -۰/۵$$

$$\Rightarrow f(-\frac{۱}{۲}f(\sqrt{۳})) = (-۰/۵)^{۲} - ۲[-۰/۵] = ۰/۲۵ - ۲(-۱) = ۲/۲۵$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

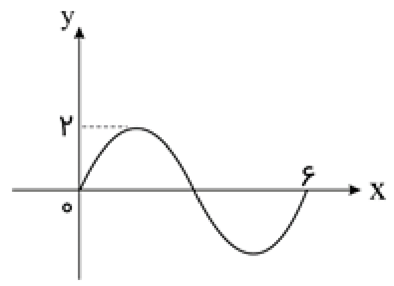
۱ حاصل عبارت $\dfrac{\cos ۲۸۵^\circ - \sin ۲۵۵^\circ}{\sin ۵۲۵^\circ - \sin ۱۰۵^\circ}$ ، با فرض $\tan ۱۵^\circ = ۰/۲۸$، کدام است؟

۱) $-\frac{۱۶}{۹}$　　۲) $-\frac{۹}{۱۶}$

۳) $\frac{۹}{۱۶}$　　۴) $\frac{۱۶}{۹}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

۲ شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $y = a\sin(b\pi x)$ است. $a + b$ کدام است؟



۱) $\frac{۴}{۳}$

۲) $\frac{۵}{۳}$

۳) $\frac{۷}{۳}$

۴) $\frac{۸}{۳}$

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۵ ۱۳۹۵
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳
قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۸ ۱۳۹۴

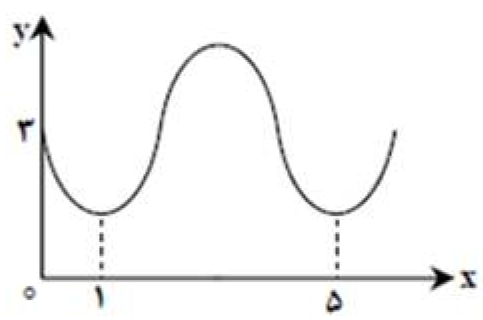
۳ حاصل عبارت $\dfrac{\sin ۲۵۰^\circ + \sin ۷۰۰^\circ}{\cos ۵۶۰^\circ - \cos ۱۱۰^\circ}$ ، با فرض $\tan ۲۰^\circ = ۰/۴$، کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۴}$　　۲) $\frac{۳}{۴}$

۳) $\frac{۷}{۳}$　　۴) $\frac{۵}{۸}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

۴ شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $y = a + \sin(b\pi x)$ می‌باشد. مقدار y در نقطهٔ $x = \frac{۲۵}{۳}$ کدام است؟



۱) ۲

۲) ۲/۵

۳) ۳

۴) ۳/۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۵ مساحت مثلث ABC برابر ۱۶ واحد مربع است. اگر $b = ۸$ و $c = ۵$ باشد، اندازهٔ ضلع متوسط a کدام است؟

۱) $\sqrt{۳۹}$　　۲) $\sqrt{۴۱}$

۳) $۳\sqrt{۵}$　　۴) $۵\sqrt{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

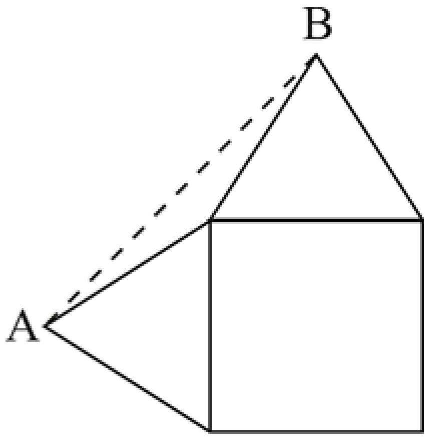
۶ در مثلثی یکی از زاویه‌ها ۶۰ درجه و ضلع مقابل به این زاویه $۳\sqrt{۷}$ واحد است. اگر ضلع دیگر این مثلث ۹ واحد باشد، اندازهٔ ضلع سوم کدام است؟

۱) ۶ و ۳
۲) ۷ و ۴
۳) $۴\sqrt{۳}$ و $۲\sqrt{۳}$
۴) $۵\sqrt{۲}$ و $۳\sqrt{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

۷ روی دو ضلع مجاور مربعی به ضلع ۲ واحد، مثلث‌های متساوی‌الاضلاع ساخته شده است. فاصلهٔ AB چند واحد است؟

۱) $۱ + ۲\sqrt{۳}$
۲) $۳ + \sqrt{۳}$
۳) $۳ + \sqrt{۲}$
۴) $\sqrt{۶} + \sqrt{۲}$



کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

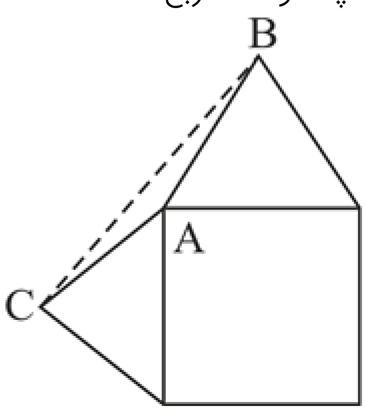
۸ اندازهٔ دو قطر از متوازی‌الاضلاع ۱۲ و $۸\sqrt{۳}$ واحد است. این دو قطر با زاویهٔ ۶۰ درجه متقاطع هستند. مساحت این متوازی‌الاضلاع کدام است؟

۱) ۴۸
۲) ۵۴
۳) ۶۴
۴) ۷۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۹ بر روی دو ضلع مجاور مربعی به ضلع ۲ واحد، مثلث‌های متساوی‌الاضلاع ساخته شده است. مساحت مثلث ABC، چند واحد مربع است؟

۱) $\sqrt{۳} - ۱$
۲) $\frac{۱}{۲}\sqrt{۳}$
۳) ۱
۴) $\sqrt{۳}$



کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۱۰ اگر α زاویهٔ منفرجه و $sin\alpha = \frac{۳}{۵}$ باشد، مقدار $tan\left(\frac{\pi}{۴} + \alpha\right)$ کدام است؟

۱) -۷
۲) $\frac{-۱}{۷}$
۳) $\frac{۱}{۷}$
۴) ۷

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

۱۱ خلاصه شدهٔ $sin\left(\frac{\pi}{۲}+\alpha\right)sin(\pi+\alpha)-sin(\pi-\alpha)cos(-\alpha)$ کدام است؟

۱) $-sin۲\alpha$
۲) $sin۲\alpha$
۳) $cos۲\alpha$
۴) صفر

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۲

۱۲ اگر $۱=tan\frac{۲\pi}{۳}sin\left(\frac{۳\pi}{۲}-x\right)$ باشد، مقدار $cos۲x$ کدام است؟

۱) $\frac{-۲}{۳}$
۲) $\frac{-۱}{۳}$
۳) $\frac{۱}{۳}$
۴) $\frac{۲}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

۱۳ اگر $tan\beta=\frac{۱}{۲}$ و $\alpha-\beta=\frac{\pi}{۴}$ باشند، مقدار $sin۲\alpha$، کدام است؟

۱) ۰/۴۵
۲) ۰/۶
۳) ۰/۷۵
۴) ۰/۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

۱۴ اگر $\frac{sin\,\alpha}{۱+cos\,\alpha}=\frac{۱}{۲}$ باشد، مقدار $tan(\frac{\pi}{۲}+\frac{\alpha}{۲})$، کدام است؟

۱) -۲
۲) $-\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۱۵ اگر $cos(x+\frac{\pi}{۳})+cos(x-\frac{\pi}{۳})=\frac{۲}{۳}$ باشد، مقدار $cos\,۲x$ کدام است؟

۱) $-\frac{۲}{۹}$
۲) $-\frac{۱}{۹}$
۳) $\frac{۱}{۹}$
۴) $\frac{۲}{۹}$

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۵ ۱۳۹۵
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۱۶ اگر $tan\,\frac{x}{۲}-cot\,\frac{x}{۲}=۱$ باشد، مقدار $tan\,۲x$، کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۲}$
۲) $\frac{۳}{۴}$
۳) $\frac{۴}{۳}$
۴) $\frac{۳}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

۱۷ اگر $\sin\alpha - \cos\alpha = \frac{۱}{۲}$ باشد، مقدار $\cos(\frac{۳\pi}{۲} - ۲\alpha)$ کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۴}$ ۲) $-\frac{۳}{۸}$

۳) $\frac{۳}{۸}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۱۸ اگر $\tan\alpha = ۲$ و $\tan\beta = \frac{۱}{۳}$ باشد، مقدار $\tan(۲\alpha - \beta)$ کدام است؟

۱) -۳ ۲) -۲

۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۱۹ اگر $\tan x = \frac{۴}{۳}$ باشد، مقدار $\tan\frac{x}{۲} - \cot\frac{x}{۲}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۴}$ ۲) $-\frac{۳}{۲}$

۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

۲۰ اگر $\cos\alpha = \frac{\sqrt{۷}}{۳}$ و انتهای کمان α در ربع چهارم باشد، مقدار $\cos(\frac{\pi}{۴} + \alpha) - \cos(\frac{\pi}{۴} - \alpha)$، کدام است؟

۱) $-\frac{۲}{۳}$ ۲) $-\frac{۱}{۳}$

۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۲۱ نمودار تابع $y = ۳\sin\left(\frac{\pi}{۴} - ۲x\right)$، روی بازهٔ $\left[-\pi , \frac{۳\pi}{۲}\right]$ در چند نقطه محور xها را قطع می کند؟

۱) ۲ ۲) ۳

۳) ۴ ۴) ۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۲۲ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $(\sin x - \tan x)\tan\left(\frac{۳\pi}{۲} - x\right) = \cos\frac{۴\pi}{۳}$، کدام است؟

۱) $k\pi - \frac{\pi}{۶}$ ۲) $k\pi + \frac{\pi}{۳}$

۳) $۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$ ۴) $۲k\pi \pm \frac{\pi}{۶}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

۲۳ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $sin(x+\pi)\,cos(\frac{\pi}{۲}+x)-۲\,sin(\pi-x)+۱=۰$، کدام است؟

۱) $۲k\pi-\frac{\pi}{۲}$
۲) $۲k\pi+\frac{\pi}{۶}$
۳) $۲k\pi+\frac{\pi}{۲}$
۴) $۲k\pi\pm\frac{\pi}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۲۴ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $۲cos^۲x-cos\,x-۳=۰$، کدام است؟

۱) $k\pi$
۲) $۲k\pi+\pi$
۳) $۲k\pi-\frac{\pi}{۲}$
۴) $k\pi+\frac{\pi}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۱

۲۵ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $۲sin^۲x=۳\,cos\,x$ به کدام صورت است؟

۱) $k\pi\pm\frac{\pi}{۶}$
۲) $k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$
۳) $۲k\pi\pm\frac{\pi}{۶}$
۴) $۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

۲۶ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $۲\,sin(\pi-x)\,cos\left(\frac{۳\pi}{۲}+x\right)+۳\,cot\,x\,sin(\pi+x)=۰$، کدام است؟

۱) $۲k\pi+\frac{\pi}{۳}$
۲) $۲k\pi+\frac{۲\pi}{۳}$
۳) $۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$
۴) $۲k\pi\pm\frac{۲\pi}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

۲۷ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $cos^۲x+۳\,sin\left(\frac{\pi}{۲}+x\right)+۲=۰$ به کدام صورت است؟

۱) $k\pi$
۲) $۲k\pi$
۳) $\frac{k\pi}{۲}$
۴) $(۲k+۱)\pi$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

۲۸ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $cos\,۳x\,sin(۳\pi-x)-sin\,۳x\,cos(\pi+x)=cos\,\frac{۳\pi}{۲}$، کدام است؟

۱) $\frac{k\pi}{۴}$
۲) $\frac{k\pi}{۲}$
۳) $k\pi+\frac{\pi}{۴}$
۴) $k\pi\pm\frac{\pi}{۴}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

۲۹ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sqrt{۲}\,sin\left(\frac{\pi}{۴}-x\right)=۱+sin\left(\frac{۵\pi}{۲}+x\right)$ کدام است؟

۱) $k\pi+\frac{\pi}{۲}$
۲) $۲k\pi-\frac{\pi}{۴}$
۳) $۲k\pi-\frac{\pi}{۲}$
۴) $۲k\pi+\frac{\pi}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵

۳۰ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $۲\tan x \cdot \cos^۲ x = ۱$ به کدام صورت است؟

۱) $k\pi - \frac{\pi}{۴}$
۲) $k\pi + \frac{\pi}{۴}$
۳) $۲k\pi - \frac{\pi}{۴}$
۴) $۲k\pi + \frac{\pi}{۴}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

۳۱ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin^۴ x - \cos^۴ x = \sin^۲ \frac{۵\pi}{۴}$، به کدام صورت است؟

۱) $۲k\pi \pm \frac{\pi}{۶}$
۲) $۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$
۳) $k\pi \pm \frac{\pi}{۶}$
۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

۳۲ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin^۲ x - \cos^۲ x = \sin\left(\frac{۳\pi}{۲} + x\right)$، به کدام صورت است؟

۱) $\frac{k\pi}{۳}$
۲) $\frac{۲k\pi}{۳}$
۳) $۲k\pi + \frac{\pi}{۳}$
۴) $۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

۳۳ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\tan\left(x + \frac{\pi}{۴}\right) + \tan\left(x - \frac{\pi}{۴}\right) = ۲\sqrt{۳}$، به کدام صورت است؟

۱) $\frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۶}$
۲) $\frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۳}$
۳) $k\pi + \frac{\pi}{۶}$
۴) $k\pi + \frac{\pi}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۹

۳۴ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sqrt{۳} = \frac{۲\tan x}{۱-\tan^۲ x}$، به کدام صورت است؟

۱) $\frac{k\pi}{۲} - \frac{\pi}{۶}$
۲) $\frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۶}$
۳) $k\pi + \frac{\pi}{۶}$
۴) $k\pi - \frac{\pi}{۶}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۳۵ در معادلهٔ مثلثاتی $\sin ۲x(\sin x + \cos x) = \cos ۲x(\cos x - \sin x)$ مجموع تمام جواب ها در بازهٔ $[۰ , \pi]$ کدام است؟

۱) $\frac{۳\pi}{۴}$
۲) $\frac{۵\pi}{۴}$
۳) $\frac{۳\pi}{۲}$
۴) $\frac{۷\pi}{۴}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۳۶ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $۲\cos^۲ x + ۲\sin x \cos x = ۱$، به کدام صورت است؟

۱) $\frac{k\pi}{۲} - \frac{\pi}{۸}$
۲) $\frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۸}$
۳) $k\pi - \frac{\pi}{۸}$
۴) $k\pi + \frac{\pi}{۸}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

۳۷ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\cos(x+\frac{\pi}{4})\cos(x-\frac{\pi}{4})=\frac{1}{4}$، کدام است؟

۱) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$
۲) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$
۳) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$
۴) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۳۸ مجموع تمام جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin 5x + \sin 4x = 1 + \cos \pi$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ کدام است؟

۱) 8π
۲) 9π
۳) 10π
۴) 11π

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۳ ۱۳۹۴
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۳۹ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\cos 3x + \cos x = 0$، با شرط $\cos x \neq 0$ کدام است؟

۱) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$
۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$
۳) $k\pi - \frac{\pi}{4}$
۴) $k\pi + \frac{\pi}{4}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

۴۰ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $2\sin^2 x + 3\cos x = 0$، کدام است؟

۱) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$
۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$
۳) $2k\pi \pm \frac{5\pi}{6}$
۴) $k\pi - \frac{\pi}{3}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۴۱ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\frac{\sin 3x}{\cos(\frac{3\pi}{2}+x)} = 1$ به کدام صورت است؟ $(k \in \mathbb{Z})$

۱) $k\pi + \frac{\pi}{4}$
۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$
۳) $2k\pi \pm \frac{3\pi}{4}$
۴) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۴۲ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\cos 2x + 2\cos^2 x = 0$ کدام است؟

۱) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$
۲) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$
۳) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$
۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

۴۳ مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin ۲x + \cos(\frac{\pi}{۲} - x) = ۰$ در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۴\pi}{۳}$

۲) ۴π

۳) $\frac{۹\pi}{۲}$

۴) ۵π

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۱ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

گام اول

با توجه به اینکه در صورت سؤال مقدار $tan\ ۱۵^\circ$ داده شده است، سعی می کنیم تمام زوایا را بر حسب زاویهٔ ۱۵° به دست آوریم.

گام دوم

$$A = \frac{cos\ ۲۸۵^\circ - sin\ ۲۵۵^\circ}{sin\ ۵۲۵^\circ - sin\ ۱۰۵^\circ} = \frac{cos(۲۷۰^\circ + ۱۵^\circ) - sin(۲۷۰^\circ - ۱۵^\circ)}{sin(۵۴۰^\circ - ۱۵^\circ) - sin(۹۰^\circ + ۱۵^\circ)}$$
$$= \frac{sin\ ۱۵^\circ - (-cos\ ۱۵^\circ)}{sin\ ۱۵^\circ - cos\ ۱۵^\circ} = \frac{sin\ ۱۵^\circ + cos\ ۱۵^\circ}{sin\ ۱۵^\circ - cos\ ۱۵^\circ}$$

برای این که در کسر داده شده $tan\ ۱۵^\circ$ ایجاد شود، صورت و مخرج کسر را بر $cos\ ۱۵^\circ$ تقسیم می کنیم. بنابراین داریم:

$$A = \frac{\frac{sin\ ۱۵^\circ + cos\ ۱۵^\circ}{cos\ ۱۵^\circ}}{\frac{sin\ ۱۵^\circ - cos\ ۱۵^\circ}{cos\ ۱۵^\circ}} = \frac{\frac{sin\ ۱۵^\circ}{cos\ ۱۵^\circ} + \frac{cos\ ۱۵^\circ}{cos\ ۱۵^\circ}}{\frac{sin\ ۱۵^\circ}{cos\ ۱۵^\circ} - \frac{cos\ ۱۵^\circ}{cos\ ۱۵^\circ}}$$
$$= \frac{tan\ ۱۵^\circ + ۱}{tan\ ۱۵^\circ - ۱} = \frac{۰/۲۸ + ۱}{۰/۲۸ - ۱} = \frac{۱/۲۸}{-۰/۷۲} = -\frac{۱۲۸}{۷۲} = -\frac{۱۶}{۹}$$

۲ گزینه ۳

دورهٔ تناوب تابع به معادلهٔ $y = A\,sin(Bx + D) + E$ برابر است با $\frac{۲\pi}{|B|}$، پس:

$$y = a\,sin(b\pi x) \Rightarrow T = \frac{۲\pi}{|b\pi|} = \frac{۲}{|b|} \quad (*)$$

همچنین با توجه به نمودار $T = ۶$ است، پس:

$$\xrightarrow{(*)} \frac{۲}{|b|} = ۶ \Rightarrow |b| = \frac{۱}{۳} \quad (۱)$$

با فرض $b = \frac{۱}{۳}$ و اگر A عددی مثبت باشد، آنگاه بیشترین مقدار تابع به معادلهٔ $y = A\,sin(Bx + D) + E$، برابر با $A + E$ است، پس:

$$y = a\,sin(b\pi x) \Rightarrow Max(y) = a \quad (**)$$

همچنین با توجه به نمودار $Max(y) = ۲$، پس:

$$\xrightarrow{(**)} a = ۲ \quad (۲)$$

بنابراین:

$$(۱),(۲) \Rightarrow a + b = ۲ + \frac{۱}{۳} = \frac{۷}{۳}$$

توجه: مقادیر a و b می‌توانند هر دو منفی باشند و جواب $a + b = -\frac{۷}{۳}$ نیز قابل قبول است که در گزینه‌ها وجود ندارد.

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۵ ۱۳۹۵
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳
قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۸ ۱۳۹۴

۳ **گزینه ۳**

در فرض تست مقدار $\tan 20^\circ$ به ما داده شده است، پس ابتدا تمامی زوایا را به‌صورت جمع یا تفاضل کمان‌های معروف و زاویهٔ 20° می‌نویسیم. عبارت نهایی را برحسب $\tan 20^\circ$ به دست آورده و حاصل عددی آن را محاسبه می‌کنیم.

$$A=\frac{\sin 250^\circ+\sin 700^\circ}{\cos 560^\circ-\cos 110^\circ}=\frac{\sin(270^\circ-20^\circ)+\sin(720^\circ-20^\circ)}{\cos(540^\circ+20^\circ)-\cos(90^\circ+20^\circ)}=$$

$$\frac{-\cos 20^\circ+\sin(-20^\circ)}{\cos(180^\circ+20^\circ)-(-\sin 20^\circ)}=\frac{-\cos 20^\circ-\sin 20^\circ}{-\cos 20^\circ+\sin 20^\circ}$$

$$\xrightarrow{\div \cos 20^\circ} A=\frac{\frac{-\cos 20^\circ}{\cos 20^\circ}-\frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}}{\frac{-\cos 20^\circ}{\cos 20^\circ}+\frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}}=\frac{-1-\tan 20^\circ}{-1+\tan 20^\circ}$$

$$=\frac{-1-0/4}{-1+0/4}=\frac{-1/4}{-0/6}=\frac{7}{3}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

۴ **گزینه ۲**

در $x=0$ مقدار تابع برابر است با $y=3$؛ لذا با جایگذاری در تابع خواهیم داشت $a=3$. به‌سادگی نتیجه می‌شود که به ازای $x=\frac{25}{3}$ مقدار تابع برابر است با $y=2/5$.

$$T=\frac{2\pi}{|\pi b|}=4\Rightarrow |b|=\frac{1}{2}\ ,\ y=3+\sin(\frac{-\pi}{2}x)$$

$$\xrightarrow{x=\frac{25}{3}} y=3+\sin(\frac{-25}{6}\pi)\Rightarrow y=3+\sin(-4\pi-\frac{\pi}{6})\Rightarrow y=3-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}=2/5$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۵ **گزینه ۲**

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A\Rightarrow 16=\frac{1}{2}\times 8\times 5\times \sin A\Rightarrow \sin A=\frac{4}{5}\Rightarrow \cos A=\frac{3}{5}$$

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A\Rightarrow a^2=64+25-2(8)(5)(\frac{3}{5})=41\Rightarrow a=\sqrt{41}$$

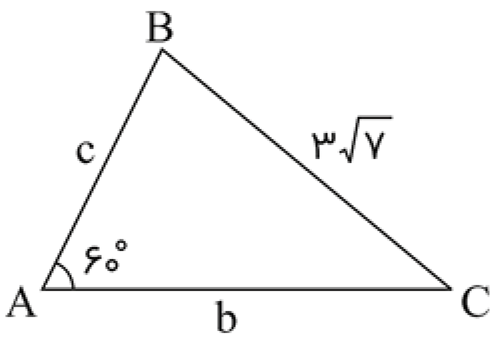
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۶ **گزینه ۱**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

گام اول

بر اساس توضیحات تست یک شکل ساده رسم می‌کنیم:



b یا c باید برابر ۹ واحد باشد. فرض می‌کنیم $b = ۹$ باشد.

گام دوم

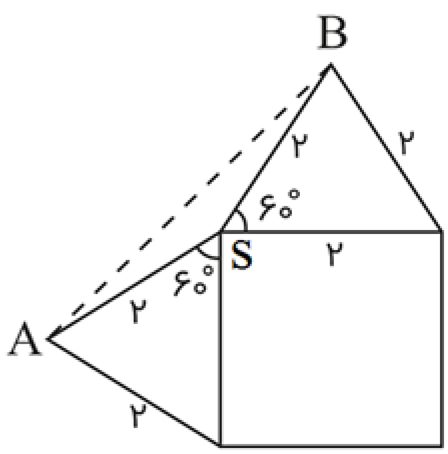
با استفاده از قضیهٔ کسینوس‌ها می‌توان نوشت:

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲bc\cos A \Rightarrow (۳\sqrt{۷})^۲ = ۸۱ + c^۲ - ۱۸c \times \cos ۶۰°$$

$$\Rightarrow ۶۳ = ۸۱ + c^۲ - ۱۸ \times \frac{۱}{۲} \times c \Rightarrow c^۲ - ۹c + ۱۸ = ۰ \Rightarrow (c-۶)(c-۳) = ۰$$

$$\Rightarrow c = ۳ \text{ یا } c = ۶$$

۷ **گزینه ۴**



$$A\hat{S}B = ۳۶۰° - (۹۰° + ۶۰° + ۶۰°) = ۳۶۰° - ۲۱۰° = ۱۵۰°$$

با استفاده از قضیهٔ کسینوس‌ها اندازهٔ AB را حساب می‌کنیم:

$$AB^۲ = SB^۲ + SA^۲ - ۲SB \times SA \times \cos ۱۵۰°$$

$$= ۴ + ۴ - ۲ \times ۲ \times ۲ \times (-\frac{\sqrt{۳}}{۲}) = ۸ + ۴\sqrt{۳} \Rightarrow AB = \sqrt{۸ + ۴\sqrt{۳}}$$

$$= \sqrt{۶ + ۲\sqrt{۶} \times \sqrt{۲} + ۲} = \sqrt{(\sqrt{۶} + \sqrt{۲})^۲} = \sqrt{۶} + \sqrt{۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

۸ **گزینه ۴**

نکته: در مثلث ABC با اضلاع a، b و c، اگر زاویهٔ بین اضلاع a و b برابر با α باشد، مساحت مثلث برابر است با:

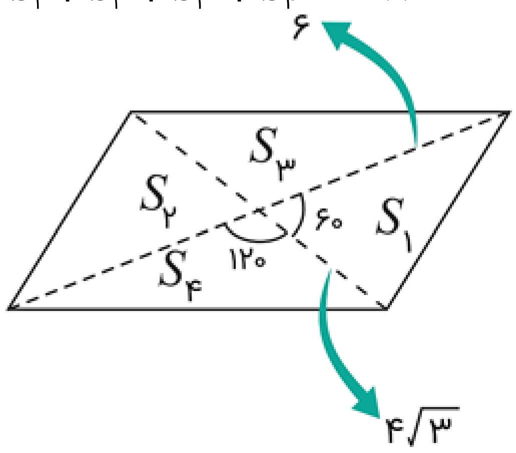
$$S = \frac{1}{2} \times a \times b \times \sin\alpha$$

بااستفاده از نکتهٔ بالا داریم:

$$S_1 = S_2 \Rightarrow \frac{1}{2} \times 6 \times 4\sqrt{3} \times \sin 60^\circ = 18$$

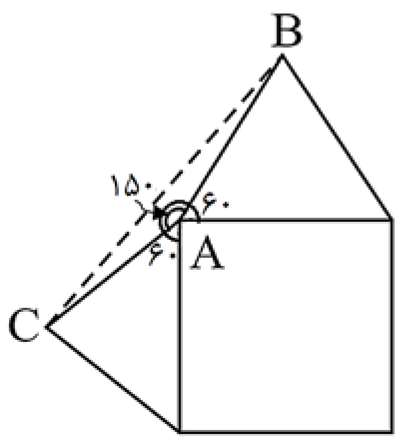
$$S_3 = S_4 \Rightarrow \frac{1}{2} \times 6 \times 4\sqrt{3} \times \sin(120) = 18$$

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 4 \times 18 = 72$$



کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۹ **گزینه ۳**



$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin 150^\circ = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۱۰ **گزینه ۳**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

گام اول

الف) $sin\alpha$ را داریم، بااستفاده از رابطهٔ $sin^{۲}\alpha + cos^{۲}\alpha = ۱$ می توانیم $cos\alpha$ را محاسبه کنیم.

ب) α زاویه ای منفرجه است پس در ناحیهٔ دوم مثلثاتی قرار داشته و مقدار $cos\alpha$ منفی است. در محاسبهٔ $cos\alpha$ از روی $sin\alpha$ به این نکته توجه داشته باشید.

ج) با داشتن $sin\alpha$ و $cos\alpha$ مقدار $tan\alpha$ را محاسبه کرده و در نهایت $tan(\frac{\pi}{۴} + \alpha)$ را به دست می آوریم.

گام دوم

ابتدا $cos\alpha$ و به دنبال آن $tan\alpha$ را به دست می آوریم:

$$sin^{۲}\alpha + cos^{۲}\alpha = ۱ \Rightarrow (\frac{۳}{۵})^{۲} + cos^{۲}\alpha = ۱ \Rightarrow \frac{۹}{۲۵} + cos^{۲}\alpha = ۱$$

$$\Rightarrow cos^{۲}\alpha = ۱ - \frac{۹}{۲۵} = \frac{۱۶}{۲۵} \xrightarrow{cos\,\alpha < ۰} cos\,\alpha = -\frac{۴}{۵}$$

$$tan\,\alpha = \frac{sin\,\alpha}{cos\,\alpha} = \frac{\frac{۳}{۵}}{-\frac{۴}{۵}} = -\frac{۳}{۴}$$

حالا حاصل $tan(\frac{\pi}{۴} + \alpha)$ را محاسبه می کنیم:

$$tan(\frac{\pi}{۴} + \alpha) = \frac{tan\frac{\pi}{۴} + tan\alpha}{۱ - tan\frac{\pi}{۴}tan\alpha} = \frac{۱ - \frac{۳}{۴}}{۱ + \frac{۳}{۴}} = \frac{\frac{۱}{۴}}{\frac{۷}{۴}} = \frac{۱}{۷}$$

۱۱ **گزینه ۱**

ابتدا با استفاده از اتحادهای مثلثاتی عبارت داده شده را خلاصه کرده و سپس با استفاده از فرمول کمان های ۲α، حاصل تست را به دست می آوریم.

$$sin(\frac{\pi}{۲} + \alpha)\,sin(\pi + \alpha) - sin(\pi - \alpha)\,cos(-\alpha) = cos\,\alpha(-sin\,\alpha) - sin\,\alpha\,cos\,\alpha =$$

$$-sin\,\alpha\,cos\,\alpha - sin\,\alpha\,cos\,\alpha = -۲\,sin\,\alpha\,cos\,\alpha = -sin\,۲\alpha$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۲

۱۲ **گزینه ۲**

می دانیم $tan\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$ و $sin(\frac{3\pi}{2} - x) = -cosx$ است. از رابطهٔ داده شده مقدار $cosx$ را حساب کرده و با استفاده از فرمول $cos2x = 2cos^2x - 1$، حاصل $cos2x$ را محاسبه می کنیم.

$$tan\frac{2\pi}{3}sin(\frac{3\pi}{2} - x) = 1 \Rightarrow (-\sqrt{3})(-cosx) = 1 \Rightarrow \sqrt{3}cosx = 1 \Rightarrow cosx = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

حالا حاصل $cos2x$ را محاسبه می کنیم:

$$cos2x = 2cos^2x - 1 = 2(\frac{1}{\sqrt{3}})^2 - 1 = 2(\frac{1}{3}) - 1 = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

۱۳ **گزینه ۲**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

گام اول

اگر $\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$ باشد، می توان نتیجه گرفت $\alpha = \beta + \frac{\pi}{4}$ است. با معلوم بودن مقدار $tan\beta$، حاصل $tan\alpha$ را به دست می آوریم.

گام دوم

$$\alpha = \beta + \frac{\pi}{4} \Rightarrow tan\alpha = tan(\beta + \frac{\pi}{4}) \Rightarrow tan\alpha = \frac{tan\beta + tan\frac{\pi}{4}}{1 - tan\beta tan\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{1}{2} + 1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = 3$$

پس حاصل $sin2\alpha$ برابر است با:

$$sin2\alpha = \frac{2tan\alpha}{1 + tan^2\alpha} = \frac{2 \times 3}{1 + (3)^2} = \frac{6}{10} = 0/6$$

۱۴ **گزینه ۱**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

گام اول

می‌دانیم: $tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) = -cot\frac{\alpha}{2}$

گام دوم

با استفاده از فرمول‌های کمان 2α، رابطهٔ $\frac{sin\,\alpha}{1+cos\,\alpha} = \frac{1}{2}$ را ساده کرده و مقدار خواسته‌شده را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{sin\,\alpha}{1 + cos\,\alpha} = \frac{2\,sin\frac{\alpha}{2}cos\frac{\alpha}{2}}{1 + 2cos^2\frac{\alpha}{2} - 1} = \frac{2\,sin\frac{\alpha}{2}cos\frac{\alpha}{2}}{2cos^2\frac{\alpha}{2}} = tan\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow cot\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{tan\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$\Rightarrow tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) = -cot\frac{\alpha}{2} = -2$$

۱۵ گزینه ۲

از فرمول $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$ استفاده می‌کنیم.

$$\cos(x + \frac{\pi}{3}) + \cos(x - \frac{\pi}{3}) = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \cos x \cos\frac{\pi}{3} - \cancel{\sin x \sin\frac{\pi}{3}} + \cos x \cos\frac{\pi}{3} + \cancel{\sin x \sin\frac{\pi}{3}} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 2\cos x \cos\frac{\pi}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow 2\cos x \times \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \Rightarrow \cos x = \frac{2}{3}$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2(\frac{2}{3})^2 - 1 = 2 \times \frac{4}{9} - 1 = \frac{8}{9} - 1 = \frac{-1}{9}$$

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۵ ۱۳۹۵
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۱۶ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

گام اول

الف) با در نظر گرفتن $\cot\frac{x}{2} = \frac{1}{\tan\frac{x}{2}}$ معادله را برحسب $\tan\frac{x}{2}$ به دست می‌آوریم. معادله به یک معادلهٔ درجه‌دو برحسب $\tan\frac{x}{2}$ تبدیل و با حل معادلهٔ درجه‌دو، حاصل $\tan\frac{x}{2}$ را تعیین می‌کنیم.

ب) با استفاده از فرمول کمان $\tan 2x$، ابتدا $\tan x$ و سپس $\tan 2x$ را محاسبه می‌کنیم.

گام دوم

$$\tan\frac{x}{2} - \cot\frac{x}{2} = 1 \Rightarrow \tan\frac{x}{2} - \frac{1}{\tan\frac{x}{2}} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\tan^2\frac{x}{2} - 1}{\tan\frac{x}{2}} = 1 \Rightarrow \tan^2\frac{x}{2} - 1 = \tan\frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow \tan^2\frac{x}{2} - \tan\frac{x}{2} - 1 = 0 \Rightarrow \tan\frac{x}{2} = \begin{cases} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

محاسبهٔ $\tan x$:

$$\tan x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1 - \tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2(1 \pm \sqrt{5})^2}{1 - (\frac{1\pm\sqrt{5}}{2})^2} = -2$$

محاسبهٔ $\tan 2x$:

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{2(-2)}{1 - (-2)^2} = \frac{-4}{1-4} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$$

۱۷ گزینه ۱

$$cos(\frac{۳\pi}{۲} - ۲\alpha) = -sin\, ۲\alpha$$

$$sin\,\alpha - cos\,\alpha = \frac{۱}{۲} \xrightarrow{\text{به توان دو می‌رسانیم}} sin^۲\alpha + cos^۲\alpha - ۲\,sin\,\alpha\,cos\,\alpha = \frac{۱}{۴}$$

$$\xrightarrow[۲\,sin\,\alpha\,cos\,\alpha = sin\,۲\alpha]{sin^۲\alpha + cos^۲\alpha = ۱} -sin\,۲\alpha = -\frac{۳}{۴} \xrightarrow{cos(\frac{۳\pi}{۲} - ۲\alpha) = -sin\,۲\alpha} cos(\frac{۳\pi}{۲} - ۲\alpha) = -\frac{۳}{۴}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۱۸ گزینه ۱

$$tan\,\alpha = ۲\,,\ tan\,\beta = \frac{۱}{۳}$$

$$tan\,۲\alpha = \frac{۲\,tan\,\alpha}{۱ - tan^۲\alpha} = \frac{۲ \times ۲}{۱ - ۲^۲} = -\frac{۴}{۳}$$

$$tan(۲\alpha - \beta) = \frac{tan\,۲\alpha - tan\,\beta}{۱ + tan\,۲\alpha\,tan\,\beta} = \frac{\frac{-۴}{۳} - \frac{۱}{۳}}{۱ - \frac{۴}{۳} \times \frac{۱}{۳}} = \frac{\frac{-۵}{۳}}{\frac{۵}{۹}} = -۳$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۱۹ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

گام اول

از فرمول نصف کمان $cot\,\frac{\alpha}{۲} - tan\,\frac{\alpha}{۲} = ۲\,cot\,\alpha$ استفاده می‌کنیم.

گام دوم

$$tan\,\frac{x}{۲} - cot\,\frac{x}{۲} = -۲\,cot\,x = -۲ \times \frac{۱}{tan\,x} = -۲ \times \frac{۳}{۴} = -\frac{۳}{۲}$$

۲۰ گزینه ۱

نکته:

$$۱)\ \sin x - \cos x = \sqrt{۲}\sin(x - \frac{\pi}{۴})$$

$$۲)\ \cos(\frac{\pi}{۲} - x) = \sin x$$

$$\cos(\frac{\pi}{۴} - \alpha) - \cos(\frac{\pi}{۴} + \alpha) = \cos(\frac{\pi}{۲} - (\frac{\pi}{۴} + \alpha)) - \cos(\frac{\pi}{۴} + \alpha)$$

$$= \sin(\frac{\pi}{۴} + \alpha) - \cos(\frac{\pi}{۴} + \alpha) = \sqrt{۲}\sin\left((\frac{\pi}{۴} + \alpha) - \frac{\pi}{۴}\right) = \sqrt{۲}\sin(\alpha)\ (*)$$

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{۷}}{۳} \Rightarrow ۱ - \cos^۲\alpha = \sin^۲\alpha \Rightarrow \sin^۲\alpha = ۱ - \frac{۷}{۹} \Rightarrow \sin\alpha = \pm\frac{\sqrt{۲}}{۳}$$

$$\xrightarrow{\text{ربع (ناحیهٔ) چهارم}} \sin\alpha = -\frac{\sqrt{۲}}{۳}$$

$$\xrightarrow{(*)} \sqrt{۲}\sin(\alpha) = \sqrt{۲} \times -\frac{\sqrt{۲}}{۳} = \frac{-۲}{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۲۱ گزینه ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

گام اول

الف) وقتی تعداد نقاط برخورد نمودار یک تابع با محور xها خواسته‌شده است، درواقع باید تعداد ریشه های معادلهٔ $y = ۰$ را تعیین کنیم. پس باید تعداد ریشه های معادلهٔ $y = ۰$ را در بازهٔ $[-\pi, \frac{۳\pi}{۲}]$ به دست آوریم.

ب) معادلهٔ $\sin\alpha = ۰$ یک معادلهٔ خاص بوده و در آن $\alpha = k\pi$ است.

ج) مقادیر k را به نحوی تعیین می کنیم که ریشه های معادله حتماً در بازهٔ $[-\pi, \frac{۳\pi}{۲}]$ قرار بگیرند.

گام دوم

$$y = ۰ \Rightarrow ۳\sin(\frac{\pi}{۴} - ۲x) = ۰ \Rightarrow \sin(\frac{\pi}{۴} - ۲x) = ۰ \xrightarrow[\alpha = k\pi]{\sin\ \alpha = ۰} \frac{\pi}{۴} - ۲x = k\pi \Rightarrow ۲x = \frac{\pi}{۴} - k\pi$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{۸} - \frac{k\pi}{۲} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$k = -۲ \Rightarrow x = \frac{\pi}{۸} + \pi = \frac{۹\pi}{۸}$$

$$k = -۱ \Rightarrow x = \frac{\pi}{۸} + \frac{\pi}{۲} = \frac{۵\pi}{۸}$$

$$k = ۰ \Rightarrow x = \frac{\pi}{۸}$$

$$k = ۱ \Rightarrow x = \frac{\pi}{۸} - \frac{\pi}{۲} = -\frac{۳\pi}{۸}$$

$$k = ۲ \Rightarrow x = \frac{\pi}{۸} - \pi = -\frac{۷\pi}{۸}$$

توجه داشته باشید که به ازای $k \geq ۳$ یا $k \leq -۳$ مقادیری که برای x به دست می آید در بازهٔ $[-\pi , \frac{۳\pi}{۲}]$ نیست. پس پنج مقدار برای x به دست آمده و نمودار تابع در پنج نقطه محور xها را قطع می کند.

۲۲ گزینه ۳

برای حل معادلهٔ مثلثاتی از روابط زیر کمک می گیریم:

$$\tan(\frac{3\pi}{2}-x)=\cot x$$

$$\cos\frac{4\pi}{3}=\cos(\pi+\frac{\pi}{3})=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$$

$$(\sin x-\tan x)\tan(\frac{3\pi}{2}-x)=\cos\frac{4\pi}{3}$$

$$(\sin x-\tan x)\cot x=-\frac{1}{2}\Rightarrow \sin x\cot x-\tan x\cot x=-\frac{1}{2}\Rightarrow \sin x\times\frac{\cos x}{\sin x}-1=-\frac{1}{2}\Rightarrow \cos x-1=-\frac{1}{2}$$

جواب های معادلهٔ $\cos x=\cos\alpha$ از رابطهٔ $x=2k\pi\pm\alpha$ به دست می آید.

$$\cos x=\frac{1}{2}\Rightarrow \cos x=\cos\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

۲۳ گزینه ۳

ظاهر سؤال ممکن است کمی سخت به نظر برسد، ولی با انجام تغییرات زیر حل آن بسیار ساده می شود:

$$\sin(\pi+x)=-\sin x,\cos(\frac{\pi}{2}+x)=-\sin x,\sin(\pi-x)=\sin x$$

$$\sin(\pi+x)\cos(\frac{\pi}{2}+x)-2\sin(\pi-x)+1=0$$

$$\Rightarrow(-\sin x)(-\sin x)-2\sin x+1=0\Rightarrow \sin^2 x-2\sin x+1=0$$

$$\Rightarrow(\sin x-1)^2=0\Rightarrow \sin x-1=0\Rightarrow \sin x=1\Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۲۴ گزینه ۲

ابتدا معادلهٔ مثلثاتی را با استفاده از تجزیه به ساده ترین شکل نوشته و جواب معادله را تعیین می کنیم.

$$2\cos^2 x-\cos x-3=0\Rightarrow(2\cos x-3)(\cos x+1)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2\cos x-3=0\Rightarrow 2\cos x=3\Rightarrow \cos x=\frac{3}{2}\ \text{غ ق ق}\\ \cos x+1=0\Rightarrow \cos x=-1\Rightarrow x=2k\pi+\pi\end{cases}$$

(حواستان باشد معادلات $\sin x=a$ و $\cos x=a$، به ازای $-1\le a\le 1$ جواب دارند. در غیر این صورت غیرقابل‌قبول هستند.)

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۱

۲۵ گزینه ۴

در این گونه سؤال ها ابتدا تمام نسبت های مثلثاتی را به یک نسبت تبدیل می کنیم. با توجه به رابطهٔ $sin^2x = 1 - cos^2x$، معادلهٔ مثلثاتی را برحسب $cos\,x$ مرتب می کنیم.

$$2sin^2x = 3\,cos\,x \Rightarrow 2(1 - cos^2x) = 3\,cos\,x \Rightarrow 2 - 2cos^2x = 3\,cos\,x \Rightarrow 2cos^2x + 3\,cos\,x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (2\,cos\,x - 1)(cos\,x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} cos\,x = \frac{1}{2} \\ cos\,x = -2 \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

معادلهٔ $cos\,x = cos\,\alpha$ دارای جواب $x = 2k\pi \pm \alpha$ است. هم چنین توجه کنید که معادلهٔ $cos\,x = A$ به ازای $A > 1$ و $A < -1$ فاقد جواب است.

پس جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $cos\,x = \frac{1}{2}$ برابر است با:

$$cos\,x = \frac{1}{2} \Rightarrow cos\,x = cos\,\frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

۲۶ گزینه ۳

برای ساده تر شدن معادلهٔ مثلثاتی از روابط زیر استفاده می کنیم:

$$sin(\pi - x) = sin\,x, cos(\frac{3\pi}{2} + x) = sin\,x, sin(\pi + x) = -sin\,x$$

اگر در حل معادلهٔ مثلثاتی دو نسبت مثلثاتی متفاوت داشتیم، آن ها را به یک نسبت تبدیل می کنیم. با استفاده از رابطهٔ $sin^2x = 1 - cos^2x$، معادلهٔ مثلثاتی را برحسب $cos\,x$ بازنویسی می کنیم.

$$2\,sin(\pi - x)\,cos(\frac{3\pi}{2} + x) + 3\,cot\,x\,sin(\pi + x) = 0 \Rightarrow 2\,sin\,x\,sin\,x + 3\,cot\,x(-sin\,x) = 0$$

$$\Rightarrow 2sin^2x - 3\,cos\,x = 0 \xrightarrow{sin^2x = 1 - cos^2x} 2(1 - cos^2x) - 3\,cos\,x = 0 \Rightarrow 2 - 2cos^2x - 3\,cos\,x = 0$$

$$\Rightarrow 2cos^2x + 3\,cos\,x - 2 = 0 \Rightarrow (2\,cos\,x - 1)(cos\,x + 2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} cos\,x = \frac{1}{2} \Rightarrow cos\,x = cos\,\frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \\ cos\,x = -2 \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

۲۷ گزینه ۴

با استفاده از رابطهٔ $sin(\frac{\pi}{2} + x) = cos\,x$ معادلهٔ مثلثاتی را ساده می کنیم و جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی را به دست می آوریم.

$$cos^2x + 3\,sin(\frac{\pi}{2} + x) + 2 = 0 \Rightarrow cos^2x + 3\,cos\,x + 2 = 0$$

$$\Rightarrow (cos\,x + 1)(cos\,x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} cos\,x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi + \pi = (2k + 1)\pi \\ cos\,x = -2 \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

۲۸ گزینه ۱

دانستن روابط زیر به ساده شدن معادلهٔ مثلثاتی کمک بسیاری می کند:

$$\sin(3\pi - x) = \sin x, \cos(\pi + x) = -\cos x, \cos\frac{3\pi}{2} = 0$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos 3x \sin(3\pi - x) - \sin 3x \cos(\pi + x) = \cos\frac{3\pi}{2} \Rightarrow \cos 3x \sin x - \sin 3x(-\cos x) = 0$$

$$\Rightarrow \cos 3x \sin x + \sin 3x \cos x = 0 \Rightarrow \sin(x + 3x) = 0 \Rightarrow \sin 4x = 0$$

$$\xrightarrow{\sin\alpha = 0 \ \Rightarrow \alpha = k\pi} 4x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{4}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

۲۹ گزینه ۳

با استفاده از روابط زیر معادلهٔ مثلثاتی را ساده می کنیم:

$$\sin(\frac{5\pi}{2} + x) = \sin(2\pi + \frac{\pi}{2} + x) = \sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x$$

$$\sin(\frac{\pi}{4} - x) = \sin\frac{\pi}{4}\cos x - \cos\frac{\pi}{4}\sin x$$

$$\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4} - x) = 1 + \sin(\frac{5\pi}{2} + x) \Rightarrow \sqrt{2}(\sin\frac{\pi}{4}\cos x - \cos\frac{\pi}{4}\sin x) = 1 + \cos x$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x) = 1 + \cos x \Rightarrow \cos x - \sin x = 1 + \cos x \Rightarrow \sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵

۳۰ گزینه ۲

با توجه به رابطهٔ $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ معادله را ساده می کنیم. هم چنین می دانیم $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ است.

$$2\tan x\cos^2 x = 1 \Rightarrow 2\frac{\sin x}{\cos x} \times \cos^2 x = 1 \Rightarrow 2\sin x\cos x = 1$$

$$\Rightarrow \sin 2x = 1 \xrightarrow{\sin\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{2}} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \xrightarrow{\div 2} x = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

۳۱ گزینه ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

گام اول

الف) با استفاده از اتحاد مزدوج سمت چپ معادلهٔ مثلثاتی را ساده می کنیم:

$$\sin^4 x-\cos^4 x=(\sin^2 x-\cos^2 x)\underbrace{(\sin^2 x+\cos^2 x)}_{1}=\sin^2 x-\cos^2 x$$

ب) با دانستن رابطهٔ $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$ و $\sin\frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$، معادله را حل کرده و جواب کلی آن را به دست می آوریم.

گام دوم

$$\sin^2 x-\cos^2 x=-(\cos^2 x-\sin^2 x)=-\cos 2x$$

$$\sin^4 x-\cos^4 x=-\cos 2x=\sin^2\frac{5\pi}{4}\xrightarrow{\sin\frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}}-\cos 2x=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\Rightarrow-\cos 2x=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\cos 2x=-\frac{1}{2}\Rightarrow\cos 2x=\cos\frac{2\pi}{3}\Rightarrow 2x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}\xrightarrow{\div 2}x=k\pi\pm\frac{\pi}{3}$$

۳۲ گزینه ۲

برای حل سؤال به دو رابطهٔ زیر توجه کنید:

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=-\cos x\ ,\ \cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$$

$$\sin^2 x-\cos^2 x=\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)\Rightarrow-\cos 2x=-\cos x\Rightarrow\cos 2x=\cos x$$

$$\Rightarrow 2x=2k\pi\pm x\Rightarrow\begin{cases}2x=2k\pi+x\Rightarrow x=2k\pi\\ 2x=2k\pi-x\Rightarrow 3x=2k\pi\Rightarrow x=\frac{2k\pi}{3}\end{cases}$$

جواب کلی که هر دو جواب $x=2k\pi$ و $x=\frac{2k\pi}{3}$ را شامل شود به صورت $x=\frac{2k\pi}{3}$ است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

۳۳ گزینه ۱

با استفاده از روابط زیر معادلهٔ مثلثاتی را ساده می کنیم:

$$tan(\alpha-\beta)=\frac{tan\,\alpha-tan\,\beta}{۱+tan\,\alpha\;tan\,\beta}\;,\;tan(\alpha+\beta)=\frac{tan\,\alpha+tan\,\beta}{۱-tan\,\alpha\;tan\,\beta}$$

$$tan(x+\frac{\pi}{۴})+tan(x-\frac{\pi}{۴})=۲\sqrt{۳}\Rightarrow\frac{tan\,x+tan\,\frac{\pi}{۴}}{۱-tan\,x\;tan\,\frac{\pi}{۴}}+\frac{tan\,x-tan\,\frac{\pi}{۴}}{۱+tan\,x\;tan\,\frac{\pi}{۴}}$$

$$=۲\sqrt{۳}\Rightarrow\frac{tan\,x+۱}{۱-tan\,x}+\frac{tan\,x-۱}{۱+tan\,x}=۲\sqrt{۳}\Rightarrow\frac{(۱+tan\,x)^{۲}-(۱-tan\,x)^{۲}}{۱-tan^{۲}x}=۲\sqrt{۳}\Rightarrow$$

$$\frac{۱+۲\,tan\,x+tan^{۲}x-۱+۲\,tan\,x-tan^{۲}x}{۱-tan^{۲}x}=\frac{۴\,tan\,x}{۱-tan^{۲}x}=۲\sqrt{۳}\xrightarrow{\div۲}\frac{۲\,tan\,x}{۱-tan^{۲}x}=\sqrt{۳}$$

با توجه به رابطهٔ $tan\,۲\alpha=\frac{۲\,tan\,\alpha}{۱-tan^{۲}\alpha}$، داریم:

$$tan\,۲x=\sqrt{۳}\Rightarrow tan\,۲x=tan\,\frac{\pi}{۳}\Rightarrow ۲x=k\pi+\frac{\pi}{۳}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۶}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۹

۳۴ گزینه ۲

می دانیم $tan\,۲\alpha=\frac{۲\,tan\,\alpha}{۱-tan^{۲}\alpha}$است. هم چنین جواب های کلی معادلهٔ $tan\,x=tan\,\alpha$از رابطهٔ $x=k\pi+\alpha$ به دست می آید.

$$\frac{۲\,tan\,x}{۱-tan^{۲}x}=\sqrt{۳}\Rightarrow tan\,۲x=\sqrt{۳}\Rightarrow tan\,۲x=tan\,\frac{\pi}{۳}\Rightarrow ۲x=k\pi+\frac{\pi}{۳}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۶}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۳۵ گزینه ۲

از فرمول های کمان $(\alpha+\beta)$ می دانیم:

$$sin(\alpha+\beta)=sin\,\alpha\,cos\,\beta+cos\,\alpha\,sin\,\beta$$

$$cos(\alpha+\beta)=cos\,\alpha\,cos\,\beta-sin\,\alpha\,sin\,\beta$$

معادلهٔ مثلثاتی را ساده می کنیم:

$$sin\,۲x(sin\,x+cos\,x)=cos\,۲x(cos\,x-sin\,x)$$
$$\Rightarrow sin\,۲x\;sin\,x+sin\,۲x\;cos\,x=cos\,۲x\;cos\,x-cos\,۲x\;sin\,x$$
$$\Rightarrow sin\,۲x\;cos\,x+cos\,۲x\;sin\,x=cos\,۲x\;cos\,x-sin\,۲x\;sin\,x$$

با توجه به فرمول های کمان $(\alpha+\beta)$ داریم:

$$sin(۲x+x)=cos(۲x+x)\Rightarrow sin\,۳x=cos\,۳x\xrightarrow[cos\,۳x\neq ۰]{\div cos\,۳x}\frac{sin\,۳x}{cos\,۳x}=۱\Rightarrow tan\,۳x=۱\Rightarrow tan\,۳x=tan\,\frac{\pi}{۴}$$

جواب معادلهٔ مثلثاتی $tan\,x=tan\,\alpha$از رابطهٔ $x=k\pi+\alpha$ به دست می آید.

$$۳x=k\pi+\frac{\pi}{۴}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۱۲}$$

جواب های معادله در بازهٔ $[۰\,,\,\pi]$ به صورت زیر است:

$$k=۰\Rightarrow x=\frac{\pi}{۱۲}\;,\;k=۱\Rightarrow x=\frac{۵\pi}{۱۲}\;,\;k=۲\Rightarrow x=\frac{۹\pi}{۱۲}$$

مجموع جواب ها $=\frac{\pi}{۱۲}+\frac{۵\pi}{۱۲}+\frac{۹\pi}{۱۲}=\frac{۱۵\pi}{۱۲}=\frac{۵\pi}{۴}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۳۶ گزینه ۱

به فرمول های 2α توجه کنید:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha, \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$2\cos^2 x + 2\sin x\cos x = 1 \Rightarrow 2\cos^2 x - 1 + 2\sin x\cos x = 0$$

$$\Rightarrow \cos 2x + \sin 2x = 0 \Rightarrow \sin 2x = -\cos 2x \xrightarrow{\div \cos 2x} \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = -\frac{\cos 2x}{\cos 2x}$$

$$\Rightarrow \tan 2x = -1 \Rightarrow \tan 2x = \tan(-\frac{\pi}{4}) \Rightarrow 2x = k\pi - \frac{\pi}{4} \xrightarrow{\div 2} x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

۳۷ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

گام اول

می‌دانیم:

$$\cos(a+b) = \cos a\,\cos b\ -\ \sin a\ \sin b$$

گام دوم

با استفاده از گام اول، معادلهٔ داده‌شده را تا حد امکان ساده می‌کنیم:

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4} \Rightarrow \left(\cos x\cos\frac{\pi}{4} - \sin x\sin\frac{\pi}{4}\right)\left(\cos x\cos\frac{\pi}{4} + \sin x\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right) = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x)\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x + \sin x) = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos 2x = \cos\frac{\pi}{3}$$

با توجه به اینکه می‌دانیم رابطهٔ $\cos x = \cos\alpha$ هنگامی برقرار است که $x = 2k\pi \pm \alpha$ باشد، جواب معادلهٔ مثلثاتی داده‌شده، برابر است با:

$$2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

۳۸ گزینه ۴

$$\sin 5x + \sin 4x = 1 + \cos \pi \Rightarrow \sin 5x + \sin 4x = 0$$

بنابراین:

$$\sin 5x = -\sin 4x = \sin(-4x)$$

$$\begin{cases} 5x = 2k\pi - 4x \Rightarrow 9x = 2k\pi \Rightarrow x = \dfrac{2k\pi}{9} & (1) \\ 5x = 2k\pi + \pi + 4x \Rightarrow x = 2k\pi + \pi & (2) \end{cases}$$

جواب‌های معادلهٔ (۱) عبارت‌اند از:

$$0,\ \tfrac{2\pi}{9},\ \tfrac{4\pi}{9},\ \tfrac{6\pi}{9},\ \tfrac{8\pi}{9},\ \tfrac{10\pi}{9},\ \tfrac{12\pi}{9},\ \tfrac{14\pi}{9},\ \tfrac{16\pi}{9},\ \tfrac{18\pi}{9}$$

جواب‌های این معادله یک دنبالهٔ حسابی با قدر نسبت $\frac{2\pi}{9}$ است که مجموع جملات برابر می‌شود با:

$$S_n = \tfrac{n}{2}(a_1 + a_n) \xrightarrow{n=10} S_{10} = \tfrac{10}{2}(0 + \tfrac{18\pi}{9}) = 10\pi$$

از طرفی معادلهٔ (۲) در این بازه فقط دارای جواب π است؛ بنابراین مجموع جواب‌های معادله در این بازه 11π است.

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۳ ۱۳۹۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۳۹ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

گام اول

الف) معادلهٔ مثلثاتی $\cos 3x + \cos x = 0$ را به معادلهٔمثلثاتی $\cos 3x = -\cos x$ تبدیل می‌کنیم.

ب) به‌جای $-\cos x$ عبارت $\cos(\pi - x)$ را قرار داده و جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی را تعیین می‌کنیم.

گام دوم

$$\cos 3x = \cos(\pi - x) \Rightarrow 3x = 2k\pi \pm (\pi - x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \pi - x \Rightarrow 4x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = \dfrac{k\pi}{2} + \dfrac{\pi}{4} \\ 3x = 2k\pi - \pi + x \Rightarrow 2x = 2k\pi - \pi \Rightarrow x = k\pi - \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

جواب کلی $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ هر دو جواب به‌دست‌آمده را شامل می‌شود.

۴۰ گزینه ۱

$$2\sin^2 x + 3\cos x = 0 \xrightarrow{\sin^2 x = 1 - \cos^2 x} 2 - 2\cos^2 x + 3\cos x = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x - 3\cos x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \cos x = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \begin{cases} 2 & \text{غقق} \\ -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \cos x = \frac{-1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۴۱ **گزینه ۴**

نکته: $\sin x = \sin\alpha \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \alpha \\ x = ۲k\pi + \pi - \alpha \end{cases}$

$$\frac{\sin ۳x}{\cos(\frac{۳\pi}{۲}+x)} = ۱ \xrightarrow{\cos(\frac{۳\pi}{۲}+x)=\sin x} \frac{\sin ۳x}{\sin x} = ۱$$

$$\Rightarrow \sin ۳x = \sin x \Rightarrow \begin{cases} ۳x = ۲k\pi + x \Rightarrow x = k\pi \ \text{غ‌ق‌ق} \\ ۳x = ۲k\pi + \pi - x \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴} \end{cases}$$

چون $\sin x \neq ۰$، بنابراین جواب $x = k\pi$ غیرقابل‌قبول است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۴۲ **گزینه ۳**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

گام اول

با استفاده از فرمول $\cos ۲\alpha = ۲\cos^۲\alpha - ۱$ عبارت داده‌شده را ساده کرده و معادله را حل می‌کنیم.

گام دوم

$$\cos ۲x + ۲\cos^۲ x = ۰ \Rightarrow ۲\cos^۲ x - ۱ + ۲\cos^۲ x = ۰$$

$$\Rightarrow ۴\cos^۲ x = ۱ \Rightarrow \cos^۲ x = \frac{۱}{۴} \Rightarrow \cos^۲ x = \cos^۲\frac{\pi}{۳} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$$

۴۳ **گزینه ۴**

$$\sin ۲x + \cos(\frac{\pi}{۲} - x) = ۰ \Rightarrow ۲\sin x\cos x + \sin x = ۰ \Rightarrow \sin x(۲\cos x + ۱) = ۰$$

$$\sin x = ۰ \Rightarrow x = ۰, \pi, ۲\pi$$

$$۲\cos x + ۱ = ۰ \Rightarrow \cos x = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow x = \pi - \frac{\pi}{۳} = \frac{۲\pi}{۳}, x = \pi + \frac{\pi}{۳} = \frac{۴\pi}{۳}$$

$$\pi + ۲\pi + \frac{۲\pi}{۳} + \frac{۴\pi}{۳} = ۵\pi$$

در اینجا نیازی به دست آوردن جواب‌های کلی معادلهٔ مثلثاتی نیست، فقط کافی است جواب‌ها را در فاصلهٔ داده‌شده، مشخص کنیم.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

منبع: کنکور سراسری

۱ اگر $\frac{1}{2} = \lim_{x\to 2} \frac{x-\sqrt{3x-2}}{ax+b}$ باشد، آنگاه b کدام است؟

۱) -۲
۲) -۱
۳) ۱
۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۲ به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x - \sin x}{x^2} & ; x \neq 0 \\ a & ; x = 0 \end{cases}$ در نقطهٔ $x = 0$ پیوسته است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) -۱
۴) هیچ مقدار a

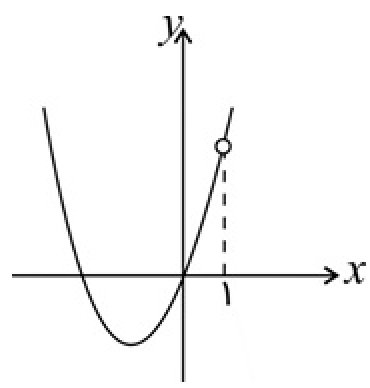
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۳ به ازای کدام مجموعه مقادیر a تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} (x+a)^2 & ; x \geq -1 \\ 2x+1 & ; x < -1 \end{cases}$ در نقطهٔ $x = -1$ حد دارد؟

۱) $\{0\}$
۲) $\{2\}$
۳) $\varnothing$
۴) $\mathbb{R}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۰

۴ شکل زیر نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = \dfrac{4x^3 + ax + b}{x-1}$ است. دوتایی مرتب (a,b) کدام است؟



۱) $(0,-4)$
۲) $(-4,0)$
۳) $(-4,1)$
۴) $(4,0)$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

۵ حاصل $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x+\sqrt{3-x}}{x^2+x}$ کدام است؟

۱) $-\frac{7}{4}$
۲) $-\frac{1}{4}$
۳) $\frac{3}{4}$
۴) $\frac{5}{4}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

۶ حاصل $\lim\limits_{x\to ۱} \dfrac{۱-\sqrt{x}}{۲-\sqrt{۵-x}}$ کدام است؟

۱) -۴
۲) -۲
۳) ۲
۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

۷ حاصل $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{۱-\cos ۲x}{x\sin x}$، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) ۱
۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

۸ حاصل $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{\cos x-\cos ۲x}{x^۲}$، کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) ۱
۴) $\frac{۳}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

۹ در فاصلهٔ $[\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۲}]-\{۱\}$ همواره $\frac{\sin \pi x}{۱-x} \le f(x) \le g(x)$ و $\lim_{x\to ۱}(\frac{\sin \pi x}{۱-x}-g(x))=۰$، حاصل $\lim_{x\to ۱} f(x)$ برابر کدام است؟

۱) $-\pi$
۲) صفر
۳) $\frac{\pi}{۲}$
۴) π

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

۱۰ حاصل $\lim\limits_{x\to \frac{۳\pi}{۴}^-} \dfrac{۱+\cot x}{۱+\tan x}$ کدام است؟

۱) -۱
۲) صفر
۳) ۱
۴) $+\infty$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۲

۱۱ حاصل $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۴}} \dfrac{۱-\tan x}{\sin(x-\frac{\pi}{۴})}$ کدام است؟

۱) -۲
۲) -۱
۳) ۱
۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

۱۲ حاصل $\lim_{x\to \frac{3\pi}{4}} \frac{\tan^2 x - 1}{\cos 2x}$ ، کدام است؟

۱) -۲
۲) $\frac{1}{2}$
۳) ۱
۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

۱۳ حاصل $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{\cos 2x}$ ، کدام است؟

۱) -۱
۲) $-\frac{1}{2}$
۳) $\frac{1}{2}$
۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۱۴ حد کسر $\frac{x^{m+3}+nx+m}{mx^{n-2}-mx+n-1}$ با شرط $n > 3$، وقتی $x \to \infty$ برابر -۲ است. $m + n$ کدام است؟

۱) ۳/۵
۲) ۴
۳) ۴/۵
۴) ۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۴

۱۵ در تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{ax^n-3x+1}{3x^2+x}$ اگر $\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{2}{3}$، آنگاه $f(-1)$ کدام است؟

۱) -۲
۲) $\frac{3}{2}$
۳) ۲
۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۱۶ در تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{3-\sqrt{x^2+5}}{ax^n+4}$، اگر $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{2}$ باشد، آنگاه $\lim_{x\to 2} f(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$
۲) $\frac{2}{3}$
۳) $\frac{3}{4}$
۴) $\frac{3}{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۱۷ نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{ax+1+\sqrt{4x^2+9}}{3x-2}$ از نقطهٔ $(2, 1)$ می‌گذرد، $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{3}$
۲) $\frac{1}{3}$
۳) $\frac{2}{3}$
۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

۱۸ اگر $\frac{ax+9}{1-x+\sqrt{x+1}} = 3$ باشد، آنگاه حد این کسر وقتی $x \to 3$ کدام است؟ $\lim_{x\to+\infty}$

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۴
۴) ۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

۱۹ حاصل $\lim_{x\to+\infty} \frac{x-\sqrt{4x^2+9x}}{3x+\sqrt{x}}$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{3}$
۲) $-\frac{1}{4}$
۳) $\frac{1}{3}$
۴) $\frac{2}{3}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

۲۰ تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} a\sin 2x & ; \frac{\pi}{4} \leq x < \frac{3\pi}{4} \\ \cos(x+\frac{\pi}{4}) & ; \frac{3\pi}{4} \leq x < 2\pi \end{cases}$ در $x = \frac{3\pi}{4}$ پیوسته است. مقدار a کدام است؟

۱) -۱
۲) صفر
۳) $-\frac{1}{2}$
۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

۲۱ به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} x^2+ax-5 & ;x>2 \\ ax-1 & ;x\leq 2 \end{cases}$ بر روی مجموعهٔ اعداد حقیقی پیوسته است؟

۱) هر مقدار حقیقی a
۲) هیچ مقدار a
۳) فقط $a=-2$
۴) فقط $a=2$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

۲۲ اگر تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} ax+b & ;x>2 \\ x^2+bx-1 & ;x<2 \end{cases}$ با شرط $f(2)=5$ بر روی مجموعهٔ اعداد حقیقی پیوسته باشد، a کدام است؟

۱) -۱
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۲۳ تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} \frac{x-\sqrt{2x}}{2-x} & ;x\neq 2 \\ a & ;x=2 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a، در نقطهٔ $x=2$ پیوسته است؟

۱) -۲
۲) -۱
۳) $-\frac{1}{2}$
۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

۲۴ تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2+x-2|}{x-1} & ;x \neq 1 \\ a & ;x = 1 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a در $x = 1$ پیوسته است؟

۱) هر مقدار a
۲) ۳-
۳) ۳
۴) هیچ مقدار a

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۲۵ با کدام مجموعه مقادیر a، تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+a} & ;x \geq -1 \\ x^2 + ax & ;x < -1 \end{cases}$ در $x = -1$ پیوسته است؟

۱) $\{1, \sqrt{2}\}$
۲) $\{1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}\}$
۳) $\varnothing$
۴) $\mathbb{R}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

۲۶ تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x+1} & ;|x| > 1 \\ 2x & ;|x| \leq 1 \end{cases}$ از نظر پیوستگی در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۱- چگونه است؟

۱) در ۱- ناپیوسته، در ۱ ناپیوسته
۲) در ۱- ناپیوسته، در ۱ پیوسته
۳) در ۱- پیوسته، در ۱ پیوسته
۴) در ۱- پیوسته، در ۱ ناپیوسته

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

۲۷ تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 x}{1-\cos x} & ;x > 0 \\ a\sin(x + \frac{\pi}{6}) & ;x \leq 0 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a در $x = 0$ پیوسته است؟

۱) ۲
۲) ۴
۳) هیچ مقدار a
۴) هر مقدار a

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

۲۸ به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{2x-\pi} & ;x \neq \frac{\pi}{2} \\ a & ;x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ پیوسته است؟

۱) ۱-
۲) صفر
۳) $\frac{1}{2}$
۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۲۹ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\frac{1-\tan^2 x}{\cos 2x} & ; 0 \le x < \frac{\pi}{4}\\ a\cos 3x & ; \frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{2}\end{cases}$ به ازای کدام مقدار a، در نقطهٔ $x=\frac{\pi}{4}$ پیوسته است؟

۱) $-2\sqrt{2}$
۲) ۱-
۳) $\sqrt{2}$
۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۳۰ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{ax^n+15}{3x-\sqrt{4x^2+15x}}$، اگر $\lim_{x\to -\infty} f(x)=-1$ باشد، آنگاه $\lim_{x\to 3} f(x)$ کدام است؟

۱) ۶-
۲) ۴-
۳) ۳
۴) ۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

۳۱ به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{\pi}{x} & ; 1 \le x \le 6\\ a+\cos^2\frac{\pi x}{36} & ; x > 6\end{cases}$ بر روی مجموعه اعداد حقیقی بزرگ‌تر از ۱، پیوسته است؟

۱) $-\frac{1}{2}$
۲) $-\frac{1}{4}$
۳) $\frac{1}{4}$
۴) $\frac{1}{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

۳۲ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{2x+\sqrt{x^2-3x}}{ax^n-6}$، اگر $\lim_{x\to +\infty} f(x)=-\frac{1}{2}$ باشد، آنگاه $\lim_{x\to -1} f(x)$، کدام است؟

۱) $-\frac{1}{6}$
۲) $-\frac{1}{8}$
۳) $\frac{1}{4}$
۴) $\frac{1}{3}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

۳۳ به ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\frac{\cos 3x}{\cos x} & ; 0 \le x < \frac{\pi}{2}\\ \sin 5x - a & ; \frac{\pi}{2} \le x \le 2\pi\end{cases}$ بر روی بازهٔ $[0, 2\pi]$ پیوسته است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

۳۴ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{ax+\sqrt{4x^2+5}}{2x+2}$، اگر $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{5}{2}$ باشد، آنگاه حدّ $f(x)$ وقتی $x\to -1$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$

۲) $\frac{5}{6}$

۳) $\frac{3}{2}$

۴) $\frac{5}{4}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۳۵ به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos x-\sqrt{\cos x}}{\sin^2 x} & ; x\neq 0\\ a & ; x=0\end{cases}$ در نقطهٔ $x=0$ پیوسته است؟

۱) $-\frac{1}{4}$

۲) $-\frac{1}{2}$

۳) $\frac{1}{2}$

۴) هیچ مقدار a

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۳۶ حد عبارت $\frac{2[x]}{2-x}+\frac{x+2}{x^2-2x}$، وقتی $x\to 2^-$ کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است)

۱) $-\infty$

۲) $-\frac{1}{2}$

۳) ۱

۴) $+\infty$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۳۷ به ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}3x-[x] & ;x<2\\ a & ;x=2\\ x+2 & ;x>2\end{cases}$ در نقطهٔ $x=2$ پیوسته است؟

۱) ۴

۲) ۴/۵

۳) ۵

۴) هیچ مقدار a

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

۳۸ حاصل $\lim_{x\to -2}\left(\frac{3}{2x^2+5x+2}-\frac{4}{x^2-4}\right)$ کدام است؟

۱) $-\frac{7}{12}$

۲) $-\frac{5}{12}$

۳) $\frac{5}{12}$

۴) $\frac{7}{12}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۳۹ حاصل $\lim_{x\to 2^+}\frac{2-\sqrt[3]{x+6}}{\sqrt{x^2-4x+4}}$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{6}$

۲) $-\frac{1}{12}$

۳) $\frac{1}{12}$

۴) $\frac{1}{6}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۴۰ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+\cos x}}{x-\pi} & ;\pi < x \le 2\pi \\ a\cos\dfrac{2x}{3} & ;0 \le x \le \pi\end{cases}$ به ازای کدام مقدار a، در نقطهٔ $x=\pi$ پیوسته است؟

۱) $-2\sqrt{2}$

۲) $-\sqrt{2}$

۳) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

۴) $\sqrt{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۴۱ حاصل $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{6}{x^2-2x}-\dfrac{x+1}{x-2}\right)$ کدام است؟

۱) $-\dfrac{5}{2}$

۲) $-\dfrac{3}{2}$

۳) $\dfrac{1}{2}$

۴) $\dfrac{3}{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

۴۲ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1-\sqrt{1-x}} & ;\ x\ne 0 \\ a & ;\ x=0\end{cases}$ به ازای کدام مقدار a در نقطهٔ $x=0$ پیوسته است؟

۱) -2

۲) -1

۳) 1

۴) 2

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

۴۳ حاصل $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{x}{x+1}\right)$ ، کدام است؟

۱) -2

۲) $-\dfrac{3}{2}$

۳) 1

۴) $\dfrac{3}{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۴۴ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{x-\sqrt{x}} & ;x>1 \\ ax-a+2 & ;x\le 1\end{cases}$ به ازای کدام مقدار a در نقطهٔ $x=1$ پیوسته است؟

۱) ۱

۲) ۲

۳) هر مقدار a

۴) هیچ مقدار a

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۴۵ دنباله با کدام جمله عمومی، همگراست؟

۱) $u_n = \left[\frac{(-1)^n}{n}\right]$
۲) $b_n = \log \frac{1}{n}$
۳) $a_n = \sin \frac{\pi}{n}$
۴) $v_n = \frac{n^2-1}{2n+1}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۹

۴۶ بزرگ ترین کران پایین دنباله با جملهٔ عمومی $U_n = \frac{3^n}{n^3}$، کدام است؟

۱) صفر
۲) $\frac{1}{3}$
۳) ۱
۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

۴۷ کدام دنبالهٔ زیر، از بالا کران دار است ولی از پایین کران دار نیست؟

۱) $U_n = \log \frac{1}{n}$
۲) $U_n = \sin \frac{\pi}{n}$
۳) $U_n = \cot \frac{\pi}{n}$
۴) $U_n = \cos \frac{n\pi}{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

۴۸ کوچک ترین کران بالای دنباله ای با جملهٔ عمومی $U_n = \frac{3n^2-2n}{4n^2+5}$، کدام است؟

۱) $\frac{1}{9}$
۲) $\frac{1}{2}$
۳) $\frac{3}{5}$
۴) $\frac{3}{4}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

۴۹ اگر $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ (n عدد طبیعی است) آنگاه دنبالهٔ جزء صحیح a_n چگونه است؟

۱) صعودی- کران دار از بالا
۲) نزولی- کران دار از پایین
۳) فاقد کران بالا و پایین
۴) نه صعودی- نه نزولی- کران دار

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵

۵۰ کدام یک از دنباله های زیر صعودی و همگرا است؟

۱) $U_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n$
۲) $U_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$
۳) $U_n = \left[\frac{(-1)^n}{n}\right]$
۴) $U_n = \frac{2n+1}{n}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

۵۱ اگر $u_n = ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۸} + \cdots + \frac{۱}{۲^n}$، آنگاه دنباله با جملهٔ عمومی u_n چگونه است؟

۱) کران دار- صعودی
۲) کران دار- نزولی
۳) بی کران- صعودی
۴) بی کران- نزولی

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

۵۲ اگر $S_n = \frac{۱+۲+۳+\cdots+n}{n^۲}$، آنگاه دنبالهٔ با جملهٔ عمومی S_n چگونه است؟

۱) صعودی- بی کران
۲) نزولی- بی کران
۳) صعودی- کران دار
۴) نزولی- کران دار

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

۵۳ دنبالهٔ $u_n = n\left(\frac{۲}{۳}\right)^n$ برای $n \geq ۲$ چه نوع دنباله ای است؟

۱) صعودی- کران دار از بالا و پایین
۲) نزولی- کران دار از بالا و پایین
۳) صعودی- فقط از پایین کران دار
۴) نزولی- فقط از بالا کران دار

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۴

۵۴ در یک دنبالهٔ عددی، جملهٔ n اُم به صورت $a_n = \frac{۳}{۲}n - ۵$ است. مجموع ۱۵ جملهٔ اول این دنباله، کدام است؟

۱) ۹۰
۲) ۱۰۵
۳) ۱۲۰
۴) ۱۳۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۹

۵۵ در یک دنبالهٔ عددی، جملهٔ پنجم برابر ۳ و هر جمله از جملهٔ ماقبل خود به اندازهٔ $\frac{۱}{۲}$ کمتر است. مجموع ۱۰ جملهٔ اول آن کدام است؟

۱) ۲۲/۵
۲) ۲۵
۳) ۲۷/۵
۴) ۳۰

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۲

۵۶ در یک دنبالهٔ عددی، مجموع ۱۲ جملهٔ اول آن ۱۳۸ و جملهٔ ششم آن ۱۰ است، جملهٔ اول این دنباله کدام است؟

۱) -۵
۲) -۴
۳) -۳
۴) -۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۰

۵۷ در بیست جملهٔ اول از یک دنبالهٔ عددی، مجموع جملات ردیف فرد، ۱۳۵ و مجموع جملات ردیف زوج، ۱۵۰ است، جملهٔ اول کدام است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

۵۸ در یک دنبالهٔ حسابی، مجموع پنج جملهٔ اول آن، $\frac{۱}{۳}$ مجموع پنج جملهٔ بعدی است. جملهٔ دوم چند برابر جملهٔ اول است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$
۲) $\frac{۵}{۲}$
۳) ۳
۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۵۹ در یک دنبالهٔ عددی، جملهٔ هفتم نصف جملهٔ سوم است، مجموع چند جملهٔ اول از این دنباله، صفر است؟

۱) ۱۸
۲) ۱۹
۳) ۲۰
۴) ۲۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

۶۰ مجموع تمام اعداد طبیعی بخش پذیر بر ۶ بین دو عدد ۱۰۰ و ۲۰۰ کدام است؟

۱) ۲۴۲۰
۲) ۲۴۵۰
۳) ۲۵۲۰
۴) ۲۵۵۰

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۱

۶۱ مجموع اعداد طبیعی فرد، بخش پذیر بر ۳ و کوچک تر از ۱۰۱ کدام است؟

۱) ۸۱۶
۲) ۸۵۲
۳) ۸۶۷
۴) ۸۸۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵

۶۲ در دنبالهٔ هندسی $۱, ۲, ۴, \dots$، مجموع چهارده جملهٔ اول، چند برابر مجموع هفت جملهٔ اول آن است؟

۱) ۶۵
۲) ۶۳
۳) ۱۲۷
۴) ۱۲۹

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

۶۳ به ازای یک مقدار x، اعداد $x^۲-۲$، $۲x$ و $x^۲+۴$ به ترتیب سه جملهٔ اول از یک دنبالهٔ هندسی نزولی اند. مجموع هفت جملهٔ اول این دنباله، کدام است؟

۱) $\frac{۱۱۷}{۱۶}$
۲) $\frac{۱۲۵}{۱۶}$
۳) $\frac{۶۳}{۴}$
۴) $\frac{۱۲۷}{۸}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۶۴ دنبالهٔ با جملهٔ عمومی $a_n=\frac{۷+۴^{n-۱}}{۲+۴^n}$، چگونه است؟

۱) بی کران- صعودی
۲) بی کران- نزولی
۳) کران دار- صعودی
۴) کران دار- نزولی

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

۶۵ در یک دنبالهٔ هندسی نزولی، مجموع مجذورات تمام جملات، برابر $\frac{۲}{۳}$ مجذور مجموع تمام جملات آن است. قدر نسبت این دنباله، کدام است؟

۱) ۰/۲
۲) ۰/۲۵
۳) ۰/۳
۴) ۰/۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۶۶ اعداد طبیعی را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات هر دسته، برابر شمارهٔ آن دسته باشد... ,(۷,۸,۹,۱۰),(۴,۵,۶) (۲,۳)، (۱)، مجموع جملات در دستهٔ بیستم، کدام است؟

۱) ۴۰۱۰
۲) ۴۰۲۰
۳) ۴۰۳۰
۴) ۴۰۴۰

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

۶۷ دنباله‌ای با جملهٔ عمومی $a_n = \frac{۱+۳^n}{۵+۳^{n-۱}}$، چگونه است؟

۱) بی‌کران- صعودی
۲) کراندار- صعودی
۳) کراندار- نزولی
۴) بی‌کران- نزولی

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

۶۸ در یک دنبالهٔ هندسی نزولی هر جملهٔ آن، نصف مجموع تمام جملات بعدی می‌باشد. قدر نسبت آن کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۲}{۳}$
۴) $\frac{۳}{۴}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۶۹ کوچک‌ترین کران بالای دنبالهٔ $a_n = \frac{۳n^۲+۱}{۲n^۲+n}$ کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۶}$
۲) $\frac{۱۳}{۱۰}$
۳) $\frac{۴}{۳}$
۴) $\frac{۳}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

۷۰ کدام‌یک از دنباله‌های زیر، کران‌دار و صعودی است؟

۱) $c_n = \frac{(-۱)^n}{n}$
۲) $d_n = \frac{n^۲}{۲^n}$
۳) $a_n = \frac{۲n^۲+۱}{n^۲+۳}$
۴) $b_n = \frac{۳n^۲+۱}{۵n+۹}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

منبع: کنکور سراسری

۱ **گزینه ۲**

وقتی $x \to ۲$ صورت کسر برابر صفر می‌شود؛ اما حاصل حد وقتی $x \to ۲$ مخالف صفر است بنابراین باید به ازای $x = ۲$ مخرج کسر هم برابر صفر شود؛ یعنی:

$$ax + b = ۰ \xrightarrow{x=۲} ۲a + b = ۰ \qquad (I)$$

اکنون حاصل حد $\frac{۰}{۰}$ و مبهم است. با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال رفع ابهام کرده و مقادیر a و b را به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to ۲} \frac{x-\sqrt{۳x-۲}}{ax+b} = \frac{۰}{۰}$$

$$\xrightarrow{HOP} \lim_{x\to ۲} \frac{۱-\frac{۳}{۲\sqrt{۳x-۲}}}{a} = \frac{۱-\frac{۳}{۲\times ۲}}{a} = \frac{۱-\frac{۳}{۴}}{a} = \frac{۱}{۴a} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow ۴a = ۲ \Rightarrow a = \frac{۱}{۲}$$

با استفاده از رابطهٔ (I) مقدار b برابر است با:

$$۲\left(\frac{۱}{۲}\right) + b = ۰ \Rightarrow b + ۱ = ۰ \Rightarrow b = -۱$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۲ **گزینه ۴**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

گام اول

الف) تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = a$ پیوسته است هرگاه داشته باشیم:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

ب) می‌دانیم وقتی $x \to ۰$ داریم: $\sin ۲x \sim ۲x$ و $\sin x \sim x$.

گام دوم

ابتدا حاصل حد تابع $f(x)$ را وقتی $x \to ۰$ به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to ۰} f(x) = \lim_{x\to ۰} \frac{\sin ۲x - \sin x}{x^۲} \sim \lim_{x\to ۰} \frac{۲x - x}{x^۲} = \lim_{x\to ۰} \frac{۱}{x} = \pm\infty$$

تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = ۰$ فاقد حد است، بنابراین به ازای هیچ مقداری از a در این نقطه پیوسته نمی‌شود.

۳ **گزینه ۳**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۰

گام اول

تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = -۱$ دارای حد است درصورتی‌که:

$$\lim_{x\to(-۱)^-} f(x) = \lim_{x\to(-۱)^+} f(x)$$

گام دوم

ابتدا حد چپ و راست تابع $f(x)$ را در نقطهٔ $x = -۱$ به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to(-۱)^+} f(x) = \lim_{x\to(-۱)^+} (x+a)^۲ = (-۱+a)^۲$$

$$\lim_{x\to(-۱)^-} f(x) = \lim_{x\to(-۱)^-} (۲x+۱) = -۲+۱ = -۱$$

باتوجه‌به گام اول در صورتی حد تابع در نقطهٔ $x = -۱$ موجود است که تساوی $(-۱+a)^۲ = -۱$ برقرار باشد اما این تساوی هیچ‌گاه برقرار نیست؛ بنابراین مجموعه مقادیر a برابر $\varnothing$ می‌شود.

۴ **گزینه ۲**

باتوجه‌به نمودار $f(\circ) = \circ$ است، پس داریم:

$$f(\circ) = \circ \Rightarrow \frac{\circ+b}{\circ-۱} = \circ \Rightarrow -b = \circ \Rightarrow b = \circ$$

ازطرفی تابع در نقطهٔ $x = ۱$ تعریف‌نشده است، چون $x = ۱$ ریشهٔ مخرج کسر است پس حد صورت کسر نیز وقتی $x \to ۱$ باید برابر صفر باشد که تابع به‌صورت مبهم $\frac{\circ}{\circ}$ دربیاید.

$$\lim_{x\to ۱} ۴x^۳ + ax + b = \circ \Rightarrow ۴ + a = \circ \Rightarrow a = -۴$$

بنابراین داریم: $(a,b) = (-۴,\circ)$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

۵ **گزینه ۱**

حاصل حد، وقتی $x \to -۱$ مبهم $\frac{۰}{۰}$ است. صورت و مخرج کسر را در مزدوج صورت ضرب می‌کنیم، سپس با حذف عامل صفرکننده، حاصل حد را به دست می‌آوریم.

$$\lim_{x\to -۱} \frac{۲x+\sqrt{۳-x}}{x^۲+x} \times \frac{۲x-\sqrt{۳-x}}{۲x-\sqrt{۳-x}} = \lim_{x\to -۱} \frac{(۲x)^۲-(\sqrt{۳-x})^۲}{(x^۲+x)(۲x-\sqrt{۳-x})}$$

$$= \lim_{x\to -۱} \frac{۴x^۲-۳+x}{x(x+۱)(۲x-\sqrt{۳-x})} = \lim_{x\to -۱} \frac{(x+۱)(۴x-۳)}{x(x+۱)(۲x-\sqrt{۳-x})} = \lim_{x\to -۱} \frac{۴x-۳}{x(۲x-\sqrt{۳-x})}$$

$$= \frac{-۴-۳}{(-۱)(-۲-۲)} = \frac{-۷}{(-۱)(-۴)} = -\frac{۷}{۴}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

۶ **گزینه ۲**

حاصل حد، وقتی $x \to ۱$ مبهم $\frac{۰}{۰}$ است. صورت و مخرج کسر را در مزدوج صورت و مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم، سپس با حذف عامل صفرکننده، حاصل حد را به دست می‌آوریم.

$$\lim_{x\to ۱} \frac{۱-\sqrt{x}}{۲-\sqrt{۵-x}} \times \frac{۱+\sqrt{x}}{۱+\sqrt{x}} \times \frac{۲+\sqrt{۵-x}}{۲+\sqrt{۵-x}} = \lim_{x\to ۱} \frac{(۱-x)(۲+\sqrt{۵-x})}{(۴-۵+x)(۱+\sqrt{x})}$$

$$= \lim_{x\to ۱} \frac{(۱-x)(۲+\sqrt{۵-x})}{(x-۱)(۱+\sqrt{x})} = \lim_{x\to ۱} \frac{-(۲+\sqrt{۵-x})}{۱+\sqrt{x}} = \frac{-(۲+۲)}{۱+۱} = -\frac{۴}{۲} = -۲$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

۷ **گزینه ۴**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

گام اول

می‌دانیم:

الف) $\sin x \underset{x\to ۰}{\sim} x$

ب) $۱-\cos ۲x = ۲\sin^۲ x$

گام دوم

$$\lim_{x\to ۰} \frac{۱-\cos ۲x}{x\sin x} = \lim_{x\to ۰} \frac{۲\sin^۲ x}{x\sin x} = \lim_{x\to ۰} \frac{۲x^۲}{x(x)} = \lim_{x\to ۰} \frac{۲x^۲}{x^۲} = ۲$$

۸ گزینه ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

گام اول

می‌دانیم: $\cos u \underset{u\to 0}{\sim} 1-\frac{u^2}{2}$

گام دوم

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\frac{x^2}{2})-(1-\frac{(2x)^2}{2})}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{x^2}{2}-1+2x^2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{2}x^2}{x^2}=\frac{3}{2}$$

۹ گزینه ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

گام اول

الف) داریم:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sin \pi x}{1-x}-g(x)\right)=0\Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{\sin \pi x}{1-x}=\lim_{x\to 1}g(x)$$

ب) چون در فاصلهٔ $[\frac{1}{2},\frac{3}{2}]-\{1\}$، رابطهٔ $\frac{\sin \pi x}{1-x}\le f(x)\le g(x)$ برقرار است؛ طبق قضیهٔ فشردگی و باتوجه‌به قسمت قبل می‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}g(x)=\lim_{x\to 1}\frac{\sin \pi x}{1-x}$$

گام دوم

باتوجه‌به گام اول، برای محاسبهٔ $\lim_{x\to 1}f(x)$ کافی است حاصل حد $\lim_{x\to 1}\frac{\sin \pi x}{1-x}$ را به دست آوریم. حاصل این حد به‌صورت مبهم $\frac{0}{0}$ است. با استفاده از تغییر متغیر داریم:

$$1-x=t\Rightarrow x=1-t$$
$$x\to 1\Rightarrow t\to 0$$
$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin \pi x}{1-x}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin \pi(1-t)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(\pi-\pi t)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin \pi t}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\pi t}{t}=\pi$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\pi$$

۱۰ گزینه ۱

وقتی $x \to \frac{۳\pi}{۴}^-$ حاصل حد به‌صورت مبهم $\frac{۰}{۰}$ می‌شود. برای رفع ابهام می‌توان نسبت‌های مثلثاتی را ساده کرد و یا اینکه از روش‌های دیگری مانند هوپیتال استفاده کرد.

$$\lim_{x\to \frac{۳\pi}{۴}^-} \frac{۱+\cot x}{۱+\tan x} = \frac{۱-۱}{۱-۱} = \frac{۰}{۰}$$

$$\xrightarrow{\cot x = \frac{۱}{\tan x}} \lim_{x\to \frac{۳\pi}{۴}^-} \frac{۱+\cot x}{۱+\tan x} = \lim_{x\to \frac{۳\pi}{۴}^-} \frac{۱+\frac{۱}{\tan x}}{۱+\tan x} = \lim_{x\to \frac{۳\pi}{۴}^-} \frac{\frac{\tan x+۱}{\tan x}}{۱+\tan x}$$

$$= \lim_{x\to \frac{۳\pi}{۴}^-} \frac{۱}{\tan x} = \frac{۱}{-۱} = -۱$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۲

۱۱ گزینه ۱

وقتی $x \to \frac{\pi}{۴}$ حاصل حد به‌صورت مبهم $\frac{۰}{۰}$ می‌شود. با استفاده از روابط مثلثاتی و قاعدهٔ هوپیتال می‌توان رفع ابهام کرد.

روش اول:

با استفاده از روابط مثلثاتی داریم:

$$\sin(x-\frac{\pi}{۴}) = \sin x \cos\frac{\pi}{۴} - \cos x \sin\frac{\pi}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}(\sin x - \cos x)$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{۱-\tan x}{\sin(x-\frac{\pi}{۴})} = \lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{۱-\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\sin x-\cos x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{\frac{\cos x - \sin x}{\cos x}}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\sin x-\cos x)}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{-۱}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{-\sqrt{۲}}{\cos x} = -\frac{\sqrt{۲}}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}} = -۲$$

روش دوم:

طبق قاعدهٔ هوپیتال، اگر $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{۰}{۰}$ آنگاه داریم:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

قاعدهٔ هوپیتال را تا جایی که ابهام برطرف شود، به کار می‌گیریم.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{۱-\tan x}{\sin(x-\frac{\pi}{۴})} = \lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{-(۱+\tan^۲ x)}{\cos(x-\frac{\pi}{۴})} = \frac{-(۱+\tan^۲\frac{\pi}{۴})}{\cos(\frac{\pi}{۴}-\frac{\pi}{۴})} = \frac{-(۱+۱)}{۱} = -۲$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

۱۲ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

گام اول

می‌دانیم: $\cos ۲x = \cos^۲ x - \sin^۲ x$ و $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

گام دوم

وقتی $x \to \frac{۳\pi}{۴}$ حاصل حد به‌صورت مبهم $\frac{۰}{۰}$ می‌شود. با استفاده از گام اول، کسر را تا حد امکان ساده کرده و حاصل حد را به دست می‌آوریم.

$$\lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}} \frac{\tan^۲ x - ۱}{\cos ۲x} = \lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}} \frac{\frac{\sin^۲ x}{\cos^۲ x} - ۱}{\cos^۲ x - \sin^۲ x} = \lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}} \frac{\frac{\sin^۲ x - \cos^۲ x}{\cos^۲ x}}{-(\sin^۲ x - \cos^۲ x)}$$

$$= \lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}} -\frac{۱}{\cos^۲ x} = -\frac{۱}{\cos^۲ \frac{۳\pi}{۴}} = -\frac{۱}{(-\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲} = -\frac{۱}{\frac{۱}{۲}} = -۲$$

۱۳ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

گام اول

می‌دانیم: $\cos ۲x = \cos^۲ x - \sin^۲ x$ و $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

گام دوم

وقتی $x \to \frac{\pi}{۴}$ حاصل حد به‌صورت مبهم $\frac{۰}{۰}$ می‌شود. باتوجه‌به گام اول، کسر را تا حد امکان ساده کرده و حاصل حد را محاسبه می‌کنیم.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{\tan x - ۱}{\cos ۲x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - ۱}{\cos^۲ x - \sin^۲ x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{\frac{\sin x - \cos x}{\cos x}}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{\frac{-(\cos x - \sin x)}{\cos x}}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{-۱}{\cos x(\cos x + \sin x)}$$

$$= \frac{-۱}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\frac{\sqrt{۲}}{۲} + \frac{\sqrt{۲}}{۲})} = \frac{-۱}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\sqrt{۲})} = -۱$$

۱۴ **گزینه ۲**

داریم:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{m+۳} + nx + m}{mx^{n-۲} - mx + n - ۱} = -۲$$

باتوجه‌به اینکه صورت و مخرج کسر، یک عبارت چندجمله‌ای است، پس حاصل حد از تقسیم بزرگ‌ترین جملهٔ صورت بر بزرگ‌ترین جملهٔ مخرج به دست می‌آید؛ یعنی:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{m+۳} + nx + m}{mx^{n-۲} - mx + n - ۱} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{m+۳}}{mx^{n-۲}} = -۲$$

حاصل حد یک عدد ثابت شده است، پس داریم: $m + ۳ = n - ۲$

بنابراین:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{m+۳}}{mx^{n-۲}} = \frac{۱}{m} = -۲ \Rightarrow m = -\frac{۱}{۲}$$

و همچنین:

$$m + ۳ = n - ۲ \xrightarrow{m=-\frac{۱}{۲}} -\frac{۱}{۲} + ۳ = n - ۲ \Rightarrow n = -\frac{۱}{۲} + ۵ = \frac{۹}{۲}$$

بنابراین داریم:

$$m + n = -\frac{۱}{۲} + \frac{۹}{۲} = \frac{۸}{۲} = ۴$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۴

۱۵ گزینه ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

گام اول

صورت و مخرج کسر یک عبارت چندجمله‌ای است پس حاصل حد آن در بی‌نهایت از تقسیم بزرگ‌ترین جملهٔ صورت بر بزرگ‌ترین جملهٔ مخرج به دست می‌آید.

ازطرفی چون حاصل حد تابع در بی‌نهایت یک عدد ثابت شده است پس بزرگ‌ترین درجهٔ صورت و بزرگ‌ترین درجهٔ مخرج کسر باهم برابر است.

گام دوم

طبق گام اول داریم: $n = ۲$

بنابراین:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{ax^۲ - ۳x + ۱}{۳x^۲ + x} = \lim_{x\to\infty} \frac{ax^۲}{۳x^۲} = \frac{a}{۳}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{۲}{۳} \Rightarrow \frac{a}{۳} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow a = ۲$$

اکنون با مشخص شدن مقدار a، حاصل $f(-۱)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{۲x^۲-۳x+۱}{۳x^۲+x} \Rightarrow f(-۱) = \frac{۲(-۱)^۲-۳(-۱)+۱}{۳(-۱)^۲-۱} = \frac{۲+۳+۱}{۳-۱} = \frac{۶}{۲} = ۳$$

۱۶ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

گام اول

می‌دانیم:

$$\sqrt{x^{۲}+۵} \underset{x\to\infty}{\sim} x$$

گام دوم

صورت و مخرج کسر، یک عبارت چندجمله‌ای است و حاصل حد تابع در بی‌نهایت برابر با یک عدد ثابت شده است؛ بنابراین درجهٔ بزرگ‌ترین جملهٔ صورت و بزرگ‌ترین جملهٔ مخرج باهم برابر است و حاصل حد از تقسیم ضرائب آن‌ها بر هم به دست می‌آید، پس داریم:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{۳-\sqrt{x^{۲}+۵}}{ax^{n}+۴} = \lim_{x\to+\infty} \frac{۳-x}{ax^{n}+۴}$$

$$\xrightarrow{n=۱} \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{۳-x}{ax+۴} = \frac{-۱}{a}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{۱}{۲} \Rightarrow -\frac{۱}{a} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow a=-۲ \Rightarrow f(x) = \frac{۳-\sqrt{x^{۲}+۵}}{-۲x+۴}$$

اکنون حاصل $\lim_{x\to ۲} f(x)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۲} f(x) = \frac{۰}{۰} \text{ مبهم}$$

$$\lim_{x\to ۲} \frac{۳-\sqrt{x^{۲}+۵}}{-۲x+۴} \times \frac{۳+\sqrt{x^{۲}+۵}}{۳+\sqrt{x^{۲}+۵}} = \lim_{x\to ۲} \frac{۹-x^{۲}-۵}{۲(۲-x)(۳+\sqrt{x^{۲}+۵})}$$

$$= \lim_{x\to ۲} \frac{(۲-x)(۲+x)}{۲(۲-x)(۳+\sqrt{x^{۲}+۵})} = \lim_{x\to ۲} \frac{۲+x}{۲(۳+\sqrt{x^{۲}+۵})} = \frac{۲+۲}{۲(۳+\sqrt{۴+۵})} = \frac{۴}{۱۲} = \frac{۱}{۳}$$

۱۷ **گزینه ۲**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

گام اول

الف) نمودار تابع از نقطهٔ $(۲,۱)$ می‌گذرد، پس مختصات این نقطه در ضابطهٔ تابع صدق می‌کند.

ب) می‌دانیم:

$$\sqrt{ax^۲+bx+c} \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{a}\left|x+\frac{b}{۲a}\right|$$

گام دوم

باتوجه‌به قسمت (الف) از گام اول داریم:

$$f(x)=\frac{ax+۱+\sqrt{۴x^۲+۹}}{۳x-۲}\xrightarrow{f(۲)=۱}۱=\frac{۲a+۱+۵}{۴}\Rightarrow ۲a+۶=۴$$
$$\Rightarrow ۲a=-۲\Rightarrow a=-۱$$

باتوجه‌به قسمت (ب) از گام اول می‌توان نوشت:

$$\sqrt{۴x^۲+۹} \underset{x\to+\infty}{\sim} ۲x$$

پس:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x+۱+\sqrt{۴x^۲+۹}}{۳x-۲}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x+۱+۲x}{۳x-۲}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+۱}{۳x-۲}=\frac{۱}{۳}$$

۱۸ **گزینه ۳**

صورت و مخرج کسر یک عبارت چندجمله‌ای است. چون $x\to+\infty$ برای یافتن حاصل حد کافی است بزرگ‌ترین جملهٔ صورت را بر بزرگ‌ترین جملهٔ مخرج تقسیم کنیم؛ بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{ax+۹}{۱-x+\sqrt{x+۱}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax}{-x}=-a=۳\Rightarrow a=-۳$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{-۳x+۹}{۱-x+\sqrt{x+۱}}$$

$$\lim_{x\to۳}\frac{-۳x+۹}{۱-x+\sqrt{x+۱}}=\frac{۰}{۰}$$

برای رفع ابهام، از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to۳} f(x)=\lim_{x\to۳}\frac{-۳x+۹}{۱-x+\sqrt{x+۱}}=\lim_{x\to۳}\frac{-۳}{-۱+\frac{۱}{۲\sqrt{x+۱}}}=\frac{-۳}{-۱+\frac{۱}{۲\sqrt{۴}}}=-\frac{۳}{-\frac{۳}{۴}}=۴$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

۱۹ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

گام اول

می‌دانیم:

$$\sqrt{ax^۲ + bx + c} \underset{x\to\pm\infty}{\sim} \sqrt{a}|x + \frac{b}{۲a}|$$

گام دوم

باتوجه‌به گام اول داریم:

$$\sqrt{۴x^۲ + ۹x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{۴}|x + \frac{۹}{۸}| = ۲(x + \frac{۹}{۸}) = ۲x + \frac{۹}{۴}$$

چون $x \to +\infty$ می‌توان در مخرج کسر از عبارت $\sqrt{x}$ در برابر $۳x$ صرف‌نظر کرد.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x - \sqrt{۴x^۲ + ۹x}}{۳x + \sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x - (۲x + \frac{۹}{۴})}{۳x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x - ۲x - \frac{۹}{۴}}{۳x} = -\frac{۱}{۳}$$

۲۰ **گزینه ۴**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

گام اول

تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=\frac{۳\pi}{۴}$ پیوسته است؛ بنابراین رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\lim_{x\to \frac{۳\pi}{۴}^+} f(x)=\lim_{x\to \frac{۳\pi}{۴}^-} f(x)=f(\frac{۳\pi}{۴})$$

گام دوم

باتوجه‌به گام اول، حد چپ و راست تابع را در نقطهٔ $x=\frac{۳\pi}{۴}$ به دست آورده و با مقدار تابع در این نقطه مساوی قرار می‌دهیم.

$$\lim_{x\to \frac{۳\pi}{۴}^-} f(x)=\lim_{x\to \frac{۳\pi}{۴}^-} a\sin ۲x=a\sin ۲(\frac{۳\pi}{۴})=a\sin\frac{۳\pi}{۲}=-a$$

$$\lim_{x\to \frac{۳\pi}{۴}^+} f(x)=\lim_{x\to \frac{۳\pi}{۴}^+} \cos(x+\frac{\pi}{۴})=\cos(\frac{۳\pi}{۴}+\frac{\pi}{۴})=\cos\pi=-۱$$

$$f(\frac{۳\pi}{۴})=\cos(\frac{۳\pi}{۴}+\frac{\pi}{۴})=\cos\pi=-۱$$

بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to \frac{۳\pi}{۴}^+} f(x)=\lim_{x\to \frac{۳\pi}{۴}^-} f(x)=f(\frac{۳\pi}{۴})\Rightarrow -a=-۱\Rightarrow a=۱$$

۲۱ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

گام اول

الف) تابع $f(x)$ بر روی مجموعهٔ $\mathbb{R}$ پیوسته است هرگاه در تمام نقاط این مجموعه پیوسته باشد.

ب) تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = x_0$ پیوسته است هرگاه داشته باشیم:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

گام دوم

تابع $f(x)$ بر روی دو بازهٔ $x > 2$ و $x < 2$ به‌صورت یک تابع چندجمله‌ای بوده و پیوسـته است؛ بنابراین کافی است پیوسـتگی تابع را فقط در نقطهٔ $x = 2$ بررسی کنیم. باتوجه‌به قسمت (ب) از گام اول، حد چپ و راست تابع را در نقطهٔ $x = 2$ محاسبه کرده و با مقدار تابع در این نقطه مساوی قرار می‌دهیم.

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} x^2 + ax - 5 = 2^2 + 2a - 5 = 2a - 1$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} ax - 1 = 2a - 1$$

$$f(2) = 2a - 1$$

به ازای هر مقدار حقیقی a، تساوی $2a - 1 = 2a - 1$ برقرار است.

۲۲ **گزینه ۳**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

گام اول

الف) تابع $f(x)$ بر روی مجموعهٔ اعداد حقیقی پیوسته است هرگاه در همهٔ نقاط این مجموعه پیوسته باشد.

ب) تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = x_{\circ}$ پیوسته است هرگاه داشته باشیم:

$$\lim_{x \to x_{\circ}^{+}} f(x) = \lim_{x \to x_{\circ}^{-}} f(x) = f(x_{\circ})$$

گام دوم

تابع $f(x)$ بر روی دو بازهٔ $x > ۲$ و $x < ۲$ به‌صورت یک تابع چندجمله‌ای بوده و پیوسـته است، بنابراین کافی است پیوستگی تابع را در نقطهٔ $x = ۲$ بررسی کنیم. باتوجه‌به قسمت (ب) از گام اول، حد چپ و راست تابع $f(x)$ را در نقطهٔ $x = ۲$ محاسبه کرده و با مقدار تابع در این نقطه مساوی قرار می‌دهیم.

$$\lim_{x \to ۲^{+}} f(x) = \lim_{x \to ۲^{+}} ax + b = ۲a + b$$

$$\lim_{x \to ۲^{-}} f(x) = \lim_{x \to ۲^{-}} x^{۲} + bx - ۱ = ۴ + ۲b - ۱ = ۳ + ۲b$$

$$f(۲) = ۵ \Rightarrow ۲a + b = ۳ + ۲b = ۵$$

داریم:

$$۳ + ۲b = ۵ \Rightarrow ۲b = ۲ \Rightarrow b = ۱$$
$$۲a + b = ۵ \Rightarrow ۲a + ۱ = ۵ \Rightarrow ۲a = ۴ \Rightarrow a = ۲$$

۲۳ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

گام اول

تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = x_{\circ}$ پیوسته است هرگاه حد تابع و مقدار تابع در این نقطه باهم برابر باشد؛ به عبارت دیگر داشته باشیم:

$$\lim_{x \to x_{\circ}} f(x) = f(x_{\circ})$$

گام دوم

ابتدا مقدار حد تابع را در نقطهٔ ۲ $x =$ محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x \to ۲} f(x) = \lim_{x \to ۲} \frac{x - \sqrt{۲x}}{۲ - x} = \frac{\circ}{\circ}$$

برای رفع ابهام، صورت و مخرج کسر را در مزدوج صورت، ضرب می‌کنیم. داریم:

$$\lim_{x \to ۲} \frac{x - \sqrt{۲x}}{۲ - x} \times \frac{x + \sqrt{۲x}}{x + \sqrt{۲x}} = \lim_{x \to ۲} \frac{x^{۲} - ۲x}{(۲ - x)(x + \sqrt{۲x})} = \lim_{x \to ۲} \frac{x(x - ۲)}{(۲ - x)(x + \sqrt{۲x})}$$

$$= \lim_{x \to ۲} \frac{-x}{x + \sqrt{۲x}} = \frac{-۲}{۲ + ۲} = \frac{-۲}{۴} = -\frac{۱}{۲}$$

باتوجه‌به گام اول، شرط پیوستگی تابع $f(x)$ در نقطهٔ ۲ $x =$ به‌صورت زیر است:

$$\lim_{x \to ۲} f(x) = f(۲) \Rightarrow a = -\frac{۱}{۲}$$

۲۴ | **گزینه ۴**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

گام اول

الف) تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = x_۰$ پیوسته است هرگاه داشته باشیم:

$$\lim_{x\to x_۰^+} f(x) = \lim_{x\to x_۰^-} f(x) = f(x_۰)$$

ب) می‌دانیم:

$$|u| = \begin{cases} u & ;u \geq ۰ \\ -u & ;u < ۰ \end{cases}$$

گام دوم

ضابطهٔ تابع شامل یک عبارت قدر مطلق است، پس ابتدا این عبارت را تجزیه و تعیین علامت می‌کنیم.

$$x^۲ + x - ۲ = (x + ۲)(x - ۱)$$

		-۲		۱	
$x^۲+x-۲$	+	۰	−	۰	+

بنابراین ضابطهٔ تابع $f(x)$ به‌صورت زیر می‌شود:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^۲ + x - ۲}{x - ۱} & ;x \leq -۲ \\[2mm] \dfrac{-x^۲ - x + ۲}{x - ۱} & ;-۲ < x < ۱ \\[2mm] a & ;x = ۱ \\[2mm] \dfrac{x^۲ + x - ۲}{x - ۱} & ;x > ۱ \end{cases}$$

اکنون باتوجه‌به قسمت (الف) از گام اول، پیوستگی تابع $f(x)$ را در نقطهٔ $x = ۱$ بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim_{x\to ۱^+} \frac{x^۲ + x - ۲}{x - ۱} = \lim_{x\to ۱^+} \frac{(x + ۲)(x - ۱)}{(x - ۱)} = \lim_{x\to ۱^+} (x + ۲) = ۱ + ۲ = ۳$$

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x) = \lim_{x\to ۱^-} \frac{-x^۲ - x + ۲}{x - ۱} = \lim_{x\to ۱^-} \frac{-(x + ۲)(x - ۱)}{x - ۱} = \lim_{x\to ۱^-} (-x - ۲) = -۱ - ۲ = -۳$$

باتوجه‌به اینکه حد چپ و راست تابع در نقطهٔ $x = ۱$ مساوی نیستند، پس این تابع به ازای هیچ مقدار a، در نقطهٔ $x = ۱$ پیوسته نخواهد بود.

۲۵ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

گام اول

تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = x_\circ$ پیوسته است هرگاه داشته باشیم:

$$\lim_{x\to x_\circ^-} f(x) = \lim_{x\to x_\circ^+} f(x) = f(x_\circ)$$

گام دوم

برای بررسی شرط پیوستگی تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = -۱$ ابتدا لازم است حد چپ و راست تابع را در این نقطه به دست آوریم.

$$\lim_{x\to -۱^+} f(x) = \lim_{x\to -۱^+} \frac{۱}{x+a} = \frac{۱}{-۱+a}$$

$$\lim_{x\to -۱^-} f(x) = \lim_{x\to -۱^-} x^۲ + ax = ۱ - a$$

$$f(-۱) = \frac{۱}{-۱+a}$$

باتوجه‌به گام اول داریم:

$$\lim_{x\to -۱^+} f(x) = \lim_{x\to -۱^-} f(x) = f(-۱) \Rightarrow \frac{۱}{-۱+a} = ۱ - a$$

$$\Rightarrow -(۱-a)(۱-a) = ۱ \Rightarrow -(۱-a)^۲ = ۱ \Rightarrow (۱-a)^۲ = -۱ \quad (*)$$

معادلهٔ $(*)$ فاقد ریشهٔ حقیقی است، پس مجموعه مقادیر a برابر $\varnothing$ می‌شود.

۲۶ **گزینه ۴**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

گام اول

الف) تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = x_{\circ}$ پیوسته است هرگاه حد چپ و راست تابع در این نقطه برابر با مقدار تابع در این نقطه باشد؛ به عبارت دیگر داشته باشیم:

$$\lim_{x \to x_{\circ}^-} f(x) = \lim_{x \to x_{\circ}^+} f(x) = f(x_{\circ})$$

ب) می‌دانیم:

$$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$$

$|x| > a \Leftrightarrow x > a$ یا $x < -a$

گام دوم

ابتدا باتوجه‌به قسمت (ب) از گام اول، محدودهٔ دو ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^{۲}-۱}{x+۱} & ; |x| > ۱ \\ ۲x & ; |x| \leq ۱ \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{x^{۲}-۱}{x+۱} & ; x > ۱ \text{ یا } x < -۱ \\ ۲x & ; -۱ \leq x \leq ۱ \end{cases}$$

اکنون حد چپ و راست تابع $f(x)$ را در دو نقطهٔ $x = ۱$ و $x = -۱$ محاسبه می‌کنیم تا بتوانیم پیوستگی تابع را در این دو نقطه بررسی کنیم.

$$\lim_{x \to ۱^+} f(x) = \lim_{x \to ۱^+} \frac{x^۲ - ۱}{x + ۱} = \frac{۱ - ۱}{۱ + ۱} = ۰$$

$$\lim_{x \to ۱^-} f(x) = \lim_{x \to ۱^-} ۲x = ۲(۱) = ۲$$

$$f(۱) = ۲(۱) = ۲$$

باتوجه‌به اینکه $\lim_{x \to ۱^-} f(x) \neq \lim_{x \to ۱^+} f(x)$ است، تابع در $x = ۱$ ناپیوسته است.

$$\lim_{x \to -۱^+} f(x) = \lim_{x \to -۱^+} ۲x = ۲(-۱) = -۲$$

$$\lim_{x \to -۱^-} f(x) = \lim_{x \to -۱^-} \frac{x^۲ - ۱}{x + ۱} = \lim_{x \to -۱^-} \frac{(x - ۱)(x + ۱)}{x + ۱} = \lim_{x \to -۱^-} (x - ۱) = -۱ - ۱ = -۲$$

$$f(-۱) = ۲(-۱) = -۲$$

داریم:

$$\lim_{x \to -۱^-} f(x) = \lim_{x \to -۱^+} f(x) = f(-۱)$$

بنابراین تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = -۱$ پیوسته است.

۲۷ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

گام اول

الف) تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = x_\circ$ پیوسته است هرگاه داشته باشیم:

$$\lim_{x\to x_\circ^+} f(x) = \lim_{x\to x_\circ^-} f(x) = f(x_\circ)$$

ب) می‌دانیم: $\sin x \underset{x\to\circ}{\sim} x$ و $1-\cos x \underset{x\to\circ}{\sim} \frac{x^2}{2}$

گام دوم

شرط پیوستگی تابع $f(x)$ را در نقطهٔ $x = \circ$ بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\circ^+} f(x) = \lim_{x\to\circ^+} \frac{\sin^2 x}{1-\cos x} = \lim_{x\to\circ^+} \frac{x^2}{\frac{x^2}{2}} = 2$$

$$\lim_{x\to\circ^-} f(x) = \lim_{x\to\circ^-} a\sin(x+\frac{\pi}{6}) = a\sin(\circ+\frac{\pi}{6}) = a\sin\frac{\pi}{6} = \frac{a}{2}$$

$$f(\circ) = a\sin(\circ+\frac{\pi}{6}) = a\sin\frac{\pi}{6} = \frac{a}{2}$$

تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = \circ$ پیوسته خواهد بود هرگاه:

$$\lim_{x\to\circ^+} f(x) = \lim_{x\to\circ^-} f(x) = f(\circ) \Leftrightarrow \frac{a}{2} = 2 \Leftrightarrow a = 4$$

۲۸ **گزینه ۱**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

گام اول

الف) تابع $f(x)$ روی یک بازه پیوسته است هرگاه در همهٔ نقاط این بازه پیوسته باشد.

ب) تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = x_0$ پیوسته است هرگاه حد چپ و راست تابع در این نقطه برابر با مقدار تابع در این نقطه باشد؛ به عبارت دیگر داشته باشیم:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

گام دوم

برای بررسی پیوستگی تابع $f(x)$ روی بازهٔ $[0, 2\pi]$ کافی است شرط پیوستگی را در نقطهٔ $x = \frac{\pi}{2}$ بررسی کنیم. داریم:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{2x-\pi} = \frac{0}{0}$$

با تغییر متغیر $x - \frac{\pi}{2} = t$ و با استفاده از هم‌ارزی $\sin u \underset{u\to 0}{\sim} u$، رفع ابهام می‌کنیم.

$$x - \frac{\pi}{2} = t \Rightarrow 2x - \pi = 2t$$

$$x \to \frac{\pi}{2} \Rightarrow t \to 0$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{2x-\pi} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin(\pi + 2t)}{2t} = \lim_{t\to 0} \frac{-\sin(2t)}{2t} = \lim_{t\to 0} \frac{-2t}{2t} = -1$$

تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = \frac{\pi}{2}$ پیوسته است هرگاه داشته باشیم:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = f(\frac{\pi}{2}) \Rightarrow a = -1$$

۲۹ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

گام اول

تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = x_۰$ پیوسته است هرگاه حد چپ و راست تابع در این نقطه برابر با مقدار تابع در این نقطه باشد؛ به عبارت دیگر داشته باشیم:

$$\lim_{x\to x_۰^-} f(x) = \lim_{x\to x_۰^+} f(x) = f(x_۰)$$

گام دوم

ابتدا حد چپ و راست تابع $f(x)$ را در نقطهٔ $x = \frac{\pi}{۴}$ محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}^-} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{۴}^-} \frac{۱-\tan^۲ x}{\cos ۲x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{۴}^-} \frac{۱-\frac{\sin^۲ x}{\cos^۲ x}}{\cos ۲x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{۴}^-} \frac{\frac{\cos^۲ x - \sin^۲ x}{\cos^۲ x}}{\cos^۲ x - \sin^۲ x}$$

$$= \lim_{x\to \frac{\pi}{۴}^-} \frac{۱}{\cos^۲ x} = \frac{۱}{(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲} = \frac{۱}{\frac{۱}{۲}} = ۲$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}^+} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{۴}^+} a\cos ۳x = a\cos\frac{۳\pi}{۴} = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}a$$

$$f(\frac{\pi}{۴}) = a\cos\frac{۳\pi}{۴} = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}a$$

با بررسی شرط پیوستگی در $x = \frac{\pi}{۴}$ مقدار a را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}^-} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{۴}^+} f(x) = f(\frac{\pi}{۴})$$

$$\Rightarrow -\frac{\sqrt{۲}}{۲}a = ۲ \Rightarrow \sqrt{۲}a = -۴ \Rightarrow a = -\frac{۴}{\sqrt{۲}} \Rightarrow a = -۲\sqrt{۲}$$

۳۰ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

گام اول

الف) می‌دانیم وقتی $x \to \infty$ هم‌ارزی زیر برقرار است:

$$\sqrt{ax^۲ + bx + c} \underset{x\to\infty}{\sim} \sqrt{a}|x + \frac{b}{۲a}|$$

ب) صورت و مخرج کسر، یک عبارت چندجمله‌ای است و حاصل حد تابع در بی‌نهایت برابر با یک عدد ثابت شده است؛ بنابراین بزرگ‌ترین

درجهٔ صورت و بزرگ‌ترین درجهٔ مخرج کسر باهم برابر است.

گام دوم

باتوجه‌به قسمت (الف) از گام اول، عبارت رادیکالی مخرج کسر را ساده می‌کنیم:

$$\sqrt{4x^2+15x} \underset{x\to-\infty}{\sim} \sqrt{4}\left|x+\frac{15}{8}\right| = -2\left(x+\frac{15}{8}\right)$$

(دقت کنید که چون $x \to -\infty$ بود، قرینهٔ عبارت درون قدر مطلق از آن خارج شد)

باتوجه‌به قسمت (ب) از گام اول، $n = 1$ است. داریم:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{ax+15}{3x-\left(-2\left(x+\frac{15}{8}\right)\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{ax+15}{3x+2x+\frac{15}{4}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{ax+15}{5x+\frac{15}{4}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{ax}{5x} = \frac{a}{5}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1 \Rightarrow \frac{a}{5} = -1 \Rightarrow a = -5$$

بنابراین ضابطهٔ تابع $f(x)$ برابر است با:

$$f(x) = \frac{-5x+15}{3x-\sqrt{4x^2+15x}}$$

اکنون حاصل حد تابع $f(x)$ را وقتی $x \to 3$ به دست می‌آوریم.

$$\lim_{x\to3} f(x) = \lim_{x\to3} \frac{-5x+15}{3x-\sqrt{4x^2+15x}} = \frac{0}{0}$$

با دو روش می‌توان ابهام به‌وجودآمده را رفع کرد.

روش اول:

با به‌کاربردن قاعدهٔ هوپیتال داریم:

$$\lim_{x\to3} \frac{-5x+15}{3x-\sqrt{4x^2+15x}} = \lim_{x\to3} \frac{-5}{3-\frac{8x+15}{2\sqrt{4x^2+15x}}} = \frac{-5}{3-\frac{24+15}{2\sqrt{36+45}}}$$

$$= \frac{-5}{3-\frac{39}{18}} = \frac{-5}{\frac{15}{18}} = \frac{-5}{\frac{5}{6}} = -6 \Rightarrow \lim_{x\to3} f(x) = -6$$

روش دوم:

با ضرب صورت و مخرج در مزدوج مخرج، داریم:

$$\lim_{x\to3} \frac{-5x+15}{3x-\sqrt{4x^2+15x}} \times \frac{3x+\sqrt{4x^2+15x}}{3x+\sqrt{4x^2+15x}} = \lim_{x\to3} \frac{-5(x-3)(3x+\sqrt{4x^2+15x})}{9x^2-4x^2-15x}$$

$$= \lim_{x\to3} \frac{-5(x-3)(3x+\sqrt{4x^2+15x})}{5x(x-3)} = \lim_{x\to3} -\frac{3x+\sqrt{4x^2+15x}}{x} = -\frac{9+9}{3} = -\frac{18}{3} = -6$$

۳۱ **گزینه ۲**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

گام اول

الف) تابع $f(x)$ بر روی یک بازه پیوسته است هرگاه در همهٔ نقاط این بازه پیوسته باشد.

ب) تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = x_\circ$ پیوسته است هرگاه داشته باشیم:

$$\lim_{x\to x_\circ^+} f(x) = \lim_{x\to x_\circ^-} f(x) = f(x_\circ)$$

گام دوم

تابع $f(x)$ با ضابطهٔ داده‌شده روی بازهٔ $[۱, +\infty)$ تعریف شده است. برای بررسی پیوستگی تابع $f(x)$ روی این بازه کافی است شرط پیوستگی تابع فقط در نقطهٔ $x = ۶$ بررسی شود. داریم:

$$\lim_{x\to ۶^-} f(x) = \lim_{x\to ۶^-} sin\,\frac{\pi}{x} = sin\,\frac{\pi}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

$$f(۶) = sin\,\frac{\pi}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

$$\lim_{x\to ۶^+} f(x) = \lim_{x\to ۶^+} a + cos^۲\,\frac{\pi x}{۳۶} = a + cos^۲\,\frac{\pi}{۶} = a + \left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)^۲ = a + \frac{۳}{۴}$$

برای پیوستگی تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = ۶$ کافی است تساوی زیر برقرار باشد:

$$a + \frac{۳}{۴} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow a = -\frac{۱}{۴}$$

۳۲ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

گام اول

الف) در تابع $f(x)$ وقتی $x \to +\infty$ برابر $-\frac{1}{2}$ است. چون حاصل حد وقتی $x \to +\infty$ یک عدد شده است، پس بزرگ‌ترین درجهٔ صورت کسر با بزرگ‌ترین درجهٔ مخرج کسر باید برابر باشد. بزرگ‌ترین درجهٔ x در صورت کسر ۱ است، پس $n = 1$ است.

ب) حاصل حد را وقتی‌که $x \to +\infty$ با استفاده از هم‌ارزی $\sqrt{ax^2+bx+c} \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{a}|x+\frac{b}{2a}|$ تعیین کرده و مقدار a را محاسبه می‌کنیم.

گام دوم

$$n = 1 \Rightarrow f(x) = \frac{2x+\sqrt{x^2-3x}}{ax-6}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+\sqrt{x^2-3x}}{ax-6} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+\sqrt{1}|x+(\frac{-3}{2})|}{ax-6}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+x-\frac{3}{2}}{ax-6} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x-\frac{3}{2}}{ax-6} = \frac{3}{a} = -\frac{1}{2} \Rightarrow a = -6$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2x+\sqrt{x^2-3x}}{-6x-6}$$

$$\lim_{x\to-1} f(x) = \lim_{x\to-1} \frac{2x+\sqrt{x^2-3x}}{-6x-6} = \frac{0}{0}$$

برای رفع ابهام صورت و مخرج کسر را در مزدوج صورت ضرب کرده و حاصل را ساده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to-1} \frac{2x+\sqrt{x^2-3x}}{-6x-6} \times \frac{2x-\sqrt{x^2-3x}}{2x-\sqrt{x^2-3x}} = \lim_{x\to-1} \frac{4x^2-x^2+3x}{-6(x+1)(2x-\sqrt{x^2-3x})}$$

$$= \lim_{x\to-1} \frac{3x(x+1)}{-6(x+1)(2x-\sqrt{x^2-3x})} = \lim_{x\to-1} \frac{3x}{-6(2x-\sqrt{x^2-3x})}$$

$$= \frac{-3}{-6(-2-2)} = \frac{-3}{(-6)(-4)} = \frac{-3}{24} = \frac{-1}{8}$$

۳۳ گزینه ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

گام اول

الف) برای اینکه تـابع $f(x)$ در بازهٔ $[\circ, ۲\pi]$ پیوسـته باشـد، بایـد بر روی تمام نقاط این بازه پیوسـته باشد. نقطهٔ مرز ضابطه‌ها، یعنی $x = \frac{\pi}{۲}$ نقطه‌ای است که پیوستگی در مورد آن باید بررسی شود.

ب) شرط پیوستگی در $x = \frac{\pi}{۲}$ به‌صورت زیر است:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^+} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^-} f(x) = f(\tfrac{\pi}{۲})$$

گام دوم

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^-} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^-} \frac{\cos ۳x}{\cos x} = \frac{\circ}{\circ}$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^-} \frac{\cos ۳x}{\cos x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^-} \frac{-\sin(\frac{۳\pi}{۲}-۳x)}{\sin(\frac{\pi}{۲}-x)}$$

$$\xrightarrow{x-\frac{\pi}{۲}=t} \lim_{t\to \circ^+} \frac{-\sin(۳t)}{\sin t} = -۳$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^+} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^+} \sin ۵x - a = \sin \frac{۵\pi}{۲} - a = ۱ - a$$

$$f(\tfrac{\pi}{۲}) = ۱ - a$$

شرط پیوستگی را بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^+} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^-} f(x) = f(\tfrac{\pi}{۲}) \Rightarrow ۱ - a = -۳ \Rightarrow a = ۴$$

۳۴ گزینه ۲

حد تابع در بی‌نهایت را به دست می‌آوریم.

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{ax + \sqrt{۴x^۲ + ۵}}{۲x + ۲} = \lim_{x\to +\infty} \frac{ax + \sqrt{۴x^۲}}{۲x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x(a+۲)}{۲x}$$

$$\xrightarrow{\lim_{x\to +\infty} f(x) = \frac{۵}{۲}} \frac{a+۲}{۲} = \frac{۵}{۲} \Rightarrow a = ۳$$

$$\lim_{x\to -۱} f(x) = \lim_{x\to -۱} f\frac{۳x + \sqrt{۴x^۲ + ۵}}{۲x + ۲} \xrightarrow[\text{ضرب و تقسیم می‌کنیم}]{\text{در مزدوج صورت}} \lim_{x\to -۱} \frac{۳x + \sqrt{۴x^۲ + ۵}}{۲x + ۲} \times \frac{۳x - \sqrt{۴x^۲ + ۵}}{۳x - \sqrt{۴x^۲ + ۵}}$$

$$= \lim_{x\to -۱} \frac{۹x^۲ - ۴x^۲ - ۵}{۲(x+۱)(-۳ - \sqrt{۴ + ۵})} = \lim_{x\to -۱} \frac{-۵(x-۱)(x+۱)}{۱۲(x+۱)} = \frac{۵}{۶}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۳۵ گزینه ۱

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos x-\sqrt{\cos x}}{\sin^۲ x} & ;x\neq ۰\\ a & ;x=۰\end{cases}$$

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\cos x-\sqrt{\cos x}}{\sin^۲ x}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{\cos x}(\sqrt{\cos x}-۱)}{۱-\cos^۲ x}$$

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{\cos x}(\sqrt{\cos x}-۱)}{(۱-\cos x)(۱+\cos x)}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{\cos x}(\sqrt{\cos x}-۱)}{(۱-\sqrt{\cos x})(۱+\sqrt{\cos x})(۱+\cos x)}=-\frac{۱}{۴}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۳۶ گزینه ۲

می‌دانیم: $[۲^-]=۱$

$$\lim_{x\to ۲^-}\frac{x+۲}{x^۲-۲x}+\frac{۲(۱)}{۲-x}=\lim_{x\to ۲^-}\frac{x+۲}{x(x-۲)}+\frac{۲}{۲-x}=\lim_{x\to ۲^-}\frac{x+۲}{x(x-۲)}-\frac{۲}{x-۲}$$

$$=\lim_{x\to ۲^-}\frac{x+۲-۲x}{x(x-۲)}=\lim_{x\to ۲^-}\frac{-۱}{x}=-\frac{۱}{۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۳۷ گزینه ۴

باتوجه‌به ضابطهٔ تابع f، می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^-}(۳x-[x])=۶-[۲^-]=۶-۱=۵\\ f(۲)=a\\ \lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^+}(x+۲)=۴\end{cases}$$

برای آنکه تابع f در ۲ $x=$ پیوسته باشد، باید $\lim_{x\to ۲^+} f(x)=f(۲)=\lim_{x\to ۲^-} f(x)$، پس باتوجه‌به مقادیر به‌دست‌آمده در بالا، ازآنجاکه $\lim_{x\to ۲^-} f(x)\neq\lim_{x\to ۲^+} f(x)$، بنابراین تابع f در ۲ $x=$ به ازای هیچ مقداری برای a پیوسته نیست.

تذکر:

$$a\in\mathbb{Z}\Rightarrow\begin{cases}[a^-]=a-۱\\ [a^+]=a\end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

۳۸ گزینه ۲

$$\lim_{x\to -۲}\left(\frac{۳}{(۲x+۱)(x+۲)}-\frac{۴}{(x+۲)(x-۲)}\right)=\lim_{x\to -۲}\left(\frac{۳(x-۲)-۴(۲x+۱)}{(۲x+۱)(x+۲)(x-۲)}\right)$$

$$=\lim_{x\to -۲}\left(\frac{-۵(x+۲)}{(۲x+۱)(x+۲)(x-۲)}\right)=\lim_{x\to -۲}\left(\frac{-۵}{(۲x+۱)(x-۲)}\right)=-\frac{۵}{۱۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۳۹ گزینه ۲

با استفاده از اتحاد $a^{۳}-b^{۳}=(a-b)(a^{۲}+ab+b^{۲})$ داریم:

$$\lim_{x\to ۲^+}\frac{۲-\sqrt[۳]{x+۶}}{\sqrt{x^{۲}-۴x+۴}}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{(۲-\sqrt[۳]{x+۶})(۴+۲\sqrt[۳]{x+۶}+\sqrt[۳]{(x+۶)^{۲}})}{\sqrt{(x-۲)^{۲}}(۴+۲\sqrt[۳]{x+۶}+\sqrt[۳]{(x+۶)^{۲}})}$$

$$=\lim_{x\to ۲^+}\frac{(۲-x)}{(x-۲)(۴+۲\sqrt[۳]{x+۶}+\sqrt[۳]{(x+۶)^{۲}})}=-\frac{۱}{۴+۴+۴}=-\frac{۱}{۱۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۴۰ گزینه ۲

برای اینکه تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{۱+\cos x}}{x-\pi} & ; \ \pi<x\leq ۲\pi\\ a\cos\dfrac{۲x}{۳} & ; \ ۰\leq x\leq \pi\end{cases}$ در نقطه‌ای به طول $x=\pi$ پیوسـته باشد، باید حد راست، حد چپ و مقدار تابع در این نقطه باهم برابر باشند.

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sqrt{۱+\cos x}}{x-\pi}\xrightarrow{\alpha=x-\pi}\lim_{\alpha\to ۰}\frac{\sqrt{۱+\cos(\alpha+\pi)}}{\alpha}\Rightarrow\lim_{\alpha\to ۰}\frac{\sqrt{۱-\cos\alpha}}{\alpha}$$

$$\xrightarrow[\lim_{x\to ۰}(\cos x)=۱-\frac{x^{۲}}{۲}]{\text{هم‌ارزی}}\frac{\sqrt{\frac{\alpha^{۲}}{۲}}}{\alpha}\xrightarrow[\alpha=x-\pi]{x>\pi}\frac{+\frac{\alpha}{\sqrt{۲}}}{\alpha}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

$$\text{برای پیوستگی}\Rightarrow a\cos\frac{۲\pi}{۳}=-\frac{۱}{۲}a\Rightarrow -\frac{۱}{۲}a=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\Rightarrow a=-\sqrt{۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۴۱ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

گام اول

حاصل حد $\frac{۰}{۰}$ و مبهم است. با استفاده از رفع ابهام عامل صفرشونده یا همان $x-۲$ حاصل حد را به دست می‌آوریم.

گام دوم

$$\lim_{x\to ۲}\left(\frac{۶}{x^{۲}-۲x}-\frac{x+۱}{x-۲}\right)=\lim_{x\to ۲}\left(\frac{۶}{x(x-۲)}-\frac{x+۱}{x-۲}\right)$$

$$=\lim_{x\to ۲}\left(\frac{۶-x^{۲}-x}{x(x-۲)}\right)=\lim_{x\to ۲}\left(\frac{-(x-۲)(x+۳)}{x(x-۲)}\right)$$

$$=\lim_{x\to ۲}\frac{-(x+۳)}{x}=\frac{-۵}{۲}$$

۴۲ گزینه ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

گام اول

تابع در $x=\circ$ پیوسته است؛ بنابراین $\lim_{x\to\circ} f(x)=f(\circ)$ است.

گام دوم

$$f(\circ)=\lim_{x\to\circ}\frac{x}{1-\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to\circ}\frac{x}{1-\sqrt{1-x}}\times\frac{1+\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}}$$
$$=\lim_{x\to\circ}\frac{x(1+\sqrt{1-x})}{(1-\sqrt{1-x})(1+\sqrt{1-x})}=\lim_{x\to\circ}\frac{x(1+\sqrt{1-x})}{1-1+x}$$
$$=\lim_{x\to\circ}\frac{x(1+\sqrt{1-x})}{x}\Rightarrow a=1+\sqrt{1-\circ}=1+1=2\Rightarrow a=2$$

۴۳ گزینه ۲

$$\lim_{x\to-1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{x}{x+1}\right)=\lim_{x\to-1}\frac{2}{(x-1)(x+1)}-\frac{x}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{2-x(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to-1}\frac{-x^2+x+2}{x^2-1}=\lim_{x\to-1}\frac{-\cancel{(x+1)}(x-2)}{(x-1)\cancel{(x+1)}}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{-(x-2)}{(x-1)}=\frac{-(-1-2)}{-1-1}=\frac{3}{-2}=\frac{-3}{2}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۴۴ گزینه ۳

شرط پیوستگی تابع در نقطهٔ $x=1$ به صورت زیر است:

$$\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^-} f(x)=f(1)$$

بنابراین داریم:

$$f(1)=a-a+2=2$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-}(ax-a+2)=a-a+2=2$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{x-1}{x-\sqrt{x}}=\frac{\circ}{\circ}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to1^+}\frac{x-1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}=\lim_{x\to1^+}\frac{\cancel{(\sqrt{x}-1)}\left(\sqrt{x}+1\right)}{(\sqrt{x})\cancel{(\sqrt{x}-1)}}=\frac{2}{1}=2$$

پس به ازای هر مقدار a، تابع در ۱ $x=$ پیوسته است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۴۵ گزینه ۳

یک دنباله در صورتی همگرا است که حـد آن یکتا باشد. یعنی $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. اگر حـد دنباله برابر بی نهایت شود یا این که مقدار آن یکتا نباشد، دنباله واگرا است.

بررسی همگرایی دنباله اول:

$$u_n = \left[\frac{(-۱)^n}{n}\right] : \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{(-۱)^n}{n}\right] = \begin{cases} [۰^+] = ۰ & n \text{ زوج} \\ [۰^-] = -۱ & n \text{ فرد} \end{cases}$$

دنباله واگراست.

بررسی همگرایی دنبالهٔ دوم:

$$b_n = \log\frac{۱}{n} : \lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} \log\frac{۱}{n} = \lim_{n\to+\infty}(\log ۱ - \log n) \overset{\log ۱ = ۰}{=} \lim_{n\to+\infty}(-\log n) = -\infty$$

دنباله واگراست.

بررسی همگرایی دنبالهٔ سوم:

$$a_n = \sin\frac{\pi}{n} : \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \sin\frac{\pi}{n} = \sin ۰ = ۰$$

پس دنبالهٔ $a_n = \sin\frac{\pi}{n}$ همگرا به صفر است.

بررسی همگرایی دنبالهٔ چهارم:

$$v_n = \frac{n^۲-۱}{۲n+۱} : \lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^۲-۱}{۲n+۱} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^۲}{۲n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{۲} = +\infty$$

دنبالهٔ $\{v_n\}$ هم واگرا شد.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۹

۴۶ گزینه ۳

با نوشتن چند جملهٔ ابتدایی دنباله و بررسی روند تغییرات آن، بزرگ ترین کران پایین دنباله را تعیین می کنیم.

$$U_n = \frac{۳^n}{n^۳} \to \text{جملات دنباله} : ۳, \frac{۹}{۸}, ۱, \frac{۸۱}{۶۴}, \frac{۲۴۳}{۱۲۵}, \ldots$$

از جملـهٔ سوم به بعد رشد جملات صورت از رشد جملات مخرج کسـر بیشتر می شود، بنابراین کمترین مقدار در بین جملات دنباله به جملهٔ سوم که برابر ۱ است اختصاص دارد. $(U_۳ = ۱)$ بنابراین بزرگ ترین کران پایین دنباله برابر ۱ می شود.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

۴۷ **گزینه ۱**

برای حل سؤال به دو نکتهٔ زیر توجه کنید:

الف) اگر دنباله ای همگرا باشد، آنگاه کران دار بوده و دارای کران بالا و پایین است.

ب) یک دنباله کران دار است اگر و فقط اگر مجموعهٔ جملات آن زیرمجموعه‌ای کران دار از $\mathbb{R}$ باشد.

بررسی گزینهٔ ۱:

$$U_n = \log \frac{1}{n} : n = 1 \Rightarrow U_1 = \log 1 = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \log \frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} (-\log n) = -\infty$$

این دنباله از بالا کران دار و از پایین بی کران است. پس دنبالهٔ $U_n = \log \frac{1}{n}$ همان دنباله ای است که به دنبال آن بودیم.

بررسی گزینهٔ ۲: دنبالهٔ $U_n = \sin \frac{\pi}{n}$ همگرا به صفر بوده و از بالا و پایین کران دار است. اصولاً دنباله هایی که به صورت کمان هایی از $\sin$ و $\cos$ هستند، کران دارند.

بررسی گزینهٔ ۳:

$$U_n = \cot \frac{\pi}{n} : \lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \cot \frac{\pi}{n} = +\infty$$

این دنباله از بالا بی کران است.

بررسی گزینهٔ ۴: جملات دنبالهٔ $U_n = \cos \frac{n\pi}{2}$ به صورت متناوب برابر صفر، ۱ و ۱− است. پس این دنباله هم از بالا و هم از پایین کران دار است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

۴۸ **گزینه ۴**

با به دست آوردن حد همگرایی دنباله و مشخص کردن نحوهٔ تغییرات جملات دنباله، کوچک ترین کران بالای دنباله را تعیین می کنیم.

$$U_n = \frac{3n^2-2n}{4n^2+5} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2-2n}{4n^2+5} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2}{4n^2} = \frac{3}{4}$$

با نوشتن چند جملهٔ ابتدایی دنباله وضعیت صعودی یا نزولی بودن آن را مشخص می کنیم:

$$U_n = \frac{3n^2-2n}{4n^2+5} : U_1 = \frac{1}{9}, U_2 = \frac{8}{21}, U_3 = \frac{21}{41}, U_4 = \frac{40}{69}, \ldots$$

با توجه به جملات دنباله مشخص است که دنبالهٔ موردنظر یک دنبالهٔ صعودی است. بنابراین حد همگرایی دنباله که برابر $\frac{3}{4}$ به دست آوردیم، کوچک ترین کران بالای دنباله است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

۴۹ **گزینه ۴**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵

گام اول

هر وقت در جملهٔ عمومی دنباله ای عبارت $(-1)^n$ وجود داشت، باید دنباله را در دو حالت n های زوج وnهای فرد موردبررسی قرار دهید.

گام دوم

مقادیر دنبالهٔ $a_n = \left[\frac{(-1)^n}{n}\right]$ را به ازای nهای زوج و فرد جداگانه تعیین می کنیم:

$$n \text{ زوج}: (-1)^n = 1 \Rightarrow a_n = \left[\frac{1}{n}\right] \xrightarrow[0<\frac{1}{n}<1]{n\geq 2} a_n = 0$$

$$n \text{ فرد}: (-1)^n = -1 \Rightarrow a_n = \left[-\frac{1}{n}\right] \xrightarrow[-1\leq -\frac{1}{n}<0]{n\geq 1} a_n = -1$$

جملات دنباله به صورت یک در میان برابر -1 و صفر می شود. این دنباله یک دنبالهٔ نوسانی بوده و از بالا و پایین کران دار است. پس دنبالهٔ دادەشده نه صعودی و نه نزولی، ولی کران دار است.

۵۰ **گزینه ۲**

باید دنباله ای را پیدا کنیم که جملات آن دائماً در حال زیادشدن بوده و حد همگرایی اش یکتا هم باشد.

بررسی گزینهٔ اول:

$$U_n = \left(\frac{۳}{۲}\right)^n \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{۳}{۲}\right)^n = +\infty$$

این دنباله واگراست.

بررسی گزینهٔ دوم:

$$U_n = \frac{n}{\sqrt{n^۲+۱}} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt{n^۲+۱}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n} = ۱$$

جملات دنباله : $\frac{۱}{\sqrt{۲}}, \frac{۲}{\sqrt{۵}}, \frac{۳}{\sqrt{۱۰}}, \frac{۴}{\sqrt{۱۷}}, \dots$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، مقدار جملات دنباله در حال افزایش است تا درنهایت به حد همگرایی، یعنی ۱ برسد. بنابراین دنبالهٔ $U_n = \frac{n}{\sqrt{n^۲+۱}}$ صعودی و همگراست.

بررسی گزینهٔ سوم:

$$U_n = \left[\frac{(-۱)^n}{n}\right] \Rightarrow \begin{cases} \text{زوج } n: \quad (-۱)^n = ۱ \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{(-۱)^n}{n}\right] = ۰ \\ \text{فرد } n: \quad (-۱)^n = -۱ \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{(-۱)^n}{n}\right] = \lim_{n\to+\infty}\left[-\frac{۱}{n}\right] = -۱ \end{cases}$$

این دنباله هم واگراست.

بررسی گزینهٔ چهارم:

$$U_n = \frac{۲n+۱}{n} : \lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{۲n+۱}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{۲n}{n} = ۲$$

$$U_n = \frac{۲n+۱}{n} = \frac{۲n}{n} + \frac{۱}{n} = ۲ + \frac{۱}{n}$$

$$n \uparrow \Rightarrow \frac{۱}{n} \downarrow \Rightarrow ۲ + \frac{۱}{n} \downarrow$$

با افزایش مقدار n جملات دنباله کاهش می یابد پس دنباله نزولی است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

۵۱ **گزینه ۱**

جملات این دنباله تشکیل یک دنبالهٔ هندسی نزولی نامحدود با قدرنسبت $q = \frac{۱}{۲}$ می دهند. پس حد مجموع جملات دنباله برابر است با:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = S_\infty = \frac{a_۱}{۱-q} = \frac{۱}{۱-\frac{۱}{۲}} = \frac{۱}{\frac{۱}{۲}} = ۲$$

پس این دنباله همگرا و درنتیجه کران دار است.

$$u_{n+۱} - u_n = (۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} + \dots + \frac{۱}{۲^n} + \frac{۱}{۲^{n+۱}}) - (۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} + \dots + \frac{۱}{۲^n}) = \frac{۱}{۲^{n+۱}}$$

$$\xrightarrow{n\geq ۱} \frac{۱}{۲^{n+۱}} > ۰ \Rightarrow u_{n+۱} - u_n > ۰$$

چون هر جملهٔ دنباله از جملهٔ قبلی بزرگ تر است بنابراین دنباله صعودی است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

۵۲ **گزینه ۴**

با توجه به رابطهٔ $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$، S_n را ساده کرده و حد همگرایی آن را تعیین می کنیم.

$$S_n=\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}=\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}=\frac{n^2+n}{2n^2}=\frac{n^2}{2n^2}+\frac{n}{2n^2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2}+0=\frac{1}{2}$$

پس دنباله همگرا و درنتیجه کران دار است.

برای یکنوایی دنباله بررسی می کنیم که با افزایش مقدار n جملات دنباله چگونه تغییر می کنند:

$$n\uparrow\Rightarrow\frac{1}{n}\downarrow\Rightarrow\frac{1}{2n}\downarrow\Rightarrow\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\downarrow$$

با افزایش مقدار n، جملات دنباله کاهش پیدا می کنند. پس دنباله نزولی است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

۵۳ **گزینه ۲**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۴

گام اول

به ازای $n\geq 2$ چند جملهٔ اول دنباله را تعیین می کنیم. به دلیل این که در بین گزینه ها فقط بحث صـعودی یا نزولی بودن دنباله مطرح است، پس با بررسی روند تغییرات جملات دنباله می توانیم وضعیت یکنوایی آن را مشخص کنیم.

گام دوم

$$u_n=n\left(\frac{2}{3}\right)^n,\ n\geq 2$$

$$u_2=2\left(\frac{2}{3}\right)^2=2\times\frac{4}{9}=\frac{8}{9},u_3=3\left(\frac{2}{3}\right)^3=3\times\frac{8}{27}=\frac{8}{9}$$

$$u_4=4\left(\frac{2}{3}\right)^4=4\times\frac{16}{81}=\frac{64}{81},u_5=5\left(\frac{2}{3}\right)^5=5\times\frac{32}{243}=\frac{160}{243}$$

از جملهٔ سوم به بعد جملات دنباله کاهش پیدا می‌کنند بنابراین دنباله نزولی است.

دنبـاله از پـایین کران دار است و چون نزولی هم هست پس همگرا می شود. بنـابراین، این دنبـاله یـک دنبالـهٔ نزولی و کران دار از بالا و پایین است.

۵۴ **گزینه ۲**

برای محاسبهٔ مجموع n جملـهٔ اول در یک تصاعد عددی از رابطهٔ $S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)$ اسـتفاده می کنیم. در این سؤال با محاسبهٔ a_1 و a_{15} از روی جملهٔ عمومی دنباله، مقدار S_{15} را به آسانی محاسبه می‌کنیم.

$$a_n=\frac{3}{2}n-5\Rightarrow\begin{cases}a_1=\frac{3}{2}-5=-\frac{7}{2}\\ a_{15}=\frac{3}{2}(15)-5=\frac{45}{2}-\frac{10}{2}=\frac{35}{2}\end{cases}$$

پس S_{15} برابر است با:

$$S_{15}=\frac{15}{2}\left(-\frac{7}{2}+\frac{35}{2}\right)=\frac{15}{2}\times\frac{28}{2}=7\times15=105$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۹

۵۵ **گزینه ۳**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۲

گام اول

وقتی سؤال اشاره می کند در یک دنبالهٔ عددی هر جمله از جملهٔ ماقبل خود به اندازهٔ $\frac{۱}{۲}$ کمتر است یعنی قدرنسبت تصاعد برابر $-\frac{۱}{۲}$ است ($d = -\frac{۱}{۲}$).

گام دوم

مقدار $a_۵$ در صورت سؤال دادەشده است. با توجه به رابطهٔ $a_۵ = a_۱ + ۴d$، $a_۱$ را حساب می کنیم.

$$a_۵ = a_۱ + ۴d \xrightarrow[d=-\frac{۱}{۲}]{a_۵=۳} ۳ = a_۱ + ۴(-\frac{۱}{۲}) = a_۱ - ۲ \Rightarrow a_۱ = ۳ + ۲ = ۵$$

برای محاسبهٔ $S_{۱۰}$ از رابطهٔ $S_n = \frac{n}{۲}\left[۲a_۱ + (n-۱)d\right]$ استفاده می کنیم.

$$S_{۱۰} = \frac{۱۰}{۲}(۲a_۱ + ۹d) = ۵(۱۰ - \frac{۹}{۲}) = ۵ \times \frac{۱۱}{۲} = \frac{۵۵}{۲} = ۲۷/۵$$

۵۶ **گزینه ۱**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۰

گام اول

با توجه به صورت سؤال $S_{۱۲} = ۱۳۸$ و $a_۶ = ۱۰$ است. یک دستگاه دو معادله و دو مجهول برحسب $a_۱$ و d تشکیل می دهیم.

گام دوم

$$S_{۱۲} = ۱۳۸ \Rightarrow \frac{۱۲}{۲}(۲a_۱ + ۱۱d) = ۱۳۸ \Rightarrow ۶(۲a_۱ + ۱۱d) = ۱۳۸ \Rightarrow ۲a_۱ + ۱۱d = ۲۳$$

$$a_۶ = ۱۰ \Rightarrow a_۱ + ۵d = ۱۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲a_۱ + ۱۱d = ۲۳ \\ a_۱ + ۵d = ۱۰ \xrightarrow{\times(-۲)} \end{cases} \begin{cases} ۲a_۱ + ۱۱d = ۲۳ \\ -۲a_۱ - ۱۰d = -۲۰ \end{cases} \xrightarrow{(+)} d = ۳$$

$$a_۱ + ۵d = ۱۰ \xrightarrow{d=۳} a_۱ + ۱۵ = ۱۰ \Rightarrow a_۱ = -۵$$

۵۷ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

گام اول

الف) اطلاعات سؤال را به زبان ریاضی می‌نویسیم:

$$a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{19} = 135$$
$$a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{20} = 150$$

ب) در عبارت‌های نوشته‌شده، سطر اول تشکیل یک دنبالهٔ عددی با جملهٔ اول a_1 و قدرنسبت $2d$ می دهد. سطر دوم هم تشکیل یک دنبالهٔ عددی با جملهٔ اول a_2 و قدرنسبت $2d$ می دهد که هر کدام ده جمله دارند.

گام دوم

مجموع ده جملهٔ اول را برای هر کدام از دنباله ها به دست می آوریم:

دنباله ای با قدرنسبت $2d$ جملهٔ اول a_1 : $S = \frac{10}{2}(2a_1 + 9(2d)) = 5(2a_1 + 18d) = 135 \Rightarrow 2a_1 + 18d = 27$

دنباله ای با قدرنسبت $2d$ جملهٔ اول a_2 : $S = \frac{10}{2}(2a_2 + 9(2d)) = 5(2a_2 + 18d) = 150 \Rightarrow 2a_2 + 18d = 30$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a_2 + 18d = 30 \\ 2a_1 + 18d = 27 \end{cases} \xrightarrow{(-)} 2(a_2 - a_1) = 3 \xrightarrow{a_2 - a_1 = d} 2d = 3 \Rightarrow d = \frac{3}{2}$$

$$2a_1 + 18d = 27 \xrightarrow{d=\frac{3}{2}} 2a_1 + 18(\frac{3}{2}) = 27 \Rightarrow 2a_1 + 27 = 27 \Rightarrow a_1 = 0$$

۵۸ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

گام اول

با توجه به صورت سؤال داریم:

$$S_5 = \frac{1}{3}(S_{10} - S_5) \xrightarrow{\times 3} 3S_5 = S_{10} - S_5 \Rightarrow S_{10} = 4S_5$$

گام دوم

$$S_{10} = 4S_5 \Rightarrow \frac{10}{2}(2a_1 + 9d) = 4 \times \frac{5}{2}(2a_1 + 4d) \Rightarrow 5(2a_1 + 9d) = 10(2a_1 + 4d)$$
$$\Rightarrow 10a_1 + 45d = 20a_1 + 40d \Rightarrow 10a_1 = 5d \Rightarrow d = 2a_1$$

اکنون نسبت جملهٔ دوم به جملهٔ اول را به دست می آوریم:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_1 + d}{a_1} \xrightarrow{d=2a_1} \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_1 + 2a_1}{a_1} = \frac{3a_1}{a_1} = 3$$

۵۹ **گزینه ۴**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

گام اول

الف) جملهٔ هفتم نصف جملهٔ سوم است یعنی $a_۷ = \frac{۱}{۲}a_۳$.

ب) می خواهیم n ای را پیدا کنیم که به ازای آن $S_n = ۰$ باشد.

گام دوم

$$a_۷ = \frac{۱}{۲}a_۳ \Rightarrow a_۱ + ۶d = \frac{۱}{۲}(a_۱ + ۲d) \xrightarrow{\times ۲} ۲a_۱ + ۱۲d = a_۱ + ۲d \Rightarrow a_۱ = -۱۰d$$

$$S_n = ۰ \Rightarrow \frac{n}{۲}\left[۲a_۱ + (n-۱)d\right] = ۰ \xrightarrow{a_۱ = -۱۰d} \frac{n}{۲}\left[۲(-۱۰d) + (n-۱)d\right] = ۰$$

$$\xrightarrow{n \neq ۰} -۲۰d + (n-۱)d = ۰ \Rightarrow (n-۱)d = ۲۰d \Rightarrow n - ۱ = ۲۰ \Rightarrow n = ۲۱$$

بنابراین مجموع بیست‌ویک جملهٔ اول این دنبالهٔ عددی برابر صفر می شود.

۶۰ **گزینه ۴**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۱

گام اول

الف) اعداد بخش پذیر بر ۶ هم بر ۲ و هم بر ۳ بخش پذیرند.

ب) اعداد بخش پذیر بر ۶ که بین ۱۰۰ و ۲۰۰ قرار داشته باشند تشکیل یک دنبالهٔ عددی با جملهٔ اول ۱۰۲ و قدرنسبت ۶ می دهند.

گام دوم

تعداد جملات در یک دنبالهٔ عددی از رابطهٔ زیر به دست می آید:

$$\text{جملات دنباله} : ۱۰۲, ۱۰۸, ۱۱۴, \ldots, ۱۹۸ \Rightarrow a_۱ = ۱۰۲, d = ۶$$

$$\text{تعداد جملات دنباله} = \frac{\text{جمله اول} - \text{جمله آخر}}{\text{فاصلهٔ دو جمله}} + ۱ = \frac{۱۹۸ - ۱۰۲}{۶} + ۱ = \frac{۹۶}{۶} + ۱ = ۱۶ + ۱ = ۱۷$$

$$S_{۱۷} = \frac{۱۷}{۲}(a_۱ + a_{۱۷}) = \frac{۱۷}{۲}(۱۰۲ + ۱۹۸) = \frac{۱۷}{۲} \times ۳۰۰ = ۱۷ \times ۱۵۰ = ۲۵۵۰$$

۶۱ **گزینه ۳**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵

گام اول

اعداد طبیعی فرد بخش پذیر بر ۳ و کوچک تر از ۱۰۱ تشکیل یک دنبالهٔ عددی با جملهٔ اول ۳ و قدرنسبت ۶ می دهند.

گام دوم

با توجه به رابطهٔ:

$$\text{تعداد جملات} = \frac{\text{جملهٔ آخر} - \text{جملهٔ اول}}{\text{فاصلهٔ دو جمله}} + ۱$$

ابتدا تعداد جملات را محاسبه و سپس مجموع جملات را حساب می کنیم:

$$\text{جملات دنباله} : ۳ , ۹ , ۱۵ , \dots , ۹۹$$

$$\text{تعداد جملات} = \frac{۹۹-۳}{۶} + ۱ = \frac{۹۶}{۶} + ۱ = ۱۶ + ۱ = ۱۷$$

$$S_{۱۷} = \frac{۱۷}{۲}(a_۱ + a_{۱۷}) = \frac{۱۷}{۲}(۳ + ۹۹) = \frac{۱۷}{۲} \times ۱۰۲ = ۱۷ \times ۵۱ = ۸۶۷$$

۶۲ **گزینه ۴**

در دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول $a_۱$ و قدرنسبت q مجموع n جملهٔ اول از رابطهٔ $S_n = \frac{a_۱(۱-q^n)}{۱-q}$ محاسبه می شود. بنابراین نسبت $\frac{S_{۱۴}}{S_۷}$ برابر است با:

$$\frac{S_{۱۴}}{S_۷} = \frac{\frac{a_۱(۱-q^{۱۴})}{۱-q}}{\frac{a_۱(۱-q^۷)}{۱-q}} = \frac{۱-q^{۱۴}}{۱-q^۷} = \frac{(۱-q^۷)(۱+q^۷)}{۱-q^۷} = (۱+q^۷)$$

قدرنسبت تصاعد را از رابطهٔ $q = \frac{a_۲}{a_۱}$ تعیین کرده و سپس مقدار $\frac{S_{۱۴}}{S_۷}$ را محاسبه می کنیم:

$$q = \frac{a_۲}{a_۱} = \frac{۲}{۱} = ۲$$

$$\frac{S_{۱۴}}{S_۷} = ۱ + q^۷ \xrightarrow{q=۲} \frac{S_{۱۴}}{S_۷} = ۱ + ۲^۷ = ۱ + ۱۲۸ = ۱۲۹$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

۶۳ گزینه ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

گام اول

الف) اگر سه جملهٔ متوالی از یک تصاعد هندسی را داشته باشیم، جملهٔ وسط، واسطهٔ هندسی دو جملهٔ دیگر است و داریم:

$$(2x)^2 = (x^2+4)(x^2-2)$$

ب) دنبالهٔ هندسی نزولی است اگر قدرنسبت آن عددی بین ۰ و ۱ باشد.

گام دوم

$$(2x)^2 = (x^2+4)(x^2-2) \Rightarrow 4x^2 = x^4 + 2x^2 - 8 \Rightarrow x^4 - 2x^2 - 8 = 0$$

$$\Rightarrow (x^2-4)(x^2+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \\ x^2 = -2 \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

به ازای هر کدام از مقادیر $x=2$ و $x=-2$ بررسی می کنیم دنبالهٔ هندسی نزولی تشکیل می شود یا خیر. داریم:

$x = 2 \rightarrow$ جملات دنباله $: 8, 4, 2, \ldots$

دنبالهٔ هندسی نزولی با قدرنسبت $q = \frac{1}{2}$

$x = -2 \rightarrow$ جملات دنباله $: 8, -4, 2, \ldots$

دنباله نوسانی بوده و نزولی نیست.

حال مجموع هفت جملهٔ اول یک تصاعد هندسی نزولی با جملهٔ اول $a_1 = 8$ و قدرنسبت $q = \frac{1}{2}$ را به دست می آوریم.

$$S_7 = \frac{a_1(1-q^7)}{1-q} = \frac{8(1-(\frac{1}{2})^7)}{1-\frac{1}{2}} = \frac{8(\frac{127}{128})}{\frac{1}{2}} = \frac{127}{8}$$

۶۴ گزینه ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

گام اول

الف) اگر دنباله حد همگرایی داشته باشد حتماً کران دار است.

ب) چون در گزینه های سؤال به غیریکنوا بودن دنباله اشاره نشـده، پس برای بررسـی صـعودی یا نزولی بودن دنباله مقدار جملهٔ اول دنباله را با حد همگرایی آن مقایسه می کنیم. اگر جملهٔ اول بزرگ تر بود دنباله نزولی و اگر حد همگرایی بزرگ تر بود دنباله صعودی است.

گام دوم

ابتدا حد همگرایی دنباله را (در صورت وجود) تعیین می کنیم:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{7+4^{n-1}}{2+4^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^{n-1}}{4^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{4}\times 4^n}{4^n} = \frac{1}{4}$$

حد همگرایی دنباله را $\frac{1}{4}$ به دست آوردیم. ازآنجاکه دنباله همگراست پس حتماً کران دار است. بنابراین دنبالهٔ $\{a_n\}$ کران دار است.

بررسی صعودی یا نزولی بودن دنباله:

$$a_n = \frac{7+4^{n-1}}{2+4^n} \Rightarrow a_1 = \frac{7+4^0}{2+4^1} = \frac{7+1}{2+4} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

جملهٔ اول از حد همگرایی بزرگ تر است، بنابراین دنبالهٔ $\{a_n\}$ نزولی است.

۶۵ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

گام اول

الف) جملهٔ عمومی یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اولیهٔ a_1 و قدر نسبت q به‌صورت $a_n = a_1 q^{n-1}$ تعریف می‌شود.

ب) اگر دنبالهٔ هندسی نزولی باشد آنگاه $0 < q < 1$ است.

ج) مجموع مجذورات تمام جملات، برابر $\frac{2}{3}$ مجذور مجموع تمام جملات است، یعنی:

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots = \frac{2}{3}(a_1 + a_2 + a_3 + \dots)^2$$

گام دوم

جملات دنبالهٔ هندسی نزولی نامتناهی را به‌صورت زیر در نظر بگیرید:

$$a_1, a_1q, a_1q^2, a_1q^3, \dots$$

مجذور هر جمله را می‌نویسیم:

$$a_1^2, a_1^2q^2, a_1^2q^4, \dots$$

بدین ترتیب یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول a_1^2 و قدر نسبت q^2 داریم. با استفاده از رابطهٔ حد مجموع جملات در یک دنبالهٔ هندسی نزولی می‌توان رابطهٔ قسمت (ج) از گام اول را چنین نوشت:

$$S'_\infty = \frac{2}{3}S_\infty \Rightarrow \frac{a_1^2}{1-q^2} = \frac{2}{3}\left(\frac{a_1}{1-q}\right)^2 \Rightarrow \frac{a_1^2}{(1-q)(1+q)} = \frac{2}{3} \times \frac{a_1^2}{(1-q)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+q} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{1-q} \Rightarrow 3 - 3q = 2 + 2q \Rightarrow 5q = 1 \Rightarrow q = \frac{1}{5} = 0/2$$

۶۶ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

گام اول

جملهٔ اول هر دسته را می‌توان به فرم $\frac{n(n-1)}{2} + 1$ و جملهٔ آخر هر دسته را می‌توان به فرم $\frac{n(n-1)}{2} + 1 + (n-1)$ در نظر گرفت.

گام دوم

جملهٔ اول و آخر دستهٔ بیستم به‌صورت زیر می‌شود:

جملهٔ اول : $\frac{20 \times 19}{2} + 1 = 190 + 1 = 191$

جملهٔ آخر : $191 + (20 - 1) = 191 + 19 = 210$

تعداد اعداد طبیعی از عدد ۱۹۱ تا ۲۱۰ برابر ۲۰ تا است. مجموع این ۲۰ عدد برابر است با:

مجموع اعداد $= \frac{(\text{جملهٔ اول} + \text{جملهٔ آخر}) \times \text{تعداد}}{2} = \frac{(191+210)\times 20}{2} = 4010$

۶۷ **گزینه ۲**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

گام اول

الف) ابتدا حد همگرایی دنباله را وقتی $n \to +\infty$ تعیین می‌کنیم.

ب) باتوجه‌به روند تغییرات جملات دنباله وضعیت صعودی یا نزولی بودن آن (وضعیت یکنواختی دنباله) را مشخص می‌کنیم.

گام دوم

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+3^n}{5+3^{n-1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+3^n}{5+\frac{3^n}{3}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3^n}{\frac{3^n}{3}} = 3$$

دنبالهٔ $\{a_n\}$ همگرا و درنتیجه کران‌دار است. چون $a_1 = \frac{4}{5}$ و $\lim_{n\to+\infty} a_n = 3$ است و همچنین باتوجه‌به اینکه گزینه‌ای مبنی بر غیر یکنوا بودن دنبالهٔ $\{a_n\}$ وجود ندارد، دنباله صعودی در نظر گرفته می‌شود.

۶۸ **گزینه ۳**

چون دنبالهٔ هندسی نزولی است؛ بنابراین حد مجموع جملات برابر است با:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q},\ a_1 = \frac{1}{2}(\frac{a_1}{1-q} - a_1) \Rightarrow 2 = \frac{1}{1-q} - 1 \Rightarrow 1-q = \frac{1}{3} \Rightarrow q = \frac{2}{3}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۶۹ **گزینه ۴**

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+1}{2n^2+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2}{2n^2} = \frac{3}{2}$$

باتوجه‌به اینکه حد همگرایی دنباله برابر $\frac{3}{2}$ است دنباله از بالا و پایین کران‌دار است. در ادامه وضعیت صعودی یا نزولی بودن دنباله را مشخص می‌کنیم:

$$(a_n)' = \frac{6n(2n^2+n)-(4n+1)(3n^2+1)}{(2n^2+n)^2} = \frac{12n^3+6n^2-12n^3-4n-3n^2-1}{(2n^2+n)^2}$$

$$= \frac{3n^2-4n-1}{(2n^2+n)^2}$$

حاصل $(a_n)'$ به ازای $n \geq 2$ مثبت است؛ بنابراین دنباله صعودی است، پس می‌توان نتیجه گرفت کوچک‌ترین جملهٔ دنباله جملهٔ دوم دنباله است:

$$a_{\min} = a_2 = \frac{13}{10} \Rightarrow \frac{13}{10} \leq a_n \leq \frac{3}{2}$$

بنابراین کوچک‌ترین کران بالای دنباله برابر $\frac{3}{2}$ است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

۷۰ **گزینه ۳**

نکته: هر دنبالهٔ همگرا، کران‌دار است ولی عکس این مطلب در حالت کلی صادق نیست.

به بررسی تک‌تک گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینهٔ (۱): دنباله نه صعودی و نه نزولی است اما کران‌دار و همگرا است.

گزینهٔ (۲): جملات دنباله نشان می‌دهد که صعودی نیست.

$$\frac{۱}{۲}, ۱, \frac{۹}{۸}, ۱, \ldots$$

گزینهٔ (۳): همگرا است پس کران‌دار هم می‌باشد. ازطرفی صعودی نیز می‌باشد زیرا:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{۲n^۲+۱}{n^۲+۳}=\lim_{n\to+\infty}\frac{۲n^۲}{n^۲}=۲ \Rightarrow \text{همگرا است}$$

$$a_n=\frac{۲n^۲+۱}{n^۲+۳}=۲-\frac{۵}{n^۲+۳}$$

$$\frac{۳}{۴}, \frac{۹}{۷}, \frac{۱۹}{۱۲}, \frac{۳۳}{۱۹}, \ldots \quad \Rightarrow \text{دنباله صعودی}$$

گزینه (۴) هم بی‌کران و هم واگرا است، زیرا:

$$\lim_{n\to\infty} b_n=+\infty$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

منبع: کنکور سراسری

۱ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{\frac{4x+5}{x+3}}$ حاصل $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ کدام است؟

۱) $\frac{7}{48}$　　۲) $\frac{5}{24}$

۳) $\frac{7}{24}$　　۴) $\frac{7}{16}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۲ اگر $f(x)=(x-2)\sqrt[3]{x^2}$ حاصل $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-1+\Delta x)-f(-1)}{\Delta x}$ کدام است؟

۱) ۲　　۲) ۳

۳) $\frac{2}{3}$　　۴) $\frac{4}{3}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

۳ آهنگ متوسط تغییر تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x^2+144}$ نسبت به تغییر x روی بازه‌ای از $x=5$ تا $x=9$ کدام است؟

۱) ۰/۴　　۲) ۰/۵

۳) ۰/۶　　۴) ۰/۷

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۴

۴ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=x+\frac{1}{x}$ آهنگ متوسط تغییر تابع، وقتی متغیر از عدد ۲ به عدد $2+h$ تغییر کند برابر $\frac{8}{9}$ است. h کدام است؟

۱) ۱/۵　　۲) ۲

۳) ۲/۵　　۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

۵ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x}$ آهنگ متوسط تغییر تابع وقتی متغیر x از ۴ به ۲۵ تغییر کند، برابر آهنگ لحظه‌ای در نقطهٔ a می‌باشد. a کدام است؟

۱) ۱۱/۷۵　　۲) ۱۲/۲۵

۳) ۱۲/۵　　۴) ۱۳/۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

۶ آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)=\sqrt{x^{2}+16}$ نسبت به متغیر x روی بازهٔ $[0,3]$، از آهنگ لحظه‌ای تابع در $x=\sqrt{2}$ چقدر کمتر است؟

۱) صفر
۲) $\frac{1}{18}$
۳) $\frac{1}{12}$
۴) $\frac{1}{9}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

۷ در تابع $f(x)=\sqrt{x}$، آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به تغییر متغیر روی بازهٔ $[2/25,\ 2/56]$، از آهنگ آنی در شروع این بازه چقدر کمتر است؟

۱) $\frac{1}{93}$
۲) $\frac{2}{93}$
۳) $\frac{1}{62}$
۴) $\frac{1}{31}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

۸ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{36}{x^{2}}$، آهنگ متوسط تابع از $x_1=2$ تا $x_2=3$ چقدر از آهنگ لحظه‌ای آن در $x=\sqrt[3]{12}$ بیشتر است؟

۱) ۱
۲) ۱/۵
۳) ۲
۴) ۲/۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۹ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x}{x-1}$، آهنگ متوسط از $x_1=2$ تا $x_2=5$ برابر آهنگ لحظه‌ای آن در $x=\alpha$ است. α کدام است؟

۱) ۲/۵
۲) $1+\sqrt{3}$
۳) ۳
۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

۱۰ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=3x^{2}+4x-2$، تفاضل آهنگ لحظه‌ای در نقطهٔ $a+\frac{h}{2}$ از آهنـگ متوسط تغییر تابع وقتی متغیر x از عدد a به $a+h$ تغییر کند، کدام حالت است؟

۱) h
۲) $2h$
۳) $3h$
۴) صفر

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

۱۱ در تابع با ضابطهٔ $f(x) = x^{۳}$، آهنگ متوسط تغییر این تابع وقتی $x = ۳$ و $\Delta x = ۰/۱$ است از آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در نقطهٔ $x = ۳$ چقدر بیشتر است؟

۱) ۰/۳۱
۲) ۰/۴۲
۳) ۰/۶۳
۴) ۰/۹۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

۱۲ نقطهٔ $M(x,y)$ بر روی منحنی به معادلهٔ $y = \sqrt{x+۸}$ در حرکت است. T فاصلهٔ نقطهٔ M تا مبدأ مختصات است. آهنگ لحظه‌ای تغییر T در نقطهٔ $x = ۷$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۵}{۱۶}$
۲) $\frac{۱۵}{۸}$
۳) $\frac{۳}{۷}$
۴) $\frac{۵}{۴}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

۱۳ اگر $g(x) = \sqrt{۲x}$ و $f(x) = (x^{۲} - x)$ حاصل $\lim_{\Delta x \to ۰} \frac{f(۲+\Delta x)g(۲+\Delta x) - f(۲)g(۲)}{\Delta x}$ برابر کدام است؟

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۶
۴) ۷

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۲

۱۴ مشتق تابع $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ در نقطهٔ $x = ۱$ برابر ۳ است. اگر $f(۱) = ۰$ و $f'(۱) = -۴$ و $g'(۱)$ موجود باشد، مقدار $g(۱)$ کدام است؟

۱) $-\frac{۴}{۳}$
۲) $-\frac{۳}{۴}$
۳) $\frac{۳}{۴}$
۴) $\frac{۴}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۱

۱۵ اگر $f(x) = \sqrt{\frac{۳x-۱}{۲x+۱}}$، آنگاه $f'(۲)$ کدام است؟

۱) ۰/۲-
۲) ۰/۱-
۳) ۰/۱
۴) ۰/۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۱

۱۶ مقدار مشتق $\sin x \cos 3x$ در نقطهٔ $x = \frac{\pi}{4}$ کدام است؟

۱) ۲-
۲) ۱-
۳) ۱
۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

۱۷ مقدار مشتق $\sin^3 \sqrt{x}$ در نقطهٔ $x = \frac{\pi^2}{9}$ چقدر است؟

۱) $\frac{9}{16\pi}$
۲) $\frac{9}{8\pi}$
۳) $\frac{27}{16\pi}$
۴) $\frac{27}{8\pi}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

۱۸ اندازهٔ مشتق تابع $y = \ln e^{\sqrt{\sin x}}$ در نقطه‌ای به طول $x = \frac{\pi}{6}$ واقع بر آن، کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{3}}{8}$
۲) $\frac{\sqrt{6}}{8}$
۳) $\frac{\sqrt{3}}{4}$
۴) $\frac{\sqrt{6}}{4}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۱۹ مقدار مشتق تابع $y = \cos^2\left(\frac{\pi}{3} + \frac{x}{4}\right)$، به ازای $x = \frac{\pi}{3}$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{4}$
۲) $-\frac{1}{8}$
۳) $\frac{1}{8}$
۴) $\frac{1}{4}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۲۰ مقدار مشتق تابع $y = \cos^2 \frac{\pi}{3x}$ به ازای $x = 4$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{96}$
۲) $\frac{\pi}{72}$
۳) $\frac{\pi}{48}$
۴) $\frac{\pi}{32}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

۲۱ مقدار مشتق تابع $y = \tan^{3}x - \cot 2x$ در نقطهٔ $x = \frac{\pi}{6}$ کدام است؟

۱) $\frac{4}{3}$
۲) 2
۳) $\frac{8}{3}$
۴) 4

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

۲۲ مقدار مشتق $\frac{1-\cos^{2}x}{2-\sin^{2}x}$ به ازای $x = \frac{\pi}{4}$ کدام است؟

۱) $\frac{4}{9}$
۲) $\frac{5}{9}$
۳) $\frac{7}{9}$
۴) $\frac{8}{9}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

۲۳ اگر $f(x) = \sqrt{2\sin \pi x^{2}}$، آنگاه $f'(\frac{1}{\sqrt{6}})$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$
۲) $\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$
۳) $\pi\sqrt{2}$
۴) $\pi\sqrt{3}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵

۲۴ مقدار مشتق $\sqrt{1+\tan^{2}\frac{1}{x}}$، به ازای $x = \frac{3}{\pi}$ کدام است؟

۱) $\frac{-2\pi^{2}\sqrt{3}}{9}$
۲) $\frac{-2\pi^{2}}{9}$
۳) $\frac{2\pi^{2}}{9}$
۴) $\frac{2\pi^{2}\sqrt{3}}{9}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۲۵ اندازهٔ مشتق تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{\pi}\sqrt{3+2\cos\frac{\pi}{x}}$ به ازای $x = 3$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{12}$
۲) $\frac{1}{9}$
۳) $\frac{1}{6}$
۴) $\frac{1}{4}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

۲۶ اندازهٔ مشتق تابع به معادلهٔ $y = \frac{1-\tan 2x}{1+\tan 2x}$، به ازای $x = \frac{\pi}{8}$ کدام است؟

۱) ۲-

۲) ۱-

۳) $\frac{1}{2}$

۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۹

۲۷ اگر $f(x) = \sin 2x$ و $g(x) = \sqrt{x}$ باشد، مقدار مشتق تابع $gof(x)$ در $x = \frac{\pi}{12}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{\frac{3}{2}}$

۲) $\sqrt{\frac{4}{3}}$

۳) $\sqrt{\frac{3}{4}}$

۴) $\sqrt{\frac{2}{3}}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۰

۲۸ در تابع با ضابطهٔ $f(x) = (2x+1)^{-\frac{1}{2}}$، آهنگ متوسط تغییر تابع، از نقطهٔ $x = 4$ تا $x = 12$ از آهنگ لحظه‌ای آن در نقطهٔ $x = 4$ چقدر بیشتر است؟

۱) $\frac{7}{540}$

۲) $\frac{11}{540}$

۳) $\frac{7}{270}$

۴) $\frac{11}{270}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۲۹ مشتق تابع $y = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4}\right)$، به ازای $x = \frac{\pi}{3}$ کدام است؟

۱) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

۲) $\frac{-1}{2}$

۳) $-\frac{1}{4}$

۴) $-\frac{1}{8}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۳۰ در تابع با ضابطهٔ $f(x) = \sqrt{x}$، آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به متغیر x در نقطهٔ $x = 1$ با نمو متغیر ۰/۲۱، از آهنگ لحظه‌ای تابع در این نقطه، چقدر کمتر است؟

۱) $\frac{1}{42}$

۲) $\frac{1}{21}$

۳) $\frac{3}{42}$

۴) $\frac{2}{21}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

۳۱ اگر $f(x) = \frac{۴}{۵}x - \frac{۱}{۵}|x|$ و $g(x) = ۴x + |x|$ باشند، مشتق تابع fog کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) مشتق ندارد.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

۳۲ در تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{x-۱}{\sqrt{x}}$، آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به متغیر x، در نقطهٔ $x = ۱$ با نمو ۰/۴۴، از آهنگ لحظه‌ای تابع در این نقطه، چقدر کمتر است؟

۱) $\frac{۱}{۳۰}$
۲) $\frac{۱}{۲۴}$
۳) $\frac{۱}{۱۲}$
۴) $\frac{۱}{۶}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

۳۳ مشتق $y = sin^۳\sqrt{۲x}$، به ازای $x = \frac{\pi^۲}{۱۸}$ کدام است؟

۱) $\frac{۹}{۸\pi}$
۲) $\frac{۹}{۴\pi}$
۳) $\frac{۲۷}{۸\pi}$
۴) $\frac{۲۷}{۴\pi}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۳۴ مشتق تابع $y = ۲cos^۲(\frac{\pi}{۶} - \frac{x}{۴})$ در نقطهٔ $x = \frac{\pi}{۶}$ کدام است؟

۱) $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
۲) $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۴}$
۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

۳۵ مشتق تابع $y = \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}$ در نقطهٔ $x = \frac{\pi}{۴}$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) صفر

۳) ۱ ۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۳۶ در تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{۱+\cos x} & ;x > ۰ \\ \sin ۲x & ;x \leq ۰ \end{cases}$، مقدار $f'_-(۰) - f'_+(۰)$، کدام است؟

۱) ۰/۷۵ ۲) ۱

۳) ۱/۲۵ ۴) ۱/۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۳۷ در نقاطی از منحنی به معادلهٔ $x^۲ - ۴xy + ۳y^۲ + ۱ = ۰$ خط مماس بر منحنی موازی محور xها است. طول نقاط تماس، کدام است؟

۱) ۱ و -۲ ۲) ۲ و -۲

۳) ۱ و -۱ ۴) ۲ و -۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۳۸ اگر تابع f در $x_۰$ مشتق‌پذیر و $\lim_{h \to ۰^+} \frac{f(x_۰+h)-f(x_۰)}{h} = -۲$، مقدار $\lim_{h \to ۰^-} \frac{f(x_۰)-f(x_۰-h)}{h}$ کدام است؟

۱) $۲ - f(x_۰)$ ۲) $۲ + f(x_۰)$

۳) ۲ ۴) -۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۰

۳۹ اگر $f(x) = |x-۲| + \sqrt{۲x}$ باشد، حاصل $\lim_{\Delta x \to ۰^-} \frac{f(۲+\Delta x)-f(۲)}{\Delta x}$ کدام است؟

۱) ۲-
۲) $-\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) $\frac{۳}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

۴۰ اگر $f(x) = x|\sin \pi x|$، مقدار $f'_+(۱)$ کدام است؟

۱) $-\pi$
۲) ۱-
۳) ۱
۴) π

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

۴۱ در تابع با ضابطهٔ $f(x) = |x| \cdot [x]$، مقدار $f'_-(۰) - f'_+(۰)$ کدام است؟

۱) ۱-
۲) صفر
۳) ۱
۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

۴۲ تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} ax - a & ;x < ۱ \\ x^۲ - x & ;x \geq ۱ \end{cases}$ به ازای کدام مقادیر a در نقطهٔ $x = ۱$ مشتق‌پذیر است؟

۱) ۱-
۲) ۱
۳) هر مقدار a
۴) هیچ مقدار a

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

۴۳ در تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} \sqrt[۳]{(۲x + ۶)^۲} & ;x > ۱ \\ ax + b & ;x \leq ۱ \end{cases}$ مقدار $f'(۱)$ موجود است. b کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۳}$
۲) $\frac{۷}{۳}$
۳) $\frac{۸}{۳}$
۴) $\frac{۱۰}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

۴۴ در تابع با ضابطهٔ $f(x) = x\sqrt{x} + |x - 1|$، مقدار $f'_{+}(1) + 3f'_{-}(1)$ کدام است؟

۱) ۲

۲) ۳

۳) ۴

۴) ۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۴۵ اگر $y = \tan^2(\pi u)$ و $u = x + \sqrt{x}$، مقدار $\frac{dy}{dx}$ به ازای $x = \frac{1}{4}$ کدام است؟

۱) -8π

۲) -4π

۳) 4π

۴) 8π

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

۴۶ اگر $y = \sqrt{2u} - \frac{1}{u}$ و $u = \sin^2 x - \cos 2x$ باشد، مقدار $\frac{dy}{dx}$ به ازای $x = \frac{\pi}{4}$ کدام است؟

۱) ۹

۲) ۱۰

۳) ۱۲

۴) ۱۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

۴۷ معادلهٔ خط مماس بر نمودار تابع $y = \tan^2 x + \cos 2x$ در $x = \frac{\pi}{4}$ کدام است؟

۱) $y + x = 1 + \frac{\pi}{4}$

۲) $y + x = 1 - \frac{\pi}{4}$

۳) $y + 2x = 1 - \frac{\pi}{2}$

۴) $y - 2x = 1 - \frac{\pi}{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۴

۴۸ معادلهٔ خط مماس بر منحنی به معادلهٔ $y = \frac{۱}{۲}cos\,۲x - cosx$ در نقطهٔ $x = \frac{\pi}{۳}$ واقع بر آن کدام است؟

۱) $y = -\frac{۳}{۴}$
۲) $y = \frac{۳}{۴}$
۳) $y = x + \frac{\pi}{۴} - ۱$
۴) $y = x + \frac{\pi}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵

۴۹ عرض از مبدأ خط مماس بر منحنی به معادلهٔ $y = \sqrt{x^۲ + ۳x}$ در نقطهٔ $x = ۱$ واقع بر آن کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۵}$
۲) $\frac{۳}{۴}$
۳) $\frac{۳}{۲}$
۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

۵۰ خط مماس بر منحنی به معادلهٔ $y = x^۳ - x^۲$ در نقطهٔ $x = ۱$ واقع بر آن، منحنی را در نقطهٔ دیگر (A) قطع می‌کند. عرض نقطهٔ A کدام است؟

۱) -۳
۲) -۲
۳) ۲
۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

۵۱ معادلهٔ خط قائم بر نمودار تابع با ضابطهٔ $y = \frac{x+۱}{۲x-۱}$ در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن کدام است؟

۱) $۳y = x + ۱$
۲) $۳y = -x + ۵$
۳) $y = -۳x + ۷$
۴) $y = ۳x - ۵$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۲

۵۲ معادلهٔ خط قائم بر منحنی $y = \frac{x+۱}{۲x-۱}$ در نقطه‌ای به طول ۱- واقع بر آن کدام است؟

۱) $y - ۳x = ۳$
۲) $y + ۳x = -۳$
۳) $۳y - x = ۱$
۴) $۳y + x = -۱$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

۵۳ معادلهٔ خط قائم بر منحنی $y = \frac{۱}{\sqrt{x}} + x$ در نقطه‌ای به طول ۱ واقع بر آن، کدام است؟

۱) $y - ۲x = ۰$
۲) $۲y - x = ۰$
۳) $y + x = ۳$
۴) $y + ۲x = ۴$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

۵۴ عرض از مبدأ خط قائم بر نمودار تابع با ضابطهٔ $y = \frac{۲x-۱}{x+۱}$ در نقطهٔ تقاطعش با محور طول‌ها کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$
۲) $\frac{۳}{۸}$
۳) $\frac{-۱}{۳}$
۴) $\frac{-۲}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

۵۵ خط مماس بر نمودار $y = \frac{۱}{\sin x}, ۰ < x < \pi$، در نقطه‌ای به طول $x_۰$ واقع بر آن، موازی خط به معادلهٔ $۳y - ۲x = ۵$ است، $x_۰$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۳}$
۲) $\frac{۲\pi}{۳}$
۳) $\frac{\pi}{۶}$
۴) $\frac{۵\pi}{۶}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۰

۵۶ خط مماس بر منحنی به معادلهٔ $y = x^۳ + ۳x^۲ + ۱$، بر خط به معادلهٔ $x - ۳y = ۲$ عمود است. این خط مماس، از نقطه‌ای با کدام مختصات می‌گذرد؟

۱) $(۱, ۳)$
۲) $(۱, ۴)$
۳) $(۲, -۶)$
۴) $(۲, -۴)$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۹

۵۷ خط $y = -۱$ بر نمودار تابع f با ضابطهٔ $f(x) = ۲x^۲ - x + a$ مماس است. a کدام است؟

۱) $-\frac{۹}{۸}$
۲) $-\frac{۷}{۸}$
۳) $\frac{۷}{۸}$
۴) $\frac{۹}{۸}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۰

۵۸ خط به معادلهٔ $y = ۲x - ۵$ در نقطه‌ای به طول ۱ بر منحنی به معادلهٔ $y = ax^۲ + bx + ۱$ مماس است، a کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۶

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

۵۹ در یک نقطه از منحنی $\sqrt{y} + yx\sqrt{x} - ۶x = ۰$ خط مماس بر منحنی موازی محور xها است. طول آن نقطه کدام است؟

۱) ۳
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

۶۰ از رابطهٔ $\frac{\sqrt{y}}{x} + y\sqrt{x} = ۶$ مقدار $\frac{dy}{dx}$ در نقطهٔ $(۱,۴)$ کدام است؟

۱) ۲-
۲) ۱-
۳) صفر
۴) $\frac{۱}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

۶۱ از رابطهٔ $y^۲ = \sqrt{x + ۲y} + x - ۲y$، مقدار مشتق y نسبت به x در نقطهٔ (۵ ،۲) کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۱۵}$
۲) $\frac{۷}{۳۴}$
۳) $\frac{۴}{۱۷}$
۴) $\frac{۴}{۱۵}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

۶۲ از رابطهٔ $y = sin(x - ۲y) + \sqrt{x - y}$ مقدار مشتق y نسبت به x در نقطهٔ $(۲,۱)$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۷}$
۲) $\frac{۳}{۷}$
۳) $\frac{۲}{۵}$
۴) $\frac{۳}{۵}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵

۶۳ عرض از مبدأ خط مماس بر منحنی به معادلهٔ $y = ln\sqrt{\frac{sin\,x}{۱+cos x}}$ در نقطهٔ $x = \frac{\pi}{۲}$ واقع بر آن، کدام است؟

۱) $-\frac{\pi}{۴}$
۲) $-\frac{\pi}{۲}$
۳) $\frac{\pi}{۴}$
۴) $\frac{\pi}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

۶۴ معادلهٔ خط قائم بر منحنی $y = ln(۲x - ۵)$ در نقطهٔ تلاقی آن با محور xها، کدام است؟

۱) $x + ۲y = ۳$
۲) $x - ۲y = ۳$
۳) $۲x + y = ۶$
۴) $۲x - y = ۶$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

۶۵ کدام خط بر منحنی به معادلهٔ $e^{x+y} + x + y - ۱ = ۰$ در مبدأ مختصات مماس است؟

۱) $y = x$
۲) $y = -x$
۳) $y = ۲x$
۴) $y = -۲x$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

۶۶ خط قائم بر منحنی به معادلهٔ $e^{۲y} + ln\,x + \frac{y}{x} = ۱$ در نقطهٔ $(۱, ۰)$، محور yها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) ۳-
۲) ۲-
۳) $\frac{۱}{۳}$
۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

۶۷ عرض از مبدأ خط قائم بر منحنی به معادلهٔ $y^۲ = y\ ln(x^۲ - ۳) + ۲x$، در نقطهٔ $(۲, -۲)$ کدام است؟

۱) $-\frac{۲}{۳}$
۲) $-\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۲}{۳}$
۴) $\frac{۳}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

۶۸ معادلهٔ خط مماس بر منحنی به معادلهٔ $y^۲ + y = ۲e^{۲x-۱}$ در نقطهٔ $\left(\frac{۱}{۲}, ۱\right)$ کدام است؟

۱) $y - ۴x = -۱$
۲) $y + ۲x = ۲$
۳) $۳y - ۴x = ۱$
۴) $۳y + ۴x = ۵$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

۶۹ خط مماس بر منحنی به معادلهٔ $ln(x^۲ - y) = \sqrt{y + ۱} - x$ در نقطهٔ $(۲, ۳)$، نیمساز ناحیهٔ اول را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) $\frac{۳}{۴}$
۲) $\frac{۵}{۴}$
۳) $\frac{۴}{۳}$
۴) $\frac{۵}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۷۰ خط به معادلهٔ $y + x = 0$ قائم بر منحنی به معادلهٔ $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + ln(x-1)$ است، طول پای قائم کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

۷۱ از رابطهٔ $y = y^2 e^{\sin 2x} + \sin x$ حاصل $\frac{dy}{dx}$ در نقطهٔ $(0,1)$ کدام است؟

۱) ۴-
۲) ۳-
۳) ۲
۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۲

۷۲ اگر $f(x) = \begin{cases} xe^{x^2} & ;x \leq 0 \\ ln(x^2+1) & ;x > 0 \end{cases}$ آنگاه $f'_{+}(0) - f'_{-}(0)$ کدام است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۱-
۴) ۲-

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۴

۷۳ خط مماس بر منحنی به معادلهٔ $y = \sqrt{2xe^{2-x}}$، در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن، محور y را با کدام عرض، قطع می‌کند؟

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

۷۴ در تابع ضمنی $4\sqrt{xy} + \frac{1}{y} - 2x = 1$ تابع y برحسب متغیر x منظور شده است. معادلهٔ خط مماس بر منحنی آن در نقطهٔ $(4,1)$ کدام است؟

۱) $y + 2x = 9$
۲) $2y - x = -2$
۳) $3y + x = 7$
۴) $3y - x = -1$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۷۵ تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} \sin^{۲} x - \cos ۲x & ; ۰ < x \leq \frac{\pi}{۴} \\ a \tan x + b \sin ۲x & ; \frac{\pi}{۴} < x < \frac{\pi}{۲} \end{cases}$ در نقطهٔ $x = \frac{\pi}{۴}$ مشتق‌پذیر است. b کدام است؟

۱) -۱ ۲) $-\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۷۶ تابع f با ضابطهٔ $f(x) = x^{۳} + ax^{۲} + x$ همواره صعودی است، تغییرات a کدام است؟

۱) $۰ \leq a < ۲$ ۲) $-\sqrt{۳} \leq a < ۲$

۳) $|a| \leq \sqrt{۳}$ ۴) $|a| \leq ۲$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۲

۷۷ نمودار تابع با ضابطهٔ $y = \frac{x}{۱-x^{۲}}$ بر کدام بازه صعودی است؟

۱) $(-۲, ۰)$ ۲) $(-\infty, -۲)$

۳) $(۰, ۲)$ ۴) $(-۲, ۲)$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۰

۷۸ عرض از مبدأ خط مماس بر منحنی به معادلهٔ $y = ln\,\frac{\sqrt{۴x+۱}}{x^{۲}-۲x+۳}$، در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن، کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۹}$ ۲) $\frac{۸}{۹}$

۳) $\frac{۵}{۳}$ ۴) $\frac{۱۰}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

۷۹ در تابع با ضابطهٔ $f(x) = \left(\sqrt{\frac{x+۲}{۲x-۳}}\right)^{۳}$، حاصل $\lim_{x\to ۲} \frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}$، کدام است؟

۱) -۲۱ ۲) -۱۸

۳) ۱۲ ۴) ۱۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۸۰ از نقطهٔ $A(0\,,\,4/5)$ خطی بر منحنی $y = x^2$ عمود شده است. طول پای عمود با علامت مثبت، کدام می‌باشد؟

۱) $\sqrt{3}$
۲) ۲
۳) $\sqrt{5}$
۴) ۲/۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۸۱ در نقطه‌ای از منحنی به معادلهٔ $x + \sqrt{xy} + y = 12$ خط مماس بر منحنی، عمود بر نیمساز ربع اول می‌باشد. طول نقطهٔ تماس، کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۶

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۸۲ در تابع با ضابطهٔ $f(x) = \sqrt{x}$، آهنگ متوسط تغییر تابع، از نقطهٔ $x = ۴$ تا $x = ۶/۲۵$ از آهنگ لحظه‌ای آن در نقطهٔ $x = ۴$ چقدر کمتر است؟

۱) $\frac{۱}{۳۶}$
۲) $\frac{۱}{۱۸}$
۳) $\frac{۵}{۷۲}$
۴) $\frac{۱}{۱۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۸۳ به ازای کدام مقدار m نمودار تابع $y = ۲x^۲ + (m + ۱)x + m + ۶$ بر نیمساز ناحیهٔ اوّل محورهای مختصات، مماس است؟

۱) ۴-
۲) ۴ و ۱۲-
۳) ۴- و ۱۲
۴) ۱۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۸۴ خط قائم بر منحنی $y = xe^{x^{۲}-۴}$، در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن، محور xها را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) ۱۰
۲) ۱۶
۳) ۱۸
۴) ۲۰

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۸۵ تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} \frac{۳}{x} - ۵ & ;x \geq ۱ \\ x^{۲} + ax + b & ;x < ۱ \end{cases}$، در نقطهٔ $x = ۱$ مشتق‌پذیر می‌باشد. b کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۸۶ در کدام بازه، تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - 3x^2$، صعودی و تقعر نمودار آن، روبه‌پایین است؟

۱) $(-2, 0)$
۲) $(-2, 1)$
۳) $(-1, 2)$
۴) $(0, 1)$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۸۷ معادلهٔ خط مماس بر منحنی به معادلهٔ $\sqrt[3]{y} + x\sqrt{x} = 9$ در نقطهٔ $(4, 1)$ کدام است؟

۱) $y + 9x = 37$
۲) $y + 6x = 25$
۳) $2y + 3x = 14$
۴) $y + 3x = 13$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

۸۸ معادلهٔ خط مماس بر منحنی به معادلهٔ $x^{2}y - 2x\sqrt{y} = 8$ در نقطهٔ $(2, 4)$، کدام است؟

۱) $y - 2x = 0$

۲) $y + 2x = 8$

۳) $2y + x = 10$

۴) $y + 4x = 12$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

منبع: کنکور سراسری

۱ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

گام اول

می‌دانیم: $f'(x_\circ) = \lim_{h\to\circ} \frac{f(x_\circ+h)-f(x_\circ)}{h}$ بنابراین حاصل حد $\lim_{h\to\circ} \frac{f(۱+h)-f(۱)}{h}$ برابر $f'(۱)$ است.

گام دوم

کافی است مقدار مشتق تابع $f(x)$ را در نقطهٔ $x=۱$ محاسبه کنیم:

$$f(x) = \sqrt{\frac{۴x+۵}{x+۳}} \Rightarrow f'(x) = \frac{۱}{۲\sqrt{\frac{۴x+۵}{x+۳}}} \times \frac{۴(x+۳)-(۴x+۵)}{(x+۳)^۲}$$

$$\Rightarrow f'(۱) = \frac{۱}{۲\sqrt{\frac{۴+۵}{۱+۳}}} \times \frac{۴(۱+۳)-(۴+۵)}{(۱+۳)^۲} = \frac{۱}{۳} \times \frac{۷}{۱۶} = \frac{۷}{۴۸}$$

۲ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

گام اول

الف) طبق تعریف مشتق یک تابع داریم:

$$f'(-۱) = \lim_{\Delta x\to\circ} \frac{f(-۱+\Delta x)-f(-۱)}{\Delta x}$$

ب) هرگاه u و v دو تابع برحسب x باشند و داشته باشیم $f(x) = u \times v$ آنگاه مشتق تابع f چنین تعریف می‌شود:

$$f'(x) = u' \times v + v' \times u$$

گام دوم

باتوجه‌به قسمت ب از گام اول ابتدا ضابطهٔ مشتق $f'(x)$ را تعیین می‌کنیم:

$$f(x) = (x-۲)\sqrt[۳]{x^۲} = (x-۲)x^{\frac{۲}{۳}}$$

$$f'(x) = ۱ \times x^{\frac{۲}{۳}} + \frac{۲}{۳}x^{-\frac{۱}{۳}}(x-۲) = \sqrt[۳]{x^۲} + \frac{۲(x-۲)}{۳\sqrt[۳]{x}}$$

هدف ما محاسبه $f'(-۱)$ است، پس داریم:

$$f'(-۱) = \sqrt[۳]{(-۱)^۲} + \frac{۲(-۱-۲)}{۳\sqrt[۳]{-۱}} = ۱ + \frac{۲(-۳)}{۳(-۱)} = ۱+۲ = ۳$$

۳ **گزینه ۲**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۴

گام اول

آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)$ روی بازه‌ای از x تا $x+\Delta x$ چنین تعریف می‌شود:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

گام دوم

باتوجه‌به تعریف آهنگ متوسط تغییر داریم:

$$x=۹ \text{ تا } x=۵ \text{ آهنگ متوسط تغییر تابع از } = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(۹)-f(۵)}{۹-۵} = \frac{\sqrt{۹^۲+۱۴۴}-\sqrt{۵^۲+۱۴۴}}{۴}$$

$$= \frac{\sqrt{۸۱+۱۴۴}-\sqrt{۲۵+۱۴۴}}{۴} = \frac{\sqrt{۲۲۵}-\sqrt{۱۶۹}}{۴} = \frac{۱۵-۱۳}{۴} = \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲} = ۰/۵$$

۴ **گزینه ۳**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

گام اول

آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)$ از x به $x+\Delta x$ چنین تعریف می‌شود:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

گام دوم

طبق تعریف آهنگ متوسط تغییر داریم:

$$۲+h \text{ به } ۲ \text{ آهنگ متوسط تغییر از } = \frac{f(۲+h)-f(۲)}{۲+h-۲} = \frac{f(۲+h)-f(۲)}{h}$$

بنابراین:

$$۲+h \text{ به } ۲ \text{ آهنگ متوسط تغییر از } = \frac{\left(۲+h+\frac{۱}{۲+h}\right)-\left(۲+\frac{۱}{۲}\right)}{h} = \frac{h+\frac{۱}{۲+h}-\frac{۱}{۲}}{h} = \frac{۸}{۹}$$

$$\Rightarrow h+\frac{۱}{۲+h}-\frac{۱}{۲} = \frac{۸}{۹}h \xrightarrow{\times ۹} ۹h+\frac{۹}{۲+h}-\frac{۹}{۲} = ۸h \Rightarrow h+\frac{۹}{۲+h} = \frac{۹}{۲} \Rightarrow \frac{h(h+۲)+۹}{۲+h} = \frac{۹}{۲} \Rightarrow \frac{h^۲+۲h+۹}{۲+h} = \frac{۹}{۲}$$

$$\Rightarrow ۲h^۲+۴h+۱۸ = ۹h+۱۸ \Rightarrow ۲h^۲-۵h = ۰ \Rightarrow h(۲h-۵) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} h = ۰ & \text{غ ق ق} \\ h = \frac{۵}{۲} = ۲/۵ \end{cases}$$

اگر $h=۰$ باشد، متغیر اصلاً تغییری نکرده و آهنگ متوسط تغییر آن برابر صفر می‌شود.

۵ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

گام اول

الف) آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)$ از x_1 به x_2 چنین تعریف می‌شود:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

ب) آهنگ لحظه‌ای (آنی) تغییر تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=a$ برابر $f'(a)$ است.

گام دوم

برای محاسبهٔ مقدار a کافی است معادلهٔ $f'(a)=\frac{f(25)-f(4)}{25-4}$ را حل کنیم.

$$f(x)=\sqrt{x} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\text{آهنگ متوسط تغییر از ۴ به ۲۵} = \frac{f(25)-f(4)}{25-4} = \frac{\sqrt{25}-\sqrt{4}}{21} = \frac{5-2}{21} = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای تغییر در } a = f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

$$f'(a)=\frac{1}{7} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{a}}=\frac{1}{7} \Rightarrow 2\sqrt{a}=7 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 4a=49 \Rightarrow a=\frac{49}{4}=12/25$$

۶ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

گام اول

الف) آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)$ روی بازه‌ای از x تا $x+\Delta x$ چنین تعریف می‌شود:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر $f(x)$ در نقطهٔ $x=a$ برابر $f'(a)$ است.

گام دوم

باتوجه‌به گام اول، دو مقدار آهنگ متوسط و آهنگ لحظه‌ای را به دست آورده، سپس اختلاف آن‌ها از یکدیگر را محاسبه می‌کنیم.

$$\text{آهنگ متوسط تغییر در بازهٔ } [0,3] = \frac{f(3)-f(0)}{3-0} = \frac{\sqrt{9+16}-\sqrt{16}}{3} = \frac{\sqrt{25}-\sqrt{16}}{3} = \frac{5-4}{3} = \frac{1}{3}$$

$$f(x)=\sqrt{x^2+16} \Rightarrow f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+16}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+16}}$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای تغییر در } x=\sqrt{2} = f'(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(\sqrt{2})^2+16}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+16}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}} = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{3}$$

مقدار آهنگ لحظه‌ای و آهنگ متوسط برابر شد، پس اختلاف آن‌ها برابر صفر است.

۷ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

گام اول

الف) آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)$ روی بازه‌ای از x_1 تا x_2 چنین تعریف می‌شود:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

ب) آهنگ آنی یا لحظه‌ای در نقطهٔ $x = a$ برابر $f'(a)$ است.

گام دوم

باتوجه‌به گام اول، آهنگ متوسط و آهنگ آنی خواسته‌شده را به دست می‌آوریم سپس اختلاف آن‌ها را محاسبه می‌کنیم.

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(۲/۵۶)-f(۲/۲۵)}{۲/۵۶-۲/۲۵} = \frac{\sqrt{۲/۵۶}-\sqrt{۲/۲۵}}{۰/۳۱} = \frac{۱/۶-۱/۵}{۰/۳۱} = \frac{۰/۱}{۰/۳۱} = \frac{۱۰}{۳۱}$$

$$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{۱}{۲\sqrt{x}}$$

$$x = ۲/۲۵ \text{ آهنگ آنی در نقطهٔ } = f'(۲/۲۵) = \frac{۱}{۲\sqrt{۲/۲۵}} = \frac{۱}{۲\times ۱/۵} = \frac{۱}{۳}$$

اختلاف آهنگ آنی و آهنگ لحظه‌ای برابر است با:

$$f'(۲/۲۵) - \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{۱}{۳} - \frac{۱۰}{۳۱} = \frac{۳۱-۳۰}{۹۳} = \frac{۱}{۹۳}$$

۸ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

گام اول

الف) آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)$ روی بازه‌ای از x_1 تا x_2 چنین تعریف می‌شود:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = a$ برابر $f'(a)$ است.

گام دوم

باتوجه‌به قسمت الف از گام اول، آهنگ متوسط تغییر تابع از $x_1 = ۲$ تا $x_2 = ۳$ برابر است با:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(۳)-f(۲)}{۳-۲} = \frac{\frac{۳۶}{۹}-\frac{۳۶}{۴}}{۱} = \frac{۳۶}{۹} - \frac{۳۶}{۴} = ۴ - ۹ = -۵$$

برای به دست آوردن آهنگ لحظه‌ای در نقطهٔ $x = \sqrt[۳]{۱۲}$ ابتدا ضابطهٔ مشتق تابع را تعیین می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{۳۶}{x^۲} \Rightarrow f'(x) = \frac{۰\times x^۲-۲x(۳۶)}{x^۴} = -\frac{۷۲x}{x^۴} = -\frac{۷۲}{x^۳}$$

$$x = \sqrt[۳]{۱۲} \text{ آهنگ آنی در } = f'(\sqrt[۳]{۱۲}) = -\frac{۷۲}{(\sqrt[۳]{۱۲})^۳} = -\frac{۷۲}{۱۲} = -۶$$

اختلاف آهنگ متوسط و لحظه‌ای برابر است با:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} - f'(\sqrt[۳]{۱۲}) = -۵ - (-۶) = ۱$$

۹ **گزینه ۳**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

گام اول

الف) آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)$ از x_1 تا x_2 چنین تعریف می‌شود:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=a$ برابر $f'(a)$ است.

گام دوم

$\frac{\Delta f}{\Delta x}$ و $f'(\alpha)$ را محاسبه و باهم برابر قرار می‌دهیم، سپس مقدار α را تعیین می‌کنیم.

$$x_2=5 \text{ تا } x_1=2 \text{ آهنگ متوسط تغییر تابع از } =\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(5)-f(2)}{5-2}=\frac{\frac{5}{5-1}-\frac{2}{2-1}}{3}=\frac{\frac{5}{4}-2}{3}=\frac{\frac{5-8}{4}}{3}=\frac{-\frac{3}{4}}{3}=\frac{-1}{4}$$

$$f(x)=\frac{x}{x-1}\Rightarrow f'(x)=\frac{x-1-x}{(x-1)^2}=\frac{-1}{(x-1)^2}$$

$$x=\alpha \text{ آهنگ لحظه‌ای در } =f'(\alpha)=\frac{-1}{(\alpha-1)^2}$$

$$\Rightarrow f'(\alpha)=\frac{\Delta f}{\Delta x}\Rightarrow -\frac{1}{(\alpha-1)^2}=-\frac{1}{4}\Rightarrow (\alpha-1)^2=4\Rightarrow \begin{cases}\alpha-1=2\Rightarrow \alpha=3\\ \alpha-1=-2\Rightarrow \alpha=-1 \quad \text{غ ق ق}\end{cases}$$

۱۰ **گزینه ۴**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

گام اول

الف) آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در نقطهٔ $x=a$ برابر $f'(a)$ است.

ب) آهنگ متوسط تغییر تابع از x_1 تا x_2 چنین تعریف می‌شود:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

گام دوم

آهنگ لحظه‌ای در نقطهٔ $a+\frac{h}{2}$ یعنی محاسبهٔ $f'\left(a+\frac{h}{2}\right)$، پس ابتدا ضابطهٔ $f'(x)$ را تعیین و سپس $f'\left(a+\frac{h}{2}\right)$ را محاسبه می‌کنیم.

$$f(x)=3x^2+4x-2\Rightarrow f'(x)=6x+4$$

$$a+\frac{h}{2} \text{ آهنگ لحظه‌ای تغییر در } =f'\left(a+\frac{h}{2}\right)=6\left(a+\frac{h}{2}\right)+4=6a+3h+4$$

آهنگ متوسط تغییر تابع از a تا $a+h$ برابر است با:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{\left[3(a+h)^2+4(a+h)-2\right]-\left(3a^2+4a-2\right)}{h}$$

$$=\frac{3a^2+6ah+3h^2+4a+4h-2-3a^2-4a+2}{h}=\frac{6ah+3h^2+4h}{h}=6a+3h+4$$

مقدار آهنگ متوسط و آهنگ لحظه‌ای در موارد خواسته‌شده برابر شد، پس تفاضل آن‌ها برابر صفر است.

۱۱ **گزینه ۴**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

گام اول

الف) آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)$ از x تا $x+\Delta x$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=۳$ برابر $f'(۳)$ است.

گام دوم

باتوجه‌به قسمت الف از گام اول، به ازای $x=۳$ و $\Delta x=۰/۱$ داریم:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر تابع}=\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(۳/۱)-f(۳)}{۰/۱}=\frac{(۳/۱)^۳-۳^۳}{۰/۱}=\frac{۲۹/۷۹۱-۲۷}{۰/۱}=\frac{۲/۷۹۱}{۰/۱}=۲۷/۹۱$$

قبل از محاسبهٔ $f'(۳)$، ضابطهٔ $f'(x)$ را تعیین می‌کنیم.

$$f(x)=x^۳\Rightarrow f'(x)=۳x^۲$$

$$x=۳\ \text{آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در}=f'(۳)=۳(۳)^۲=۳^۳=۲۷$$

بنابراین اختلاف آهنگ متوسط و آهنگ لحظه‌ای برابر است با:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}-f'(۳)=۲۷/۹۱-۲۷=۰/۹۱$$

۱۲ **گزینه ۱**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

گام اول

الف) فاصلهٔ نقطهٔ $M(x,y)$ از مبدأ مختصات از رابطهٔ $T=\sqrt{x^۲+y^۲}$ به دست می‌آید.

ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در یک نقطه، برابر مشتق تابع در آن نقطه است.

گام دوم

در رابطهٔ T از قسمت الف از گام اول، عبارت $y=\sqrt{x+۸}$ را جایگزین می‌کنیم تا T برحسب متغیر x به دست آید.

$$T=\sqrt{x^۲+y^۲}\xrightarrow{y=\sqrt{x+۸}}T=\sqrt{x^۲+\left(\sqrt{x+۸}\right)^۲}=\sqrt{x^۲+x+۸}$$

از T نسبت به x مشتق گرفته و مقدار آن را در $x=۷$ حساب می‌کنیم:

$$T'=\frac{۲x+۱}{۲\sqrt{x^۲+x+۸}}\Rightarrow T'(۷)=\frac{۲(۷)+۱}{۲\sqrt{۷^۲+۷+۸}}=\frac{۱۴+۱}{۲\sqrt{۴۹+۷+۸}}=\frac{۱۵}{۲\sqrt{۶۴}}=\frac{۱۵}{۲\times۸}=\frac{۱۵}{۱۶}$$

۱۳ گزینه ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۲

گام اول

الف) طبق تعریف مشتق داریم:

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

ب) می‌دانیم $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

گام دوم

باتوجه‌به اینکه می‌دانیم $(fg)(x) = f(x)g(x)$ است، می‌توان نوشت:

$$\lim_{\Delta x \to ۰} \frac{f(۲+\Delta x)g(۲+\Delta x)-f(۲)g(۲)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{(fg)(۲+\Delta x)-(fg)(۲)}{\Delta x} = (fg)'(۲)$$

باتوجه‌به قسمت ب از گام اول داریم:

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x) = (۲x-۱)\sqrt{۲x} + (x^۲ - x)\frac{۲}{۲\sqrt{۲x}}$$

$$\Rightarrow (fg)'(۲) = (۴-۱)\sqrt{۴} + (۲^۲-۲)\frac{۱}{\sqrt{۴}} = (۳\times۲) + \frac{۲}{۲} = ۶+۱ = ۷$$

۱۴ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۱

گام اول

مشتق تابع کسری $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow y' = \frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^۲(x)}$$

گام دوم

باتوجه‌به مشخص بودن مقادیر $y'(۱)$، $f(۱)$ و $f'(۱)$، مقدار $g(۱)$ را حساب می‌کنیم (دلیل اینکه مقدار دقیق $g'(۱)$ ذکرنشده صفر بودن $f(۱)$ است).

$$y'(۱) = \frac{f'(۱)g(۱)-g'(۱)f(۱)}{g^۲(۱)} \Rightarrow ۳ = \frac{(-۴)g(۱)-۰}{g^۲(۱)} \Rightarrow ۳ = \frac{-۴g(۱)}{g^۲(۱)} \Rightarrow ۳ = \frac{-۴}{g(۱)} \Rightarrow g(۱) = -\frac{۴}{۳}$$

۱۵ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۱

گام اول

الف) مشتق تابع $y = \sqrt{u}$ از رابطهٔ $y' = \frac{u'}{۲\sqrt{u}}$ به دست می‌آید.

ب) مشتق تابع کسری $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$y' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^{۲}(x)}$$

گام دوم

با استفاده از روابط گام اول، ابتدا $f'(x)$ و سپس $f'(۲)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(x) = \sqrt{\frac{۳x-۱}{۲x+۱}} \Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{۳(۲x+۱)-۲(۳x-۱)}{(۲x+۱)^{۲}}}{۲\sqrt{\frac{۳x-۱}{۲x+۱}}} = \frac{\frac{۵}{(۲x+۱)^{۲}}}{۲\sqrt{\frac{۳x-۱}{۲x+۱}}} \Rightarrow f'(۲) = \frac{\frac{۵}{(۴+۱)^{۲}}}{۲\sqrt{\frac{۶-۱}{۴+۱}}} = \frac{\frac{۵}{۵^{۲}}}{۲\sqrt{\frac{۵}{۵}}} = \frac{\frac{۱}{۵}}{۲} = \frac{۱}{۱۰}$$

۱۶ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

گام اول

الف) اگر u و v در تابع برحسب x باشد و داشته باشیم $y = u \times v$ آنگاه داریم: $y' = u'v + uv'$

ب) می‌دانیم:

$$y = \cos u \Rightarrow y' = -u' \sin u$$
$$y = \sin u \Rightarrow y' = u' \cos u$$

گام دوم

ابتدا ضابطهٔ y' را تعیین می‌کنیم:

$$y = \sin x \cos ۳x \Rightarrow y' = \cos x \cos ۳x - ۳ \sin x \sin ۳x$$

حالا $y'\left(\frac{\pi}{۴}\right)$ را به دست می‌آوریم:

$$y'\left(\frac{\pi}{۴}\right) = \cos \frac{\pi}{۴} \cos \frac{۳\pi}{۴} - ۳ \sin \frac{\pi}{۴} \sin \frac{۳\pi}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}\left(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right) - ۳\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right) = -\frac{۱}{۲} - \frac{۳}{۲} = -۲$$

۱۷ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

گام اول

مشتق تابع $y = sin^n u$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$y = sin^n u \Rightarrow y' = nu' \cos u \sin^{n-1} u$$

گام دوم

با استفاده از رابطهٔ گفته‌شده در گام اول، ابتدا ضابطهٔ مشتق تابع را تعیین و سپس $y'\left(\frac{\pi^2}{9}\right)$ را محاسبه می‌کنیم.

$$y = \sin^3\sqrt{x} \Rightarrow y' = 3 \times \frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}\sin^2\sqrt{x}$$

$$\Rightarrow y'\left(\frac{\pi^2}{9}\right) = \frac{3}{2\sqrt{\frac{\pi^2}{9}}}\cos\sqrt{\frac{\pi^2}{9}}\sin^2\sqrt{\frac{\pi^2}{9}} = \frac{3}{2\times\frac{\pi}{3}}\cos\frac{\pi}{3}\sin^2\frac{\pi}{3} = \frac{9}{2\pi}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{9}{4\pi}\times\frac{3}{4} = \frac{27}{16\pi}$$

۱۸ گزینه ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

گام اول

الف) با استفاده از ویژگی‌های لگاریتم داریم:

$$1)\ \log a^n = n\log a$$
$$2)\ \ln e = \log_e^e = 1$$

ب) می‌دانیم: $y = \sqrt{u} \Rightarrow y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

گام دوم

باتوجه‌به نکات گام اول، ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم:

$$y = \ln e^{\sqrt{\sin x}} = \sqrt{\sin x}\ln e = \sqrt{\sin x}\log_e^e = \sqrt{\sin x}$$

اکنون از تابع مشتق می‌گیریم:

$$y = \sqrt{\sin x} \Rightarrow y' = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$$

بنابراین:

$$y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\cos\frac{\pi}{6}}{2\sqrt{\sin\frac{\pi}{6}}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

۱۹ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

گام اول

مشتق تابع $y = cos^n u$ که u تابعی برحسب x است از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$y = cos^n u \Rightarrow y' = -nu' \sin u cos^{n-۱} u$$

گام دوم

باتوجه‌به گام اول داریم:

$$y = cos^۲\left(\frac{\pi}{۳}+\frac{x}{۴}\right) \Rightarrow y' = -۲\left(\frac{۱}{۴}\right)\sin\left(\frac{\pi}{۳}+\frac{x}{۴}\right)\cos\left(\frac{\pi}{۳}+\frac{x}{۴}\right) = \left(-\frac{۱}{۴}\right)۲\sin\left(\frac{\pi}{۳}+\frac{x}{۴}\right)\cos\left(\frac{\pi}{۳}+\frac{x}{۴}\right)$$
$$= \left(-\frac{۱}{۴}\right)\sin ۲\left(\frac{\pi}{۳}+\frac{x}{۴}\right) = -\frac{۱}{۴}\sin\left(\frac{۲\pi}{۳}+\frac{x}{۲}\right)$$

حالا مقدار $y'\left(\frac{\pi}{۳}\right)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$y'\left(\frac{\pi}{۳}\right) = -\frac{۱}{۴}\sin\left(\frac{۲\pi}{۳}+\frac{\pi}{۶}\right) = -\frac{۱}{۴}\sin\frac{۵\pi}{۶} = \frac{-۱}{۴}\times\frac{۱}{۲} = -\frac{۱}{۸}$$

۲۰ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

گام اول

اگر u تابعی برحسب x باشد، مشتق تابع $y = cos^n u$ از رابطهٔ $y' = -nu' \sin u cos^{n-۱} u$ به دست می‌آید.

گام دوم

$$y = cos^۲\frac{\pi}{۳x} \Rightarrow y' = -۲\left(\frac{-\pi}{۳x^۲}\right)\sin\frac{\pi}{۳x}\cos\frac{\pi}{۳x} = \frac{\pi}{۳x^۲}۲\sin\frac{\pi}{۳x}\cos\frac{\pi}{۳x} \overset{*}{=} \frac{\pi}{۳x^۲}\sin\frac{۲\pi}{۳x}$$

* می‌دانیم: $\sin ۲\alpha = ۲\sin\alpha\cos\alpha$

بنابراین:

$$y'(۴) = \frac{\pi}{۴۸}\sin\frac{۲\pi}{۱۲} = \frac{\pi}{۴۸}\sin\frac{\pi}{۶} = \frac{\pi}{۴۸}\times\frac{۱}{۲} = \frac{\pi}{۹۶}$$

۲۱ **گزینه ۴**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

گام اول

مشتق تابع $y = tan^n u$ و $y = cot^n u$ از روابط زیر به دست می‌آید:

$$y = tan^n u \Rightarrow y' = nu' \left(1 + tan^2 u\right) tan^{n-1} u$$
$$y = cot^n u \Rightarrow y' = -nu' \left(1 + cot^2 u\right) cot^{n-1} u$$

گام دوم

باتوجه‌به گام اول داریم:

$$y = tan^3 x - cot\, 2x \Rightarrow y' = 3\left(1 + tan^2 x\right) tan^2 x - \left(-2\left(1 + cot^2 2x\right)\right) = 3\left(1 + tan^2 x\right) tan^2 x + 2\left(1 + cot^2 2x\right)$$

بنابراین:

$$y'\left(\tfrac{\pi}{6}\right) = 3\left(1 + tan^2 \tfrac{\pi}{6}\right) tan^2 \tfrac{\pi}{6} + 2\left(1 + cot^2 \tfrac{\pi}{3}\right)$$
$$= 3\left(1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 2\left(1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\right) = 3\left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) + 2\left(1 + \frac{1}{3}\right)$$
$$= 3\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) + 2\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3} + \frac{8}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

۲۲ **گزینه ۴**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

گام اول

می‌دانیم:

$$y = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

گام دوم

ابتدا ضابطهٔ تابع را تا حد امکان ساده می‌کنیم، سپس مشتق آن را به دست می‌آوریم:

$$y = \frac{1 - cos^2 x}{2 - sin^2 x} \xrightarrow{sin^2 x = 1 - cos^2 x} y = \frac{1 - cos^2 x}{2 - 1 + cos^2 x} = \frac{1 - cos^2 x}{1 + cos^2 x}$$
$$\Rightarrow y' = \frac{\left(+2\cos x \sin x\right)\left(1 + cos^2 x\right) - \left(-2\cos x \sin x\right)\left(1 - cos^2 x\right)}{\left(1 + cos^2 x\right)^2}$$
$$= \frac{\left(2\sin x \cos x\right)\left(1 + cos^2 x + 1 - cos^2 x\right)}{\left(1 + cos^2 x\right)^2} = \frac{\sin 2x \times 2}{\left(1 + cos^2 x\right)^2} = \frac{2\sin 2x}{\left(1 + cos^2 x\right)^2}$$

پس مقدار $y'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ برابر است با:

$$y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2\sin 2\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\left(1 + cos^2 \frac{\pi}{4}\right)^2} = \frac{2\sin \frac{\pi}{2}}{\left(1 + cos^2 \frac{\pi}{4}\right)^2} = \frac{2\times 1}{\left(1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)^2} = \frac{2}{\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{2}{\frac{9}{4}} = \frac{8}{9}$$

۲۳ **گزینه ۱**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵

گام اول

اگر u تابعی برحسب x باشد، آنگاه:

$$y=\sqrt{u}\Rightarrow y'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}\qquad,\qquad y=\sin u\Rightarrow y'=u'\cos u$$

گام دوم

باتوجه‌به گام اول، مشتق تابع $f(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=\sqrt{2\sin \pi x^2}\Rightarrow f'(x)=\frac{(2\sin \pi x^2)'}{2\sqrt{2\sin \pi x^2}}=\frac{2\times 2\pi x\times\cos \pi x^2}{2\sqrt{2\sin \pi x^2}}=\frac{4\pi x\cos \pi x^2}{2\sqrt{2\sin \pi x^2}}$$

$f'\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ برابر است با:

$$f'\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)=\frac{4\pi\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\cos \pi\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2}{2\sqrt{2\sin \pi\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2}}=\frac{\frac{4\pi}{\sqrt{6}}\cos\frac{\pi}{6}}{2\sqrt{2\sin\frac{\pi}{6}}}=\frac{\frac{4\pi}{\sqrt{6}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{2\times\sqrt{2\times\frac{1}{2}}}=\frac{4\pi\sqrt{3}}{4\sqrt{6}}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}=\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

۲۴ **گزینه ۱**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

گام اول

می‌دانیم: $1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$

گام دوم

قبل از مشتق‌گیری، بهتر است ضابطهٔ تابع داده‌شده را ساده کنیم:

$$f(x)=\sqrt{1+\tan^2\frac{1}{x}}=\sqrt{\frac{1}{\cos^2\frac{1}{x}}}=\frac{1}{\left|\cos\frac{1}{x}\right|}$$

باتوجه‌به اینکه مقدار مشتق به ازای $x=\frac{3}{\pi}$ محاسبه می‌شود و داریم:

$$x=\frac{3}{\pi}\Rightarrow\frac{1}{x}=\frac{\pi}{3}\Rightarrow\cos\frac{1}{x}>0\Rightarrow\left|\cos\frac{1}{x}\right|=\cos\frac{1}{x}$$

پس:

$$f(x)=\frac{1}{\cos\frac{1}{x}}\Rightarrow f'(x)=\frac{-\left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(-\sin\frac{1}{x}\right)}{\cos^2\frac{1}{x}}=\frac{-\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}}{\cos^2\frac{1}{x}}$$

اکنون حاصل $f'\left(\frac{3}{\pi}\right)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f'\left(\frac{3}{\pi}\right)=\frac{-\frac{1}{\left(\frac{3}{\pi}\right)^2}\sin\frac{1}{\frac{3}{\pi}}}{\cos^2\frac{1}{\frac{3}{\pi}}}=\frac{-\frac{\pi^2}{9}\sin\frac{\pi}{3}}{\cos^2\frac{\pi}{3}}=\frac{-\frac{\pi^2}{9}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{-\frac{\pi^2\times\sqrt{3}}{18}}{\frac{1}{4}}=\frac{-4\pi^2\sqrt{3}}{18}=\frac{-2\pi^2\sqrt{3}}{9}$$

۲۵ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

گام اول

اگر تابعی برحسب x باشد، آنگاه داریم:

$$۱) y = \sqrt{u} \Rightarrow y' = \frac{u'}{۲\sqrt{u}}$$
$$۲) y = \cos u \Rightarrow y' = -u' \sin u$$

گام دوم

باتوجه‌به گام اول، مشتق تابع $f(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \frac{\sqrt{۳}}{\pi}\sqrt{۳ + ۲\cos\frac{\pi}{x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{\sqrt{۳}}{\pi} \times \frac{-۲\left(-\frac{\pi}{x^۲}\right)\sin\frac{\pi}{x}}{۲\sqrt{۳+۲\cos\frac{\pi}{x}}}$$

پس $f'(۳)$ برابر است با:

$$f'(۳) = \frac{\sqrt{۳}}{\pi} \times \frac{\frac{۲\pi}{۹}\sin\frac{\pi}{۳}}{۲\sqrt{۳+۲\cos\frac{\pi}{۳}}} = \frac{\sqrt{۳}}{\pi} \times \frac{۲\pi}{۱۸} \times \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\sqrt{۳+۲\times\frac{۱}{۲}}} = \frac{\sqrt{۳}}{۹} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲\sqrt{۳+۱}} = \frac{۳}{۳۶} = \frac{۱}{۱۲}$$

۲۶ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۹

گام اول

الف) می‌دانیم:

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{۱ + \tan\alpha\tan\beta}$$

ب) اگر u تابعی برحسب x باشد، آنگاه داریم:

$$y = \tan u \rightarrow y' = u'\left(۱ + \tan^۲ u\right)$$

گام دوم

باتوجه‌به اینکه $\tan\frac{\pi}{۴} = ۱$ است و با استفاده از قسمت الف از گام اول ضابطه تابع را ساده می‌کنیم سپس مشتق آن را به دست می‌آوریم:

$$y = \frac{۱ - \tan ۲x}{۱ + \tan ۲x} = \frac{\tan\frac{\pi}{۴} - \tan ۲x}{۱ + \tan\frac{\pi}{۴}\tan ۲x} = \tan\left(\frac{\pi}{۴} - ۲x\right)$$
$$\Rightarrow y' = (-۲)\left(۱ + \tan^۲\left(\frac{\pi}{۴} - ۲x\right)\right)$$

بنابراین:

$$y'\left(\frac{\pi}{۸}\right) = (-۲)\left(۱ + \tan^۲\left(\frac{\pi}{۴} - \frac{\pi}{۴}\right)\right) = (-۲)\left(۱ + \tan^۲ ۰\right) = (-۲)(۱ + ۰) = -۲$$

۲۷ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۰

گام اول

مشتق تابع $y = gof\,(x)$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$y = gof\,(x) = g\,(f\,(x)) \Rightarrow y' = f'\,(x)\,g'\,(f\,(x))$$

گام دوم

ابتدا ضابطهٔ $f'\,(x)$ و $g'\,(x)$ را تعیین می‌کنیم. با داشتن $g'\,(x)$، ضابطهٔ $g'\,(f\,(x))$ را هم به دست می‌آوریم و درنهایت مقدار مشتق تابع را در $x = \frac{\pi}{۱۲}$ محاسبه می‌کنیم.

$$f\,(x) = \sin ۲x \Rightarrow f'\,(x) = ۲\cos ۲x$$

$$g\,(x) = \sqrt{x} \Rightarrow g'\,(x) = \frac{۱}{۲\sqrt{x}}$$

$$g'\,(f\,(x)) = \frac{۱}{۲\sqrt{f\,(x)}} = \frac{۱}{۲\sqrt{\sin ۲x}}$$

$$y = gof\,(x) \Rightarrow y' = f'\,(x)\,g'\,(f\,(x)) = (۲\cos ۲x)\,\frac{۱}{۲\sqrt{\sin ۲x}}$$

بنابراین $y'\left(\frac{\pi}{۱۲}\right)$ برابر است با:

$$y'\left(\frac{\pi}{۱۲}\right) = ۲\cos\frac{\pi}{۶} \times \frac{۱}{۲\sqrt{\sin\frac{\pi}{۶}}} = ۲ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times \frac{۱}{۲\sqrt{\frac{۱}{۲}}} = \sqrt{۳} \times \frac{۱}{\sqrt{۲}} = \sqrt{\frac{۳}{۲}}$$

۲۸ **گزینه ۲**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

گام اول

الف) آهنگ متوسط تغییر تابع از x_1 تا x_2 از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در یک نقطه برابر مقدار مشتق تابع آن نقطه است.

گام دوم

داریم:

$$f(x)=(2x+1)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$

ابتدا آهنگ متوسط تغییر تابع از $x=4$ تا $x=12$ را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(12)-f(4)}{12-4}=\frac{\frac{1}{\sqrt{24+1}}-\frac{1}{\sqrt{8+1}}}{8}=\frac{\frac{1}{\sqrt{25}}-\frac{1}{\sqrt{9}}}{8}=\frac{\frac{1}{5}-\frac{1}{3}}{8}=\frac{\frac{3-5}{15}}{8}=\frac{-\frac{2}{15}}{8}=-\frac{1}{60}$$

طبق قسمت ب از گام اول، $f'(x)$ و سپس مقدار $f'(4)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f'(x)=\frac{0-\frac{2}{2\sqrt{2x+1}}}{2x+1}=-\frac{1}{(2x+1)\sqrt{2x+1}}$$

$$x=4 \text{ آهنگ لحظه‌ای تغییر در } =f'(4)=-\frac{1}{(8+1)\sqrt{8+1}}=-\frac{1}{9\times3}=-\frac{1}{27}$$

اختلاف آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر برابر است با:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}-f'(x)=-\frac{1}{60}-\left(-\frac{1}{27}\right)=-\frac{1}{60}+\frac{1}{27}=\frac{-9+20}{540}=\frac{11}{540}$$

۲۹ **گزینه ۳**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

گام اول

مشتق تابع $y = sin^n u$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$y = sin^n u \Rightarrow y' = nu' \cos u \sin^{n-1} u$$

گام دوم

باتوجه‌به گام اول، مشتق تابع را به دست می‌آوریم:

$$y = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4}\right) \Rightarrow y' = 2 \times 2\left(-\frac{1}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4}\right)$$

$$\Rightarrow y' = -\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4}\right)$$

مقدار مشتق تابع در نقطه‌ای به طول $x = \frac{\pi}{3}$ برابر است با:

$$y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{12}\right) = -\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}$$

از فرمول کمان‌های 2α به خاطر دارید که: $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$$y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}\left(2\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}\right) = -\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

۳۰ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

گام اول

الف) آهنگ متوسط تغییر تابع در بازه‌ای از x تا $x+\Delta x$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

ب) منظور از نمو متغیر همان Δx است، پس داریم: $\Delta x = ۰/۲۱$

ج) آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در یک نقطه برابر مقدار مشتق تابع در آن نقطه است.

گام دوم

باتوجه‌به گام اول، آهنگ متوسط و آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در نقطهٔ $x=۱$ را به دست می‌آوریم:

$$x_۲ = ۱/۲۱ \text{ تا } x_۱ = ۱ \text{ آهنگ متوسط تغییر تابع از } = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(۱/۲۱)-f(۱)}{۱/۲۱-۱}$$

$$=\frac{\sqrt{۱/۲۱}-\sqrt{۱}}{۰/۲۱}=\frac{۱/۱-۱}{۰/۲۱}=\frac{۰/۱}{۰/۲۱}=\frac{\frac{۱}{۱۰}}{\frac{۲۱}{۱۰۰}}=\frac{۱۰}{۲۱}$$

برای به دست آوردن آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در $x=۱$ ابتدا باید ضابطهٔ مشتق تابع را به دست آوریم:

$$f(x)=\sqrt{x}\Rightarrow f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}$$

بنابراین:

$$x=۱ \text{ آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در } = f'(۱)=\frac{۱}{۲\sqrt{۱}}=\frac{۱}{۲}$$

درنهایت، اختلاف آهنگ لحظه‌ای و آهنگ متوسط برابر است با:

$$f'(۱)-\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{۱}{۲}-\frac{۱۰}{۲۱}=\frac{۲۱-۲۰}{۴۲}=\frac{۱}{۴۲}$$

۳۱ **گزینه ۲**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

گام اول

می‌دانیم:

$$y = fog(x) = f(g(x)) \Rightarrow y' = g'(x)f'(g(x))$$

گام دوم

باتوجه‌به وجود عبارت $|x|$ در ضابطهٔ توابع $f(x)$ و $g(x)$، لازم است ابتدا این دو تابع را ساده کرده (به‌صورت توابع دوضابطه‌ای بنویسیم) سپس تابع $fog(x)$ را تشکیل دهیم و از آن مشتق بگیریم.

$$f(x) = \frac{۴}{۵}x - \frac{۱}{۵}|x| \Rightarrow \begin{cases} x \geq ۰ \Rightarrow |x| = x \Rightarrow f(x) = \frac{۴}{۵}x - \frac{۱}{۵}x = \frac{۳x}{۵} \\ x < ۰ \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow f(x) = \frac{۴}{۵}x + \frac{۱}{۵}x = x \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{۳x}{۵} & ; x \geq ۰ \\ x & ; x < ۰ \end{cases}$$

$$g(x) = ۴x + |x| \Rightarrow \begin{cases} x \geq ۰ \Rightarrow |x| = x \Rightarrow g(x) = ۴x + x = ۵x \\ x < ۰ \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow g(x) = ۴x - x = ۳x \end{cases}$$

$$\Rightarrow g(x) = \begin{cases} ۵x & ; x \geq ۰ \\ ۳x & ; x < ۰ \end{cases}$$

ضابطهٔ $fog(x)$ را در دو حالت $x \geq ۰$ و $x < ۰$ تعیین می‌کنیم:

$$x \geq ۰ : f(x) = \frac{۳}{۵}x, g(x) = ۵x \Rightarrow fog(x) = f(g(x)) = \frac{۳}{۵}(۵x) = ۳x$$

$$x < ۰ : f(x) = x, g(x) = ۳x \Rightarrow fog(x) - f(g(x)) = f(۳x) = ۳x$$

در هر دو حالت $fog(x)$ برابر $۳x$ شد، پس مشتق تابع $fog(x)$ همواره برابر ۳ است.

۳۲ **گزینه ۴**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

گام اول

الف) آهنگ متوسط تغییر تابع از $x=1$ تا $x=1/44$ را با استفاده از رابطهٔ $\frac{f(1/44)-f(1)}{0/44}$ به دست می‌آوریم.

ب) برای به دست آوردن آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در $x=1$ باید ضابطهٔ مشتق تابع یا همان $f'(x)$ و سپس $f'(1)$ را محاسبه کنیم. اختلاف آهنگ متوسط و آهنگ لحظه‌ای به‌عنوان جواب تست در نظر گرفته می‌شود.

گام دوم

$$\text{آهنگ متوسط تغییر} = \frac{f(1/44)-f(1)}{0/44} = \frac{\frac{0/44}{\sqrt{1/44}}-0}{0/44} = \frac{1}{\sqrt{1/44}} = \frac{1}{1/2} = \frac{1}{\frac{6}{5}} = \frac{5}{6}$$

$$f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2x\sqrt{x}} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

اختلاف آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر برابر است با:

$$1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$$

۳۳ **گزینه ۳**

$$y = f(u) \Rightarrow y' = u'f'(u) \xrightarrow[f(u)=sin^3 u]{u=\sqrt{2x}} y' = \frac{2}{2\sqrt{2x}} \times 3sin^2 u \cos u$$

$$\Rightarrow y' = \frac{3}{\sqrt{2x}} sin^2(\sqrt{2x}) \cos\sqrt{2x} \Rightarrow y'(\frac{\pi^2}{18}) = \frac{9}{\pi} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{27}{8\pi}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۳۴ **گزینه ۳**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

گام اول

از ضابطهٔ داده‌شده مشتق گرفته و درنهایت با جایگذاری $x=\frac{\pi}{6}$ مقدار مشتق تابع را تعیین می‌کنیم.

گام دوم

$$y = 2cos^2(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4}) \Rightarrow y' = -2 \times 2(-\frac{1}{4}) sin(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4}) cos(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4})$$
$$= \frac{1}{2} sin(2(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4})) = \frac{1}{2} sin(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{2})$$
$$y'(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2} \times sin(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{12}) = \frac{1}{2} sin(\frac{3\pi}{12}) = \frac{1}{2} sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

۳۵ گزینه ۱

$$y = \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{(-\sin x - \cos x)(\cos x + \sin x) - (-\sin x + \cos x)(\cos x - \sin x)}{(\cos x + \sin x)^۲}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{-(\sin x + \cos x)^۲ - (\cos x - \sin x)^۲}{(\cos x + \sin x)^۲}$$

$$\Rightarrow f'(\frac{\pi}{۴}) = \frac{-(\frac{\sqrt{۲}}{۲} + \frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲ - (\frac{\sqrt{۲}}{۲} - \frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲}{(\frac{\sqrt{۲}}{۲} + \frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲} = \frac{-(\sqrt{۲})^۲}{(\sqrt{۲})^۲} = -۱$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۳۶ گزینه ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

گام اول

الف) منظور از $f'_-(۰)$ مشتق چپ تابع در نقطهٔ $x = ۰$ است.

ب) منظور از $f'_+(۰)$ مشتق راست تابع در نقطهٔ $x = ۰$ است.

گام دوم

$$x > ۰: \quad f(x) = \frac{\sin x}{۱+\cos x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{\cos x(۱+\cos x) - (-\sin x)(\sin x)}{(۱+\cos x)^۲}$$

$$= \frac{\cos x + \cos^۲ x + \sin^۲ x}{(۱ + \cos x)^۲} = \frac{۱ + \cos x}{(۱ + \cos x)^۲} = \frac{۱}{۱ + \cos x}$$

$$\Rightarrow \quad f'_+(۰) = \frac{۱}{۱ + \cos ۰} = \frac{۱}{۱ + ۱} = \frac{۱}{۲}$$

$$x \leq ۰: \quad f(x) = \sin ۲x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = ۲\cos ۲x \quad \Rightarrow \quad f'_-(۰) = ۲\cos ۰ = ۲$$

$$f'_-(۰) - f'_+(۰) = ۲ - \frac{۱}{۲} = \frac{۳}{۲} = ۱/۵$$

۳۷ **گزینه ۲**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

گام اول

الف) خط مماس بر منحنی در یک نقطه موازی محور xها است هرگاه مشتق تابع در آن نقطه برابر صفر باشد.

ب) مشتق تابع ضمنی $y = f(x,y)$ را می‌توان از رابطهٔ زیر محاسبه کرد:

$$y'_x = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{\text{مشتق نسبت به } x}{\text{مشتق نسبت به } y}$$

گام دوم

$$x^۲ - ۴xy + ۳y^۲ + ۱ = ۰$$

$$y'_x = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{۲x-۴y}{-۴x+۶y} = ۰ \Rightarrow ۲x - ۴y = ۰ \Rightarrow ۴y = ۲x \Rightarrow y = \frac{x}{۲}$$

برای به دست آوردن طول نقـاطی که خط مماس در آن‌ها موازی محور xها باشد، در معادلهٔ اصلی به‌جای y مقدار مساوی آن، یعنی $\frac{x}{۲}$ را قرار می‌دهیم؛ بنابراین داریم:

$$x^۲ - ۴x\left(\frac{x}{۲}\right) + ۳\left(\frac{x}{۲}\right)^۲ + ۱ = ۰ \Rightarrow x^۲ - ۲x^۲ + \frac{۳}{۴}x^۲ + ۱ = ۰ \Rightarrow \frac{x^۲}{۴} = ۱ \Rightarrow x^۲ = ۴ \Rightarrow x = \pm ۲$$

۳۸ **گزینه ۴**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۰

گام اول

الف) طبق تعریف مشتق داریم:

$$f'_-(x_۰) = \lim_{h\to ۰^-} \frac{f(x_۰+h)-f(x_۰)}{h} \quad , \quad f'_+(x_۰) = \lim_{h\to ۰^+} \frac{f(x_۰+h)-f(x_۰)}{h}$$

ب) تابع f در نقطهٔ $x_۰$ مشتق‌پذیر است هرگاه مشتق راست و چپ تابع در این نقطه موجود و باهم برابر باشد.

گام دوم

وقتی $h \to ۰^-$، حاصل حد داده‌شده $\frac{۰}{۰}$ و مبهم می‌شود. با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال داریم:

$$\lim_{h\to ۰^-} \frac{f(x_۰)-f(x_۰-h)}{h} \overset{H}{=} \lim_{h\to ۰^-} \frac{۰-(-۱)f'(x_۰-h)}{۱} = \lim_{h\to ۰^-} f'(x_۰ - h) = f'_-(x_۰)$$

چون تابع در $x_۰$ مشتق‌پذیر است، پس داریم:

$$f'_-(x_۰) = f'_+(x_۰) = -۲$$

بنابراین حاصل حد داده‌شده برابر ۲- می‌شود.

۳۹ **گزینه ۲**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

گام اول

حاصل $\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$ بیانگر مقدار مشتق چپ تابع در نقطهٔ $x=2$ یا همان $f'_-(2)$ است.

گام دوم

ابتدا ضابطهٔ تابع $f(x)$ را وقتی $x<2$ است، تعیین می‌کنیم سپس ضابطهٔ $f'(x)$ و مقدار $f'(-2)$ را به دست می‌آوریم.

$$x<2\Rightarrow x-2<0\Rightarrow |x-2|=-(x-2)=2-x$$

$$f(x)=2-x+\sqrt{2x}\Rightarrow f'(x)=-1+\frac{2}{2\sqrt{2x}}=\frac{1}{\sqrt{2x}}-1$$

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=f'_-(2)=\frac{1}{\sqrt{2\times 2}}-1=\frac{1}{\sqrt{4}}-1=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$$

۴۰ **گزینه ۴**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

گام اول

$f'_+(1)$ بیانگر مقدار مشتق راست تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=1$ است.

گام دوم

ابتدا ضابطهٔ تابع $f(x)$ را وقتی $x>1$ است، تعیین می‌کنیم سپس از آن مشتق گرفته و مقدار $f'_+(1)$ را محاسبه می‌کنیم.

$x>1\Rightarrow \pi x>\pi\Rightarrow$ کمان موردنظر در ناحیهٔ سوم مثلثاتی قرار دارد $\Rightarrow \sin\pi x<0\Rightarrow |\sin\pi x|=-\sin\pi x$

$$\Rightarrow f(x)=x|\sin\pi x|=x(-\sin\pi x)=-x\sin\pi x$$

$$f'(x)=-\sin\pi x-x\pi\cos\pi x$$

$$f'_+(1)=-\sin\pi-x\pi\cos\pi=0-\pi(-1)=\pi$$

۴۱ **گزینه ۳**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

گام اول

الف) $f'_{+}(\circ)$ بیانگر مشتق راست تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=\circ$ و $f'_{-}(\circ)$ بیانگر مشتق چپ تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=\circ$ است.

ب) می‌دانیم: $|x| = \begin{cases} x & ;x \geq \circ \\ -x & ;x < \circ \end{cases}$

گام دوم

ابتدا ضابطهٔ تابع $f(x)$ را به ازای $x>\circ$ و $x<\circ$ تعیین و مشتق چپ و راست آن را در نقطهٔ $x=\circ$ محاسبه می‌کنیم.

$$x>\circ : |x| = x \;,\; [x] = \circ \Rightarrow f(x) = x \times \circ = \circ \Rightarrow f'_{+}(\circ) = \circ$$
$$x<\circ : |x| = -x \;,\; [x] = -۱ \Rightarrow f(x) = (-x)(-۱) = x \Rightarrow f'_{-}(\circ) = ۱$$

بنابراین:

$$f'_{-}(\circ) - f'_{+}(\circ) = ۱ - \circ = ۱$$

۴۲ **گزینه ۲**

تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=۱$ مشتق‌پذیر است اگر اولاً در این نقطه پیوسته باشد $\left(\lim_{x\to ۱^-} f(x) = \lim_{x\to ۱^+} f(x) = f(۱)\right)$، ثانیاً مشتق چپ و راست تابع در نقطهٔ $x=۱$ موجود و باهم برابر باشند.

بررسی پیوستگی در نقطهٔ $x=۱$:

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x) = \lim_{x\to ۱^+} f(x) = f(۱) \Rightarrow a - a = ۱ - ۱ \Rightarrow \circ = \circ$$

به یک رابطهٔ همواره درست رسیدیم، پس تابع در $x=۱$ پیوسته است.

بررسی مشتق‌پذیری در نقطهٔ $x=۱$:

$$f(x) = \begin{cases} ax - a & ;x < ۱ \\ x^۲ - x & ;x \geq ۱ \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} a & ;x < ۱ \\ ۲x - ۱ & ;x > ۱ \end{cases}$$
$$f'_{-}(۱) = f'_{+}(۱) \Rightarrow a = ۲ - ۱ = ۱ \Rightarrow a = ۱$$

بنابراین تابع $f(x)$ تنها به ازای $a=۱$ در نقطهٔ $x=۱$ مشتق‌پذیر است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

۴۳ **گزینه ۴**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

گام اول

مشتق تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=1$ موجود است هرگاه:

اولاً تابع در این نقطه پیوسته باشد.

ثانیاً مشتق چپ و راست تابع در این نقطه موجود و برابر باشند.

گام دوم

بررسی شرط پیوستگی در نقطهٔ $x=1$:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) \Rightarrow \sqrt[3]{(2+6)^2} = a+b \Rightarrow \sqrt[3]{8^2} = a+b \Rightarrow a+b=4 \quad (I)$$

بررسی شرط مشتق‌پذیری در نقطهٔ $x=1$:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{(2x+6)^2} & ;x>1 \\ ax+b & ;x\le 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} (2x+6)^{\frac{2}{3}} & ;x>1 \\ ax+b & ;x\le 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2\times\frac{2}{3}\times(2x+6)^{-\frac{1}{3}} & ;x>1 \\ a & ;x<1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{4}{3}\times\frac{1}{\sqrt[3]{2x+6}} & ;x>1 \\ a & ;x<1 \end{cases}$$

$$f'_+(1) = f'_-(1) \Rightarrow \frac{4}{3}\times\frac{1}{\sqrt[3]{2+6}} = a \Rightarrow a = \frac{4}{3}\times\frac{1}{2} = \frac{2}{3}$$

با جایگذاری در رابطهٔ (I) داریم:

$$a+b=4 \xrightarrow{a=\frac{2}{3}} \frac{2}{3}+b=4 \Rightarrow b=4-\frac{2}{3}=\frac{10}{3}$$

۴۴ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

گام اول

$f'_{+}(۱)$ یعنی مشتق راست تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = ۱$ و $f'_{-}(۱)$ یعنی مشتق چپ تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = ۱$.

گام دوم

برای تعیین مشتق راست و چپ تابع در نقطهٔ $x = ۱$ ابتدا باید تکلیف قدر مطلق را روشن کنیم. ضابطهٔ تابع و مشتق آن را به ازای $x > ۱$ و $x < ۱$ تعیین می‌کنیم.

$$\begin{cases} x > ۱ \Rightarrow x - ۱ > ۰ \Rightarrow |x - ۱| = x - ۱ \\ x < ۱ \Rightarrow x - ۱ < ۰ \Rightarrow |x - ۱| = -x + ۱ \end{cases}$$

می‌دانیم $x\sqrt{x} = x^{\frac{۳}{۲}}$ پس:

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^{\frac{۳}{۲}} + x - ۱ & ;x > ۱ \\ x^{\frac{۳}{۲}} - x + ۱ & ;x < ۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{۳}{۲}\sqrt{x} + ۱ & ;x > ۱ \\ \frac{۳}{۲}\sqrt{x} - ۱ & ;x < ۱ \end{cases}$$

با جایگذاری $x = ۱$ در ضابطه‌های بالا و پایین تابع $f'(x)$، مقدار $f'_{+}(۱)$ و $f'_{-}(۱)$ را به دست می‌آوریم:

$$f'_{+}(۱) = \frac{۳}{۲}\sqrt{۱} + ۱ = \frac{۳}{۲} + ۱ = \frac{۵}{۲}$$

$$f'_{-}(۱) = \frac{۳}{۲}\sqrt{۱} - ۱ = \frac{۳}{۲} - ۱ = \frac{۱}{۲}$$

بنابراین:

$$f'_{+}(۱) + ۳f'_{-}(۱) = \frac{۵}{۲} + \frac{۳}{۲} = \frac{۸}{۲} = ۴$$

۴۵ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

گام اول

فرض می‌کنیم u تابعی از x باشد.

الف) طبق مشتق توابع مرکب داریم:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

ب) می‌دانیم:

$$y = tan^n u \Rightarrow y' = nu' \left(1 + tan^2 u\right) tan^{n-1} u$$

گام دوم

روش اول: باتوجه‌به قسمت الف از گام اول، ضابطهٔ $\frac{dy}{dx}$ را به دست می‌آوریم:

$$\frac{dy}{dx} = 2\pi \left(1 + tan^2 \pi u\right) tan\, \pi u \times \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

مقدار u را به ازای $x = \frac{1}{4}$ محاسبه می‌کنیم:

$$u = x + \sqrt{x} \xrightarrow{x=\frac{1}{4}} u = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

بنابراین مقدار $\frac{dy}{dx}$ به ازای $x = \frac{1}{4}$ برابر است با:

$$\frac{dy}{dx} = 2\pi \left(1 + tan^2 \frac{3\pi}{4}\right) tan\, \frac{3\pi}{4}(1+1) = 2\pi\,(1+1)\,(-1) \times 2 = -8\pi$$

روش دوم: چون ضابطهٔ u برحسب x داریم، آن را در ضابطهٔ y جایگذاری کرده و y را برحسب x به دست می‌آوریم، سپس از y نسبت به x مشتق گرفته و حاصل $\frac{dy}{dx}$ که همان y' است را به ازای $x = \frac{1}{4}$ تعیین می‌کنیم.

با جایگذاری ضابطهٔ u در ضابطهٔ y، تابعی برحسب x به دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{aligned} y &= tan^2(\pi u) \\ u &= x + \sqrt{x} \end{aligned}\right\} \Rightarrow y = tan^2\left(\pi\left(x + \sqrt{x}\right)\right)$$

اکنون مشتق تابع y را برحسب x محاسبه می‌کنیم:

$$y' = \frac{dy}{dx} = 2\pi \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\left(1 + tan^2 \pi\left(x + \sqrt{x}\right)\right) tan\left(\pi\left(x + \sqrt{x}\right)\right)$$

به ازای $x = \frac{1}{4}$ داریم:

$$\xrightarrow{x=\frac{1}{4}} y'\left(\frac{1}{4}\right) = 2\pi\,(1+1)\left(1 + tan^2 \frac{3\pi}{4}\right) tan\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 2\pi\,(2)\,(1+1)\,(-1) = -8\pi$$

۴۶ **گزینه ۴**

y تابعی برحسب u و u تابعی برحسب x است. با استفاده از قاعدهٔ زنجیره‌ای، ضابطهٔ $\frac{dy}{dx}$ را به دست می‌آوریم:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = \left(\frac{۲}{۲\sqrt{۲u}} + \frac{۱}{u^۲}\right)(۲\sin x \cos x + ۲\sin ۲x)$$

مقدار u را به ازای $x = \frac{\pi}{۴}$ محاسبه می‌کنیم:

$$u = \sin^۲ x - \cos ۲x \xrightarrow{x=\frac{\pi}{۴}} u = \sin^۲ \frac{\pi}{۴} - \cos \frac{\pi}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{۱}{\sqrt{۲ \times \frac{۱}{۲}}} + \frac{۱}{\frac{۱}{۴}}\right)\left(۲\sin \frac{\pi}{۴}\cos \frac{\pi}{۴} + ۲\sin \frac{\pi}{۲}\right) = (۱+۴)\left(۲ \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} + ۲\right) = ۵ \times ۳ = ۱۵$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

۴۷ **گزینه ۴**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۴

گام اول

الف) شیب خط مماس بر نمودار تابع در یک نقطه واقع بر آن، برابر مشتق تابع در آن نقطه است.

ب) معادلهٔ خط گذرنده از نقطهٔ $(x_۱, y_۱)$ به شیب m به‌صورت زیر است:

$$y - y_۱ = m(x - x_۱)$$

گام دوم

طبق قسمت الف، از گام اول داریم: $m_{\text{مماس}} = y'(\frac{\pi}{۴})$

بنابراین:

$$y = \tan^۲ x + \cos ۲x \Rightarrow y' = ۲(۱ + \tan^۲ x)\tan x - ۲\sin ۲x$$

$$m_{\text{مماس}} = y'(\frac{\pi}{۴}) = ۲(۱ + \tan^۲ \frac{\pi}{۴})\tan \frac{\pi}{۴} - ۲\sin \frac{\pi}{۲} = ۲(۱+۱)(۱) - ۲(۱) = ۴ - ۲ = ۲ \Rightarrow m_{\text{مماس}} = ۲$$

با جایگذاری $x = \frac{\pi}{۴}$ در ضابطهٔ y، عرض این نقطه را به دست می‌آوریم:

$$\xrightarrow{x=\frac{\pi}{۴}} y = \tan^۲ \frac{\pi}{۴} + \cos \frac{\pi}{۲} = ۱ + ۰ = ۱$$

اکنون باتوجه‌به قسمت ب از گام اول، معادلهٔ خط مماس در نقطهٔ $(\frac{\pi}{۴}, ۱)$ را می‌نویسیم:

$$y - ۱ = ۲\left(x - \frac{\pi}{۴}\right) \Rightarrow y - ۱ = ۲x - \frac{\pi}{۲} \Rightarrow y - ۲x = ۱ - \frac{\pi}{۲}$$

۴۸ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵

گام اول

الف) شیب خط مماس بر منحنی تابع در یک نقطه، برابر مشتق تابع در آن نقطه است.

ب) معادلهٔ خطی به شیب m که از نقطهٔ (x_1,y_1) عبور می‌کند، به‌صورت زیر است:

$$y-y_1=m\left(x-x_1\right)$$

گام دوم

طبق قسمت الف از گام اول، شیب خط مماس بر منحنی در نقطهٔ $x=\frac{\pi}{3}$ واقع بر آن برابر $y'(\frac{\pi}{3})$ است؛ بنابراین:

$$y=\frac{1}{2}\cos 2x-\cos x\Rightarrow y'=-\frac{1}{2}\times 2\sin 2x+\sin x=-\sin 2x+\sin x$$

$$\Rightarrow y'(\frac{\pi}{3})=-\sin\frac{2\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=0\Rightarrow m_{\text{مماس}}=0$$

با محاسبهٔ مقدار $y\left(\frac{\pi}{3}\right)$ و باتوجه‌به قسمت "ب" از گام اول، معادلهٔ خط مماس بر منحنی را در نقطهٔ $x=\frac{\pi}{3}$ به دست می‌آوریم.

$$y=\frac{1}{2}\cos 2x-\cos x\xrightarrow{x=\frac{\pi}{3}}y=\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{3}{4}$$

$$y-\left(-\frac{3}{4}\right)=0\times\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\Rightarrow y+\frac{3}{4}=0\Rightarrow y=-\frac{3}{4}$$

۴۹ **گزینه ۲**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

گام اول

الف) عرض از مبدأ یک خط، به ازای جایگذاری $x = ۰$ در معادلهٔ آن به دست می‌آید.

ب) شیب خط مماس بر منحنی تابع در یک نقطه، برابر با مشتق تابع در آن نقطه است.

ج) معادلهٔ خطی به شیب m که از نقطهٔ $(x_۱, y_۱)$ عبور می‌کند به‌صورت زیر است:

$$y - y_۱ = m\left(x - x_۱\right)$$

گام دوم

ابتدا معادلهٔ خط مماس را می‌نویسیم. طبق قسمت "ب" از گام اول، شیب این خط برابر است با:

$$y = \sqrt{x^۲ + ۳x} \Rightarrow y' = \frac{۲x + ۳}{۲\sqrt{x^۲ + ۳x}}$$

$$y'(۱) = \frac{۲ + ۳}{۲\sqrt{۱ + ۳}} = \frac{۵}{۲\sqrt{۴}} = \frac{۵}{۲ \times ۲} = \frac{۵}{۴} \Rightarrow m_{\text{مماس}} = \frac{۵}{۴}$$

$$x = ۱ \Rightarrow y = \sqrt{۱ + ۳} = \sqrt{۴} = ۲ \Rightarrow y(۱) = ۲$$

بنابراین، طبق قسمت "ج" از گام اول، معادلهٔ خط مماس در نقطهٔ $(۱, ۲)$ برابر است با:

$$y - y(۱) = y'(۱)(x - ۱) \Rightarrow y - ۲ = \frac{۵}{۴}(x - ۱)$$

$$\Rightarrow y = \frac{۵}{۴}x - \frac{۵}{۴} + ۲ \Rightarrow y = \frac{۵}{۴}x + \frac{۳}{۴}$$

با جایگذاری $x = ۰$ در معادلهٔ خط مماس، داریم:

$$\xrightarrow{x=۰} y = \frac{۵}{۴}(۰) + \frac{۳}{۴} = \frac{۳}{۴}$$

بنابراین عرض از مبدأ خط مماس بر منحنی، برابر $\frac{۳}{۴}$ است.

۵۰ **گزینه ۲**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

گام اول

الف) شیب خط مماس بر منحنی تابع در یک نقطه، برابر با مشتق تابع در آن نقطه است.

ب) معادلهٔ خطی به شیب m که از نقطهٔ (x_1,y_1) عبور می‌کند، به‌صورت زیر است:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

ج) مختصات نقطهٔ تلاقی در هر دو معادله، صدق می‌کند.

گام دوم

باتوجه‌به قسمت "الف" و "ب" از گام اول، معادلهٔ خط مماس را به دست می‌آوریم:

$$y=x^3-x^2\Rightarrow y'=3x^2-2x\Rightarrow m_{\text{مماس}}=y'(1)=3-2=1$$

$$x=1\Rightarrow y(1)=(1)^3-(1)^2=1-1=0$$

$$y-y(1)=y'(1)(x-1)\Rightarrow y-0=x-1\Rightarrow y=x-1$$

سپس با مساوی قرار دادن معادلهٔ خط $y=x-1$ و معادلهٔ منحنی، مختصات نقطهٔ تلاقی را محاسبه می‌کنیم:

$$x-1=x^3-x^2\Rightarrow x-1=x^2(x-1)\Rightarrow(x-1)(1-x^2)=0$$

$$\Rightarrow(x-1)(1-x)(1+x)=0\xrightarrow{x\neq1}1+x=0\Rightarrow x=-1$$

بنابراین $x_A=-1$ است و داریم:

$$y_A=(-1)^3-(-1)^2=-1-1=-2$$

۵۱ **گزینه ۴**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۲

گام اول

الف) معادلهٔ خطی به شیب m که از نقطهٔ (x_1,y_1) عبور می‌کند، به‌صورت زیر است:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

ب) می‌دانیم:

$$m_{\text{قائم}}=-\frac{1}{m_{\text{مماس}}}$$

ج) شیب خط مماس بر منحنی تابع در یک نقطه برابر با مشتق تابع در آن نقطه است.

گام دوم

باتوجه‌به قسمت "ب" و "ج" از گام اول، با مشتق‌گیری از تابع، شیب خط مماس و سپس شیب خط قائم را محاسبه می‌کنیم:

$$y=\frac{x+1}{2x-1}\Rightarrow y'=\frac{2x-1-2(x+1)}{(2x-1)^2}=\frac{2x-1-2x-2}{(2x-1)^2}=\frac{-3}{(2x-1)^2}$$

$$y'(2)=\frac{-3}{(4-1)^2}=\frac{-3}{3^2}=-\frac{3}{9}=-\frac{1}{3}\Rightarrow m_{\text{مماس}}=-\frac{1}{3}$$

$$m_{\text{قائم}}=-\frac{1}{m_{\text{مماس}}}=-\frac{1}{y'(2)}=-\frac{1}{-\frac{1}{3}}=3$$

بنابراین، معادلهٔ خط قائم در نقطهٔ $x=2$ به‌صورت زیر است:

$$y=\frac{x+1}{2x-1}\Rightarrow y(2)=\frac{2+1}{4-1}=\frac{3}{3}=1$$

$$y-y(2)=m_{\text{قائم}}(x-2)\Rightarrow y-1=3(x-2)\Rightarrow y-1=3x-6\Rightarrow y=3x-5$$

۵۲ **گزینه ۱**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

گام اول

الف) معادلهٔ خطی به شیب m که از نقطهٔ (x_1,y_1) عبور می‌کند به‌صورت زیر است:

$$y-y_1=m\left(x-x_1\right)$$

ب) می‌دانیم:

$$m_{\text{قائم}}=-\frac{1}{m_{\text{مماس}}}$$

ج) شیب خط مماس بر منحنی تابع در یک نقطه، برابر مشتق تابع در آن نقطه است.

گام دوم

با مشتق‌گیری از تابع، شیب خط مماس و درنتیجه شیب خط قائم را محاسبه می‌کنیم:

$$y=\frac{x+1}{2x-1}\Rightarrow y'=\frac{2x-1-2\left(x+1\right)}{\left(2x-1\right)^2}=\frac{2x-1-2x-2}{\left(2x-1\right)^2}=\frac{-3}{\left(2x-1\right)^2}$$

$$\Rightarrow y'\left(-1\right)=\frac{-3}{\left(-2-1\right)^2}=\frac{-3}{\left(-3\right)^2}=\frac{-3}{9}=-\frac{1}{3}\Rightarrow m_{\text{مماس}}=-\frac{1}{3}$$

$$m_{\text{قائم}}=-\frac{1}{m_{\text{مماس}}}=-\frac{1}{y'\left(-1\right)}=-\frac{1}{-\frac{1}{3}}=3$$

$$y=\frac{x+1}{2x-1}\xrightarrow{x=-1}y\left(-1\right)=\frac{-1+1}{-2-1}=0$$

باتوجه‌به قسمت الف از گام اول، معادلهٔ خط قائم در نقطهٔ $(-1,0)$ به‌صورت زیر است:

$$y-y\left(-1\right)=m\left(x+1\right)\Rightarrow y-0=3\left(x+1\right)\Rightarrow y=3x+3\Rightarrow y-3x=3$$

۵۳ **گزینه ۴**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

گام اول

الف) شیب خط قائم در یک نقطه برابر است با معکوس و قرینهٔ شیب خط مماس بر منحنی در همان نقطه؛ یعنی:

$$m_{\text{قائم}} = -\frac{1}{m_{\text{مماس}}}$$

ب) شیب خط مماس بر منحنی تابع در یک نقطه واقع بر آن، برابر مشتق تابع در آن نقطه است.

ج) معادلهٔ خطی به شیب m که از نقطهٔ (x_1, y_1) عبور می‌کند به‌صورت زیر است:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

گام دوم

ابتدا شیب خط قائم بر منحنی تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}} + x \Rightarrow y' = \frac{0 - \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2} + 1 = -\frac{1}{2x\sqrt{x}} + 1$$

$$y'(1) = -\frac{1}{2} + 1 = +\frac{1}{2} \Rightarrow m_{\text{مماس}} = \frac{1}{2} \Rightarrow m_{\text{قائم}} = -\frac{1}{m_{\text{مماس}}} = -\frac{1}{+\frac{1}{2}} = -2$$

باتوجه‌به قسمت "ج" از گام اول، معادلهٔ خط قائم را تشکیل می‌دهیم:

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}} + x \xrightarrow{x=1} y = 1 + 1 = 2$$

$$y - y(1) = m(x - 1) \Rightarrow y - 2 = -2(x - 1) \Rightarrow y - 2 = -2x + 2 \Rightarrow y + 2x = 4$$

۵۴ **گزینه ۲**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

گام اول

الف) در نقطهٔ تقاطع یک منحنی با محور طول‌ها، $y = ۰$ است.

ب) معادلهٔ خطی به شیب m که از نقطهٔ $(x_۱, y_۱)$ عبور می‌کند، به‌صورت زیر است:

$$y - y_۱ = m(x - x_۱)$$

ج) می‌دانیم:

$$m_{\text{قائم}} = -\frac{۱}{m_{\text{مماس}}}$$

د) شیب خط مماس بر منحنی تابع در یک نقطه روی منحنی، برابر مشتق تابع در آن نقطه است.

گام دوم

باتوجه‌به قسمت الف از گام اول، مختصات نقطهٔ تقاطع منحنی با محور xها را به دست می‌آوریم:

$$y = \frac{۲x-۱}{x+۱} \xrightarrow{y=۰} \frac{۲x-۱}{x+۱} = ۰ \Rightarrow ۲x - ۱ = ۰ \Rightarrow ۲x = ۱ \Rightarrow x = \frac{۱}{۲}$$

با مشتق‌گیری از معادلهٔ منحنی، شیب مماس و سپس شیب قائم را در نقطهٔ $(\frac{۱}{۲}, ۰)$ محاسبه می‌کنیم:

$$y = \frac{۲x-۱}{x+۱} \Rightarrow y' = \frac{۲(x+۱) - (۲x-۱)}{(x+۱)^۲} = \frac{۲x+۲-۲x+۱}{(x+۱)^۲} = \frac{۳}{(x+۱)^۲}$$

$$\Rightarrow y'\left(\frac{۱}{۲}\right) = \frac{۳}{\left(\frac{۱}{۲}+۱\right)^۲} = \frac{۳}{\left(\frac{۳}{۲}\right)^۲} = \frac{۳}{\frac{۹}{۴}} = \frac{۴}{۳} \Rightarrow m_{\text{مماس}} = \frac{۴}{۳}$$

$$m_{\text{قائم}} = -\frac{۱}{m_{\text{مماس}}} = -\frac{۱}{y'\left(\frac{۱}{۲}\right)} = -\frac{۱}{\frac{۴}{۳}} = -\frac{۳}{۴}$$

باتوجه‌به قسمت "ب" از گام اول، معادلهٔ خط قائم بر منحنی در نقطهٔ $(\frac{۱}{۲}, ۰)$ برابر است با:

$$y - y(\tfrac{۱}{۲}) = m_{\text{قائم}}(x - \tfrac{۱}{۲}) \Rightarrow y - ۰ = -\tfrac{۳}{۴}(x - \tfrac{۱}{۲}) \Rightarrow y = -\tfrac{۳}{۴}x + \tfrac{۳}{۸}$$

با جایگذاری $x = ۰$ در معادلهٔ خط، عرض از مبدأ آن را محاسبه می‌کنیم:

$$\xrightarrow{x=۰} y = -\tfrac{۳}{۴}(۰) + \tfrac{۳}{۸} \Rightarrow y = \tfrac{۳}{۸}$$

۵۵ **گزینه ۲**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۰

گام اول

الف) شیب دو خط موازی باهم برابر است.

ب) شیب خطی به معادلهٔ $y = ax + b$ برابر a است.

ج) شیب خط مماس بر منحنی تابع در یک نقطه، برابر مشتق تابع در آن نقطه است.

گام دوم

ابتدا با استاندارد کردن معادلهٔ خط داده‌شده، شیب آن را تعیین می‌کنیم:

$$۳y - ۲x = ۵ \Rightarrow ۳y = ۲x + ۵ \Rightarrow y = \frac{۲}{۳}x + \frac{۵}{۳} \Rightarrow m = \frac{۲}{۳}$$

شیب خط مماس بر منحنی در نقطهٔ $x_۰$ برابر شیب خط داده شده است، بنابراین:

$$y = \frac{۱}{\sin x} \Rightarrow y' = \frac{۰ - \cos x}{\sin^۲ x} = -\frac{\cos x}{\sin^۲ x}$$

$x_۰$ شیب خط مماس بر منحنی در نقطهٔ $= y'(x_۰) = -\frac{\cos x_۰}{\sin^۲ x_۰} = \frac{۲}{۳}$

$x_۰$ را به‌گونه‌ای پیدا می‌کنیم که معادلهٔ $-\frac{\cos x_۰}{\sin^۲ x_۰} = \frac{۲}{۳}$ برقرار باشد. با جایگذاری گزینه‌ها، فقط به ازای $x_۰ = \frac{۲\pi}{۳}$ معادله برقرار است. روش دیگر برای یافتن $x_۰$ حل معادلهٔ مثلثاتی است. داریم:

$$\frac{-\cos x_۰}{\sin^۲ x_۰} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow -\frac{\cos x_۰}{۱ - \cos^۲ x_۰} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow ۲ - ۲\cos^۲ x_۰ = -۳\cos x_۰ \Rightarrow ۲\cos^۲ x_۰ - ۳\cos x_۰ - ۲ = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x_۰ = \frac{۳+۵}{۴} = \frac{۸}{۴} = ۲ & \text{غ ق ق} \\ \cos x_۰ = \frac{۳-۵}{۴} = -\frac{۲}{۴} = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow x_۰ = ۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳} \end{cases}$$

از بین گزینه‌ها $x_۰ = \frac{۲\pi}{۳}$ جواب معادله است.

۵۶ **گزینه ۳**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۹

گام اول

الف) شیب دو خط عمود بر هم، قرینه و معکوس یکدیگر است؛ بنابراین حاصل‌ضرب آن‌ها برابر ۱- می‌شود.

۲) شیب خطی به معادلهٔ $y = ax + b$ برابر a است.

ج) شیب خط مماس بر منحنی تابع در یک نقطه واقع بر آن برابر مشتق تابع در آن نقطه است.

د) معادلهٔ خط به شیب m که از نقطهٔ (x_1, y_1) عبور می‌کند به‌صورت زیر است:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

گام دوم

ابتدا معادلهٔ خط داده‌شده را به فرم استاندارد نوشته و شیب آن را به دست می‌آوریم.

$$x - 3y = 2 \Rightarrow 3y = x - 2 \Rightarrow y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} \Rightarrow m = \frac{1}{3}$$

پس طبق قسمت الف از گام اول، شیب خط مماس بر منحنی برابر ۳- است. فرض می‌کنیم خط در نقطهٔ $x = x_0$ بر منحنی مماس شده است بنابراین:

$$y = x^3 + 3x^2 + 1 \Rightarrow y' = 3x^2 + 6x \Rightarrow y'(x_0) = 3x_0^2 + 6x_0 = -3$$

$$\Rightarrow 3x_0{}^2 + 6x_0 + 3 = 0 \xrightarrow{\div 3} x_0^2 + 2x_0 + 1 = 0 \Rightarrow (x_0 + 1)^2 = 0 \Rightarrow x_0 + 1 = 0 \Rightarrow x_0 = -1$$

$$y(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 + 1 = -1 + 3 + 1 = 3$$

پس نقطهٔ تماس دارای مختصات $(-1, 3)$ است. طبق قسمت د از گام اول، معادلهٔ خط مماس برابر است با:

$$y - 3 = -3(x + 1) \Rightarrow y = -3x - 3 + 3 \Rightarrow y = -3x$$

از میان گزینه‌ها، فقط نقطهٔ $(2, -6)$ در معادلهٔ خط صدق می‌کند.

۵۷ **گزینه ۲**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۰

گام اول

خط بر یک منحنی مماس است درصورتی‌که معادلهٔ تلاقی آن‌ها ریشهٔ مضاعف داشته باشد.

گام دوم

با مساوی قرار دادن معادلهٔ خط و منحنی، معادلهٔ تلاقی آن‌ها را به دست می‌آوریم:

$$2x^2 - x + a = -1 \Rightarrow 2x^2 - x + a + 1 = 0$$

می‌دانیم معادلهٔ درجه‌دو در صورتی ریشهٔ مضاعف دارد که $\Delta = 0$ شود:

$$\Delta = (-1)^2 - 4(2)(a+1) = 0 \Rightarrow 1 - 8(a+1) = 0$$

$$\Rightarrow 8(a+1) = 1 \Rightarrow a + 1 = \frac{1}{8} \Rightarrow a = -\frac{7}{8}$$

۵۸ گزینه ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

گام اول

الف) شیب خط مماس بر منحنی تابع در یک نقطه روی منحنی، برابر مشتق تابع در آن نقطه است.

ب) مختصات نقطهٔ تماس در معادلهٔ خط مماس و معادلهٔ منحنی صدق می‌کند.

ج) شیب خطی به معادلهٔ $y = ax + b$ برابر a است.

گام دوم

شیب خط $y = ۲x - ۵$ برابر ۲ است؛ بنابراین مشتق تابع به معادلهٔ $y = ax^۲ + bx + ۱$ در نقطهٔ $x = ۱$ نیز برابر ۲ می‌شود:

$$y = ax^۲ + bx + ۱ \Rightarrow y' = ۲ax + b \xrightarrow{x=۱} m_{\text{مماس}} = y'(۱) = ۲ \Rightarrow ۲a + b = ۲ \quad (I)$$

طبق قسمت ب از گام اول، به ازای $x = ۱$ مقدار به‌دست‌آمده از معادلهٔ خط و منحنی برابر است، پس داریم:

$$y = ۲x - ۵ \Rightarrow y(۱) = ۲ - ۵ = -۳$$

$$y = ax^۲ + bx + ۱ \Rightarrow y(۱) = a + b + ۱ = -۳ \Rightarrow a + b = -۴ \quad (II)$$

از دو معادلهٔ (I) و (II)، a و b را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} ۲a + b = ۲ \\ a + b = -۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲a + b = ۲ \\ -a - b = ۴ \end{cases} \Rightarrow a = ۶$$

۵۹ **گزینه ۲**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

گام اول

الف) شیب دو خط موازی باهم برابر است.

ب) شیب خط مماس بر منحنی تابع در یک روی آن، برابر مشتق تابع در آن نقطه است.

ج) مشتق تابع ضمنی $f(x,y)=0$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$y'=-\frac{f'_x}{f'_y}$$

گام دوم

باتوجه‌به قسمت ج از گام اول، از معادلهٔ منحنی مشتق می‌گیریم (دقت کنید که در مشتق‌گیری ضمنی همهٔ عبارت‌ها را به یک طرف تساوی منتقل کرده و برابر صفر قرار می‌دهیم):

$$\sqrt{y}+yx\sqrt{x}-6x=0 \Rightarrow y'_x=-\frac{f'_x}{f'_y}=-\frac{\frac{3}{2}y\sqrt{x}-6}{\frac{1}{2\sqrt{y}}+x\sqrt{x}}$$

محور xها یک خط افقی است که شیب آن برابر صفر است. باتوجه‌به قسمت الف و ب از گام اول مشتق تابع در نقطهٔ تماس برابر صفر است؛ بنابراین داریم:

$$y'_x=0 \Rightarrow \frac{3}{2}y\sqrt{x}-6=0 \Rightarrow \frac{3}{2}y\sqrt{x}=6 \Rightarrow y\sqrt{x}=4 \Rightarrow y=\frac{4}{\sqrt{x}}$$

در معادلهٔ $f(x,y)=0$ به‌جای y، عبارت $\frac{4}{\sqrt{x}}$ را قرار می‌دهیم سپس معادله را حل و مقدار x را تعیین می‌کنیم:

$$\sqrt{y}+yx\sqrt{x}-6x=0 \xrightarrow{y=\frac{4}{\sqrt{x}}} \sqrt{\frac{4}{\sqrt{x}}}+\frac{4}{\sqrt{x}}x\sqrt{x}-6x=0$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{4}}{\sqrt[4]{x}}+4x-6x=0 \Rightarrow \frac{2}{\sqrt[4]{x}}=2x \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[4]{x}}=x \Rightarrow x\sqrt[4]{x}=1$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۴}} x^4x=1 \Rightarrow x^5=1 \Rightarrow x=1$$

بنابراین طول نقطهٔ موردنظر برابر ۱ است.

۶۰ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

گام اول

الف) می‌دانیم: $\frac{dy}{dx} = y'_x$

ب) مشتق تابع ضمنی $f(x,y) = ۰$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$y'_x = -\frac{f'_x}{f'_y}$$

گام دوم

ابتـدا تمام عبارت‌های رابطهٔ داده‌شده را به یک طرف تساوی منتقل می‌کنیم تا معادلهٔ $f(x,y) = ۰$ حاصل شود، سپس باتوجه‌به قسمت ب از گام اول مشتق آن را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\sqrt{y}}{x} + y\sqrt{x} = ۶ \Rightarrow \frac{\sqrt{y}}{x} + y\sqrt{x} - ۶ = ۰$$

$$\frac{dy}{dx} = y'_x = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{\sqrt{y}\left(-\frac{۱}{x^۲}\right) + y\left(\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\right)}{\frac{۱}{x}\left(\frac{۱}{۲\sqrt{y}}\right) + \sqrt{x}}$$

اکنون مقدار مشتق را در نقطهٔ $(۱,۴)$ حساب می‌کنیم:

$$\xrightarrow{x=۱\,,\,y=۴} \frac{dy}{dx} = -\frac{۲(-۱)+۴\left(\frac{۱}{۲}\right)}{\frac{۱}{۴}+۱} = -\frac{-۲+۲}{\frac{۵}{۴}} = ۰$$

۶۱ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

گام اول

مشتق یک تابع ضمنی به فرم $f(x,y) = ۰$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$y'_x = -\frac{f'_x}{f'_y}$$

گام دوم

همهٔ عبارت‌های رابطهٔ داده‌شده را به یک طرف تساوی منتقل کرده و مساوی صـفر قرار می‌دهیم، سپس باتوجه‌به گام اول مشتق آن را محاسبه می‌کنیم.

$$y^۲ = \sqrt{x+۲y} + x - ۲y \Rightarrow y^۲ - \sqrt{x+۲y} - x + ۲y = ۰$$

$$y'_x = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{۰-\frac{۱}{۲\sqrt{x+۲y}}-۱}{۲y-\frac{۲}{۲\sqrt{x+۲y}}+۲}$$

بنابراین مقدار مشتق تابع در نقطهٔ $(۵,۲)$ برابر است با:

$$\xrightarrow{x=۵\,,\,y=۲} y'(۵,۲) = -\frac{-\frac{۱}{۲\sqrt{۹}}-۱}{۴-\frac{۱}{\sqrt{۹}}+۲} = -\frac{-\frac{۷}{۶}}{\frac{۱۷}{۳}} = \frac{۷}{۳۴}$$

۶۲ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵

گام اول

الف) مشتق یک تابع ضمنی به فرم $f(x,y) = 0$ از معادلهٔ زیر به دست می‌آید:

$$y'_x = -\frac{f'_x}{f'_y}$$

ب) مشتق تابع $y = \sin u$ از رابطهٔ $y' = u' \cos u$ محاسبه می‌شود.

گام دوم

ابتدا همهٔ عبارت‌های رابطهٔ داده‌شده را به یک طرف تساوی منتقل کرده و مساوی صفر قرار می‌دهیم، سپس باتوجه‌به گام اول مشتق آن را محاسبه می‌کنیم:

$$y = \sin(x-2y) + \sqrt{x-y} \Rightarrow \sin(x-2y) + \sqrt{x-y} - y = 0$$

$$y'_x = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{\cos(x-2y) + \frac{1}{2\sqrt{x-y}} - 0}{-2\cos(x-2y) - \frac{1}{2\sqrt{x-y}} - 1}$$

بنابراین مقدار مشتق تابع $f(x,y)$ در نقطهٔ $(2,1)$ برابر است با:

$$\xrightarrow{x=2,\ y=1} y'(2,1) = -\frac{\cos 0 + \frac{1}{2}}{-2\cos 0 - \frac{1}{2} - 1} = -\frac{1+\frac{1}{2}}{-2-\frac{1}{2}-1} = -\frac{\frac{3}{2}}{-\frac{7}{2}} = \frac{3}{7}$$

۶۳ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

گام اول

الف) عرض از مبدأ یک خط به معادلهٔ $y = ax + b$ برابر b است که با صفر قرار دادن مقدار x به دست می‌آید.

ب) معادلهٔ خطی به شیب m که از نقطهٔ (x_1, y_1) عبور می‌کند به‌صورت زیر است:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

ج) شیب خط مماس بر منحنی تابع در یک نقطه واقع بر آن، برابر مشتق تابع در آن نقطه است.

گام دوم

ابتدا با استفاده از ویژگی‌های لگاریتم ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم:

$$y = \ln\sqrt{\frac{\sin x}{1+\cos x}} = \ln\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right) = \frac{1}{2}\left(\ln\sin x - \ln(1+\cos x)\right)$$

می‌دانیم اگر $y = \ln u$ باشد که u خود تابعی از x است، آنگاه $y' = \frac{u'}{u}$ می‌شود. با در نظر گرفتن این نکته، ضابطهٔ مشتق تابع را تعیین کرده و مقدار آن را در نقطهٔ $x = \frac{\pi}{2}$ محاسبه می‌کنیم. حاصل برابر شیب خط مماس بر منحنی در این نقطه است.

$$y' = \frac{1}{2}\left(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{-\sin x}{1+\cos x}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{1+\cos x}\right)$$

$$m_{\text{مماس}} = y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{0}{1} + \frac{1}{1+0}\right) = \frac{1}{2}(1) = \frac{1}{2}$$

با جایگذاری $x = \frac{\pi}{2}$ در معادلهٔ منحنی، عرض این نقطه را به دست می‌آوریم:

$$y = \ln\sqrt{\frac{\sin x}{1+\cos x}} \xrightarrow{x=\frac{\pi}{2}} y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \ln\sqrt{\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{1+\cos\frac{\pi}{2}}} = \ln\sqrt{\frac{1}{1+0}} = \ln 1 = 0 \Rightarrow y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

حالا معادلهٔ خط مماس بر منحنی را در نقطهٔ $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ تعیین می‌کنیم:

$$y - y\left(\frac{\pi}{2}\right) = y'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow y - 0 = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4}$$

بنابراین عرض از مبدأ خط مماس برابر $-\frac{\pi}{4}$ است.

۶۴ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

گام اول

الف) عرض نقطهٔ تلاقی یک منحنی با محور xها برابر صفر است یعنی در این نقطه $y = ۰$ می‌شود.

ب) معادلهٔ خطی به شیب m که از نقطهٔ $(x_۱, y_۱)$ عبور می‌کند به‌صورت زیر است:

$$y - y_۱ = m(x - x_۱)$$

ج) می‌دانیم:

$$m_{\text{قائم}} = -\frac{۱}{m_{\text{مماس}}}$$

د) شیب خط مماس بر منحنی تابع در یک نقطه واقع بر آن، برابر مشتق تابع در آن نقطه است.

گام دوم

با حل معادلهٔ $y = ۰$، مختصات نقطهٔ تلاقی منحنی با محور xها را به دست می‌آوریم:

$$y = ۰ \Rightarrow ln(۲x - ۵) = ۰ \Rightarrow ۲x - ۵ = ۱ \Rightarrow ۲x = ۶ \Rightarrow x = ۳$$

با مشتق‌گیری از معادلهٔ منحنی، شیب مماس و سپس شیب قائم بر منحنی را در نقطهٔ $(۳, ۰)$ محاسبه می‌کنیم:

$$y = ln(۲x - ۵) \Rightarrow y' = \frac{۲}{۲x-۵} \xrightarrow{x=۳} y'(۳) = \frac{۲}{۶-۵} = ۲ \Rightarrow m_{\text{مماس}} = ۲$$

$$m_{\text{قائم}} = -\frac{۱}{y'(۳)} = -\frac{۱}{۲}$$

حالا معادلهٔ خط قائم بر منحنی در نقطه $(۳, ۰)$ را تعیین می‌کنیم:

$$y - ۰ = -\frac{۱}{۲}(x - ۳) \Rightarrow y = -\frac{۱}{۲}x + \frac{۳}{۲} \xrightarrow{\times ۲} ۲y = -x + ۳ \Rightarrow ۲y + x = ۳$$

۶۵ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

گام اول

الف) شیب خط مماس بر منحنی در یک نقطه واقع بر آن برابر مشتق تابع در آن نقطه است.

ب) معادلهٔ خطی به شیب m که از نقطهٔ $(x_۱, y_۱)$ عبور می‌کند از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$y - y_۱ = m(x - x_۱)$$

ج) مشتق تابع $y = e^u$ که u خود تابعی برحسب x است، از رابطهٔ $y' = u'e^u$ به دست می‌آید.

د) برای محاسبهٔ مشتق تابع ضمنی به معادلهٔ $f(x, y) = ۰$ از رابطهٔ $y'_x = -\frac{f'_x}{f'_y}$ استفاده می‌کنیم.

گام دوم

با مشتق‌گیری از تابع ضمنی داده‌شده، شیب خط مماس را در مبدأ مختصات محاسبه می‌کنیم:

$$e^{x+y} + x + y - ۱ = ۰ \Rightarrow y'_x = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{۱\times(e^{x+y})+۱+۰}{۱\times(e^{x+y})+۰+۱} = -\frac{e^{x+y}+۱}{e^{x+y}+۱} = -۱ \Rightarrow y'(۰, ۰) = -۱$$

بنابراین معادلهٔ خط مماس بر منحنی در نقطهٔ $(۰, ۰)$ برابر است با:

$$y - ۰ = y'(۰)(x - ۰) \Rightarrow y = -x$$

۶۶ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

گام اول

الف) معادلهٔ خطی به شیب m که از نقطهٔ (x_1,y_1) عبور می‌کند، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

ب) می‌دانیم:

$$m_{\text{قائم}} = -\frac{1}{m_{\text{مماس}}}$$

ج) شیب خط مماس بر منحنی در نقطه‌ای واقع بر آن برابر مشتق تابع در آن نقطه است.

د) مشتق تابع ضمنی با معادلهٔ $f(x,y) = 0$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$y'_x = -\frac{f'_x}{f'_y}$$

هـ) در نقطهٔ تقاطع منحنی با محور yها، مقدار x برابر صفر است.

گام دوم

ابتدا تمام عبارت‌های معادلهٔ منحنی را به یک طرف منتقل کرده و برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$e^{2y} + \ln x + \frac{y}{x} = 1 \Rightarrow e^{2y} + \ln x + \frac{y}{x} - 1 = 0$$

باتوجه‌به قسمت د از گام اول، مشتق تابع را در نقطهٔ $(1,0)$ محاسبه می‌کنیم:

$$y' = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{0+\frac{1}{x}-\frac{y}{x^2}}{2e^{2y}+0+\frac{1}{x}}$$

$$\xrightarrow{x=1,\ y=0} y'(1,0) = m_{\text{مماس}} = -\frac{1-0}{2+1} = -\frac{1}{3} \Rightarrow m_{\text{قائم}} = -\frac{1}{y'(1,0)} = -\frac{1}{-\frac{1}{3}} = 3$$

معادلهٔ خط قائم در نقطهٔ $(1,0)$ برابر است با:

$$y - 0 = 3(x-1) \Rightarrow y = 3x - 3$$

با صفر قرار دادن مقدار x محل برخورد خط مماس با محور عرض‌ها را به دست می‌آوریم:

$$\xrightarrow{x=0} y = 0 - 3 = -3$$

۶۷ **گزینه ۱**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

گام اول

الف) عرض از مبدأ خطی به معادلهٔ $y = ax + b$ برابر b است که با صفر قرار دادن مقدار x به دست می‌آید.

ب) معادلهٔ خطی به شیب m که از نقطهٔ (x_1, y_1) عبور می‌کند به‌صورت زیر است:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

ج) می‌دانیم:

$$m_{\text{قائم}} = -\frac{1}{m_{\text{مماس}}}$$

د) شیب خط مماس بر منحنی تابع در یک نقطه واقع بر آن، برابر مشتق تابع در آن نقطه است.

هـ) مشتق تابع ضمنی با معادلهٔ $f(x,y) = 0$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$y'_x = -\frac{f'_x}{f'_y}$$

گام دوم

ابتـدا همهٔ عبارت‌های معادلهٔ منحنی را به یک طرف تساوی منتقل کرده و مساوی صـفر قرار می‌دهیم؛ سـپس باتوجه‌به قسمت هـ از گام اول، مشتق آن را محاسبه می‌کنیم:

$$y^2 = y\,ln\left(x^2 - 3\right) + 2x \Rightarrow y^2 - y\,ln\left(x^2 - 3\right) - 2x = 0$$

$$\Rightarrow y'_x = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{0 - y\frac{2x}{x^2-3} - 2}{2y - ln\left(x^2 - 3\right) - 0}$$

مختصات نقطهٔ $(2, -2)$ در معادلهٔ منحنی صدق می‌کند بنابراین روی منحنی قرار دارد. پس طبق قسمت د از گام اول داریم:

$$\Rightarrow y'(2,-2) = m_{\text{مماس}} = -\frac{2\times\frac{4}{4-3} - 2}{-4 - ln\,1} = -\frac{8-2}{-4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow m_{\text{قائم}} = -\frac{1}{y'(2,-2)} = -\frac{2}{3}$$

اکنون معادلهٔ خط قائم را در نقطهٔ $(2, -2)$ تشکیل داده و با صفر قرار دادن مقدار x عرض از مبدأ آن را محاسبه می‌کنیم:

$$y - (-2) = -\frac{2}{3}(x - 2) \Rightarrow y + 2 = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3} \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3} \xrightarrow{x=0} y = -\frac{2}{3}$$

بنابراین عرض از مبدأ خط قائم بر منحنی در نقطهٔ $(2, -2)$ برابر $-\frac{2}{3}$ است.

۶۸ **گزینه ۳**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

گام اول

الف) معادلهٔ خطی به شیب m که از نقطهٔ (x_1, y_1) عبور می‌کند به‌صورت زیر است:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

ب) شیب خط مماس بر منحنی در یک نقطه واقع بر آن، برابر مشتق تابع در آن نقطه است.

ج) مشتق تابع ضمنی با معادلهٔ $f(x,y) = 0$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$y'_x = -\frac{f'_x}{f'_y}$$

گام دوم

همـهٔ عبارت‌های معادلهٔ منحنی را به یک طرف منتقل کرده و برابر صـفر قرار می‌دهیم، سـپس باتوجه‌به قسـمت ج از گام اول، مشـتق آن را به دست می‌آوریم. به یاد داشته باشید که مشتق تابع $y = e^u$ از رابطهٔ $y' = u' e^u$ محاسبه می‌شود.

$$y^2 + y = 2e^{2x-1} \Rightarrow y^2 + y - 2e^{2x-1} = 0$$

$$y'_x = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{0 + 0 - 4e^{2x-1}}{2y + 1 - 0}$$

باتوجه‌به قسمت ب و الف از گام اول، شیب خط مماس را یافته و سپس معادلهٔ آن را تعیین می‌کنیم:

$$m_{\text{مماس}} = y'\left(\tfrac{1}{2}, 1\right) = -\frac{-4e^0}{2+1} = \frac{4}{3}$$

$$y - 1 = \frac{4}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow y - 1 = \frac{4}{3}x - \frac{2}{3} \xrightarrow{\times 3} 3y - 3 = 4x - 2 \Rightarrow 3y - 4x = 1$$

۶۹ **گزینه ۴**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

گام اول

الف) معادلهٔ خطی به شیب m که از نقطهٔ (x_1,y_1) عبور می‌کند به‌صورت زیر است:

$$y-y_1=m\left(x-x_1\right)$$

ب) شیب خط مماس بر منحنی تابع در یک نقطه واقع بر آن، برابر مشتق تابع در آن نقطه است.

ج) مشتق تابع ضمنی با معادلهٔ $f(x,y)=0$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$y'_x=-\frac{f'_x}{f'_y}$$

د) نیمساز ناحیهٔ اول خطی به معادلهٔ $y=x$ است.

هـ) مختصات نقطهٔ برخورد دو خط، در معادلهٔ هر دو خط صدق می‌کند.

گام دوم

ابتدا همهٔ عبارت‌های معادلهٔ منحنی را به یک طرف منتقل کرده و برابر صفر قرار می‌دهیم، سپس باتوجه‌به قسمت ج از گام اول، مشتق آن را به دست می‌آوریم:

$$\ln\left(x^۲-y\right)=\sqrt{y+۱}-x\Rightarrow \ln\left(x^۲-y\right)-\sqrt{y+۱}+x=۰$$

$$\Rightarrow y'=-\frac{f'_x}{f'_y}=-\frac{\frac{۲x}{x^۲-y}-۰+۱}{\frac{-۱}{x^۲-y}-\frac{۱}{۲\sqrt{y+۱}}+۰}$$

اکنون باتوجه‌به قسمت ب و الف از گام اول، شیب خط مماس و سپس معادلهٔ آن را در نقطه $(۲,۳)$ تعیین می‌کنیم:

$$m_{\text{مماس}}=y'\left(۲,۳\right)=-\frac{\frac{۴}{۴-۳}+۱}{\frac{-۱}{۴-۳}-\frac{۱}{۲\sqrt{۳+۱}}}=-\frac{\frac{۴}{۱}+۱}{-\frac{۱}{۱}-\frac{۱}{۴}}=-\frac{۵}{-\frac{۵}{۴}}=۴$$

$$y-۳=۴\left(x-۲\right)\Rightarrow y-۳=۴x-۸\Rightarrow y=۴x-۵$$

برای تعیین نقطهٔ برخورد خط مماس با نیمساز ناحیهٔ اول، معادلهٔ دو خط را باهم مساوی قرار می‌دهیم:

$$\xrightarrow[y=۴x-۵]{y=x} ۴x-۵=x\Rightarrow ۳x=۵\Rightarrow x=\frac{۵}{۳}$$

۷۰ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

گام اول

الف) شیب خط قائم بر منحنی در یک نقطه روی آن برابر معکوس و قرینهٔ شیب خط مماس بر منحنی در همان نقطه است.

ب) شیب خط مماس بر منحنی در یک نقطه واقع بر آن برابر مشتق تابع در آن نقطه است.

ج) منظور از پای قائم، نقطه‌ای روی منحنی است که خط قائم در آنجا رسم شده است.

گام دوم

فرض می‌کنیم خط $y+x=0$ در نقطهٔ $x=\alpha$ قائم بر منحنی رسم شده است. بعد از استاندارد کردن معادلهٔ خط، شیب آن را محاسبه می‌کنیم:

$$y+x=0 \Rightarrow y=-x \Rightarrow m_{\text{قائم}}=-1$$

طبق قسمت الف از گام اول داریم:

$$m_{\text{مماس}}=-\frac{1}{m_{\text{قائم}}}=-\frac{1}{-1}=1$$

پس طبق قسمت ب از گام اول، مشتق تابع در نقطهٔ $(\alpha,-\alpha)$ برابر ۱ است. با حل معادلهٔ به‌دست‌آمده مقدار α را محاسبه می‌کنیم:

$$y=\frac{1}{2}x^2-2x+\ln(x-1) \Rightarrow y'=x-2+\frac{1}{x-1}$$

$$m_{\text{مماس}}=y'(\alpha)=1 \Rightarrow \alpha-2+\frac{1}{\alpha-1}=1 \Rightarrow \alpha+\frac{1}{\alpha-1}=3$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha(\alpha-1)+1}{\alpha-1}=3 \Rightarrow \frac{\alpha^2-\alpha+1}{\alpha-1}=3 \Rightarrow \alpha^2-\alpha+1=3\alpha-3$$

$$\Rightarrow \alpha^2-4\alpha+4=0 \Rightarrow (\alpha-2)^2=0 \Rightarrow \alpha-2=0 \Rightarrow \alpha=2$$

بنابراین طول پای قائم برابر ۲ است.

۷۱ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۲

گام اول

الف) می‌دانیم: $\frac{dy}{dx}=y'_x$

ب) مشتق تابع منحنی با معادلهٔ $f(x,y)=0$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$y'_x=-\frac{f'_x}{f'_y}$$

گام دوم

ابتدا همهٔ عبارت‌های رابطهٔ داده‌شده را به یک طرف تساوی منتقل کرده و آن را به فرم استاندارد $f(x,y)=0$ می‌نویسیم، سپس باتوجه‌به گام اول مشتق آن را در نقطهٔ $(0,1)$ محاسبه می‌کنیم:

$$y=y^2e^{\sin 2x}+\sin x \Rightarrow y-y^2e^{\sin 2x}-\sin x=0$$

$$\Rightarrow y'_x=-\frac{f'_x}{f'_y}=-\frac{0-y^2(2\cos 2x)e^{\sin 2x}-\cos x}{1-2y\,e^{\sin 2x}-0}$$

$$\Rightarrow y'(0,1)=-\frac{0-1(2\cos 0)e^0-\cos 0}{1-2e^0-0}=-\frac{-2-1}{1-2}=-\frac{-3}{-1}=-3$$

۷۲ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۴

گام اول

الف) $f'_+(\circ)$ یعنی مشتق راست تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=\circ$ و $f'_-(\circ)$ یعنی مشتق چپ تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=\circ$.

ب) می‌دانیم:

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$
$$(e^u)' = u'e^u$$

گام دوم

$$x>\circ \Rightarrow f(x)=\ln\left(x^۲+۱\right) \Rightarrow f'(x)=\frac{۲x}{x^۲+۱} \Rightarrow f'_+\left(\circ\right)=\frac{\circ}{\circ+۱}=\circ$$
$$x<\circ \Rightarrow f(x)=xe^{x^۲} \Rightarrow f'(x)=e^{x^۲}+۲x^۲e^{x^۲} \Rightarrow f'_-\left(\circ\right)=e^\circ+\circ\left(e^\circ\right)=۱+\circ=۱$$
$$f'_+\left(\circ\right)-f'_-\left(\circ\right)=\circ-۱=-۱$$

۷۳ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

گام اول

الف) معادلهٔ خطی به شیب m که از نقطهٔ $(x_۱,y_۱)$ عبور می‌کند از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$y-y_۱=m(x-x_۱)$$

ب) شیب خط مماس بر منحنی تابع در یک نقطه واقع بر آن، برابر مشتق تابع در آن نقطه است. دقت کنید مشتق e^u از رابطهٔ $u'e^u$ محاسبه می‌شود.

گام دوم

ابتدا باتوجه‌به گام اول، معادلهٔ خط مماس را در نقطهٔ $x=۲$ به دست می‌آوریم:

$$y=\sqrt{۲x}\,e^{۲-x} \Rightarrow y' = \frac{۲}{۲\sqrt{۲x}}e^{۲-x}+\left(-۱\right)e^{۲-x}\sqrt{۲x}=\frac{۱}{\sqrt{۲x}}e^{۲-x}-e^{۲-x}\sqrt{۲x}$$
$$\Rightarrow y'=e^{۲-x}\left(\frac{۱}{\sqrt{۲x}}-\sqrt{۲x}\right)$$
$$m_{\text{مماس}}=y'\left(۲\right)=e^\circ\left(\tfrac{۱}{۲}-۲\right)=۱\left(-\tfrac{۳}{۲}\right)=-\tfrac{۳}{۲}$$

با جایگذاری $x=۲$ در معادلهٔ منحنی، عرض این نقطه را تعیین می‌کنیم:

$$y=\sqrt{۲x}e^{۲-x} \xrightarrow{x=۲} y=\sqrt{۴}e^\circ=۲\times۱=۲$$
$$\text{معادلهٔ خط مماس}:\ y-y\left(۲\right)=y'\left(۲\right)\left(x-۲\right)$$
$$\Rightarrow y-۲=-\tfrac{۳}{۲}\left(x-۲\right) \Rightarrow y-۲=-\tfrac{۳}{۲}x+۳ \Rightarrow y=-\tfrac{۳}{۲}x+۵$$

برای یافتن نقطهٔ برخورد خط مماس با محور عرض‌ها، مقدار x را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$y=-\tfrac{۳}{۲}x+۵ \xrightarrow{x=\circ} y=۵$$

۷۴ گزینه ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

گام اول

الف) معادلهٔ خطی به شیب m که از نقطهٔ (x_1,y_1) عبور می‌کند از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

ب) شیب خط مماس بر منحنی تابع در یک نقطه واقع بر آن برابر مشتق تابع در آن نقطه است.

ج) مشتق تابع ضمنی با معادلهٔ $f(x,y)=0$ از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$y'_x=-\frac{f'_x}{f'_y}$$

گام دوم

همهٔ عبارت‌های معادلهٔ تابع را به یک طرف تساوی منتقل کرده و برابر صفر قرار می‌دهیم. باتوجه‌به قسمت ج از گام اول، مشتق این تابع را به دست می‌آوریم:

$$4\sqrt{xy}+\frac{1}{y}-2x-1=0\Rightarrow y'=-\frac{f'_x}{f'_y}=-\frac{4\times\frac{y}{2\sqrt{xy}}+0-2}{4\times\frac{x}{2\sqrt{xy}}-\frac{1}{y^2}-0}=-\frac{\frac{2y}{\sqrt{xy}}-2}{\frac{2x}{\sqrt{xy}}-\frac{1}{y^2}}$$

مشتق تابع و درنتیجه شیب خط مماس در نقطهٔ $(4,1)$ برابر است با:

$$y'(4,1)=-\frac{\frac{2}{\sqrt{4}}-2}{\frac{8}{\sqrt{4}}-1}=-\frac{1-2}{4-1}=-\frac{-1}{3}=\frac{1}{3}\Rightarrow m_{\text{مماس}}=\frac{1}{3}$$

اکنون معادلهٔ خط مماس را تشکیل می‌دهیم:

$$y-1=\frac{1}{3}(x-4)\xrightarrow{\times 3}3y-3=x-4\Rightarrow 3y-x=-4+3=-1\Rightarrow 3y-x=-1$$

۷۵ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

گام اول

تابع $f(x)$ در یک نقطه مشـتق‌پذیر است هرگاه تابع در این نقطه پیوسته باشد و مشتق چپ و راست تابع نیز در این نقطه موجود و باهم برابر شوند.

گام دوم

ابتدا شرط پیوستگی تابع را در نقطهٔ $x = \frac{\pi}{4}$ بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}^+} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{4}^-} f(x) = f\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to \frac{\pi}{4}^+} a\tan x + b\sin 2x = \lim_{x\to \frac{\pi}{4}^-} \sin^2 x - \cos 2x = f\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow a\tan\frac{\pi}{4} + b\sin\frac{\pi}{2} = \sin^2\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow a(1) + b(1) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 0 \Rightarrow a + b = \frac{1}{2} \qquad (I)$$

اکنون ضابطهٔ $f'(x)$ را به دست آورده و برابر بودن مشتق راست و چپ در نقطهٔ $x = \frac{\pi}{4}$ را بررسی می‌کنیم:

$$f'(x) = \begin{cases} 2\sin x\cos x + 2\sin 2x & ; 0 < x < \frac{\pi}{4} \\ a\left(1 + \tan^2 x\right) + 2b\cos 2x & ; \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$f'_-\left(\frac{\pi}{4}\right) = f'_+\left(\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2(1) = a(1+1) + 2b(0)$$

$$\Rightarrow 3 = 2a \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

با جایگذاری مقدار a در رابطهٔ (I) مقدار b را محاسبه می‌کنیم:

$$\xrightarrow{(I)} \frac{3}{2} + b = \frac{1}{2} \Rightarrow b = -1$$

۷۶ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۲

گام اول

الف) تابع $f(x)$ همواره صعودی است هرگاه به‌ازای تمام مقادیر دامنهٔ تعریف آن، $f'(x) \geq ۰$ باشد.

ب) یک تابع درجه‌دوم همواره نامنفی است هرگاه اولاً ضریب $x^۲$ مثبت و ثانیاً $\Delta \leq ۰$ باشد.

گام دوم

$$f(x) = x^۳ + ax^۲ + x \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$
$$f'(x) = ۳x^۲ + ۲ax + ۱$$

می‌خواهیم $f'(x) \geq ۰$ همواره برقرار باشد. کافی است دو شرط ذکر شده در قسمت ب از گام اول بررسی شود.

$$۱)\ ۳ \geq ۰$$
$$۲)\ \Delta \leq ۰ \Rightarrow (۲a)^۲ - ۴(۳)(۱) = ۴a^۲ - ۱۲ = ۴(a^۲ - ۳) \leq ۰$$
$$\Rightarrow a^۲ - ۳ \leq ۰ \Rightarrow a^۲ \leq ۳ \Rightarrow |a| \leq \sqrt{۳}$$

۷۷ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۰

گام اول

تابع $f(x)$ روی یک بازه صعودی است هرگاه تابع روی این بازه پیوسته و $f'(x) > ۰$ باشد.

گام دوم

$$۱ - x^۲ = ۰ \Rightarrow x^۲ = ۱ \Rightarrow x = \pm ۱$$

تابع $f(x)$ در تمام نقاط $\mathbb{R}$ به جز دو نقطهٔ $x = ۱$ و $x = -۱$ تعریف شده است. داریم:

$$y = \frac{x}{۱-x^۲} \Rightarrow y' = \frac{(۱-x^۲)-(-۲x)x}{(۱-x^۲)^۲} = \frac{x^۲+۱}{(۱-x^۲)^۲}$$

تابع y' به‌ازای تمام نقاط عضو دامنـهٔ تعریف تابع y، مثبت است؛ بنابراین کافی است بازه‌ای را انتخاب کنیم که شامل هیـچ‌کـدام از دو مقدار $x = \pm ۱$ نباشد، باتوجه‌به گزینه‌ها، نمودار تابع روی بازهٔ $(-\infty, -۲)$ صعودی است.

۷۸ گزینه ۲

الف) طول نقطهٔ موردنظر برابر ۲ است. عرض آن را به دست می‌آوریم:

$$y = ln \frac{\sqrt{۴x+۱}}{x^۲-۲x+۳} \Rightarrow y(۲) = ln \frac{\sqrt{۸+۱}}{۲^۲-۴+۳} = ln \frac{۳}{۳} = ln\,۱ = ۰ \Rightarrow y = ۰$$

مقدار مشتق تابع در نقطه‌ای به طول $x = ۲$ برابر شیب خط مماس بر منحنی در این نقطه است:

$$y' = \frac{\dfrac{\frac{۴}{۲\sqrt{۴x+۱}}(x^۲-۲x+۳)-(۲x-۲)\sqrt{۴x+۱}}{(x^۲-۲x+۳)^۲}}{\dfrac{\sqrt{۴x+۱}}{x^۲-۲x+۳}}$$

$$m = y'(۲) = -\frac{۴}{۹}$$

بنابراین معادلهٔ خط مماس بر منحنی در نقطه‌ای به مختصات $(۲,۰)$ و با شیب $m = -\frac{۴}{۹}$ به‌صورت زیر است:

$$y - ۰ = -\frac{۴}{۹}(x-۲) \Rightarrow y = -\frac{۴}{۹}x + \frac{۸}{۹}$$

عرض از مبدأ خط مماس در نقطه‌ای به طول $x = ۲$ برابر $\frac{۸}{۹}$ است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

۷۹ گزینه ۱

حد داده‌شده برابر مشتق تابع $f(x)$ در $x = ۲$ است، بنابراین مشتق تابع را در $x = ۲$ به دست می‌آوریم.

$$\lim_{x\to ۲} \frac{f(x)-f(۲)}{x-۲} = f'(۲)$$

$$f'(x) = ۳\left(\sqrt{\frac{x+۲}{۲x-۳}}\right)^۲ \times \left(\frac{-۷}{۲\sqrt{\frac{x+۲}{۲x-۳}}(۲x-۳)^۲}\right) \Rightarrow f'(۲) = ۱۲ \times \frac{-۷}{۲\times\sqrt{\frac{۲+۲}{۴-۳}}(۴-۳)^۲} = -۲۱$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۸۰ گزینه ۲

$$\begin{cases} A(۰,۴/۵) \\ B(x,x^۲) \end{cases} \Rightarrow m = \frac{y_A-y_B}{x_B-x_A} = \frac{۴/۵-x^۲}{۰-x}$$

$$f' = ۲x \xrightarrow{m\times m'=-۱} -\frac{۴/۵-x^۲}{x} \times ۲x = -۱$$

$$x^۲ = ۴/۵ - ۰/۵ \Rightarrow x = \pm ۲ \xrightarrow{x>۰} x = ۲$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۸۱ **گزینه ۳**

چون خط مماس عمود بر نیمساز ربع اول است؛ بنابراین شیب آن برابر ۱- است.

$$f' = -\frac{F'_x}{F'_y} = \frac{-(1+\frac{y}{2\sqrt{xy}})}{(\frac{x}{2\sqrt{xy}}+1)} = -\frac{1+\frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}}{\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}+1} \xrightarrow{f'=-1} 1 = \frac{\frac{2\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}}{\frac{\sqrt{x}+2\sqrt{y}}{2\sqrt{y}}}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{xy}+y = x+2\sqrt{xy} \Rightarrow x = y \xrightarrow{x+\sqrt{xy}+y=12} 3x = 12 \Rightarrow x = 4$$

روش تستی:

از معادلهٔ $x+\sqrt{xy}+y=12$ مشتق ضمنی می‌گیریم:

$$x+\sqrt{xy}+y = 12 \quad (*) \Rightarrow 1+\frac{y}{2\sqrt{xy}}+\frac{xy'}{2\sqrt{xy}}+y' = 0$$

$$\xrightarrow{y'=-1} 1+\frac{y}{2\sqrt{xy}}-\frac{x}{2\sqrt{xy}}-1 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{y-x}{2\sqrt{xy}} = 0 \Rightarrow y = x \xrightarrow{\text{جایگذاری در } (*)} 3x = 12 \Rightarrow x = 4$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۸۲ **گزینه ۱**

$$\text{آهنگ متوسط تابع} = \frac{f(6/25)-f(4)}{6/25-4} = \frac{\sqrt{6/25}-\sqrt{4}}{2/25} = \frac{2/5-2}{2/25} = \frac{0/5}{2/25} = \frac{1}{4/5}$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای} = f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(4) = \frac{1}{2\times 2} = \frac{1}{4}$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای-آهنگ متوسط} = \frac{10}{45}-\frac{1}{4} = \frac{40-45}{180} = \frac{-5}{180} = \frac{-1}{36}$$

بنابراین آهنگ متوسط به مقدار $\frac{1}{36}$ از آهنگ لحظه‌ای کمتر است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۸۳ گزینه ۱

برای آنکه نمودار تابع $y = 2x^2 + (m+1)x + m + 6$ بر نیمساز ناحیـۀ اول مماس باشد، باید معادلۀ تقاطع تابع را با خط $y = x$ نوشته و Δ را برابر صفر قرار دهیم.

$$\begin{cases} y = x \\ y = 2x^2 + (m+1)x + m + 6 \end{cases} \Rightarrow x = 2x^2 + (m+1)x + m + 6 \Rightarrow 2x^2 + mx + m + 6 = 0$$

$$\Delta = 0 \ \Rightarrow \ m^2 - 8(m+6) = 0 \Rightarrow m^2 - 8m - 48 = 0 \Rightarrow (m-12)(m+4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 12 \\ m = -4 \end{cases}$$

شیب نمودار در نقطۀ برخورد برابر ۱ است. از معادلۀ کلی، مشتق می‌گیریم. داریم:

$$y' = 4x + m + 1 \xrightarrow{y'=1} 1 = 4x + m + 1 \Rightarrow x = -\frac{m}{4}$$

چون نمودار بر نیمساز ناحیۀ اول مماس می‌باشد، بنابراین $x > 0$ لذا $m = -4$ قابل‌قبول است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۸۴ گزینه ۴

$$x = 2 \Rightarrow y = 2 \times e^{2^2-4} = 2 \times e^0 = 2 \ , \ y' = e^{x^2-4} + x \times (2x)e^{x^2-4} = e^{x^2-4}(1 + 2x^2)$$

$$\Rightarrow y'(2) = e^{2^2-4}(1+8) = 9$$

$$m' = \frac{-1}{m} \Rightarrow m' = \frac{-1}{9} \Rightarrow x = 2 \text{ معادلۀ خط قائم بر منحنی در } : y - 2 = \frac{-1}{9}(x-2)$$

$$y = 0 \Rightarrow 18 = x - 2 \Rightarrow x = 20$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۸۵ گزینه ۲

ابتدا از ضوابط داده‌شده مشتق چپ و راست را به دست می‌آوریم:

$$x \to 1^+ \Rightarrow f'(x) = \frac{-3}{x^2} \Rightarrow f'_+(1) = -3$$

$$x \to 1^- \Rightarrow f'(x) = 2x + a \Rightarrow f'_-(1) = 2 + a$$

$$f'_+(1) = f'_-(1) \Rightarrow -3 = 2 + a \Rightarrow a = -5$$

چون تابع در $x = 1$ مشتق‌پذیر می‌باشد، بنابراین پیوسته نیز هست.

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = f(1) \Rightarrow 3 - 5 = (1)^2 - 5(1) + b \Rightarrow b = 2$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۸۶ گزینه ۱

$$f(x)=\frac{۱}{۴}x^{۴}+\frac{۱}{۲}x^{۳}-۳x^{۲}\Rightarrow f'(x)=x^{۳}+\frac{۳}{۲}x^{۲}-۶x$$

$$\Rightarrow f''(x)=۳x^{۲}+۳x-۶=۳(x^{۲}+x-۲)=۳(x+۲)(x-۱)$$

x		-۲		۱	
f''	+	۰	−	۰	+

اکنون وضعیت صعودی یا نزولی بودن تابع $f(x)$ را در بازهٔ $(-۲,۱)$ بررسی می‌کنیم:

$$f'(x)=x(x^{۲}+\tfrac{۳}{۲}x-۶)$$

$$x^{۲}+\tfrac{۳}{۲}x-۶=۰\Rightarrow \Delta=\tfrac{۹}{۴}-۴(-۶)=\tfrac{۱۰۵}{۴}$$

$$x_{۱}=\tfrac{-۳+۱۰/۲۵}{۴}\simeq ۱/۸۱$$

$$x_{۲}=\tfrac{-۳-۱۰/۲۵}{۴}\simeq -۳/۳۱$$

$$\Rightarrow (-۲,۱)\subseteq(-۳/۳۱,۱/۸۱)$$

x	-۲		۰		۱
x		−		+	
$x^{۲}+\frac{۳}{۲}x-۶$		−		−	
		+		−	

بنابراین تابع $f(x)=\frac{۱}{۴}x^{۴}+\frac{۱}{۲}x^{۳}-۳x^{۲}$ در بازهٔ $(-۲,۰)$ صعودی و تقعر آن رو به پایین است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۸۷ گزینه ۱

$$\sqrt[۳]{y}+x\sqrt{x}=۹\Rightarrow y^{\frac{۱}{۳}}+x^{\frac{۳}{۲}}=۹$$

حالا از ضابطهٔ به‌دست‌آمده مشتق می‌گیریم:

$$\frac{۱}{۳}y'(y)^{-\frac{۲}{۳}}+\frac{۳}{۲}x^{\frac{۱}{۲}}=۰$$

$$\xrightarrow{x=۴\ ,\ y=۱}\frac{۱}{۳}y'(۱)+\frac{۳}{۲}(۴)^{\frac{۱}{۲}}=۰\Rightarrow \frac{۱}{۳}y'+\frac{۳}{۲}(۲)=۰\Rightarrow \frac{۱}{۳}y'=-۳\Rightarrow y'=-۹$$

$$\Rightarrow \text{شیب خط مماس}=-۹$$

بنابراین معادلهٔ خط مماس به‌صورت زیر است:

$$y-۱=-۹(x-۴)\Rightarrow y+۹x=۳۷$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

۸۸ گزینه ۴

$$x^۲y - ۲x\sqrt{y} = ۸ \Rightarrow x^۲y - ۲x\sqrt{y} - ۸ = ۰$$

$$\Rightarrow f' = -\frac{f'_x}{f'_y} \Rightarrow f' = m = -\frac{۲xy - ۲\sqrt{y}}{x^۲ - \cancel{۲}x \times \frac{۱}{\cancel{۲}\sqrt{y}}} \xrightarrow{(۲,۴)} m = -\frac{۱۶ - ۴}{۴ - ۱}$$

$$\Rightarrow m = f' = -\frac{۱۲}{۳} \Rightarrow m = -۴ \Rightarrow y - ۴ = -۴(x - ۲) \Rightarrow y + ۴x = ۱۲$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

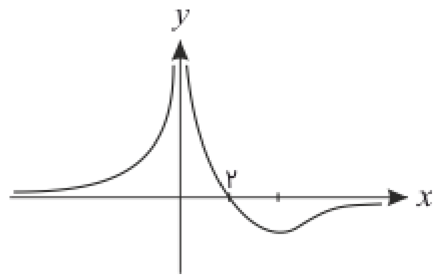
منبع: کنکور سراسری

۱ اگر $A(1,-11)$ نقطهٔ عطف نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^3+ax^2+bx$ باشد، آنگاه مقدار $f(-1)$ کدام است؟

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۲ شکل زیر، نمودار تابع $f(x)=\frac{ax+2}{x^2+b}$ است. با تعیین a و b، مینیمم نسبی این تابع کدام است؟



۱) $-\frac{1}{8}$
۲) $-\frac{1}{4}$
۳) $-\frac{3}{8}$
۴) $-\frac{1}{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۳ نقاط بحرانی تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^2(x-2)^2$ سه رأس یک مثلث‌اند. نوع این مثلث کدام است؟

۱) متساوی‌الاضلاع
۲) فقط متساوی‌الساقین
۳) فقط قائم‌الزاویه
۴) قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵

۴ نقاط بحرانی تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x^{\frac{4}{3}}-x^{\frac{2}{3}}$ بر $[-1,1]$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\frac{\sqrt{2}}{2}$
۲) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ و $-\frac{\sqrt{2}}{4}$
۳) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ و 0 و $-\frac{\sqrt{2}}{4}$
۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ و 0 و $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۰

۵ مجموعهٔ طول‌های نقاط بحرانی تابع با ضابطهٔ $f(x)=(x^2-28).\sqrt[3]{x}$ کدام است؟

۱) $\{-2,2\}$
۲) $\{-\sqrt{7},\sqrt{7}\}$
۳) $\{-2,0,2\}$
۴) $\{-7,0,1\}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

۶ بیشترین مقدار تابع $y=x^3-3x^2-9x+5$ در بازهٔ $[-2,2]$ کدام است؟

۱) ۹
۲) ۱۰
۳) ۱۲
۴) ۱۷

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

۷ کمترین مقدار تابع $y=\frac{۱}{۴}x^۴-x^۳-۲x^۲$، کدام است؟

۱) -۳۶
۲) -۳۲
۳) -۲۴
۴) -۱۸

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۸ مینیمم مطلق تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x^۴}{۴}-\frac{x^۳}{۳}-x^۲$ روی بازهٔ $[-۱,۳]$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱۱}{۳}$
۲) $-\frac{۱۰}{۳}$
۳) $-\frac{۸}{۳}$
۴) $-\frac{۷}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

۹ ماکسیمم مطلق تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۱}{x^۴-۴x^۳+۴x^۲+۵}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$
۲) $\frac{۱}{۵}$
۳) $\frac{۱}{۳}$
۴) $\frac{۱}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵

۱۰ بیشترین مقدار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sin ۲x+۲\cos x$ کدام است؟

۱) $۱+\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
۲) $۱+\sqrt{۲}$
۳) $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$
۴) $۲\sqrt{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

۱۱ کمترین مقدار تابع با ضابطهٔ $f(x)=۱-\cos^۲ x-\sin x$ کدام است؟

۱) -۱
۲) $-\frac{۱}{۲}$
۳) $-\frac{۱}{۴}$
۴) صفر

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

۱۲ تقعر منحنی با ضابطهٔ $f(x)=x^۴-۶x^۲$ در کدام بازه روبه‌پایین است؟

۱) $(-۱,۱)$
۲) $(۱,۲)$
۳) $(۱,+\infty)$
۴) $(-\infty,-۱)$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۱

۱۳ تقعر نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=۶x^۵-۵x^۴+۲x+۷$ در بازهٔ $(a,+\infty)$ روبه‌بالا است. کمترین مقدار a کدام است؟

۱) -۱
۲) صفر
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

۱۴ در کدام ناحیهٔ دستگاه محورهای مختصات، تقعر نمودار تابع با ضابطهٔ $y = x + \frac{1}{x}$ به سمت بالا است؟

۱) اول
۲) دوم
۳) سوم
۴) چهارم

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۴

۱۵ تقعر نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{1}{x^2+12}$ در بازهٔ $(-a, a)$ روبه‌پایین است. بیشترین مقدار a کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

۱۶ تقعر تابع به معادلهٔ $y = x^2 + \sqrt{x}$ در کدام بازه روبه‌پایین است؟

۱) $(0, \frac{1}{4})$
۲) $(0, \frac{1}{2})$
۳) $(0, 1)$
۴) $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

۱۷ در کدام بازه تقعر تابع با ضابطهٔ $f(x) = x^{\frac{6}{5}} - 12x^{\frac{1}{5}}$ روبه‌پایین است؟

۱) $(-\infty, -8)$
۲) $(-8, 0)$
۳) $(-4, 2)$
۴) $(0, 2)$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

۱۸ تقعر نمودار تابع $y = (x+3)\sqrt{x}$، در بازهٔ (a, b) روبه‌پایین است. بیشترین مقدار $b - a$، کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) $+\infty$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۱۹ تقعر منحنی به معادلهٔ $y = x\sqrt{x^2+2}$ در بازهٔ $(a, +\infty)$ روبه‌بالا است. کمترین مقدار a، کدام است؟

۱) صفر
۲) -1
۳) ۱
۴) $-\infty$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

۲۰ مجموعهٔ طول نقاطی که تقعر منحنی به معادلهٔ $f(x) = (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$، روبه‌پایین باشد، به کدام صورت است؟

۱) $-2 < x < 0$
۲) $-1 < x < 2$
۳) $0 < x < 1$
۴) $0 < x < 2$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۹

۲۱ منحنی نمایش تابع $y = \frac{۱}{۳}x^۳ - x^۲ - ۳x$، در کدام بازه نزولی و تقعر آن روبه‌بالا است؟

۱) $(-۱, ۱)$
۲) $(-۱, ۳)$
۳) $(۱, ۳)$
۴) $(۱, \infty)$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۲۲ منحنی نمایش تابع $y = -x^۴ + ۴x^۳ - ۳$، در کدام بازه صعودی و تقعر آن روبه‌پایین است؟

۱) $(۲, ۳)$
۲) $(۰, ۲)$
۳) $(۰, ۳)$
۴) $(۲, +\infty)$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

۲۳ طول نقطهٔ ماکسیمم نسبی تابع با ضابطهٔ $f(x) = x^۴ + \frac{۴}{۳}x^۳ - ۴x^۲$ کدام است؟

۱) -۲
۲) -۱
۳) صفر
۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

۲۴ اگر تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{x^۲ - ۲x}{x + a}$ دارای اکسترمم نسبی باشد، مقادیر a کدام است؟

۱) $a > ۰$ یا $a < -۲$
۲) $a > ۲$ یا $a < ۰$
۳) $-۲ < a < ۰$
۴) $۰ < a < ۲$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

۲۵ در تابع با ضابطهٔ $f(x) = a\cos ۲x + b\sin x$، اگر نقطهٔ مینیمم آن در $(\frac{\pi}{۶}, -۳)$ باشد، a کدام است؟

۱) -۴
۲) -۲
۳) -۱
۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۹

۲۶ فاصلهٔ نقطهٔ ماکسیمم نسبی و یک نقطهٔ عطف منحنی به معادلهٔ $y = x^۴ - ۶x^۲ + ۵$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۱۰}$
۲) $\sqrt{۱۳}$
۳) $\sqrt{۱۷}$
۴) $\sqrt{۲۶}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

۲۷ طول نقطهٔ عطف منحنی به معادلهٔ $y = \frac{x}{۱ + |x|}$، کدام است؟

۱) -۱
۲) صفر
۳) ۱
۴) فاقد نقطهٔ عطف

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۲۸ طول نقطهٔ عطف نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{(۲-x)^{۲}}{x}$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) صفر

۳) ۱ ۴) فاقد نقطهٔ عطف

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

۲۹ طول نقطهٔ عطف نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^{\frac{۵}{۳}}-۱۰x^{\frac{۲}{۳}}$، کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۲ و ۰

۳) ۲ ۴) ۲ و ۰

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

۳۰ دو نقطهٔ عطف نمودار تابع با ضابطهٔ $y=x^{۲}e^{x}$ در کدام نواحی مختصات قرار دارد؟

۱) هر دو در ناحیهٔ دوم ۲) هر دو در ناحیهٔ سوم

۳) یکی در ناحیهٔ اول و یکی در ناحیهٔ دوم ۴) یکی در ناحیهٔ سوم و یکی در ناحیهٔ چهارم

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۴

۳۱ نقطهٔ بحرانی تابع با ضابطهٔ $f(x)=(x^{۳}-۳x^{۲}+۴)^{\frac{۱}{۳}}$ روی بازهٔ $(-۱,۲)$ چگونه است؟

۱) مینیمم ۲) ماکسیمم

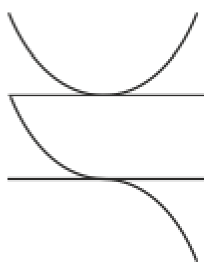
۳) عطف ۴) مشتق‌ناپذیر

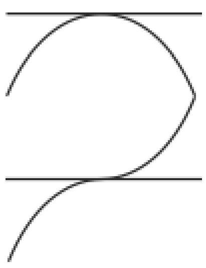
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

۳۲ نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^{۴}-۳x^{۳}+۳x^{۲}-x$ در نقطهٔ $x=۱$ کدام وضع را با محور xها دارد؟

۱) ۲)

۳) ۴)

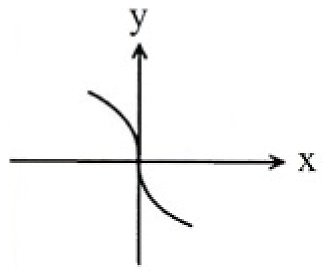




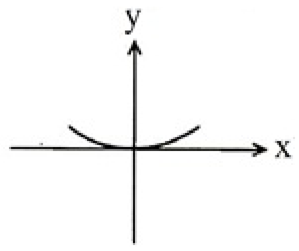
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

۳۳ نمودار تابع $y = x^{\frac{۸}{۵}} - ۴x^{\frac{۳}{۵}}$ در حوالی مبدأ مختصات چگونه است؟

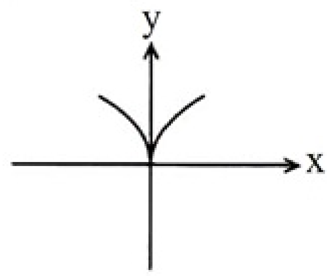
۱)



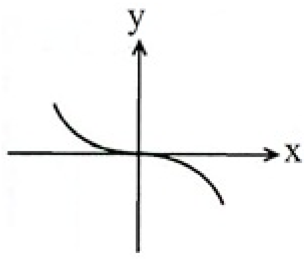
۲)



۳)



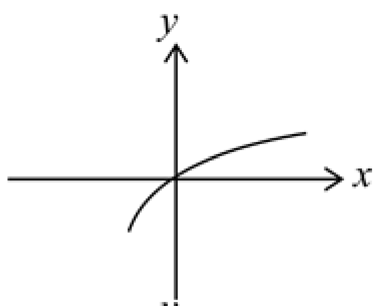
۴)



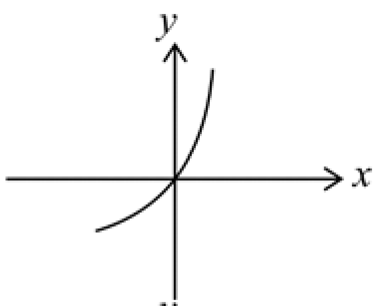
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۳۴ نمودار تابع $y = \frac{x^۳}{x^۲+۱}$ در حوالی مبدأ مختصات چگونه است؟

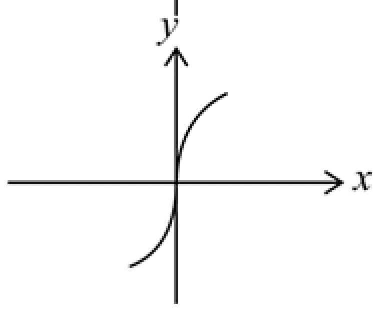
۱)



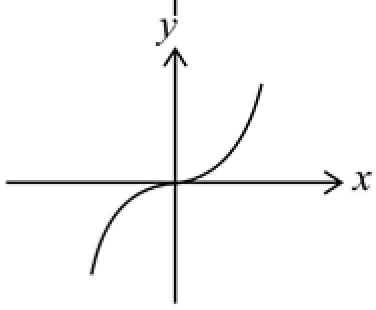
۲)



۳)

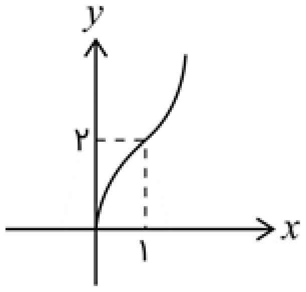


۴)



کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

۳۵ شکل زیر، نمودار تابع $y = ax^{\frac{۳}{۲}} + bx^{\frac{۱}{۲}}$ است، b کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۲}$

۲) ۱

۳) $\frac{۳}{۲}$

۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۳۶ به ازای کدام مقدار a، نقطهٔ عطف تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{۲}{۳}x^۳ - ۳x^۲ + ax$ روی نیمساز ناحیهٔ چهارم قرار دارد؟

۱) -۲ ۲) -۱

۳) ۱ ۴) ۲

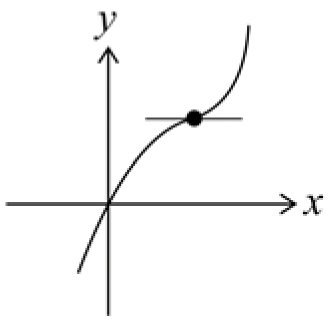
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

۳۷ خط مماس بر منحنی به معادلهٔ $y = x^{۳} - ۳x^{۲} + ۴$ در نقطهٔ عطف آن، محور xها را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) $\frac{۴}{۳}$
۲) $\frac{۵}{۳}$
۳) ۲
۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

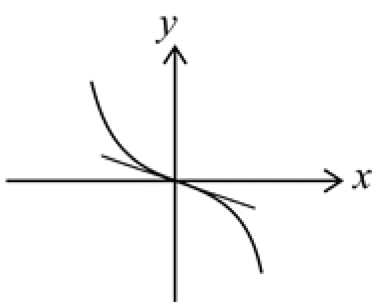
۳۸ شکل زیر، نمودار تابع به معادلهٔ $y = x^{۳} + ax^{۲} + bx$ است. دوتایی (a,b) به کدام صورت می‌تواند باشد؟



۱) $(-۳,۴)$
۲) $(-۱,۳)$
۳) $(-۶,۱۲)$
۴) $(۳,۲)$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۹

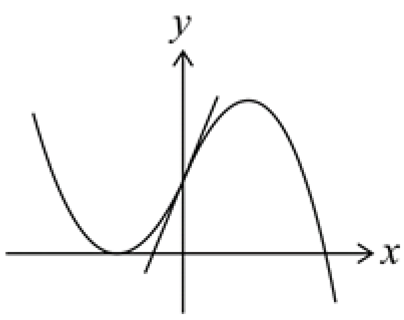
۳۹ شکل زیر نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = -x^{۳} + ax^{۲} + bx$ است. دوتایی (a,b) کدام می‌تواند باشد؟



۱) $(-۱,۰)$
۲) $(۰,-۱)$
۳) $(۰,۱)$
۴) $(۱,۰)$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

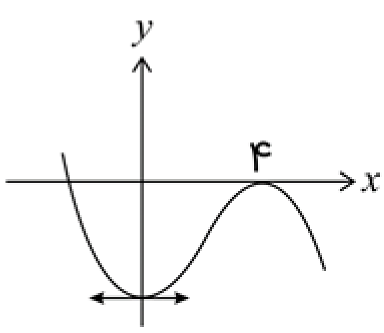
۴۰ شکل زیر، نمودار تابع با ضابطهٔ $y = -x^{۳} + ax^{۲} + bx + ۲$ می‌باشد. زوج مرتب (a,b) کدام است؟



۱) $(۰,-۳)$
۲) $(۱,-۲)$
۳) $(۰,۳)$
۴) $(۰,۶)$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

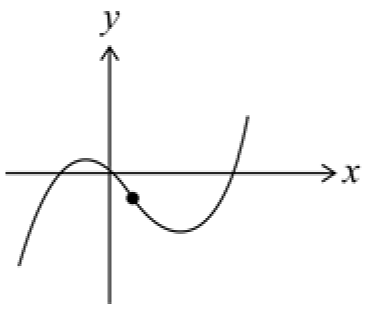
۴۱ شکل زیر نمودار تابع به معادلهٔ $y = ax^{۳} + bx^{۲} - ۱۶$ می‌باشد. a کدام است؟



۱) -۱
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{-۱}{۲}$
۴) $\frac{-۲}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

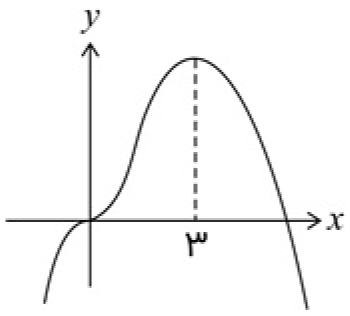
۴۲ شکل زیر نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\frac{۲}{۳}x^{۳}+ax^{۲}+bx$ است. زوج مرتب (a,b) به کدام صورت می‌تواند باشد؟



۱) $(-۱,-۴)$
۲) $(-۱,۴)$
۳) $(۱,-۴)$
۴) $(۱,۴)$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

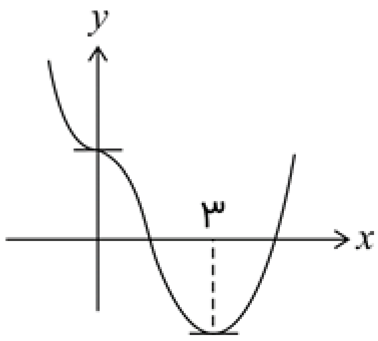
۴۳ شکل زیر، نمودار تابع $y=ax^{۴}+۲x^{۳}+bx^{۲}$ می‌باشد. a کدام است؟



۱) -۱
۲) $-\frac{۱}{۲}$
۳) $-\frac{۱}{۴}$
۴) $\frac{۱}{۴}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

۴۴ شکل زیر نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۱}{۴}x^{۴}+ax^{۳}+bx^{۲}+۲$ می‌باشد. $a+b$ کدام است؟



۱) -۱
۲) صفر
۳) ۱
۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۴۵ به ازای کدام مقدار a، خط به معادلهٔ $y=x+a$ از نقطهٔ تلاقی مجانب‌های تابع $y=\frac{۲x^{۲}-۲x}{x^{۲}+x-۲}$ می‌گذرد؟

۱) -۴ ۲) -۲
۳) ۲ ۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

۴۶ اگر $f(x)=\frac{x+۳}{۲x+۱}$ و $g(x)=\frac{۲x-۱}{x+۲}$، آنگاه نقطهٔ تلاقی مجانب‌های تابع fog کدام است؟

۱) $(-۱,۰)$ ۲) $(-۱,۱)$
۳) $(-۲,۲)$ ۴) $(۰,۱)$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

۴۷ فاصلهٔ نقطهٔ تلاقی مجانب‌های منحنی به معادلهٔ $y = \frac{x-\sqrt{x}}{x^2-3x+2}$ از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) ۲

۳) $\sqrt{5}$ ۴) ۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵

۴۸ یکی از مجانب‌های منحنی به معادلهٔ $y = \frac{2x^3+ax^2+5}{x^2+x}$ محور xها را در نقطه‌ای به طول ۲− قطع می‌کند. a کدام است؟

۱) ۳− ۲) ۳

۳) ۴ ۴) ۶

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۴۹ خط‌های مجانب منحنی تابع با ضابطهٔ $y = \frac{2x^3-3x^2}{x^2-1}$ در دو نقطهٔ A و B متقاطع‌اند، فاصلهٔ آن دو نقطه کدام است؟

۱) $3\sqrt{2}$ ۲) $2\sqrt{5}$

۳) ۴ ۴) ۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۱

۵۰ اگر محور yها، تنها مجانب قائم نمودار تابع $f(x) = \frac{x^3+ax-2}{x^2-x}$ باشد، آنگاه معادلهٔ مجانب مایل آن کدام است؟

۱) $y = x - 2$ ۲) $y = x - 1$

۳) $y = x + 1$ ۴) $y = x + 2$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۵۱ مجانب‌های منحنی به معادلهٔ $y = \frac{x^3}{x^2-4x+4}$ در نقطهٔ A متقاطع‌اند. عرض نقطهٔ A کدام است؟

۱) ۲− ۲) ۳

۳) ۴ ۴) ۶

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۴

۵۲ مجانب‌های منحنی به معادلهٔ $y = \frac{x^3+x^2}{(x-1)^2}$، در نقطهٔ A متقاطع‌اند. عرض این نقطه کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۲

۵۳ مجانب‌های نمودار تابع $y = \dfrac{x^۳}{x^۲ - x - ۶}$ در دو نقطهٔ A و B متقاطع‌اند، مختصات نقطهٔ وسط AB کدام است؟

۱) $\left(\frac{-۱}{۲}, \frac{۱}{۲}\right)$
۲) $\left(\frac{۱}{۲}, \frac{۳}{۲}\right)$
۳) $\left(\frac{۳}{۲}, \frac{-۱}{۲}\right)$
۴) $\left(\frac{۳}{۲}, \frac{۱}{۲}\right)$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

۵۴ فاصلهٔ نقطهٔ تلاقی مجانب‌های منحنی به معادلهٔ $y = \sqrt{۴x^۲ - ۲x + ۳}$ از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۰

۵۵ نقطهٔ تلاقی مجانب‌های نمودار تابع $y = ۲x - \sqrt{x^۲ - ۲x}$، کدام است؟

۱) $(-۱, ۰)$
۲) $(-۱, ۱)$
۳) $(۱, ۲)$
۴) $(۱, ۳)$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

۵۶ فاصلهٔ نقطهٔ $A(-۲, ۰)$ از خط مجانب منحنی به معادلهٔ $y = x - \sqrt{x^۲ - ۲x}\,; x \leq ۰$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) $\sqrt{۵}$
۴) $۲\sqrt{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

۵۷ منحنی به معادلهٔ $y = \sqrt{(a-۱)x^۲ + ax + ۲ - a}$ دارای دو خط مجانب می‌باشد، مجموعهٔ مقادیر a به کدام صورت است؟

۱) $a < ۲$
۲) $a > ۰$
۳) $a > ۱$
۴) $۱ < a < ۲$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

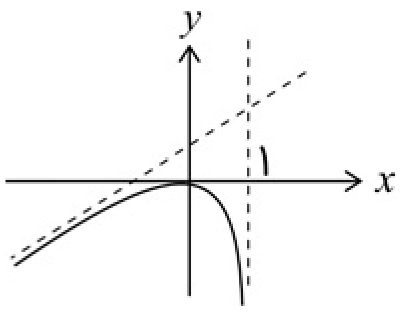
۵۸ منحنی به معادلهٔ $a \neq ۰$، $y = \dfrac{x^۲ + ۳x}{ax^۲ + ۴x - ۱}$ فقط دو خط مجانب دارد. مختصات نقطهٔ تلاقی مجانب‌ها کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\left(\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۴}\right)$
۲) $\left(\frac{۱}{۲}, \frac{-۱}{۴}\right)$
۳) $\left(\frac{-۱}{۲}, \frac{۱}{۴}\right)$
۴) $\left(\frac{-۱}{۲}, \frac{-۱}{۴}\right)$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

۵۹ شکل زیر نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x^2+a}{x+b}$، در بازهٔ $(-\infty,1)$ می‌باشد. دوتایی مرتب (a,b) کدام است؟

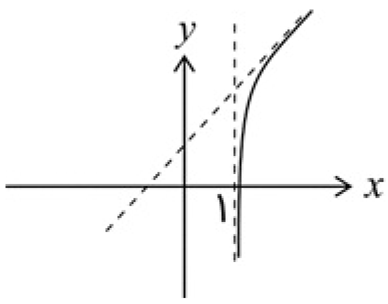
۱) $(1,-1)$
۲) $(1,0)$
۳) $(0,1)$
۴) $(0,-1)$



کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

۶۰ شکل زیر قسمتی از نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x^2+a}{x+b}$ می‌باشد. مقادیر a و b به کدام صورت‌اند؟

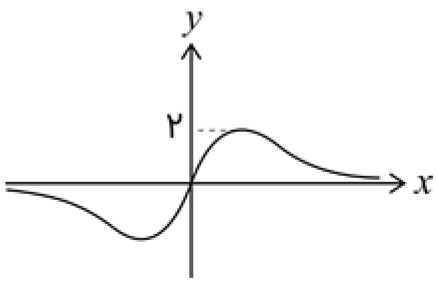
۱) $a>b=-1$
۲) $a<b=-1$
۳) $b>a=-1$
۴) $b<a=-1$



کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

۶۱ شکل زیر نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{ax+b}{x^2+1}$ می‌باشد. a کدام است؟

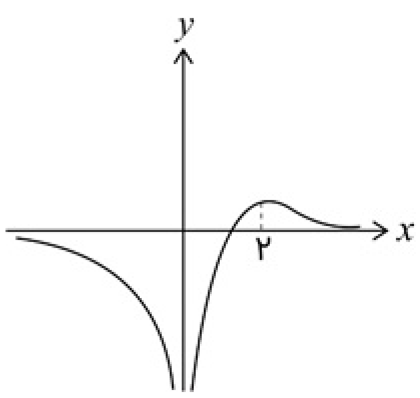
۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴



کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

۶۲ شکل زیر نمودار تابع $y=\frac{x+b}{x^2+a}$ می‌باشد. دوتایی مرتب (a,b) کدام است؟

۱) $(-1,-1)$
۲) $(0,-1)$
۳) $(0,1)$
۴) $(1,-2)$



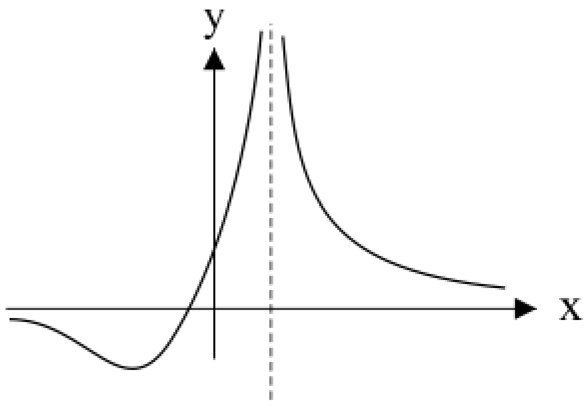
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

۶۳ در کدام بازه، تابع با ضابطهٔ $f(x)=-x^4+8x^3-18x^2$، نزولی و تقعر نمودار آن، روبه‌بالا است؟

۱) $(1,3)$ ۲) $(1,4)$
۳) $(0,1)$ ۴) $(0,3)$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۶۴ شکل زیر، نمودار تابع $y = \frac{x+a}{x^۲+bx+۴}$ می‌باشد. مقادیر a و b چگونه است؟



۱) $a < ۰$ و $b = ۴$

۲) $a < ۰$ و $b = -۴$

۳) $a > ۰$ و $b = ۴$

۴) $a > ۰$ و $b = -۴$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۶۵ اگر تـابع‌هایی به‌صورت $f(x) = x^۳ - (m+۲)x^۲ + ۳x$ همواره صـعودی باشـند، آنگـاه مجموعـهٔ طول نقاط عطف این توابع، در کـدام بازه است؟

۱) $[-۲, ۰]$

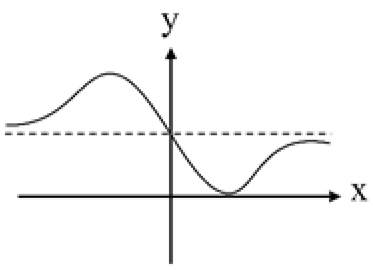
۲) $[-۲, ۲]$

۳) $[-۱, ۱]$

۴) $[۰, ۱]$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

۶۶ شکل زیر، نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{ax^۲+bx+۸}{x^۲+۴}$ است. $a+b$ کدام است؟



۱) -۷

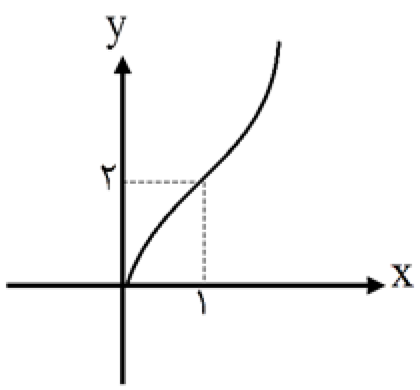
۲) -۶

۳) ۹

۴) ۱۰

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

۶۷ شکل زیر، نمودار تابع $y = ax^{\frac{۳}{۲}} + bx^{\frac{۱}{۲}}$ است. b کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۲}$

۲) ۱

۳) $\frac{۳}{۲}$

۴) ۲

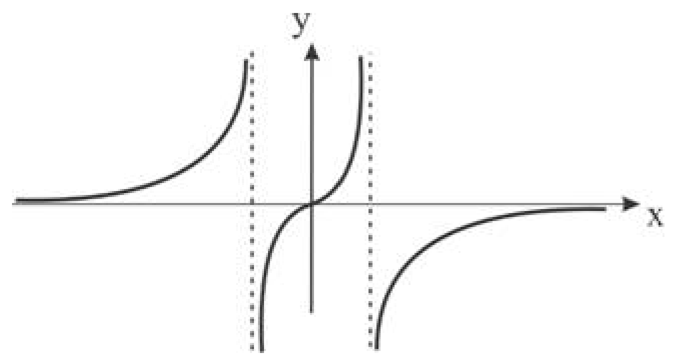
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۶۸ اگر تابع‌هایی به‌صورت $f(x) = \frac{۲}{۳}x^۳ - (m-۱)x^۲ + ۸x$، دارای ماکزیمم و مینیمم با طول‌های منفی باشند، آنگاه مجموعهٔ طول نقاط عطف این توابع، در کدام بازه است؟

۱) $(-۵, -\frac{۱}{۲})$
۲) $(-۴, -۱)$
۳) $(-\infty, -۲)$
۴) $(-\infty, -۴)$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

۶۹ شکل زیر، نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{x}{ax^۲+bx+۱}$ است. مقادیر a و b چگونه است؟



۱) $a < ۰, b = ۰$
۲) $a > ۰, b = ۰$
۳) $a > ۰, b = ۱$
۴) $a < ۰, b = ۱$

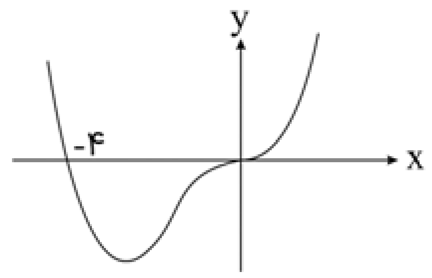
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

۷۰ مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{۱}{۳}x^۳ - x^۲ - ۱۵x$ در بازهٔ $[-۴, ۳]$، کدام است؟

۱) -۱۸ و ۲۴
۲) -۴۵ و ۲۷
۳) -۳۶ و ۲۷
۴) -۲۷ و ۳۶

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۷۱ شکل زیر، نمودار تابع $f(x) = x^۴ + ax^۳ + bx$ می‌باشد. با تعیین مقادیر a و b، مینیمم تابع، کدام است؟



۱) -۳۶
۲) -۳۲
۳) -۲۷
۴) -۲۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۷۲ نمودار تابع $y = -۴\cos(\frac{\pi}{۴} - ۳\pi x)$، روی بازهٔ $[-۱, ۱]$ در چند نقطه بیشترین مقدار را دارد؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

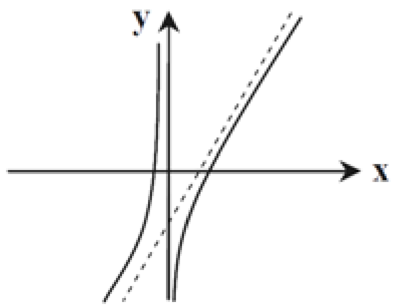
۷۳ در کدام بازه، تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{۱}{۴}x^۴ + \frac{۱}{۲}x^۳ - ۳x^۲$، صعودی و تقعر نمودار آن، روبه‌پایین است؟

۱) $(-۲, ۰)$
۲) $(-۲, ۱)$
۳) $(-۱, ۲)$
۴) $(۰, ۱)$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

نام و نام خانوادگی:

۷۴ شکل زیر نمودار تابع $y=\frac{x^۲+ax-۲}{x+b}$ می‌باشد. مقادیر a و b، چگونه است؟



۱) $b<۰, a<۰$

۲) $b>۰, a=۰$

۳) $b=۰, a>۰$

۴) $b=۰, a<۰$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۷۵ اگر $A(۱,-۳)$ نقطهٔ عطف منحنی به معادلهٔ $y=ax^۳-x^۲-۳x+b$ باشد، مقدار تابع در نقطهٔ ماکزیمم نسبی آن کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۳}$

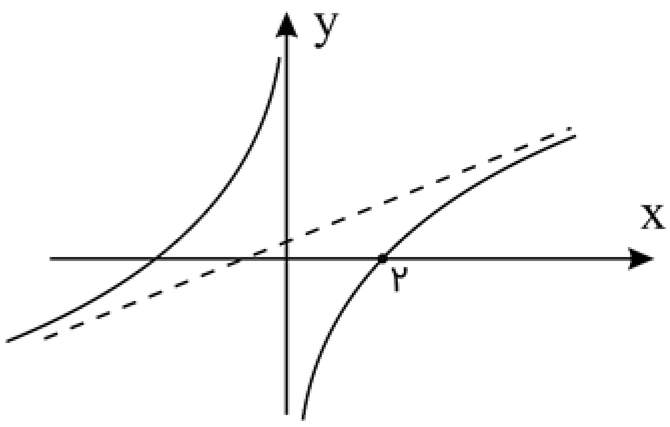
۲) $\frac{۵}{۳}$

۳) $\frac{۷}{۳}$

۴) $\frac{۸}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

۷۶ شکل زیر منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\frac{ax^۲-۱}{x+b}$ است. $a+b$ کدام است؟



۱) صفر

۲) $\frac{۱}{۴}$

۳) $\frac{۱}{۲}$

۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

۷۷ اگر $A(۱,-۲)$ نقطهٔ عطف منحنی به معادلهٔ $y=ax^۳+bx^۲-۳x-۱$ باشد، مقدار تابع در نقطهٔ ماکزیمم نسبی آن، کدام است؟

۱) ۴

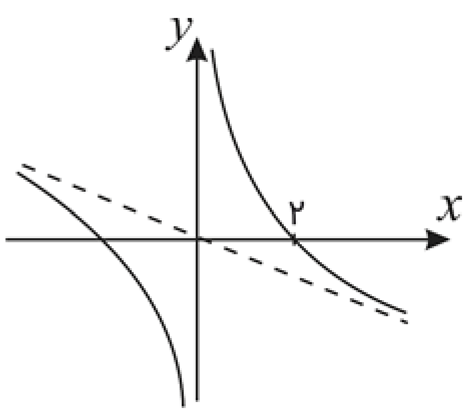
۲) ۵

۳) ۶

۴) فاقد ماکزیمم نسبی

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۷۸ شکل زیر، منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\frac{۲+ax^۲}{b+x}$ است. $a-b$ کدام است؟



۱) -۱

۲) $-\frac{۱}{۲}$

۳) صفر

۴) $\frac{۱}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

منبع: کنکور سراسری

۱ **گزینه ۳**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

گام اول

$A\left(۱, -۱۱\right)$ نقطهٔ عطف تابع $f\,(x)$ است؛ بنابراین:

الف) مختصات نقطهٔ A در معادلهٔ تابع صدق می‌کند.

ب) تابع در نقطهٔ $x = ۱$ پیوسته است.

ج) مشتق تابع در نقطهٔ $x = ۱$ موجود و یکتا است.

د) $f''\left(۱\right) = ۰$ است.

گام دوم

$$f\,(x) = x^{۳} + ax^{۲} + bx \;\Rightarrow\; f'\,(x) = ۳x^{۲} + ۲ax + b \;\Rightarrow\; f''\,(x) = ۶x + ۲a$$

با توجه به قسمت (الف) از گام اول داریم:

$$f\left(۱\right) = -۱۱ \;\Rightarrow\; ۱^{۳} + a\left(۱\right)^{۲} + b\left(۱\right) = -۱۱ \;\Rightarrow\; a + b + ۱ = -۱۱ \;\Rightarrow\; a + b = -۱۲ \qquad (I)$$

و با توجه به قسمت (د) از گام اول داریم:

$$f''\left(۱\right) = ۰ \;\Rightarrow\; ۶ + ۲a = ۰ \;\Rightarrow\; ۲a = -۶ \;\Rightarrow\; a = -۳ \xrightarrow{(I)} -۳ + b = -۱۲ \;\Rightarrow\; b = -۹$$

بنابراین:

$$f\,(x) = x^{۳} - ۳x^{۲} - ۹x$$

و $f\left(-۱\right)$ برابر است با:

$$f\left(-۱\right) = \left(-۱\right)^{۳} - ۳\left(-۱\right)^{۲} - ۹\left(-۱\right) = -۱ - ۳ + ۹ = ۵$$

۲ **گزینه ۱**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

گام اول

الف) خط $x=0$ مجانب قائم تابع است پس باید $x=0$ ریشهٔ مخرج کسر باشد.

ب) نمودار تابع از نقطهٔ $(2,0)$ عبور می‌کند پس $f(2)=0$ است.

ج) مشتق تابع در تمام نقاط اکسترمم نسبی، در صورت مشتق‌پذیری، برابر صفر است.

گام دوم

با توجه به قسمت (الف) از گام اول داریم:

$$x^2+b=0 \xrightarrow{x=0} 0^2+b=0 \Rightarrow b=0$$

و با توجه به قسمت (ب) از گام اول داریم:

$$f(2)=0 \Rightarrow \frac{2a+2}{2^2}=0 \Rightarrow \frac{2a+2}{4}=0 \Rightarrow 2a+2=0 \Rightarrow 2a=-2 \Rightarrow a=-1$$

بنابراین:

$$f(x)=\frac{-x+2}{x^2}$$

برای به دست آوردن مینیمم نسبی تابع، از تابع مشتق گرفته و آن را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$f'(x)=\frac{-(x^2)-2x(-x+2)}{x^4}=\frac{-x^2+2x^2-4x}{x^4}=\frac{x^2-4x}{x^4}=\frac{x(x-4)}{x^4}=\frac{x-4}{x^3}$$

$$\Rightarrow f'(x)=0 \Rightarrow \frac{x-4}{x^3}=0 \Rightarrow x-4=0 \Rightarrow x=4$$

مقدار مینیمم نسبی تابع برابر است با:

$$f(4)=\frac{-4+2}{4^2}=\frac{-2}{16}=-\frac{1}{8}$$

۳ گزینه ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵

گام اول

نقطهٔ درونی $c \in D_f$ را نقطهٔ بحرانی تابع f می‌نامیم هرگاه $f'(c) = ۰$ یا $f'(c)$ موجود نباشد.

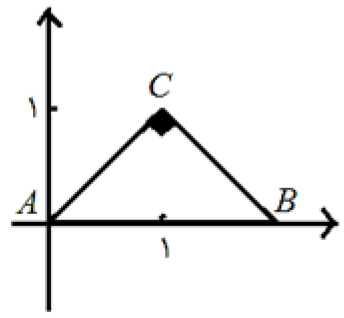
گام دوم

ضابطهٔ تابع $f(x)$ یک چندجمله‌ای درجه‌چهار است، پس $D_f \in \mathbb{R}$ است. برای یافتن نقاط بحرانی این تابع، کافی است معادلهٔ $f'(x) = ۰$ را حل کنیم.

$$f(x) = x^۲(x-۲)^۲ \Rightarrow f'(x) = ۲x(x-۲)^۲ + ۲x^۲(x-۲) = ۲x(x-۲)(۲x-۲)$$

$$f'(x) = ۰ \Rightarrow ۲x(x-۲)(۲x-۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x-۲ = ۰ \Rightarrow x = ۲ \\ ۲x-۲ = ۰ \Rightarrow x = ۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(۰) = ۰ \\ f(۲) = ۰ \\ f(۱) = ۱ \end{cases}$$

بنابراین سه نقطهٔ $A(۰,۰)$، $B(۲,۰)$ و $C(۱,۱)$ نقاط بحرانی تابع $f(x)$ هستند. این نقاط را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:



باتوجه‌به شیب دو ضلع AC و BC، دو زاویهٔ $\hat{A}$ و $\hat{B}$ برابر ۴۵° است؛ بنابراین مثلث حاصل، قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین است.

۴ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۰

گام اول

نقطهٔ درونی $c \in D_f$ را نقطهٔ بحرانی تابع f گوئیم هرگاه $f'(c) = ۰$ یا $f'(c)$ موجود نباشد.

گام دوم

باتوجه‌به ضابطهٔ تابع $f(x)$ (فرجهٔ فرد)، این تابع روی مجموعهٔ $\mathbb{R}$ و از جمله روی بازهٔ $[-۱,۱]$ تعریف شده است. کافی است نقاطی از این بازه را بیابیم که به‌ازای آن‌ها $f'(x) = ۰$ یا $f'(x)$ تعریف نشده است.

$$f(x) = x^{\frac{۴}{۳}} - x^{\frac{۲}{۳}} \Rightarrow f'(x) = \frac{۴}{۳}x^{\frac{۱}{۳}} - \frac{۲}{۳}x^{-\frac{۱}{۳}} = \frac{۴}{۳}\sqrt[۳]{x} - \frac{۲}{۳\sqrt[۳]{x}} = \frac{۴\sqrt[۳]{x^۲}-۲}{۳\sqrt[۳]{x}}$$

$$f'(x) = ۰ \Rightarrow \frac{۴\sqrt[۳]{x^۲}-۲}{۳\sqrt[۳]{x}} = ۰ \Rightarrow ۴\sqrt[۳]{x^۲} - ۲ = ۰,\ ۳\sqrt[۳]{x} \neq ۰$$

$$\Rightarrow ۴\sqrt[۳]{x^۲} = ۲ \Rightarrow \sqrt[۳]{x^۲} = \frac{۱}{۲} \xrightarrow{\text{به توان ۳}} x^۲ = \frac{۱}{۸} \Rightarrow x = \pm\frac{۱}{\sqrt{۸}} = \pm\frac{\sqrt{۲}}{۴}$$

به‌ازای $x = ۰$ عبارت $۳\sqrt[۳]{x} = ۰$ و $f'(x)$ تعریف نشده است؛ بنابراین تابع f دارای سه نقطهٔ بحرانی با طول‌های $\frac{\sqrt{۲}}{۴}$، ۰ و $-\frac{\sqrt{۲}}{۴}$ است.

۵ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

گام اول

نقطهٔ درونی $c \in D_f$ را نقطهٔ بحرانی تابع f گوئیم هرگاه $f'(c) = 0$ یا $f'(c)$ موجود نباشد.

گام دوم

باتوجه‌به گام اول، نقاطی از دامنهٔ تابع f که در معادلهٔ $f'(x) = 0$ صدق می‌کند یا به‌ازای آن‌ها $f'(x)$ تعریف‌نشده است را می‌یابیم.

$$f(x) = (x^2 - 28)\sqrt[3]{x} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 2x\sqrt[3]{x} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}(x^2 - 28) = \frac{6x^2+x^2-28}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{7x^2-28}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 7x^2 - 28 = 0 \Rightarrow 7x^2 = 28 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

به‌ازای $x = 0$ مخرج تابع $f'(x)$ برابر صفر و درنتیجه این تابع تعریف‌نشده است؛ بنابراین مجموعه نقاط بحرانی تابع $f(x)$ به‌صورت $\{-2, 0, 2\}$ است.

۶ گزینه ۲

برای یافتن ماکسیمم و مینیمم مطلق یک تابع پیوسته، مقدار تابع را در نقاط بحرانی آن و نقاط ابتدایی و انتهایی بازهٔ تعریف‌شده، می‌یابیم.

نقطهٔ بحرانی تابع، نقاطی از دامنهٔ تعریف آن است که به‌ازای آن‌ها $f'(x) = 0$ یا $f'(x)$ موجود نباشد.

$$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5 \Rightarrow y' = 3x^2 - 6x - 9$$

$$y' = 0 \Rightarrow 3(x^2 - 2x - 3) = 3(x-3)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \\ x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

چون $3 \notin [-2, 2]$، پس مقدار تابع را به‌ازای $x = -1, -2, 2$ محاسبه و باهم مقایسه می‌کنیم.

$$f(-1) = -1 - 3 + 9 + 5 = 10$$

$$f(2) = 8 - 12 - 18 + 5 = -17$$

$$f(-2) = -8 - 12 + 18 + 5 = 3$$

باتوجه‌به مقادیر به‌دست آمده، بیشترین مقدار تابع $y = 10$ است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

۷ **گزینه ۲**

کمترین مقدار تابع، همان مینیمم مطلق تابع است. برای یافتن مینیمم مطلق یک تابع پیوسته، مقدار تابع را در نقاط بحرانی آن و نقاط ابتدایی و انتهایی بازهٔ تعریف‌شده روی آن، می‌یابیم. نقطهٔ بحرانی تابع، نقاطی از دامنهٔ تعریف آن است که به‌ازای آن‌ها $f'(x) = ۰$ یا $f'(x)$ موجود نباشد.

ضابطهٔ $f(x)$ یک عبارت چندجمله‌ای و $D_f \in \mathbb{R}$ است. کافی است ریشه‌های معادلهٔ $f'(x) = ۰$ را یافته و مینیمم مقدار تابع را به‌ازای آن‌ها مشخص کنیم.

$$y = \frac{۱}{۴}x^۴ - x^۳ - ۲x^۲ \Rightarrow y' = x^۳ - ۳x^۲ - ۴x = x(x-۴)(x+۱)$$

$$y' = ۰ \Rightarrow x(x-۴)(x+۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x - ۴ = ۰ \Rightarrow x = ۴ \\ x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = -۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(۰) = ۰ \\ y(۴) = -۳۲ \\ y(-۱) = -\frac{۳}{۴} \end{cases}$$

باتوجه‌به مقادیر به‌دست‌آمده، $y = -۳۲$ کمترین مقدار تابع است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۸ **گزینه ۳**

برای یافتن مینیمم مطلق یک تابع پیوسته، مقدار تابع را در نقاط بحرانی آن و نقاط ابتدایی و انتهایی بازهٔ تعریف‌شده، یافته و کمترین آن‌ها را مشخص می‌کنیم. نقطهٔ بحرانی تابع، نقاطی از دامنهٔ تعریف آن است که به‌ازای آن‌ها $f'(x) = ۰$ یا $f'(x)$ موجود نباشد.

چون دامنهٔ تابع چندجمله‌ای $f(x)$ برابر $\mathbb{R}$ است، کافی است ریشه‌های معادلهٔ $f'(x) = ۰$ را به دست آوریم:

$$f(x) = \frac{x^۴}{۴} - \frac{x^۳}{۳} - x^۲ \Rightarrow f'(x) = x^۳ - x^۲ - ۲x = x(x-۲)(x+۱)$$

$$f'(x) = ۰ \Rightarrow x(x-۲)(x+۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x - ۲ = ۰ \Rightarrow x = ۲ \\ x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = -۱ \end{cases}$$

هر سه مقدار فوق عضو بازهٔ $[-۱, ۳]$ هستند. کمترین مقدار تابع را به‌ازای چهار مقدار $x = ۰, ۲, -۱, ۳$ به دست می‌آوریم:

$$f(-۱) = \frac{(-۱)^۴}{۴} - \frac{(-۱)^۳}{۳} - (-۱)^۲ = -\frac{۵}{۱۲}$$

$$f(۰) = ۰$$

$$f(۲) = \frac{۲^۴}{۴} - \frac{۲^۳}{۳} - ۲^۲ = -\frac{۸}{۳}$$

$$f(۳) = \frac{۳^۴}{۴} - \frac{۳^۳}{۳} - ۳^۲ = \frac{۹}{۴}$$

کمترین مقدار تابع روی بازهٔ $[-۱, ۳]$ برابر $y = -\frac{۸}{۳}$ است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

۹ **گزینه ۲**

برای تعیین ماکسیمم مطلق یک تابع پیوسته، مقدار تابع را در نقاط بحرانی و نقاط ابتدایی و انتهایی بازهٔ تعریف‌شده، می‌یابیم. بیشترین مقدار ماکسیمم مطلق تابع خواهد بود. نقاط بحرانی، نقاطی از دامنهٔ تعریف تابع هستند که به‌ازای آن‌ها $f'(x)=۰$ یا $f'(x)$ موجود نباشد.

$$f(x)=\frac{۱}{x^۴-۴x^۳+۴x^۲+۵}\Rightarrow f'(x)=\frac{۰-(۴x^۳-۱۲x^۲+۸x)}{(x^۴-۴x^۳+۴x^۲+۵)^۲}=\frac{-۴x(x-۲)(x-۱)}{(x^۴-۴x^۳+۴x^۲+۵)^۲}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow -۴x(x-۲)(x-۱)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۰\\x-۲=۰\Rightarrow x=۲\\x-۱=۰\Rightarrow x=۱\end{cases}$$

هیچ‌یک از سه مقدار به‌دست‌آمده مخرج تابع $f'(x)$ را صفر نمی‌کنند، بنابراین هر سه طول نقطهٔ بحرانی تابع $f(x)$ هستند. داریم:

$$f(۰)=\frac{۱}{۰+۵}=\frac{۱}{۵}$$
$$f(۱)=\frac{۱}{۱-۴+۴+۵}=\frac{۱}{۶}$$
$$f(۲)=\frac{۱}{۱۶-۳۲+۱۶+۵}=\frac{۱}{۵}$$

بنابراین ماکسیمم مطلق تابع $f(x)$ برابر $\frac{۱}{۵}$ است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵

۱۰ **گزینه ۳**

بیشترین مقدار تابع، همان ماکسیمم مطلق تابع است. $f(x)$ یک تابع مثلثاتی و $D_f=\mathbb{R}$ است. برای تعیین ماکسیمم مطلق این تابع پیوسته، مقدار تابع را در نقاط بحرانی آن، در یک دورهٔ تناوب، به‌دست می‌آوریم. نقطهٔ بحرانی، نقاطی از دامنهٔ تعریف تابع است که به‌ازای آن‌ها $f'(x)=۰$ یا $f'(x)$ موجود نباشد.

$$f(x)=\sin ۲x+۲\cos x\Rightarrow f'(x)=۲\cos ۲x-۲\sin x$$

$$\xrightarrow{\cos ۲x=۱-۲\sin^۲ x} f'(x)=۲(۱-۲\sin^۲ x)-۲\sin x=-۴\sin^۲ x-۲\sin x+۲$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow -۲(۲\sin x-۱)(\sin x+۱)=۰\Rightarrow\begin{cases}\sin x=\frac{۱}{۲}\\ \sin x=-۱\end{cases}$$

دورهٔ تناوب تابع را بازهٔ $[۰,۲\pi]$ در نظر می‌گیریم، داریم:

$$\sin x=\frac{۱}{۲}\xrightarrow{x\in[۰,۲\pi]}x=\frac{\pi}{۶},\ x=\frac{۵\pi}{۶}$$
$$\sin x=-۱\xrightarrow{x\in[۰,۲\pi]}x=\frac{۳\pi}{۲}$$

مقدار تابع را به‌ازای $x=\frac{\pi}{۶},\frac{۵\pi}{۶},\frac{۳\pi}{۲}$ محاسبه و بیشترین آن‌ها را مشخص می‌کنیم.

$$f(\frac{\pi}{۶})=\sin\frac{\pi}{۳}+۲\cos\frac{\pi}{۶}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}+۲(\frac{\sqrt{۳}}{۲})=\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$$
$$f(\frac{۵\pi}{۶})=\sin\frac{۵\pi}{۳}+۲\cos\frac{۵\pi}{۶}=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}-۲(\frac{\sqrt{۳}}{۲})=-\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$$
$$f(\frac{۳\pi}{۲})=\sin ۳\pi+۲\cos\frac{۳\pi}{۲}=۰+۰=۰$$

بنابراین بیشترین مقدار تابع $f(x)$ برابر $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$ است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

۱۱ **گزینه ۳**

کمترین مقدار تابع، همان مینیمم مطلق تابع است. $f(x)$ یک تابع مثلثاتی و $D_f=\mathbb{R}$ است. برای یافتن مینیمم مطلق این تابع پیوسته، مقدار تابع را در نقاط بحرانی آن، در یک دورهٔ تناوب، به‌دست‌آورده و کمترین مقدار را مشخص می‌کنیم. نقطهٔ بحرانی، نقاطی از دامنهٔ تعریف تابع است که به‌ازای آن‌ها $f'(x)=0$ یا $f'(x)$ موجود نباشد.

$$f(x)=1-\cos^2 x-\sin x=\sin^2 x-\sin x$$
$$f'(x)=2\sin x\cos x-\cos x=\cos x(2\sin x-1)$$
$$f'(x)=0\Rightarrow \cos x(2\sin x-1)=0\Rightarrow \begin{cases}\cos x=0\\ 2\sin x-1=0\Rightarrow \sin x=\frac{1}{2}\end{cases}$$

دورهٔ تناوب تابع را بازهٔ $[0,2\pi]$ در نظر می‌گیریم، داریم:

$$\cos x=0\xrightarrow{x\in[0,2\pi]}x=\frac{\pi}{2}\,,\ x=\frac{3\pi}{2}$$
$$\sin x=\frac{1}{2}\xrightarrow{x\in[0,2\pi]}x=\frac{\pi}{6}\ ,\ x=\frac{5\pi}{6}$$

مقدار تابع را به‌ازای چهار مقدار فوق به دست آورده و کمترین آن‌ها را مشخص می‌کنیم:

$$f(\tfrac{\pi}{2})=\sin^2\tfrac{\pi}{2}-\sin\tfrac{\pi}{2}=1-1=0$$
$$f(\tfrac{3\pi}{2})=\sin^2\tfrac{3\pi}{2}-\sin\tfrac{3\pi}{2}=(-1)^2-(-1)=1+1=2$$
$$f(\tfrac{\pi}{6})=\sin^2\tfrac{\pi}{6}-\sin\tfrac{\pi}{6}=(\tfrac{1}{2})^2-\tfrac{1}{2}=\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{2}=-\tfrac{1}{4}$$
$$f(\tfrac{5\pi}{6})=\sin^2\tfrac{5\pi}{6}-\sin\tfrac{5\pi}{6}=(\tfrac{1}{2})^2-\tfrac{1}{2}=\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{2}=-\tfrac{1}{4}$$

کمترین مقدار تابع $f(x)$ برابر $-\frac{1}{4}$ است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

۱۲ **گزینه ۱**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۱

گام اول

تقعر منحنی تابع $f(x)$ روی یک بازه روبه‌پایین است، هرگاه به‌ازای همهٔ xهای این بازه موجود و $f''(x)<0$ باشد.

گام دوم

$$f(x)=x^4-6x^2\Rightarrow D_f=\mathbb{R}$$
$$f'(x)=4x^3-12x\Rightarrow f''(x)=12x^2-12=12(x^2-1)$$
$$f''(x)<0\Rightarrow x^2-1<0\Rightarrow x^2<1\Rightarrow |x|<1\Rightarrow -1<x<1$$

بنابراین تقعر تابع در بازهٔ $(-1,1)$ روبه‌پایین است.

۱۳ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

گام اول

تقعر منحنی تابع $f(x)$ روی یک بازه روبه‌بالا است هرگاه به‌ازای همهٔ xهای این بازه $f''(x)$ موجود و $f''(x) > 0$ باشد.

گام دوم

$$f(x) = 6x^5 - 5x^4 + 2x + 7 \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$
$$f'(x) = 30x^4 - 20x^3 + 2 \Rightarrow f''(x) = 120x^3 - 60x^2 = 60x^2(2x - 1)$$

باتوجه‌به گام اول، مجموعه جواب نامعادلهٔ $f''(x) > 0$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f''(x) > 0 \Rightarrow 60x^2(2x - 1) > 0 \xrightarrow{60x^2>0} 2x - 1 > 0 \Rightarrow 2x > 1 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$$

تقعر منحنی تابع روی بازهٔ $(\frac{1}{2}, +\infty)$ روبه‌بالا است پس کمترین مقدار a برابر با $\frac{1}{2}$ است.

۱۴ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۴

گام اول

الف) تقعر منحنی تابع $f(x)$ روی یک بازه، روبه‌بالا است، هرگاه به‌ازای همهٔ مقادیر x در آن بازه $f''(x)$ موجود و $f''(x) > 0$ باشد.

ب) در چهار ناحیهٔ دستگاه مختصات داریم:

ناحیهٔ اول: $x > 0$ و $y > 0$

ناحیهٔ دوم: $x < 0$ و $y > 0$

ناحیهٔ سوم: $x < 0$ و $y < 0$

ناحیهٔ چهارم: $x > 0$ و $y < 0$

گام دوم

$$y = x + \frac{1}{x} \Rightarrow y' = 1 - \frac{1}{x^2} \Rightarrow y'' = \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}$$

باتوجه‌به گام اول، مجموعه‌جواب نامعادلهٔ $y'' > 0$ را مشخص می‌کنیم.

$$y'' > 0 \Rightarrow \frac{2}{x^3} > 0 \Rightarrow x^3 > 0 \Rightarrow x > 0 \quad (I)$$
$$x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow x + \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow y > 0 \quad (II)$$

از (I) و (II) می‌توان نتیجه گرفت که تقعر نمودار تابع در ناحیهٔ اول از دستگاه محورهای مختصات روبه‌بالا است.

۱۵ **گزینه ۲**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

گام اول

تقعر منحنی تابع $f(x)$ روی یک بازه روبه‌پایین است هرگاه به‌ازای همهٔ xهای عضو این بازه $f''(x)$ موجود و $f''(x) < 0$ باشد.

گام دوم

$$f(x) = \frac{1}{x^2+12} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+12)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{-2(x^2+12)^2 - 2(2x)(x^2+12)(-2x)}{(x^2+12)^4} = \frac{6x^2-24}{(x^2+12)^3}$$

اکنون مجموعه جواب نامعادلهٔ $f''(x) < 0$ را می‌یابیم:

$$f''(x) < 0 \Rightarrow \frac{6x^2-24}{(x^2+12)^3} < 0 \xrightarrow{(x^2+12)^3>0} 6x^2 - 24 < 0 \Rightarrow 6x^2 < 24$$

$$x^2 < 4 \Rightarrow |x| < 2 \Rightarrow x \in (-2, 2)$$

بنابراین تقعر منحنی تابع $f(x)$ روی بازهٔ $(-2, 2)$ روبه‌پایین و $a = 2$ است.

۱۶ **گزینه ۱**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

گام اول

تقعر منحنی تابع $f(x)$ روی یک بازه، روبه‌پایین است هرگاه به‌ازای همهٔ xهای عضو این بازه $f''(x)$ موجود و $f''(x) < 0$ باشد.

گام دوم

$$y = x^2 + \sqrt{x} \Rightarrow D = [0, +\infty)$$

$$y' = 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow y'' = 2 - \frac{1}{4x\sqrt{x}} = \frac{8x\sqrt{x}-1}{4x\sqrt{x}}$$

اکنون مجموعه‌جواب نامعادلهٔ $y'' < 0$ را می‌یابیم:

$$y'' < 0 \Rightarrow \frac{8x\sqrt{x}-1}{4x\sqrt{x}} < 0 \xrightarrow[4x\sqrt{x}>0]{x>0} 8x\sqrt{x} - 1 < 0 \Rightarrow 8x\sqrt{x} < 1$$

$$\Rightarrow x\sqrt{x} < \frac{1}{8} \Rightarrow (\sqrt{x})^3 < \left(\frac{1}{2}\right)^3 \Rightarrow \sqrt{x} < \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x < \frac{1}{4}$$

$$\xrightarrow{x>0} 0 < x < \frac{1}{4}$$

بنابراین تقعر تابع در بازهٔ $(0, \frac{1}{4})$ روبه‌پایین است.

۱۷ **گزینه ۲**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

گام اول

تقعر منحنی تابع $f(x)$ روی یک بازه روبه‌پایین است هرگاه به‌ازای همهٔ xهای عضو این بازه، $f''(x)$ موجود و $f''(x) < ۰$ باشد.

گام دوم

$$f(x) = x^{\frac{۶}{۵}} - ۱۲x^{\frac{۱}{۵}} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \frac{۶}{۵}x^{\frac{۱}{۵}} - \frac{۱۲}{۵}x^{-\frac{۴}{۵}} \Rightarrow f''(x) = \frac{۶}{۲۵}x^{-\frac{۴}{۵}} + \frac{۴۸}{۲۵}x^{-\frac{۹}{۵}} = \frac{۶}{۲۵}x^{-\frac{۹}{۵}}(x+۸)$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{۶(x+۸)}{۲۵\sqrt[۵]{x^۹}}$$

اکنون مجموعه‌جواب نامعادلهٔ $f''(x) < ۰$ را مشخص می‌کنیم. $x = ۰$ ریشهٔ مخرج $f''(x)$ است پس $f''(x)$ در این نقطه تعریف‌نشده است؛

همچنین داریم: $f''(-۸) = ۰$

جدول تعیین علامت تابع $f''(x)$ به‌صورت زیر است:

x	$-\infty$		-۸		۰		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	۰	$-$	ت ن	$+$	

بنابراین تقعر تابع $f(x)$ روی بازهٔ $(-۸, ۰)$ روبه‌پایین است.

۱۸ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

گام اول

تقعر منحنی تابع $f(x)$ روی یک بازه روبه‌پایین است هرگاه به‌ازای همهٔ xهای عضو این بازه $f''(x)$ موجود و $f''(x) < ۰$ باشد.

گام دوم

$$y = (x+۳)\sqrt{x} \Rightarrow D = [۰, +\infty)$$

$$\Rightarrow y' = \sqrt{x} + \frac{(x+۳)}{۲\sqrt{x}} = \frac{۲x + x + ۳}{۲\sqrt{x}} = \frac{۳x+۳}{۲\sqrt{x}}$$

$$y'' = \frac{۳(۲\sqrt{x}) - \frac{۲}{۲\sqrt{x}}(۳x+۳)}{(۲\sqrt{x})^۲} = \frac{\frac{۶x-۳x-۳}{\sqrt{x}}}{۴x} = \frac{۳x-۳}{۴x\sqrt{x}}$$

اکنون مجموعه جواب نامعادلهٔ $y'' < ۰$ را مشخص می‌کنیم:

$$y'' < ۰ \Rightarrow \frac{۳x-۳}{۴x\sqrt{x}} < ۰ \xrightarrow[۴x\sqrt{x}>۰]{x>۰} ۳x - ۳ < ۰ \Rightarrow ۳x < ۳ \Rightarrow x < ۱ \xrightarrow{x>۰} ۰ < x < ۱$$

بنابراین نمودار تابع y روی بازهٔ $(۰, ۱)$ دارای تقعر روبه‌پایین است پس داریم:

$$(a,b) = (۰,۱) \Rightarrow a = ۰, b = ۱ \Rightarrow b - a = ۱ - ۰ = ۱$$

۱۹ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

گام اول

تقعر منحنی تابع $f(x)$ روی یک بازه روبه‌بالا است هرگاه به ازای همهٔ xهای عضو این بازه، $f''(x)$ موجود و $f''(x) > ۰$ باشد.

گام دوم

به‌ازای همهٔ مقادیر $x \in \mathbb{R}$ نامعادلهٔ $x^۲ + ۲ \geq ۰$ برقرار است پس دامنهٔ تابع داده‌شده، برابر $\mathbb{R}$ است.

$$y = x\sqrt{x^۲+۲} \Rightarrow y' = \sqrt{x^۲+۲} + x\left(\frac{۲x}{۲\sqrt{x^۲+۲}}\right) = \frac{x^۲+۲+x^۲}{\sqrt{x^۲+۲}} = \frac{۲(x^۲+۱)}{\sqrt{x^۲+۲}}$$

$$\Rightarrow y'' = \frac{۲(۲x)\sqrt{x^۲+۲} - \left(\frac{۲x}{۲\sqrt{x^۲+۲}}\right)(۲(x^۲+۱))}{x^۲+۲} = \frac{۲x^۳+۶x}{(x^۲+۲)\sqrt{x^۲+۲}}$$

اکنون مجموعه جواب نامعادلهٔ $y'' > ۰$ را مشخص می‌کنیم:

$$y'' > ۰ \Rightarrow \frac{۲x^۳+۶x}{(x^۲+۲)\sqrt{x^۲+۲}} > ۰ \xrightarrow{(x^۲+۲)\sqrt{x^۲+۲}>۰} ۲x^۳ + ۶x > ۰ \Rightarrow ۲x(x^۲+۳) > ۰$$

$$\xrightarrow{x^۲+۳>۰} ۲x > ۰ \Rightarrow x > ۰$$

بنابراین تقعر منحنی تابع روی بازهٔ $(۰, +\infty)$ روبه‌بالا است پس $a = ۰$ می‌شود.

۲۰ **گزینه ۴**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۹

گام اول

تقعر منحنی تابع $f(x)$ روی یک بازه، روبه‌پایین است هرگاه به‌ازای همهٔ xهای عضو این بازه $f''(x)$ موجود و $f''(x) < ۰$ باشد.

گام دوم

$$f(x) = (x^۲ + ۲x + ۲)e^{-x} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = (۲x + ۲)e^{-x} - e^{-x}(x^۲ + ۲x + ۲) = e^{-x}(۲x + ۲ - x^۲ - ۲x - ۲) = -x^۲e^{-x}$$

$$f''(x) = -۲xe^{-x} + (-e^{-x})(-x^۲) = e^{-x}(x^۲ - ۲x)$$

اکنون مجموعه‌جواب نامعادلهٔ $f''(x) < ۰$ را مشخص می‌کنیم:

$$f''(x) < ۰ \Rightarrow e^{-x}(x^۲ - ۲x) < ۰ \xrightarrow{e^{-x}>۰} x^۲ - ۲x = x(x - ۲) < ۰$$

x	$-\infty$		۰		۲		$+\infty$
$x^۲ - ۲x$		$+$	۰	$-$	۰	$+$	

بنابراین تقعر منحنی تابع به‌ازای $۰ < x < ۲$، روبه‌پایین است.

۲۱ **گزینه ۳**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

گام اول

الف) تابع $f(x)$ روی یک بازه نزولی است هرگاه به‌ازای تمام مقادیر این بازه، $f'(x)$ موجود و $f'(x) < ۰$ باشد.

ب) تقعر منحنی تابع $f(x)$ روی یک بازه، روبه‌بالا است هرگاه به‌ازای همهٔ xهای عضو این بازه، $f''(x)$ موجود و $f''(x) > ۰$ باشد.

گام دوم

$$y = \frac{۱}{۳}x^۳ - x^۲ - ۳x \Rightarrow D = \mathbb{R}$$

$$y' = x^۲ - ۲x - ۳ = (x - ۳)(x + ۱)$$

$$y' < ۰ \Rightarrow -۱ < x < ۳ \quad (I)$$

x		-۱		۳	
y'	$+$	۰	$-$	۰	$+$

تابع روی بازهٔ $(-۱, ۳)$ نزولی است.

$$y'' = ۲x - ۲$$

$$y'' > ۰ \Rightarrow x > ۱ \quad (II)$$

x		۱	
y''	$-$	۰	$+$

تقعر منحنی تابع روی بازهٔ $(۱, +\infty)$ روبه‌بالا است.

$$(I) \bigcap (II) = (-۱, ۳) \bigcap (۱, +\infty) = (۱, ۳)$$

بنابراین تابع داده‌شده روی بازهٔ $(۱, ۳)$ نزولی و دارای تقعر روبه‌بالا است.

۲۲ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

گام اول

الف) تابع $f(x)$ روی یک بازه صعودی است هرگاه به‌ازای تمام xهای عضو این بازه، $f'(x)$ موجود و $f'(x) > 0$ باشد.

ب) تقعر منحنی تابع $f(x)$ روی یک بازه روبه‌پایین است، هرگاه به‌ازای تمام xهای عضو این بازه، $f''(x)$ موجود و $f''(x) < 0$ باشد.

گام دوم

$$y = -x^4 + 4x^3 - 3 \Rightarrow D = \mathbb{R}$$

$$y' = -4x^3 + 12x^2 = 4x^2(-x + 3)$$

$$y' > 0 \Rightarrow 4x^2(-x + 3) > 0 \xrightarrow{4x^2 > 0} -x + 3 > 0 \Rightarrow x < 3 \quad (I)$$

تابع روی بازهٔ $(-\infty, 3)$ صعودی است.

$$y'' = -12x^2 + 24x = 12x(-x + 2)$$

$$y'' < 0 \Rightarrow x < 0 \text{ یا } x > 2 \quad (II)$$

x		۰		۲	
y''	$-$	۰	$+$	۰	$-$

تقعر منحنی تابع روی بازهٔ $(-\infty, 0) \bigcup (2, +\infty)$ روبه‌پایین است.

$$(I) \bigcap (II) = (-\infty, 3) \bigcap \left[(-\infty, 0) \bigcup (2, +\infty)\right] = (-\infty, 0) \bigcup (2, 3)$$

از میان بازه‌های داده‌شده، تابع روی بازهٔ $(2, 3)$ قطعاً صعودی با تقعر روبه‌پایین است.

۲۳ **گزینه ۳**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

گام اول

الف) فرض کنیم c نقطهٔ بحرانی تابع f باشد. همچنین فرض کنیم f بر بازهٔ I شامل c پیوسته و بر این بازه به جز احتمالاً در c مشتق‌پذیر باشد. در اینصورت c طول نقطهٔ ماکسیمم نسبی تابع f است هرگاه $f'(x)$ قبل از c مثبت و بعد از c منفی باشد.

ب) نقطهٔ درونی $c \in D_f$ را نقطهٔ بحرانی تابع f گوئیم هرگاه $f'(c) = ۰$ یا $f'(c)$ موجود نباشد.

گام دوم

$$y = x^۴ + \frac{۴}{۳}x^۳ - ۴x^۲ \Rightarrow D = \mathbb{R}$$

ابتدا با حل معادلهٔ $y' = ۰$ طول نقاط بحرانی تابع را تعیین می‌کنیم.

$$y' = ۴x^۳ + ۴x^۲ - ۸x \xrightarrow{y'=۰} ۴x(x+۲)(x-۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = -۲ \\ x = ۱ \end{cases}$$

x	$-\infty$		-۲		۰		۱		$+\infty$
y'		$-$	۰	$+$	۰	$-$	۰	$+$	
y		↘	min	↗	max	↘	min	↗	

بنابراین طول نقطهٔ ماکسیمم نسبی تابع برابر صفر است.

۲۴ **گزینه ۱**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

گام اول

الف) فرض کنیم c نقطهٔ بحرانی تابع f باشد؛ همچنین فرض کنیم f بر بازهٔ I شامل c پیوسته و بر این بازه به‌جز احتمالاً در c مشتق‌پذیر باشد. در اینصورت c طول نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع f است، هرگاه $f'(x)$ قبل و بعد از c تغییر علامت داده باشد.

ب) نقطهٔ درونی $c \in D_f$، نقطهٔ بحرانی تابع f است؛ هرگاه $f'(c) = 0$ یا $f'(c)$ موجود نباشد.

گام دوم

$$f(x) = \frac{x^2-2x}{x+a} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-a\}$$

$$f'(x) = \frac{(2x-2)(x+a)-(x^2-2x)}{(x+a)^2} = \frac{x^2+2ax-2a}{(x+a)^2}$$

بررسی می‌کنیم به‌ازای چه مقادیری از a، معادلهٔ $f'(x) = 0$ دارای ریشهٔ ساده است.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2+2ax-2a}{(x+a)^2} = 0 \Rightarrow x^2 + 2ax - 2a = 0$$

این معادلهٔ درجه‌دو ریشهٔ ساده خواهد داشت هرگاه $\Delta > 0$ باشد، پس داریم:

$$(2a)^2 - 4(1)(-2a) > 0 \Rightarrow 4a^2 + 8a = 4a(a+2) > 0$$

a		-2		0	
$4a(a+2)$	+	0	−	0	+

بنابراین به‌ازای $a < -2$ یا $a > 0$، تابع f دارای اکسترمم نسبی است.

۲۵ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۹

گام اول

الف) هر نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع، یک نقطهٔ بحرانی تابع است.

ب) نقطهٔ درونی $c \in D_f$، نقطهٔ بحرانی تابع f است هرگاه $f'(c) = ۰$ یا $f'(c)$ موجود نباشد.

گام دوم

نقطهٔ $(\frac{\pi}{۶}, -۳)$ مینیمم تابع $f(x)$ است، پس مختصات این نقطه در معادلهٔ تابع صدق می‌کند.

$$f(x) = a\cos ۲x + b\sin x \xrightarrow{f(\frac{\pi}{۶})=-۳} -۳ = a\cos\frac{\pi}{۳} + b\sin\frac{\pi}{۶}$$

$$\Rightarrow -۳ = \frac{a}{۲} + \frac{b}{۲} \Rightarrow a + b = -۶ \quad (I)$$

ازطرفی طبق قسمت الف از گام اول، نقطهٔ $(\frac{\pi}{۶}, -۳)$ یک نقطهٔ بحرانی تابع f است، پس طبق تعریف نقطهٔ بحرانی و باتوجه‌به ضابطهٔ تابع $f(x)$ داریم:

$$f'(\frac{\pi}{۶}) = ۰$$

$$f'(x) = -۲a\sin ۲x + b\cos x \xrightarrow{f'(\frac{\pi}{۶})=۰} ۰ = -۲a\sin\frac{\pi}{۳} + b\cos\frac{\pi}{۶}$$

$$\Rightarrow ۰ = -۲a(\frac{\sqrt{۳}}{۲}) + b(\frac{\sqrt{۳}}{۲}) \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲}(-۲a + b) = ۰ \Rightarrow -۲a + b = ۰ \Rightarrow b = ۲a \quad (II)$$

با جایگذاری (II) در (I) داریم:

$$a + b = -۶ \xrightarrow{II} a + ۲a = -۶ \Rightarrow ۳a = -۶ \Rightarrow a = -۲$$

۲۶ گزینه ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

گام اول

الف) نقطهٔ c، ماکسیمم نسبی تابع f است هرگاه c نقطهٔ بحرانی تابع f باشد و علامت $f'(x)$ قبل از c مثبت و بعد از c منفی باشد.

ب) نقطهٔ درونی $c \in D_f$، نقطهٔ بحرانی تابع f است هرگاه $f'(c) = ۰$ یا $f'(c)$ موجود نباشد.

ج) نقطهٔ c، نقطهٔ عطف تابع f است هرگاه f در $x = c$ پیوسته باشد، نمودار f در c دارای خط مماس باشد و همچنین جهت تقعر تابع f در c عوض شود (علامت f'' قبل و بعد از c عوض شود).

گام دوم

$$y = x^۴ - ۶x^۲ + ۵ \Rightarrow D = \mathbb{R}$$

برای تعیین ماکسیمم نسبی تابع، معادلهٔ $y' = ۰$ را حل می‌کنیم:

$$y' = ۴x^۳ - ۱۲x = ۴x(x^۲ - ۳)$$

$$y' = ۰ \Rightarrow ۴x(x^۲ - ۳) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} ۴x = ۰ \Rightarrow x = ۰ \\ x^۲ - ۳ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{۳} \\ x = -\sqrt{۳} \end{cases} \end{cases}$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{۳}$		۰		$\sqrt{۳}$		$+\infty$
y'	$-$	۰	$+$	۰	$-$	۰	$+$	
y	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	

بنابراین نقطهٔ $(۰, ۵)$ ماکسیمم نسبی تابع است. اکنون با حل معادلهٔ $y'' = ۰$، نقطهٔ عطف تابع را تعیین می‌کنیم.

$$y'' = ۱۲x^۲ - ۱۲ = ۱۲(x^۲ - ۱)$$

$$y'' = ۰ \Rightarrow x^۲ - ۱ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \Rightarrow (۱, ۰) \\ x = -۱ \Rightarrow (-۱, ۰) \end{cases}$$

x	$-\infty$	-۱		۱		$+\infty$
y''	$+$	۰	$-$	۰	$+$	
y	$\cup$		$\cap$		$\cup$	

فاصلهٔ بین ماکسیمم نسبی و نقطهٔ عطف منحنی برابر است با:

$$\begin{cases} A(۰, ۵) \\ B(۱, ۰) \end{cases} \Rightarrow AB = \sqrt{(۱ - ۰)^۲ + (۰ - ۵)^۲} = \sqrt{۱ + ۲۵} = \sqrt{۲۶}$$

۲۷ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

گام اول

نقطهٔ $x = c$ نقطهٔ عطف تابع f است، هرگاه:

الف) f در c پیوسته باشد.

ب) نمودار f در c، خط مماس داشته باشد.

ج) جهت تقعر تابع f در c عوض شود (علامت f'' در دو طرف c عوض شود).

گام دوم

$$y = \frac{x}{1+|x|} = \begin{cases} \frac{x}{1+x} & ; x \geq 0 \\ \frac{x}{1-x} & ; x < 0 \end{cases}$$

$$y' = \begin{cases} \frac{1}{(1+x)^2} & ; x > 0 \\ \frac{1}{(1-x)^2} & ; x < 0 \end{cases}$$

$$y'' = \begin{cases} \frac{-2}{(1+x)^3} & ; x > 0 \\ \frac{2}{(1-x)^3} & ; x < 0 \end{cases}$$

معادلهٔ $y'' = 0$ جواب ندارد اما توجه داشته باشید که تابع در نقطهٔ $x = 0$ پیوسته است و مماس واحد دارد $(y'_-(0) = y'_+(0) = 1)$ و همچنین جهت تقعر تابع قبل و بعد از این نقطه عوض می‌شود $(y''_+(0) = -2 \,, y''_-(0) = 2)$؛ بنابراین نقطهٔ $x = 0$ نقطهٔ عطف تابع است.

۲۸ گزینه ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

گام اول

نقطهٔ $x = c$ نقطهٔ عطف تابع f است هرگاه:

الف) f در c پیوسته باشد.

ب) نمودار f در c، دارای خط مماس واحد باشد.

ج) جهت تقعر تابع f در c عوض شود (علامت f'' قبل و بعد از c عوض شود).

گام دوم

$$f(x) = \frac{(2-x)^2}{x} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$f'(x) = \frac{2(-1)(2-x)x-(2-x)^2}{x^2} = \frac{-4x+2x^2-4+4x-x^2}{x^2} = \frac{x^2-4}{x^2} = 1 - \frac{4}{x^2}$$

$$f''(x) = -\frac{-8x}{x^4} = \frac{8}{x^3}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	$-$	‖	$+$
f	$\cap$		$\cup$

معادلهٔ $f''(x) = 0$ جواب نـدارد. علامت $f''(x)$ قبل و بعـد از $x = 0$ عوض می‌شود امـا باتوجه‌به اینکه تابع f در نقطهٔ $x = 0$ تعریف‌نشده است، پس این نقطه نمی‌تواند نقطهٔ عطف تابع باشد، بنابراین تابع f فاقد نقطهٔ عطف است.

۲۹ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

گام اول

نقطهٔ $x = c$ نقطهٔ عطف تابع f است، هرگاه:

الف) f در c پیوسته باشد.

ب) نمودار f در c دارای خط مماس واحد باشد.

ج) جهت تقعر تابع f قبل و بعد از نقطهٔ $x = c$ عوض شود (f'' قبل و بعد از c تغییر علامت بدهد).

گام دوم

$$f(x) = x^{\frac{5}{3}} - 10x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} - \frac{20}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

$$f''(x) = \frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{20}{9}x^{-\frac{4}{3}} = \frac{10}{9\sqrt[3]{x}} + \frac{20}{9\sqrt[3]{x^4}} = \frac{10x+20}{9\sqrt[3]{x^4}} = \frac{10(x+2)}{9x\sqrt[3]{x}}$$

$$\Rightarrow f''(x) = 0 \Rightarrow 10(x+2) = 0 \Rightarrow x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	ت ن	$+$	

علامت f'' قبل و بعد از نقطهٔ $x = -2$ عوض می‌شود و چون تابع f در این نقطه تعریف‌شده و پیوسـته است و همچنین مماس واحد دارد، پس نقطهٔ عطف تابع محسوب می‌شود.

۳۰ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۴

گام اول

نقطهٔ $x = c$ نقطهٔ عطف تابع f است هرگاه:

الف) f در c پیوسته باشد.

ب) نمودار f در c دارای خط مماس واحد باشد.

ج) جهت تقعر تابع f در c عوض شود (علامت f'' قبل و بعد از c عوض شود).

گام دوم

$$y = x^۲ e^x \Rightarrow D = \mathbb{R}$$

دقت کنید که به‌ازای تمام مقادیر $x \in \mathbb{R}$، $y \geq ۰$ است، پس نقاط عطف این تابع نمی‌توانند در ناحیهٔ سوم و چهارم قرار داشته باشد. با حل معادلهٔ $y'' = ۰$ طول این نقاط را مشخص می‌کنیم.

$$y' = ۲xe^x + x^۲e^x = e^x(x^۲ + ۲x)$$

$$y'' = e^x(x^۲ + ۲x) + (۲x + ۲)e^x = e^x(x^۲ + ۴x + ۲)$$

$$y'' = ۰ \Rightarrow e^x(x^۲ + ۴x + ۲) = ۰ \xrightarrow{e^x \neq ۰} x^۲ + ۴x + ۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x_۱ = \dfrac{-۴ - \sqrt{۸}}{۲} < ۰ \\ x_۲ = \dfrac{-۴ + \sqrt{۸}}{۲} < ۰ \end{cases}$$

طول هر دو نقطهٔ عطف منفی و عرض آن‌ها مثبت است، پس هر دو در ناحیهٔ دوم مثلثاتی قرار دارند.

۳۱ **گزینه ۲**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

گام اول

الف) نقطهٔ درونی $c \in D_f$، نقطهٔ بحرانی تابع f است هرگاه $f'(c) = 0$ یا $f'(c)$ موجود نباشد.

ب) فرض کنیم c نقطهٔ بحرانی تابع f باشد و همچنین f بر بازهٔ I شامل c پیوسته و بر این بازه به‌جز احتمالاً در c مشتق‌پذیر باشد. در اینصورت c طول نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع f است هرگاه $f'(x)$ قبل و بعد از c تغییر علامت داده باشد.

گام دوم

$$f(x) = (x^3 - 3x^2 + 4)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}(3x^2 - 6x)(x^3 - 3x^2 + 4)^{-\frac{2}{3}} = \frac{3x^2 - 6x}{3\sqrt[3]{(x^3 - 3x^2 + 4)^2}}$$

ابتدا معادلهٔ $f'(x) = 0$ را حل می‌کنیم:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 3x(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

اکنون مجموعه نقاطی که $f'(x)$ در آن تعریف‌نشده را تعیین می‌کنیم؛ بنابراین مخرج این تابع را مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$$x^3 - 3x^2 + 4 = 0 \Rightarrow (x^3 + 1) + (3 - 3x^2) = (x+1)(x^2 + 1 - x) + 3(1-x)(1+x) = 0$$

$$\Rightarrow (x+1)(x^2 - 4x + 4) = (x+1)(x-2)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \\ x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$$

از میان نقاط بحرانی به‌دست‌آمده، تنها نقطهٔ $x = 0$ در بازهٔ $(-1, 2)$ قرار می‌گیرد. $f'(x)$ را اطراف این نقطه تعیین علامت می‌کنیم:

x		0	
f'	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$		$\searrow$

بنابراین نقطهٔ $x = 0$، ماکسیمم نسبی تابع f است.

۳۲ **گزینه ۴**

برای تعیین وضعیت نمودار تابع f در اطراف نقطهٔ $x = ۱$ ابتدا ضابطهٔ دو تابع f' و f'' را تعیین می‌کنیم:

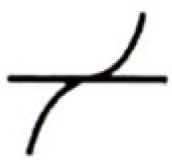
$$f(x) = x^۴ - ۳x^۳ + ۳x^۲ - x$$
$$f'(x) = ۴x^۳ - ۹x^۲ + ۶x - ۱ \Rightarrow f'(۱) = ۴ - ۹ + ۶ - ۱ = ۰$$
$$f''(x) = ۱۲x^۲ - ۱۸x + ۶ \Rightarrow f''(۱) = ۱۲ - ۱۸ + ۶ = ۰$$

تابع در $x = ۱$ دارای مماس افقی است زیرا $f'(۱) = ۰$ است. اکنون با تعیین علامت تابع $f''(x)$ تقعر تابع را در اطراف نقطهٔ $x = ۱$ مشخص می‌کنیم.

$$f''(x) = ۰ \Rightarrow ۱۲x^۲ - ۱۸x + ۶ = ۶(۲x - ۱)(x - ۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{۱}{۲} \\ x = ۱ \end{cases}$$

x	$-\infty$	$\frac{۱}{۲}$		۱		$+\infty$
f''	+	۰	−	۰	+	
f	$\cup$		$\cap$		$\cup$	

تقعر تابع در نقطهٔ $x = ۱$ عوض شده است. قبل از این نقطه تقعر روبه‌پایین و بعدازآن تقعر روبه‌بالا است، بنابراین نقطهٔ $x = ۱$ نقطهٔ عطف تابع است. باتوجه‌به توضیحات داده‌شده، نمودار تابع در نقطهٔ $x = ۱$ به‌صورت زیر خواهد بود:



کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

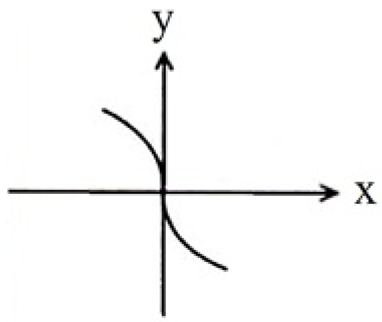
۳۳ **گزینه ۱**

برای تعیین وضعیت نمودار تابع در حوالی مبدأ مختصات، ضابطهٔ y' را نوشته و با تعیین علامت آن وضعیت صعودی یا نزولی بودن تابع را مشخص می‌کنیم.

$$y = x^{\frac{۸}{۵}} - ۴x^{\frac{۳}{۵}} \Rightarrow D = \mathbb{R}$$
$$y' = \frac{۸}{۵}x^{\frac{۳}{۵}} - \frac{۱۲}{۵}x^{-\frac{۲}{۵}} = \frac{۸}{۵}\sqrt[۵]{x^۳} - \frac{۱۲}{۵\sqrt[۵]{x^۲}} = \frac{۸x-۱۲}{۵\sqrt[۵]{x^۲}}$$

$x = ۰$ ریشهٔ مخرج تابع y' است؛ بنابراین تابع y در این نقطه دارای مماس قائم است (رد گزینه‌های ۲ و ۴).

مخرج تابع y' همواره مثبت و صورت این تابع در یک همسایگی اطراف مبدأ مختصات منفی است؛ بنابراین نمودار y در حوالی نقطهٔ $x = ۰$ نزولی بوده و شکل نمودار این تابع به‌صورت زیر خواهد بود:



کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۳۴ **گزینه ۴**

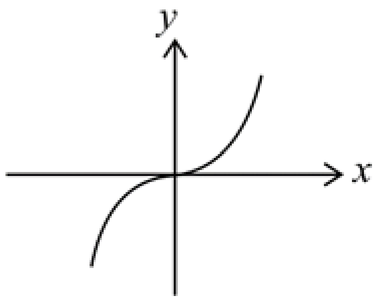
برای تعیین وضعیت یکنوایی تابع در حوالی مبدأ مختصات، ضابطهٔ y' را نوشته و آن را تعیین علامت می‌کنیم.

$$y = \frac{x^۳}{x^۲+۱} \Rightarrow D = \mathbb{R}$$

$$y' = \frac{۳x^۲(x^۲+۱)-(۲x)x^۳}{(x^۲+۱)^۲} = \frac{۳x^۴+۳x^۲-۲x^۴}{(x^۲+۱)^۲} = \frac{x^۴+۳x^۲}{(x^۲+۱)^۲}$$

به ازای $x = ۰$ داریم $y' = ۰$؛ بنابراین تابع در این نقطه دارای مماس افقی است. همچنین به ازای همهٔ مقادیر $x \neq ۰$، y' همواره مثبت است، پس نمودار تابع همیشه صعودی است.

باتوجه‌به توضیحات بالا، نمودار تابع در حوالی مبدأ مختصات به‌صورت زیر است:



کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

۳۵ **گزینه ۳**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

گام اول

الف) نقطهٔ $(۱, ۲)$ روی نمودار تابع قرار دارد، پس مختصات این نقطه در ضابطهٔ تابع صدق می‌کند، بنابراین: $y(۱) = ۲$

ب) جهت تقعر تابع در نقطهٔ $x = ۱$ عوض می‌شود، پس: $y''(۱) = ۰$

گام دوم

$$y = ax^{\frac{۳}{۲}} + bx^{\frac{۱}{۲}}$$

$$\xrightarrow{y(۱)=۲} ۲ = a(۱)^{\frac{۳}{۲}} + b(۱)^{\frac{۱}{۲}} \Rightarrow a + b = ۲ \quad (I)$$

$$y' = \frac{۳}{۲}ax^{\frac{۱}{۲}} + \frac{۱}{۲}bx^{-\frac{۱}{۲}}$$

$$y'' = \frac{۳}{۴}ax^{-\frac{۱}{۲}} - \frac{۱}{۴}bx^{-\frac{۳}{۲}}$$

$$\xrightarrow{y''(۱)=۰} ۰ = \frac{۳}{۴}a(۱)^{-\frac{۱}{۲}} - \frac{۱}{۴}b(۱)^{-\frac{۳}{۲}} \Rightarrow \frac{۳}{۴}a - \frac{۱}{۴}b = ۰ \Rightarrow ۳a - b = ۰ \Rightarrow b = ۳a \quad (II)$$

با جایگذاری رابطهٔ II در رابطهٔ I داریم:

$$a + b = ۲ \xrightarrow{b=۳a} a + ۳a = ۲ \Rightarrow ۴a = ۲ \Rightarrow a = \frac{۱}{۲}$$

$$b = ۳a \Rightarrow b = ۳(\frac{۱}{۲}) = \frac{۳}{۲}$$

۳۶ **گزینه ۴**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

گام اول

الف) نقطهٔ $x = c$ نقطهٔ عطف تابع f است هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد:

۱) f در c پیوسته باشد.

۲) نمودار f در c دارای مماس واحد باشد.

۳) جهت تقعر تابع f در c عوض شود.

ب) نیمساز ناحیهٔ چهارم، خط $y = -x$ است که به ازای $x \geq ۰$ به دست می‌آید.

گام دوم

ابتدا ضابطهٔ $f'(x)$ و $f''(x)$ را به دست می‌آوریم سپس با حل معادلهٔ $f''(x) = ۰$، نقطهٔ عطف تابع را تعیین می‌کنیم.

$$f(x) = \frac{۲}{۳}x^۳ - ۳x^۲ + ax \quad \Rightarrow \quad D_f = \mathbb{R}$$
$$f'(x) = ۲x^۲ - ۶x + a$$
$$f''(x) = ۴x - ۶$$
$$f''(x) = ۰ \Rightarrow ۴x - ۶ = ۰ \Rightarrow x = \frac{۶}{۴} = \frac{۳}{۲}$$
$$\xrightarrow{x=\frac{۳}{۲}} f(\frac{۳}{۲}) = \frac{۲}{۳}(\frac{۳}{۲})^۳ - ۳(\frac{۳}{۲})^۲ + a(\frac{۳}{۲}) = \frac{۹}{۴} - \frac{۲۷}{۴} + \frac{۳a}{۲} = \frac{۳a-۹}{۲}$$

باتوجه‌به اینکه نقطهٔ عطف تابع روی نیمساز ناحیهٔ چهارم (خط $y = -x$) قرار دارد، پس داریم:

$$f(\frac{۳}{۲}) = -\frac{۳}{۲}$$
$$\Rightarrow \frac{۳a-۹}{۲} = -\frac{۳}{۲} \Rightarrow ۳a - ۹ = -۳ \Rightarrow ۳a = ۶ \Rightarrow a = ۲$$

۳۷ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

گام اول

الف) شیب خط مماس بر منحنی تابع در یک نقطه، برابر مقدار مشتق تابع در آن نقطه است.

ب) نقطهٔ $x = c$ نقطهٔ عطف تابع f است هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد:

۱) f در c پیوسته باشد.

۲) نمودار f در c دارای مماس واحد باشد.

۳) جهت تقعر تابع f در c عوض شود.

گام دوم

با حل معادلهٔ $y'' = ۰$، طول نقطهٔ عطف تابع را به دست می‌آوریم:

$$y = x^۳ - ۳x^۲ + ۴ \quad \Rightarrow D = \mathbb{R}$$
$$y' = ۳x^۲ - ۶x \quad \Rightarrow y'' = ۶x - ۶$$
$$y'' = ۰ \quad \Rightarrow ۶x - ۶ = ۰ \Rightarrow ۶x = ۶ \Rightarrow x = ۱$$
$$\xrightarrow{x=۱} y = ۱ - ۳ + ۴ = ۲$$

بنابراین نقطهٔ عطف تابع دارای مختصات $(۱,۲)$ است. شیب خط مماس بر منحنی تابع در این نقطه برابر است با:

$$y'(۱) = ۳(۱)^۲ - ۶(۱) = ۳ - ۶ = -۳$$

اکنون با داشتن شیب خط مماس، معادلهٔ این خط را می‌نویسیم:

$$y - y(۱) = y'(۱)(x - ۱) \quad \Rightarrow \quad y - ۲ = (-۳)(x - ۱) \quad \Rightarrow \quad y = -۳x + ۵$$

برای یافتن محل تقاطع خط مماس با محور xها، کافی است در معادلهٔ این خط $y = ۰$ قرار داده شود:

$$y = -۳x + ۵ \xrightarrow{y=۰} -۳x + ۵ = ۰ \quad \Rightarrow \quad ۳x = ۵ \quad \Rightarrow \quad x = \frac{۵}{۳}$$

۳۸ **گزینه ۳**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۹

گام اول

الف) جهت تقعر منحنی تابع در نقطهٔ عطف تابع عوض می‌شود.

ب) شیب خط مماس بر منحنی تابع در یک نقطه برابر مقدار مشتق تابع در آن نقطه است.

گام دوم

نقطهٔ مشخص‌شده روی نمودار، نقطهٔ عطف تابع است زیرا جهت تقعر منحنی در این نقطه عوض شده است، پس در این نقطه $y''=0$ است.

ازطرفی خط مماس بر منحنی در این نقطه افقی است، پس در این نقطه $y'=0$ است.

$$y=x^۳+ax^۲+bx \Rightarrow D=\mathbb{R}$$
$$y'=۳x^۲+۲ax+b \Rightarrow y''=۶x+۲a$$
$$y''=۰ \Rightarrow ۶x+۲a=۰ \Rightarrow ۶x=-۲a \Rightarrow x=-\frac{a}{۳}$$

طول نقطهٔ عطف تابع $x=-\frac{a}{۳}$ است، پس داریم: $y'(-\frac{a}{۳})=۰$

$$\Rightarrow y'(-\frac{a}{۳})=۳(-\frac{a}{۳})^۲+۲a(-\frac{a}{۳})+b=۰$$
$$\Rightarrow \frac{۳a^۲}{۹}-\frac{۲a^۲}{۳}+b=۰ \Rightarrow b-\frac{a^۲}{۳}=۰ \Rightarrow b=\frac{a^۲}{۳} \Rightarrow a^۲=۳b$$

باتوجه‌به گزینه‌ها، تنها دوتایی $(-۶,۱۲)$ در رابطهٔ $a^۲=۳b$ صدق می‌کند.

۳۹ **گزینه ۲**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

گام اول

الف) جهت تقعر منحنی تابع در نقطهٔ عطف تابع عوض می‌شود.

ب) شیب خط مماس بر منحنی تابع در یک نقطه برابر با مقدار مشتق تابع در آن نقطه است.

گام دوم

جهت تقعر منحنی تابع در مبدأ مختصات عوض شده است؛ بنابراین مبدأ مختصات نقطهٔ عطف تابع است و داریم: $f''(۰)=۰$

$$f(x)=-x^۳+ax^۲+bx \Rightarrow D_f=\mathbb{R}$$
$$f'(x)=-۳x^۲+۲ax+b \Rightarrow f''(x)=-۶x+۲a$$
$$f''(۰)=۰ \Rightarrow -۶(۰)+۲a=۰ \Rightarrow ۲a=۰ \Rightarrow a=۰ \qquad (I)$$

ازطرفی شیب خط مماس بر منحنی تابع در مبدأ مختصات منفی است یعنی $f'(۰)<۰$ است پس:

$$f'(۰)=-۳(۰)^۲+۲a(۰)+b<۰ \Rightarrow b<۰ \qquad (II)$$

از میان گزینه‌ها، تنها دوتایی $(۰,-۱)$ در دو شرط I و II صدق می‌کند.

۴۰ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

گام اول

الف) جهت تقعر منحنی تابع در نقطه‌ای به طول $x = ۰$ عوض می‌شود، بنابراین طول نقطهٔ عطف تابع برابر صفر است.

ب) تابع دارای یک مینیمم نسبی و یک ماکسیمم نسبی است پس معادلهٔ $y' = ۰$ دو ریشهٔ ساده دارد.

گام دوم

$$y = -x^۳ + ax^۲ + bx + ۲ \Rightarrow D = \mathbb{R}$$
$$y' = -۳x^۲ + ۲ax + b \Rightarrow y'' = -۶x + ۲a$$

باتوجه‌به قسمت "الف" از گام اول، $y''(۰) = ۰$ است پس:

$$-۶(۰) + ۲a = ۰ \Rightarrow ۲a = ۰ \Rightarrow a = ۰$$

پس $y = -x^۳ + bx + ۲$ است. با حل معادلهٔ $y' = ۰$ داریم:

$$-۳x^۲ + b = ۰ \Rightarrow ۳x^۲ = b \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{b}{۳}}$$

می‌دانیم عبارت زیر رادیکال با فرجهٔ زوج، نامنفی است؛ ازطرفی معادلهٔ $y' = ۰$ دو ریشه دارد پس $b > ۰$ است. باتوجه‌به نمودار، مینیمم نسبی تابع بر قسمت منفی محور xها مماس شده است، پس:

$$y(-\sqrt{\frac{b}{۳}}) = ۰$$
$$\Rightarrow -(-\sqrt{\frac{b}{۳}})^۳ + b(-\sqrt{\frac{b}{۳}}) + ۲ = ۰ \Rightarrow \frac{b}{۳}\sqrt{\frac{b}{۳}} - b\sqrt{\frac{b}{۳}} + ۲ = ۰$$
$$\Rightarrow -\frac{۲b}{۳}\sqrt{\frac{b}{۳}} + ۲ = ۰ \Rightarrow \frac{۲b}{۳}\sqrt{\frac{b}{۳}} = ۲$$
$$\Rightarrow (\sqrt{\frac{b}{۳}})^۳ = ۱ \Rightarrow \frac{b}{۳} = ۱ \Rightarrow b = ۳$$

بنابراین داریم: $(a,b) = (۰,۳)$

۴۱ گزینه ۳

نقطهٔ $(۴, ۰)$ روی منحنی تابع قرار دارد پس مختصات این نقطه در معادلهٔ تابع صدق می‌کند.

$$y = ax^{۳} + bx^{۲} - ۱۶ \Rightarrow ۰ = a(۴)^{۳} + b(۴)^{۲} - ۱۶ \Rightarrow ۰ = ۶۴a + ۱۶b - ۱۶$$

$$\Rightarrow ۴a + b - ۱ = ۰ \Rightarrow ۴a + b = ۱ \qquad (I)$$

تابع در نقاطی به طول $x = ۰$ و $x = ۴$ مماس افقی دارد، پس داریم:

$$y'(۴) = ۰ \,,\, y'(۰) = ۰$$

$$y' = ۳ax^{۲} + ۲bx$$

$$y'(۰) = ۳a(۰)^{۲} + ۲b(۰) = ۰ \Rightarrow ۰ = ۰ \quad \checkmark$$

$$y'(۴) = ۳a(۴)^{۲} + ۲b(۴) = ۰ \Rightarrow ۴۸a + ۸b = ۰ \Rightarrow ۶a + b = ۰$$

$$\Rightarrow b = -۶a \qquad (II)$$

با جایگذاری رابطهٔ II در رابطهٔ I مقدار a را به دست می‌آوریم:

$$۴a + b = ۱ \xrightarrow{b=-۶a} ۴a - ۶a = ۱ \Rightarrow -۲a = ۱ \Rightarrow a = -\frac{۱}{۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

۴۲ گزینه ۱

باتوجه‌به نمودار، تقعر منحنی تابع در یک نقطه در ناحیهٔ چهارم عوض می‌شود؛ بنابراین طول نقطهٔ عطف تابع مقداری مثبت است. چون تابع y یک چندجمله‌ای است پس نقطهٔ عطف، ریشهٔ معادلهٔ $y'' = ۰$ است.

$$y = \frac{۲}{۳}x^{۳} + ax^{۲} + bx$$

$$y' = ۲x^{۲} + ۲ax + b$$

$$y'' = ۴x + ۲a \xrightarrow{y''=۰} ۴x + ۲a = ۰ \Rightarrow ۴x = -۲a \Rightarrow x = -\frac{a}{۲} > ۰ \Rightarrow a < ۰$$

باتوجه‌به گزینه‌ها $a = -۱$ قابل‌قبول است.

ازطرفی باتوجه‌به نمودار، تابع دارای دو نقطهٔ اکسترمم نسبی با مماس افقی است، پس معادلهٔ $y' = ۰$ دو ریشهٔ ساده دارد. چون ضابطهٔ y' یک چندجمله‌ای درجه‌دو است پس باید در معادلهٔ $y' = ۰$، $\Delta > ۰$ باشد.

$$y = \frac{۲}{۳}x^{۳} - x^{۲} + bx$$

$$y' = ۲x^{۲} - ۲x + b$$

$$y' = ۰ \Rightarrow ۲x^{۲} - ۲x + b = ۰ \xrightarrow{\Delta>۰} (-۲)^{۲} - ۴(۲)(b) > ۰ \Rightarrow ۴ - ۸b > ۰$$

$$\Rightarrow ۸b < ۴ \Rightarrow b < \frac{۱}{۲}$$

باتوجه‌به گزینه‌ها $b = -۴$ قابل‌قبول است، پس داریم: $(a, b) = (-۱, -۴)$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

۴۳ **گزینه ۲**

تابع در نقطه‌ای به طول $x = ۳$ ماکسیمم نسبی دارد و همچنین خط مماس بر منحنی تابع در این نقطه، افقی است؛ پس $y'(۳) = ۰$ می‌شود.

$$y = ax^۴ + ۲x^۳ + bx^۲ \quad \Rightarrow \quad D = \mathbb{R}$$
$$y' = ۴ax^۳ + ۶x^۲ + ۲bx$$
$$y'(۳) = ۰ \quad \Rightarrow \quad ۴a(۳)^۳ + ۶(۳)^۲ + ۲b(۳) = ۰ \quad \Rightarrow \quad ۱۰۸a + ۵۴ + ۶b = ۰$$
$$\Rightarrow \quad ۱۸a + ۹ + b = ۰ \qquad (I)$$

ازطرفی جهت تقعر منحنی تابع در نقطهٔ $x = ۰$ عوض می‌شود و چون تابع یک چندجمله‌ای است پس نقطهٔ عطف تابع ریشهٔ معادلهٔ $y'' = ۰$ خواهد بود؛ بنابراین $y''(۰) = ۰$ است.

$$y'' = ۱۲ax^۲ + ۱۲x + ۲b$$
$$y''(۰) = ۰ \quad \Rightarrow \quad ۰ + ۰ + ۲b = ۰ \quad \Rightarrow \quad b = ۰$$

طبق رابطهٔ I داریم:

$$۱۸a + ۹ + b = ۰ \xrightarrow{b=۰} ۱۸a + ۹ = ۰ \quad \Rightarrow \quad ۱۸a = -۹ \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{۱}{۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

۴۴ **گزینه ۱**

تابع در نقطه‌ای به طول $x = ۳$ مینیمم نسبی دارد و خط مماس بر منحنی تابع در این نقطه افقی است، پس داریم: $f'(۳) = ۰$

$$f(x) = \frac{۱}{۴}x^۴ + ax^۳ + bx^۲ + ۲$$
$$f'(x) = x^۳ + ۳ax^۲ + ۲bx$$
$$f'(۳) = ۰ \quad \Rightarrow \quad (۳)^۳ + ۳a(۳)^۲ + ۲b(۳) = ۰ \quad \Rightarrow \quad ۲۷ + ۲۷a + ۶b = ۰$$
$$\Rightarrow \quad ۹ + ۹a + ۲b = ۰ \qquad (I)$$

همچنین یکی از نقاط عطف تابع، نقطه‌ای به طول $x = ۰$ است و چون تابع یک چندجمله‌ای است، پس $x = ۰$ ریشهٔ معادلهٔ $f''(x) = ۰$ خواهد بود، پس $f''(۰) = ۰$ است.

$$f''(x) = ۳x^۲ + ۶ax + ۲b$$
$$f''(۰) = ۰ \quad \Rightarrow \quad ۰ + ۲b = ۰ \quad \Rightarrow \quad ۲b = ۰ \quad \Rightarrow \quad b = ۰$$

با جایگذاری $b = ۰$ در معادلهٔ I داریم:

$$۹ + ۹a + ۲b = ۰ \xrightarrow{b=۰} ۹ + ۹a = ۰ \quad \Rightarrow \quad ۹a = -۹ \quad \Rightarrow \quad a = -۱$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۴۵ **گزینه ۴**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

گام اول

الف) یک تابع گویا زمانی مجانب افقی دارد که درجهٔ صورت کوچک‌تر یا مساوی درجهٔ مخرج باشد.

ب) در توابع کسری، ریشه‌های مخرج کاندید مجانب قائم هستند، به‌شرط آنکه تابع حداقل در یک بازهٔ یک‌طرفهٔ آن نقطه تعریف شده و در آن نقطه دارای حد نامتناهی باشد.

گام دوم

$$y = \frac{۲x^۲-۲x}{x^۲+x-۲} \Rightarrow D = \mathbb{R} - \{۱,-۲\}$$

معادلهٔ مجانب‌های قائم و افقی تابع را نوشته و نقطهٔ تقاطع آن‌ها را به دست می‌آوریم. درجهٔ صورت و مخرج باهم مساوی‌اند پس تابع دارای مجانب افقی است. داریم:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{۲x^۲-۲x}{x^۲+x-۲} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{۲x^۲}{x^۲} = ۲ \Rightarrow y = ۲ \quad \text{مجانب افقی}$$

اکنون باتوجه‌به قسمت "ب" از گام اول، ریشه‌های مخرج کسر را به دست می‌آوریم:

$$x^۲ + x - ۲ = ۰ \Rightarrow (x+۲)(x-۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x+۲ = ۰ \Rightarrow x = -۲ \\ x-۱ = ۰ \Rightarrow x = ۱ \end{cases}$$

$x = -۲$ و $x = ۱$ کاندید مجانب قائم تابع هستند اما باید شرط نامتناهی بودن حد تابع نیز در آن‌ها برقرار باشد.

$$\lim_{x\to۱} \frac{۲x^۲-۲x}{x^۲+x-۲} = \frac{۰}{۰} \Rightarrow \lim_{x\to۱} \frac{۲x^۲-۲x}{x^۲+x-۲} = \lim_{x\to۱} \frac{۲x(x-۱)}{(x-۱)(x+۲)}$$
$$= \lim_{x\to۱} \frac{۲x}{x+۲} = \frac{۲}{۳}$$
$$\lim_{x\to-۲} \frac{۲x^۲-۲x}{x^۲+x-۲} = \frac{۲(-۲)^۲-۲(-۲)}{(-۲)^۲+(-۲)-۲} = \frac{۸+۴}{۴-۴} = +\infty$$

بنابراین تابع فقط دارای یک مجانب قائم به معادلهٔ $x = -۲$ است.

(توجه کنید که می‌توانستیم ابتدا تابع را ساده کنیم سپس ریشه‌های مخرج را به دست آوریم)

محل تلاقی دو مجانب $x = -۲$ و $y = ۲$ نقطهٔ $(-۲,۲)$ است. با جایگذاری مختصات این نقطه در معادلهٔ خط داده‌شده، مقدار a را محاسبه می‌کنیم.

$$y = x + a \xrightarrow{(-۲,۲)} ۲ = -۲ + a \Rightarrow a = ۴$$

۴۶ **گزینهٔ ۴**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

گام اول

الف) یک تابع گویا که درجهٔ صورت کوچک‌تر یا مساوی درجهٔ مخرج باشد، مجانب افقی دارد.

ب) در توابع کسری ریشه‌های مخرج کاندید مجانب قائم هستند، به‌شرط آنکه تابع حداقل در یک بازهٔ یک‌طرفهٔ آن نقطه تعریف شده و در آن نقطه دارای حد نامتناهی باشد.

گام دوم

ابتدا ضابطهٔ تابع fog را به دست می‌آوریم.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\dfrac{x+۳}{۲x+۱} \\ g(x)=\dfrac{۲x-۱}{x+۲} \end{array}\right\} \Rightarrow fog(x)=f(g(x))=\frac{g(x)+۳}{۲g(x)+۱}$$

$$=\frac{\frac{۲x-۱}{x+۲}+۳}{۲\frac{۲x-۱}{x+۲}+۱}=\frac{\frac{۲x-۱+۳x+۶}{x+۲}}{\frac{۴x-۲+x+۲}{x+۲}}=\frac{۵x+۵}{۵x}$$

باتوجه‌به قسمت "الف" از گام اول، تابع دارای یک مجانب افقی است:

$$\lim_{x\to\pm\infty} fog(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۵x+۵}{۵x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۵x}{۵x}=۱ \Rightarrow y=۱ \quad \text{مجانب افقی}$$

همچنین خط $x=۰$ مجانب قائم تابع است زیرا:

$$\lim_{x\to ۰} fog(x)=\lim_{x\to ۰}\frac{۵x+۵}{۵x}=\frac{۵}{۰}=+\infty$$

نقطهٔ $(۰,۱)$ محل تلاقی این دو مجانب است.

۴۷ **گزینه ۲**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵

گام اول

الف) یک تابع گویا که درجهٔ صورت کوچک‌تر یا مساوی درجهٔ مخرج باشد، مجانب افقی دارد.

ب) در توابع کسری، ریشه‌های مخرج کاندید مجانب قائم هستند، به‌شرط آنکه تابع حداقل در یک بازهٔ یک‌طرفهٔ آن نقطه تعریف شده و دارای حد نامتناهی باشد.

ج) فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_1,y_1)$ از نقطهٔ $B(x_2,y_2)$ برابر است با:

$$BA=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

گام دوم

$$y=\frac{x-\sqrt{x}}{x^2-3x+2} \Rightarrow D=[0,1)\bigcup(1,2)\bigcup(2,+\infty)$$

درجهٔ مخرج بزرگ‌تر از درجهٔ صورت است، پس تابع مجانب افقی دارد. داریم:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-\sqrt{x}}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0 \Rightarrow y=0 \quad \text{مجانب افقی}$$

برای به دست آوردن ریشه‌های مخرج کسر، آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$$x^2-3x+2=0 \Rightarrow (x-2)(x-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x-2=0 \Rightarrow x=2 \\ x-1=0 \Rightarrow x=1 \end{cases}$$

$x=1$ و $x=2$ کاندید مجانب قائم تابع هستند اما باید شرط نامتناهی بودن حد تابع در این نقاط نیز بررسی شود.

$$\lim_{x\to1}\frac{x-\sqrt{x}}{x^2-3x+2}=\frac{1-1}{1-3+2}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to1}\frac{x-\sqrt{x}}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to1}\frac{1-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2x-3}$$

$$=\frac{1-\frac{1}{2}}{2-3}=-\frac{1}{2}\neq\infty$$

$$\lim_{x\to2}\frac{x-\sqrt{x}}{x^2-3x+2}=\frac{2-\sqrt{2}}{4-6+2}=\frac{2-\sqrt{2}}{0}=+\infty$$

بنابراین فقط خط $x=2$ مجانب قائم تابع است.

محل تلاقی مجانب قائم و افقی، نقطهٔ $A(2,0)$ است، فاصلهٔ این نقطه از مبدأ مختصات $(O(0,0))$ برابر است با:

$$OA=\sqrt{(2-0)^2+(0-0)^2}=\sqrt{4}=2$$

۴۸ گزینه ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

گام اول

در توابع کسری به شکل $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ که f و g دو چندجمله‌ای باشند و درجهٔ f دقیقاً یک واحد بیشتر از درجهٔ g باشد، خارج‌قسمت تقسیم صورت بر مخرج این تابع، مجانب مایل آن است.

گام دوم

چون درجهٔ صورت دقیقاً یک واحد بیشتر از درجهٔ مخرج تابع است، پس با تقسیم صورت بر مخرج، مجانب مایل را تعیین می‌کنیم:

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 + ax^2 + 5 & x^2 + x \\ \cline{2-2} -(2x^3 + 2x^2) & 2x + (a-2) \\ \cline{1-1} (a-2)x^2 + 5 & \\ -((a-2)x^2 + (a-2)x) & \\ \cline{1-1} -(a-2)x + 5 & \end{array}$$

بنابراین خط $y = 2x + (a-2)$ مجانب مایل تابع است. مختصات نقطهٔ $(-2, 0)$ در معادلهٔ مجانب مایل صدق می‌کند؛ پس داریم:

$$y = 2x + (a-2) \xrightarrow{(-2,0)} 0 = 2(-2) + (a-2) \Rightarrow 0 = -4 + a - 2$$
$$\Rightarrow a = 6$$

۴۹ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۱

گام اول

الف) در توابع کسری به شکل $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ که f و g دو چندجمله‌ای هستند اگر درجهٔ f دقیقاً یک واحد بیشتر از درجهٔ g باشد، مجانب مایل برابر با خارج‌قسمت تقسیم صورت بر مخرج این تابع خواهد بود.

ب) در توابع کسری، ریشه‌های مخرج کاندید مجانب قائم هستند به‌شرط آنکه تابع حداقل در یک بازهٔ یک‌طرفهٔ آن نقطه تعریف شده و دارای حد نامتناهی در آن نقطه باشد.

گام دوم

باتوجه‌به اینکه صورت کسر یک چندجمله‌ای از درجهٔ سه و مخرج کسر یک چندجمله‌ای از درجهٔ دو است پس تابع مجانب مایل دارد.

$$\begin{array}{l|l} 2x^3 - 3x^2 & x^2 - 1 \\ \cline{2-2} -(2x^3 - 2x) & 2x - 3 \\ \hline -3x^2 + 2x & \\ -(-3x^2 + 3) & \\ \hline 2x - 3 & \end{array}$$

خط $y = 2x - 3$ مجانب مایل تابع است.

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$x = 1$ و $x = -1$ کاندید مجانب قائم هستند. اکنون شرط نامتناهی بودن حد تابع در این نقاط را بررسی می‌کنیم.

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x^3 - 3x^2}{x^2 - 1} = \frac{2-3}{0} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{2x^3 - 3x^2}{x^2 - 1} = \frac{-2-3}{0} = -\infty$$

بنابراین تابع دارای دو مجانب قائم به معادلهٔ $x = 1$ و $x = -1$ است. محل تقاطع این دو خط با مجانب مایل را به ترتیب A و B می‌نامیم.

$$y = 2x - 3 \xrightarrow{x=1} y = 2 - 3 = -1 \Rightarrow A(1, -1)$$

$$y = 2x - 3 \xrightarrow{x=-1} y = -2 - 3 = -5 \Rightarrow B(-1, -5)$$

فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B برابر است با:

$$AB = \sqrt{(-1-1)^2 + (-5+1)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

۵۰ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

گام اول

الف) در توابع کسـری، ریشه‌های مخرج کاندید مجانب قائم هستند به‌شرط آنکه حداقل در یک بازهٔ یک‌طرفهٔ این نقاط تعریف شده و همچنین در این نقاط دارای حد نامتناهی باشند.

ب) در توابع کسری به‌شکل $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ که f و g دو چندجمله‌ای هستند، اگر درجهٔ f دقیقاً یک واحد بیشتر از درجهٔ g باشد آنگاه خارج‌قسمت تقسیم صورت بر مخرج تابع، مجانب مایل آن خواهد بود.

گام دوم

$$y=\frac{x^{۳}+ax-۲}{x^{۲}-x} \Rightarrow D=\mathbb{R}-\{۰,۱\}$$

$$x^{۲}-x=۰ \Rightarrow x(x-۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x=۱ \end{cases}$$

طبق گام اول، دو خط $x=۰$ و $x=۱$ کاندید مجانب قائم تابع هستند اما بر اساس صورت سؤال، تنها مجانب قائم تابع محور yها به معادلهٔ $x=۰$ است؛ بنابراین $x=۱$ حتماً ریشهٔ صورت کسر نیز است، پس داریم:

$$x^{۳}+ax-۲=۰ \xrightarrow{x=۱} ۱+a-۲=۰ \Rightarrow a=۱$$

$$\Rightarrow y=\frac{x^{۳}+x-۲}{x^{۲}-x}$$

اکنون با تقسیم صورت بر مخرج کسر، مجانب مایل تابع را به دست می‌آوریم:

$$\begin{array}{l|l} x^{۳}+x-۲ & x^{۲}-x \\ \hline -(x^{۳}-x^{۲}) & x+۱ \\ \hline x^{۲}+x-۲ & \\ -(x^{۲}-x) & \\ \hline ۲x-۲ & \end{array}$$

بنابراین خط $y=x+۱$ مجانب مایل تابع است.

۵۱ **گزینه ۴**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۴

گام اول

الف) در توابع کسـری، ریشه‌های مخرج کاندید مجانب قائم هستند، به‌شرط آنکه حداقل در یک بازهٔ یک‌طرفه این نقاط تعریف شده و همچنین در این نقاط دارای حد نامتناهی باشد.

ب) در توابع کسری به شکل $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ که f و g دو چندجمله‌ای هستند، اگر درجهٔ f دقیقاً یک واحد بیشتر از درجهٔ g باشد، آنگاه خارج‌قسمت تقسیم صورت بر مخرج تابع، مجانب مایل آن خواهد بود.

گام دوم

$$y=\frac{x^۳}{x^۲-۴x+۴}=\frac{x^۳}{(x-۲)^۲} \Rightarrow D=\mathbb{R}-\{۲\}$$

$$\lim_{x\to ۲}\frac{x^۳}{x^۲-۴x+۴}=\frac{۲^۳}{۰}=+\infty$$

بنابراین خط $x=۲$ مجانب قائم تابع است. اکنون با تقسیم صورت بر مخرج کسر، معادلهٔ مجانب مایل تابع را به دست می‌آوریم:

$$\begin{array}{l|l} x^۳ & x^۲-۴x+۴ \\ \cline{2-2} & x+۴ \\ \underline{-(x^۳-۴x^۲+۴x)} & \\ ۴x^۲-۴x & \\ \underline{-(۴x^۲-۱۶x+۱۶)} & \\ ۱۲x-۱۶ & \end{array}$$

مجانب مایل تابع خطی به معادلهٔ $y=x+۴$ است. نقطهٔ تقاطع مجانب مایل و قائم تابع عبارت است از:

$$y=x+۴ \xrightarrow{x=۲} y=۲+۴=۶ \Rightarrow A(۲,۶)$$

۵۲ **گزینه ۴**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۲

گام اول

الف) در توابع کسری، ریشه‌های مخرج کاندید مجانب قائم هستند، به‌شرط آنکه تابع حداقل در یک بازهٔ یک‌طرفهٔ آن‌ها تعریف شده و همچنین در این نقاط دارای حد نامتناهی باشد.

ب) در توابع کسری به‌شکل $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ که f و g دو چندجمله‌ای هستند، اگر درجهٔ f دقیقاً یک واحد بیشتر از درجهٔ g باشد آنگاه خارج‌قسمت تقسیم صورت بر مخرج تابع، مجانب مایل آن خواهد بود.

گام دوم

$$y = \frac{x^۳ + x^۲}{(x - ۱)^۲} \quad \Rightarrow \quad D = \mathbb{R} - \{۱\}$$

$$\lim_{x \to ۱} \frac{x^۳ + x^۲}{(x - ۱)^۲} = \frac{۱ + ۱}{(۱ - ۱)^۲} = \frac{۲}{۰} = +\infty$$

بنابراین خط $x = ۱$ مجانب قائم تابع است. اکنون با تقسیم صورت بر مخرج کسر، معادلهٔ مجانب مایل تابع را به دست می‌آوریم:

$$(x - ۱)^۲ = x^۲ - ۲x + ۱$$

$$\begin{array}{l|l} x^۳ + x^۲ & x^۲ - ۲x + ۱ \\ \cline{2-2} -(x^۳ - ۲x^۲ + x) & x + ۳ \\ \cline{1-1} ۳x^۲ - x & \\ -(۳x^۲ - ۶x + ۳) & \\ \cline{1-1} ۵x - ۳ & \end{array}$$

مجانب مایل تابع خطی به معادلهٔ $y = x + ۳$ است. نقطهٔ تقاطع این دو مجانب عبارت است از:

$$y = x + ۳ \xrightarrow{x=۱} y = ۱ + ۳ = ۴ \quad \Rightarrow \quad A(۱, ۴)$$

۵۳ **گزینه ۲**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

گام اول

الف) در توابع کسری، ریشه‌های مخرج کاندید مجانب قائم هستند، به‌شرط آنکه تابع حداقل در یک بازهٔ یک‌طرفهٔ آن‌ها تعریف شده و همچنین در این نقاط دارای حد نامتناهی باشد.

ب) در توابع کسری به شکل $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ که f و g دو چندجمله‌ای هستند، اگر درجهٔ f دقیقاً یک واحد بیشتر از درجهٔ g باشد آنگاه خارج‌قسمت تقسیم صورت بر مخرج تابع، مجانب مایل آن خواهد بود.

ج) دو نقطهٔ $A(x_۱,y_۱)$ و $B(x_۲,y_۲)$ را در نظر بگیرید. نقطهٔ $M(\frac{x_۱+x_۲}{۲},\frac{y_۱+y_۲}{۲})$ وسط خط AB است.

گام دوم

$$y = \frac{x^۳}{x^۲ - x - ۶} \quad \Rightarrow \quad D = \mathbb{R} - \{-۲, ۳\}$$

$$x^۲ - x - ۶ = ۰ \Rightarrow (x-۳)(x+۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x - ۳ = ۰ \Rightarrow x = ۳ \\ x + ۲ = ۰ \Rightarrow x = -۲ \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -۲} \frac{x^۳}{x^۲ - x - ۶} = \frac{(-۲)^۳}{(-۲)^۲ - (-۲) - ۶} = \frac{-۸}{۴ + ۲ - ۶} = \frac{-۸}{۰} = -\infty$$

$$\lim_{x \to ۳} \frac{x^۳}{x^۲ - x - ۶} = \frac{۳^۳}{۳^۲ - ۳ - ۶} = \frac{۲۷}{۹ - ۳ - ۶} = \frac{۲۷}{۰} = +\infty$$

بنابراین دو خط $x = -۲$ و $x = ۳$ مجانب‌های قائم تابع هستند.

با تقسیم صورت بر مخرج، مجانب مایل تابع را به دست می‌آوریم:

$$\begin{array}{l|l} x^۳ & x^۲ - x - ۶ \\ \cline{2-2} \underline{-(x^۳ - x^۲ - ۶x)} & x + ۱ \\ x^۲ + ۶x & \\ \underline{-(x^۲ - x - ۶)} & \\ ۷x + ۶ & \end{array}$$

خط $y = x + ۱$ مجانب مایل تابع است. نقطهٔ برخورد این خط با هریک از دو خط $x = -۲$ و $x = ۳$ را به ترتیب A و B می‌نامیم.

$$y = x + ۱ \xrightarrow{x=-۲} y = -۲ + ۱ = -۱ \quad \Rightarrow \quad A(-۲, -۱)$$

$$y = x + ۱ \xrightarrow{x=۳} y = ۳ + ۱ = ۴ \quad \Rightarrow \quad B(۳, ۴)$$

باتوجه‌به قسمت "ج" از گام اول، نقطهٔ وسط AB را تعیین می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} x_M = \frac{-۲+۳}{۲} = \frac{۱}{۲} \\ y_M = \frac{-۱+۴}{۲} = \frac{۳}{۲} \end{array}\right. \Rightarrow M(\tfrac{۱}{۲}, \tfrac{۳}{۲})$$

۵۴ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۰

گام اول

طبق هم‌ارزی‌های رادیکالی، داریم:

$$\sqrt{ax^{۲}+bx+c}\underset{x\to\pm\infty}{\sim}\sqrt{a}\left|x+\frac{b}{۲a}\right| \;;\; a>۰$$

گام دوم

تابع دارای دو مجانب مایل است، با استفاده از گام اول، معادلهٔ دو مجانب را تعیین می‌کنیم:

$$y=\sqrt{۴x^{۲}-۲x+۳}$$
$$x\to+\infty:\sqrt{۴x^{۲}-۲x+۳}\sim\sqrt{۴}\left|x-\frac{۲}{۸}\right|=۲\left|x-\frac{۱}{۴}\right|$$
$$\xrightarrow{x-\frac{۱}{۴}>۰} y=۲(x-\frac{۱}{۴})=۲x-\frac{۱}{۲}$$
$$x\to-\infty:\sqrt{۴x^{۲}-۲x+۳}\sim\sqrt{۴}\left|x-\frac{۲}{۸}\right|=۲\left|x-\frac{۱}{۴}\right|$$
$$\xrightarrow{x-\frac{۱}{۴}<۰} y=-۲(x-\frac{۱}{۴})=-۲x+\frac{۱}{۲}$$

دو خط به معادلهٔ $y=۲x-\frac{۱}{۲}$ و $y=-۲x+\frac{۱}{۲}$ مجانب‌های مایل تابع هسـتند. با مساوی قرار دادن این دو معادله، نقطهٔ برخورد آن‌ها را به دست می‌آوریم:

$$۲x-\frac{۱}{۲}=-۲x+\frac{۱}{۲}\;\Rightarrow\;۴x=۱\;\Rightarrow\;x=\frac{۱}{۴}$$
$$y=۲x-\frac{۱}{۲}\xrightarrow{x=\frac{۱}{۴}}y=۲(\frac{۱}{۴})-\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}=۰$$

فاصلهٔ نقطهٔ $(\frac{۱}{۴},۰)$ از مبدأ مختصات برابر است با:

$$\sqrt{(\frac{۱}{۴}-۰)^{۲}+(۰-۰)^{۲}}=\sqrt{(\frac{۱}{۴})^{۲}}=\frac{۱}{۴}$$

۵۵ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

گام اول

می‌دانیم:

$$\sqrt{ax^{۲}+bx+c} \underset{x\to\pm\infty}{\sim} \sqrt{a}\left|x+\frac{b}{۲a}\right| \quad , \quad a>۰$$

گام دوم

تابع دارای دو مجانب مایل است، با استفاده از هم‌ارزی رادیکالی در گام اول، معادلهٔ دو مجانب را تعیین می‌کنیم:

$$y=۲x-\sqrt{x^{۲}-۲x}$$

$$x\to+\infty:\ \sqrt{x^{۲}-۲x}\sim\sqrt{۱}\left|x-\frac{۲}{۲}\right|=|x-۱|=x-۱$$

$$\Rightarrow \text{مجانب مایل}:\ y=۲x-(x-۱)=۲x-x+۱=x+۱$$

$$x\to-\infty:\ \sqrt{x^{۲}-۲x}\sim\sqrt{۱}\left|x-\frac{۲}{۲}\right|=|x-۱|=-(x-۱)$$

$$\Rightarrow \text{مجانب مایل}:\ y=۲x+(x-۱)=۲x+x-۱=۳x-۱$$

با مساوی قرار دادن معادلهٔ دو مجانب، نقطهٔ برخورد آن‌ها را به دست می‌آوریم:

$$x+۱=۳x-۱ \Rightarrow ۳x-x=۱+۱ \Rightarrow ۲x=۲ \Rightarrow x=۱$$

$$y=x+۱\xrightarrow{x=۱}y=۱+۱=۲$$

محل برخورد مجانب‌های نمودار تابع، نقطهٔ $(۱,۲)$ است.

۵۶ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

گام اول

الف) می‌دانیم:

$$\sqrt{ax^{۲}+bx+c} \underset{x\to\pm\infty}{\sim} \sqrt{a}\left|x+\frac{b}{۲a}\right|$$

ب) فاصلهٔ نقطهٔ $A(\alpha,\beta)$ از خطی به معادلهٔ $ax+by+c=۰$ برابر است با:

$$d=\frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}}$$

گام دوم

$$y=x-\sqrt{x^{۲}-۲x} \quad ; \quad D=(-\infty,۰]$$

باتوجه‌به دامنهٔ ذکرشده برای تابع، معادلهٔ مجانب مایل تابع را وقتی $x\to-\infty$ تعیین می‌کنیم:

$$x\to-\infty:\ \sqrt{x^{۲}-۲x}\sim\sqrt{۱}\left|x-\frac{۲}{۲}\right|=|x-۱|=-(x-۱)=-x+۱$$

$$\Rightarrow \text{مجانب مایل}:\ y=x-(-x+۱)=x+x-۱=۲x-۱$$

معادلهٔ مجانب را به فرم استاندارد نوشته و باتوجه‌به گام اول، فاصلهٔ نقطهٔ $A(-۲,۰)$ از آن را محاسبه می‌کنیم:

$$y=۲x-۱ \Rightarrow ۲x-y-۱=۰$$

$$\Rightarrow d=\frac{|۲(-۲)-۰-۱|}{\sqrt{۲^{۲}+(-۱)^{۲}}}=\frac{|-۴-۱|}{\sqrt{۴+۱}}=\frac{۵}{\sqrt{۵}}=\sqrt{۵}$$

۵۷ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

گام اول

می‌دانیم:

$$\sqrt{ax^{۲}+bx+c}\underset{x\to\pm\infty}{\sim}\sqrt{a}\left|x+\frac{b}{۲a}\right| \quad , \quad a>۰$$

گام دوم

با استفاده از هم‌ارزی رادیکالی در گام اول داریم:

$$\sqrt{(a-۱)x^{۲}+ax+۲-a}\underset{x\to\pm\infty}{\sim}\sqrt{a-۱}\left|x+\frac{a}{۲(a-۱)}\right|$$

چون عبارت زیر رادیکال با فرجهٔ زوج باید مثبت باشد پس:

$$a-۱>۰ \Rightarrow a>۱$$

۵۸ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

گام اول

الف) در توابع کسری، ریشه‌های مخرج کاندید مجانب قائم هستند، به‌شرط آنکه تابع حداقل در یک بازهٔ یک‌طرفهٔ آن‌ها تعریف شده و همچنین در این نقاط دارای حد نامتناهی باشد.

ب) یک تابع گویا که درجهٔ صورت کوچک‌تر یا مساوی درجهٔ مخرج باشد، مجانب افقی دارد.

گام دوم

چون $a\neq ۰$ است؛ پس منحنی حتماً یک مجانب افقی دارد، پس داریم:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^{۲}+۳x}{ax^{۲}+۴x-۱}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^{۲}}{ax^{۲}}=\frac{۱}{a} \quad , \quad a\neq ۰$$

پس $y=\frac{۱}{a}$ مجانب افقی تابع است. بنا بر صورت سؤال تابع باید یک مجانب قائم نیز داشته باشد. مخرج تابع، چندجمله‌ای درجه دوم است، برای اینکه مطمئن شویم یک ریشه دارد، معادلهٔ $\Delta=۰$ را حل می‌کنیم.

$$ax^{۲}+۴x-۱=۰\xrightarrow{\Delta=۰}۱۶-۴(a)(-۱)=۰ \Rightarrow ۱۶+۴a=۰$$

$$\Rightarrow ۴a=-۱۶ \Rightarrow a=-۴$$

$$\xrightarrow{a=-۴}-۴x^{۲}+۴x-۱=۰\xrightarrow{\times(-۱)}۴x^{۲}-۴x+۱=۰ \Rightarrow (۲x-۱)^{۲}=۰$$

$$\Rightarrow ۲x-۱=۰ \Rightarrow ۲x=۱ \Rightarrow x=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین خط $y=-\frac{۱}{۴}$ مجانب افقی تابع و خط $x=\frac{۱}{۲}$ مجانب قائم تابع می‌باشد. محل برخورد این دو مجانب نقطهٔ $(\frac{۱}{۲},-\frac{۱}{۴})$ است.

۵۹ **گزینه ۴**

باتوجه‌به شکل، خط $x=۱$ مجانب قائم تابع است، پس به ازای $x=۱$ مخرج کسر برابر با صفر می‌شود؛ پس:

$$x+b=۰ \xrightarrow{x=۱} ۱+b=۰ \Rightarrow b=-۱$$

ازطرفی نمودار تابع از مبدأ مختصات عبور می‌کند؛ بنابراین مختصات نقطهٔ $(۰,۰)$ در ضابطهٔ تابع صدق می‌کند:

$$f(x)=\frac{x^۲+a}{x-۱} \xrightarrow{f(۰)=۰} ۰=\frac{۰+a}{۰-۱} \Rightarrow a=۰$$

بنابراین دوتایی مرتب (a,b) به‌صورت $(۰,-۱)$ خواهد بود.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

۶۰ **گزینه ۲**

باتوجه‌به شکل، خط $x=۱$ مجانب قائم تابع است، پس به ازای $x=۱$ مخرج کسر برابر با صفر می‌شود؛ پس:

$$x+b=۰ \xrightarrow{x=۱} ۱+b=۰ \Rightarrow b=-۱$$

ازطرفی باتوجه‌به شکل درمی‌یابیم که:

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)=-\infty$$

پس:

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)=\lim_{x\to ۱^+}\frac{x^۲+a}{x-۱}=\frac{۱+a}{۰^+}=-\infty \Rightarrow ۱+a<۰ \Rightarrow a<-۱$$

بنابراین داریم: $a<b=-۱$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

۶۱ **گزینه ۴**

نمودار تابع از مبدأ مختصات عبور می‌کند؛ بنابراین مختصات نقطهٔ $(۰,۰)$ در ضابطهٔ تابع صدق می‌کند:

$$f(x)=\frac{ax+b}{x^۲+۱} \xrightarrow{f(۰)=۰} ۰=\frac{۰+b}{۰+۱} \Rightarrow b=۰$$
$$\Rightarrow f(x)=\frac{ax}{x^۲+۱}$$

تـابع در نقطه‌ای به عرض ۲ دارای ماکسـیمم نسبی است، پس خط $y=۲$ بر منحنی تـابع مماس است؛ بنابراین معادلـهٔ تلاقی خط $y=۲$ و ضابطهٔ تابع، ریشهٔ مضاعف دارد.

$$\left.\begin{array}{l} y=۲ \\ f(x)=\dfrac{ax}{x^۲+۱}\end{array}\right\} \frac{ax}{x^۲+۱}=۲ \Rightarrow ax=۲x^۲+۲ \Rightarrow ۲x^۲-ax+۲=۰$$
$$\xrightarrow{\Delta=۰} (-a)^۲-۴(۲)(۲)=۰ \Rightarrow a^۲-۱۶=۰ \Rightarrow a^۲=۱۶ \Rightarrow a=\pm۴$$

اما باتوجه‌به نمودار، وقتی $x>۰$، $f(x)>۰$ است و چون مخرج تـابع همواره مثبت است، پس به ازای $x>۰$ باید $ax>۰$ باشد؛ بنابراین $a=۴$ قابل‌قبول است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

۶۲ **گزینهٔ ۲**

باتوجه‌به شکل، خط $x=0$ مجانب قائم تابع است، پس $x=0$ ریشهٔ مخرج کسر است.

$$y=\frac{x+b}{x^2+a} \Rightarrow x^2+a=0 \xrightarrow{x=0} 0+a=0 \Rightarrow a=0 \Rightarrow y=\frac{x+b}{x^2}$$

باتوجه‌به شکل، تابع در نقطه‌ای به طول $x=2$ دارای ماکسیمم نسبی بوده و مماس بر نمودار، در این نقطه افقی است، پس داریم: $y'(2)=0$

$$y'=\frac{x^2-2x(x+b)}{x^4}=\frac{x^2-2x^2-2bx}{x^4}=\frac{-x^2-2bx}{x^4}$$

$$y'(2)=0 \Rightarrow \frac{-2^2-2b(2)}{2^4}=0 \Rightarrow -4-4b=0 \Rightarrow 4b=-4 \Rightarrow b=-1$$

بنابراین: $(a,b)=(0,-1)$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

۶۳ **گزینهٔ ۱**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

گام اول

الف) تابع $f(x)$ در بازه‌ای نزولی است که مشتق اول تابع در آن بازه نامثبت باشد.

ب) تقعر نمودار تابع $f(x)$ در بازه‌ای روبه‌بالا است که مشتق دوم تابع در آن بازه مثبت باشد.

گام دوم

ضابطهٔ مشتق اول و دوم تابع را نوشته و باتوجه‌به گام اول، دو نامعادلهٔ $f'(x)\le 0$ و $f''(x)>0$ را تعیین علامت می‌کنیم.

$$f(x)=-x^4+8x^3-18x^2 \Rightarrow D_f=\mathbb{R}$$

$$f'(x)=-4x^3+24x^2-36x$$

$$f'(x)\le 0 \Rightarrow -4x(x^2-6x+9)=-4x(x-3)^2\le 0 \xrightarrow{(x-3)^2\ge 0} -4x\le 0 \Rightarrow x\ge 0 \quad (I)$$

$$f''(x)=-12x^2+48x-36$$

$$f''(x)>0 \Rightarrow -12(x^2-4x+3)=-12(x-3)(x-1)>0 \Rightarrow (x-3)(x-1)<0$$

x		۱		۳	
$(x-3)(x-1)$	+	۰	-	۰	+

$$\Rightarrow 1<x<3 \quad (II)$$

$$I\bigcap II=(0,+\infty)\bigcap(1,3)=(1,3)$$

۶۴ گزینه ۴

باتوجه‌به شـکل، تابع دارای یک مجانب قائم است. با صـفر قرار دادن مخرج کسر می‌توان معادلهٔ آن را به دست آورد. مخرج کسر چندجمله‌ای درجه دوم است. برای اینکه مطمئن شویم یک ریشه (ریشهٔ مضاعف) دارد، فرض می‌کنیم $\Delta = ۰$ باشد.

$$x^{۲} + bx + ۴ = ۰ \xrightarrow{\Delta = ۰} \Delta = b^{۲} - ۴(۱)(۴) = ۰ \quad \Rightarrow \quad b^{۲} = ۱۶ \quad \Rightarrow \quad b = \pm ۴$$

به ازای $b = ۴$ داریم: $x^{۲} + ۴x + ۴ = (x + ۲)^{۲}$

در این صورت خط $x = -۲$ مجانب قائم تابع می‌شود که باتوجه‌به نمودار قابل‌قبول نیست اما به ازای $b = -۴$ داریم:

$$x^{۲} - ۴x + ۴ = (x - ۲)^{۲}$$

که در این صورت خط $x = ۲$ مجانب قائم تابع است، پس داریم: $y = \frac{x+a}{(x-۲)^{۲}}$

باتوجه‌به شکل واضح است که $y(۰) > ۰$ می‌باشد، پس:

$$y(۰) = \frac{۰+a}{(۰-۲)^{۲}} = \frac{a}{۴} > ۰ \quad \Rightarrow \quad a > ۰$$

بنابراین $a > ۰$ و $b = -۴$ است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۶۵ **گزینه ۳**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

گام اول

الف) تابع $f(x)$ همواره صعودی است اگر مشتق اول تابع روی دامنهٔ تعریف تابع نامنفی باشد $(f'(x) \geq 0)$.

ب) نقطهٔ $x = c$ طول نقطهٔ عطف تابع f است، هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد:

۱) f در c پیوسته باشد.

۲) نمودار f در c دارای مماس واحد باشد.

۳) جهت تقعر منحنی نمودار تابع در c عوض شود.

گام دوم

$$f(x) = x^3 - (m+2)x^2 + 3x \quad \Rightarrow \quad D_f = \mathbb{R}$$

باتوجه‌به گام اول، شرط صعودی بودن تابع را بررسی می‌کنیم:

$$f'(x) = 3x^2 - 2(m+2)x + 3$$

$$f'(x) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 - 2(m+2)x + 3 \geq 0$$

نامساوی فوق همواره برقرار است اگر:

۱) ضریب x^2 مثبت باشد که چون $3 > 0$، پس برقرار است.

۲) $\Delta \leq 0$ که بررسی می‌کنیم:

$$\Delta = 4(m+2)^2 - 4(3)(3) \leq 0 \xrightarrow{\div 4} (m+2)^2 - 9 \leq 0 \quad \Rightarrow \quad (m+2)^2 \leq 9$$

$$\Rightarrow |m+2| \leq 3 \quad \Rightarrow \quad -3 \leq m+2 \leq 3 \quad \Rightarrow \quad -5 \leq m \leq 1$$

اکنون محـدوده‌ای برای نقـاط عطف تـابع می‌یـابیم. تابع f و f' روی $\mathbb{R}$ پیوسـته است، پس برای یـافتن نقـاط عطف کـافی است معادلهٔ $f''(x) = 0$ را حل کنیم.

$$f''(x) = 6x - 2(m+2)$$

$$f''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 6x - 2(m+2) = 0 \quad \Rightarrow \quad 6x = 2(m+2) \quad \Rightarrow \quad x = \frac{m+2}{3}$$

$$-5 \leq m \leq 1 \quad \Rightarrow \quad -3 \leq m+2 \leq 3 \quad \Rightarrow \quad -1 \leq \frac{m+2}{3} \leq 1$$

بنابراین مجموعهٔ نقاط عطف تابع در بازهٔ $[-1, 1]$ قرار دارد.

۶۶

گزینه ۲

نمودار و مجانب افقی تابع در نقطه‌ای به طول $x=0$ برخورد کرده‌اند، بنابراین به ازای $x=0$ معادلهٔ مجانب افقی تابع به دست می‌آید.

$$f(x)=\frac{ax^2+bx+8}{x^2+4}\xrightarrow{x=0}f(0)=\frac{0+0+8}{0+4}=\frac{8}{4}=2\Rightarrow y=2$$ مجانب افقی

ازطرفی برای به دست آوردن مجانب افقی، حد تابع را وقتی $x\to\pm\infty$ محاسبه می‌کنیم، پس داریم:

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^2+bx+8}{x^2+4}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^2}{x^2}=a\Rightarrow y=a$$ مجانب افقی

بنابراین $a=2$ است.

باتوجه‌به نمودار، مینیمم نسبی تابع بر خط $y=0$ مماس است، پس معادلهٔ تلاقی خط $y=0$ و ضابطهٔ تابع ریشهٔ مضاعف دارد:

$$\left.\begin{array}{l}y=0\\ f(x)=\dfrac{2x^2+bx+8}{x^2+4}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{2x^2+bx+8}{x^2+4}=0\Rightarrow 2x^2+bx+8=0\xrightarrow[\Delta=0]{\text{ریشهٔ مضاعف}}b^2-4(2)(8)=0$$

$$\Rightarrow b^2-64=0\Rightarrow b^2=64\Rightarrow b=\pm8$$

باتوجه‌به نمودار، نقطهٔ مینیمم نسبی تابع دارای طولی مثبت است؛ بنابراین ریشهٔ مضاعف معادله باید مثبت باشد، پس $b=-8$ قابل‌قبول است. داریم:

$$a+b=2-8=-6$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

۶۷

گزینه ۳

نقطهٔ $(1,2)$ روی نمودار تابع قرار دارد، پس مختصات این نقطه در ضابطهٔ تابع صدق می‌کند:

$$y=ax^{\frac{3}{2}}+bx^{\frac{1}{2}}\xrightarrow{(1,2)}2=a(1)^{\frac{3}{2}}+b(1)^{\frac{1}{2}}\Rightarrow 2=a+b\quad(I)$$

همچنین جهت تقعر نمودار تابع در نقطهٔ $(1,2)$ عوض شده است. چون تابع در این نقطه پیوسته و دارای مماس واحد است، پس حتماً $y''(1)=0$ است.

$$y'=\frac{3}{2}a\sqrt{x}+\frac{b}{2\sqrt{x}}=\frac{3ax+b}{2\sqrt{x}}$$

$$y''=\frac{3a(2\sqrt{x})-\frac{1}{\sqrt{x}}(3ax+b)}{(2\sqrt{x})^2}$$

$$y''(1)=0\Rightarrow\frac{6a-(3a+b)}{2}=0\Rightarrow 6a-3a-b=0\Rightarrow 3a-b=0\quad(II)$$

$$\xrightarrow{(II),(I)}\begin{cases}a+b=2\\3a-b=0\end{cases}\Rightarrow 4a=2\Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{a+b=2}\frac{1}{2}+b=2\Rightarrow b=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۶۸ **گزینه ۳**

چون تابع یک ماکزیمم و یک مینیمم با طول منفی دارد پس مشتق آن باید دو ریشهٔ منفی داشته باشد:

$$f'(x) = ۲x^۲ - ۲(m-۱)x + ۸ = ۰ \xrightarrow{\div(۲)} x^۲ - (m-۱)x + ۴ = ۰$$

برای اینکه معادلهٔ فوق دو ریشهٔ منفی داشته باشد، باید:

$$\begin{cases} \Delta > ۰ \Rightarrow (m-۱)^۲ - ۱۶ > ۰ \Rightarrow (m-۱)^۲ > ۱۶ \\ \dfrac{c}{a} > ۰ \Rightarrow \dfrac{۴}{۱} > ۰ \\ \dfrac{-b}{a} < ۰ \Rightarrow \dfrac{m-۱}{۱} < ۰ \Rightarrow m < ۱ \end{cases}$$

$$\begin{cases} m-۱ > ۴ \text{ یا } m-۱ < -۴ \Rightarrow m > ۵ \text{ یا } m < -۳ \\ m < ۱ \end{cases}$$

$$\text{اشتراک} \Rightarrow m < -۳$$

ازطرفی می‌دانیم طول نقطهٔ عطف تابع درجهٔ سوم از رابطهٔ $x = \frac{-b}{۳a}$ محاسبه می‌شود.

$$\text{طول نقطهٔ عطف} = -\frac{-(-(m-۱))}{۳\left(\frac{۲}{۳}\right)} = \frac{m-۱}{۲}$$

باتوجه‌به حدود m، حدود طول نقطهٔ عطف تابع را می‌یابیم:

$$m < -۳ \Rightarrow m-۱ < -۴ \Rightarrow \frac{m-۱}{۲} < -۲$$

$$\Rightarrow \text{طول نقطهٔ عطف} < -۲$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

۶۹ **گزینه ۱**

باتوجه‌به نمودار، تابع دو مجانب قائم قرینهٔ هم دارد پس مخرج باید دو ریشهٔ قرینه داشته باشد، درنتیجه:

$$\begin{cases} b = ۰ \\ \Delta > ۰ \Rightarrow b^۲ - ۴a > ۰ \xrightarrow{b=۰} a < ۰ \end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

۷۰ گزینه ۲

نقاط بحرانی تابع را در فاصلهٔ $[-۴,۳]$ به دست می‌آوریم. سپس مقدار تابع را در این نقاط همچنین مقدار تابع را در ابتدا و انتهای بازه محاسبه می‌کنیم.

$$f(x)=\frac{۱}{۳}x^{۳}-x^{۲}-۱۵x \Rightarrow f'(x)=x^{۲}-۲x-۱۵ \xrightarrow{f'(x)=۰} x^{۲}-۲x-۱۵=(x-۵)(x+۳)=۰$$

$$\begin{array}{c|ccccc} x & & -۳ & & ۵ & \\ \hline f' & + & ۰ & - & ۰ & + \\ & \nearrow & \max & \searrow & \min & \nearrow \end{array}$$

$-۳=$ نقاط بحرانی تابع در بازهٔ $[-۴,۳]$

$$\left.\begin{aligned} f(-۴)&=-\frac{۶۴}{۳}-۱۶+۶۰=\frac{۶۸}{۳} \\ f(-۳)&=\frac{(-۳)^{۳}}{۳}-۹+۴۵=۲۷ \\ f(۳)&=\frac{۳^{۳}}{۳}-۹-۴۵=-۴۵ \end{aligned}\right\} \xrightarrow{x\in[-۴,۳]} \begin{cases} y_{\min}=-۴۵ \\ y_{\max}=۲۷ \end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۷۱ گزینه ۳

از روی نمودار پیداست که شیب خط مماس بر نمودار در $x=۰$ برابر صفر است.

$$f(x)=x^{۴}+ax^{۳}+bx \Rightarrow f'(x)=۴x^{۳}+۳ax^{۲}+b \xrightarrow{f'(۰)=۰} b=۰$$

$$\Rightarrow f(x)=x^{۴}+ax^{۳} \xrightarrow{\text{از روی نمودار : } f(-۴)=۰} (-۴)^{۴}+a(-۴)^{۳}=۰ \Rightarrow a=۴$$

بنابراین:

$$f(x)=x^{۴}+۴x^{۳}$$

برای به دست آوردن مینیمم تابع، از آن مشتق می‌گیریم و مساوی با صفر قرار می‌دهیم.

$$f'(x)=۴x^{۳}+۱۲x^{۲} \xrightarrow{f'(x)=۰} ۴x^{۲}(x+۳)=۰ \Rightarrow x=-۳ \text{ مینیمم}$$

$$\Rightarrow f(-۳)=(-۳)^{۴}+۴(-۳)^{۳}=۸۱-۱۰۸=-۲۷$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۷۲ **گزینه ۳**

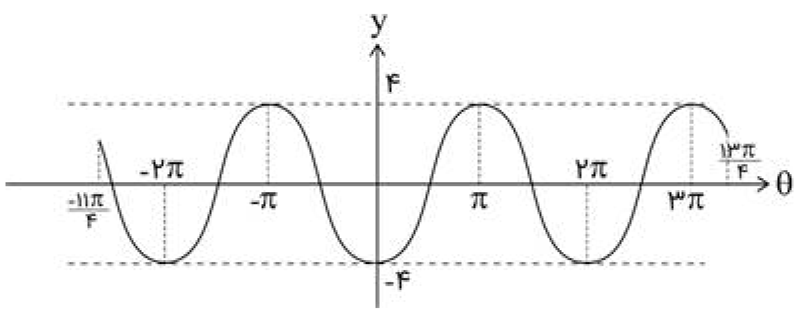
اگر $x \in [-۱, ۱]$ آنگاه:

$$-۱ \le x \le ۱ \Rightarrow -۳\pi \le -۳\pi x \le ۳\pi$$
$$\Rightarrow \frac{\pi}{۴} - ۳\pi \le \frac{\pi}{۴} - ۳\pi x \le \frac{\pi}{۴} + ۳\pi \Rightarrow \frac{-۱۱\pi}{۴} \le \frac{\pi}{۴} - ۳\pi x \le \frac{۱۳\pi}{۴}$$

حال با در نظر گرفتن $\theta = \frac{\pi}{۴} - ۳\pi x$، ضابطهٔ تابع مفروض سؤال، به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$y = -۴\cos\theta \; ; \quad \frac{-۱۱\pi}{۴} \le \theta \le \frac{۱۳\pi}{۴}$$

که شکل آن به‌صورت زیر است:



ملاحظه می‌کنید که این تابع در سه نقطه با طول‌های $\theta = -\pi$، $\theta = \pi$ و $\theta = ۳\pi$، بیشترین مقدار خود را دارد.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

۷۳ گزینه ۱

$$f(x)=\frac{۱}{۴}x^{۴}+\frac{۱}{۲}x^{۳}-۳x^{۲}\Rightarrow f^{'}(x)=x^{۳}+\frac{۳}{۲}x^{۲}-۶x$$

$$\Rightarrow f^{''}(x)=۳x^{۲}+۳x-۶=۳(x^{۲}+x-۲)=۳(x+۲)(x-۱)$$

x		-۲		۱	
f''	+		−		+

اکنون وضعیت صعودی یا نزولی بودن تابع $f(x)$ را در بازهٔ $(-۲,۱)$ بررسی می‌کنیم:

$$f^{'}(x)=x(x^{۲}+\tfrac{۳}{۲}x-۶)$$

$$x^{۲}+\tfrac{۳}{۲}x-۶=۰\Rightarrow \Delta=\tfrac{۹}{۴}-۴(-۶)=\tfrac{۱۰۵}{۴}$$

$$x_{۱}=\tfrac{-۳+۱۰/۲۵}{۴}\simeq ۱/۸۱$$

$$x_{۲}=\tfrac{-۳-۱۰/۲۵}{۴}\simeq -۳/۳۱$$

$$\Rightarrow(-۲,۱)\subseteq(-۳/۳۱,۱/۸۱)$$

x	-۲		۰		۱
x		−		+	
$x^{۲}+\frac{۳}{۲}x-۶$		−		−	
		+		−	

بنابراین تابع $f(x)=\frac{۱}{۴}x^{۴}+\frac{۱}{۲}x^{۳}-۳x^{۲}$ در بازهٔ $(-۲,۰)$ صعودی و تقعر آن رو به پایین است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۷۴ گزینه ۴

خط $x=۰$ مجانب قائم نمودار است؛ بنابراین داریم:

$$\text{مجانب قائم}\ (x+b)=۰\xrightarrow{x=۰}b=۰\Rightarrow y=\frac{x^{۲}+ax-۲}{x}\Rightarrow y=x+a-\frac{۲}{x}$$

با استفاده از رابطهٔ ساده‌شدهٔ تابع، مجانب مایل آن را به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to\infty}y=x+a\Rightarrow \text{مجانب مایل}:\ y=x+a$$

چون عرض از مبدأ مجانب مایل تابع مقداری منفی است، بنابراین $a<۰$ می‌باشد.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۷۵ **گزینه ۳**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

گام اول

نقطهٔ $A(۱,-۳)$ نقطهٔ عطف منحنی است؛ بنابراین دو رابطهٔ $f(۱)=-۳$ و $f''(۱)=۰$ برقرار است.

گام دوم

$$f(۱)=-۳\Rightarrow a-۱-۳+b=-۳\Rightarrow a+b=۱\qquad (۱)$$

$$f'(x)=۳ax^{۲}-۲x-۳\Rightarrow f''(x)=۶ax-۲\Rightarrow f''(۱)=۶a-۲=۰$$

$$\Rightarrow ۶a=۲\Rightarrow a=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}\xrightarrow{(۱)}\frac{۱}{۳}+b=۱\Rightarrow b=\frac{۲}{۳}$$

$$f(x)=\frac{۱}{۳}x^{۳}-x^{۲}-۳x+\frac{۲}{۳}$$

برای تعیین مقدار تابع در نقطهٔ ماکزیمم نسبی آن، جدول تغییرات تابع را رسم می‌کنیم:

$$f'(x)=x^{۲}-۲x-۳=۰\Rightarrow (x-۳)(x+۱)=۰\Rightarrow \begin{cases} x=-۱\\ x=۳\end{cases}$$

x	$-\infty$		-۱		۳		$+\infty$
y′		+	۰	−	۰	+	
y	$-\infty$	↗	$\frac{۷}{۳}$ max	↘	$-\frac{۲۵}{۳}$ min	↗	

بنابراین مقدار تابع در نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع برابر $\frac{۷}{۳}$ است.

۷۶ **گزینه ۲**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

گام اول

محور yها یا همان خط $x=۰$ مجانب قائم تابع است؛ بنابراین $x=۰$ ریشهٔ مخرج است. همچنین نمودار تابع محور xها را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع می‌کند؛ بنابراین $f(۲)=۰$ است.

گام دوم

ریشهٔ مخرج $x=۰: ۰+b=۰\Rightarrow b=۰\Rightarrow f(x)=\frac{ax^{۲}-۱}{x}$

$$f(۲)=۰\Rightarrow \frac{۴a-۱}{۲}=۰\Rightarrow ۴a-۱=۰\Rightarrow ۴a=۱\Rightarrow a=\frac{۱}{۴}$$

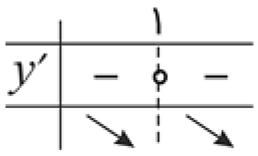
$$a+b=\frac{۱}{۴}+۰=\frac{۱}{۴}$$

۷۷ **گزینه ۴**

نکته: مختصات نقطهٔ عطف در معادلهٔ تابع صدق می‌کند.

نکته: اگر مشتق دوم در نقطهٔ عطف موجود باشد، مقدار آن برابر با صفر خواهد بود.

$$y = ax^3 + bx^2 - 3x - 1 \xrightarrow{(1,-2)} -2 = a(1)^3 + b(1)^2 - 3(1) - 1$$
$$\Rightarrow -2 = a + b - 4 \Rightarrow a + b = 2 \qquad (I)$$
$$y' = 3ax^2 + 2bx - 3$$
$$y'' = 6ax + 2b \xrightarrow{f''(1)=0} 6a + 2b = 0 \Rightarrow 6a = -2b \Rightarrow 3a = -b$$
$$\xrightarrow{(I)} a - 3a = 2 \Rightarrow -2a = 2 \Rightarrow a = -1 \ , \ b = 3$$
$$y = -x^3 + 3x^2 - 3x - 1 \Rightarrow y' = -3x^2 + 6x - 3 \Rightarrow y' = -3(x^2 - 2x + 1)$$
$$\Rightarrow y' = -3(x-1)^2$$



مشتق تغییر علامت نمی‌دهد، درنتیجه فاقد **max** نسبی است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۷۸ **گزینه ۲**

باتوجه‌به نمودار $x = 0$ مجانب قائم تابع است، بنابراین: $b = 0$

نقطهٔ $(2, 0)$ روی نمودار قرار دارد، بنابراین مختصات آن در تابع صدق می‌کند، پس داریم:

$$f(x) = \frac{2+ax^2}{x} \xrightarrow{(2,0)} \frac{2+a(2)^2}{2} = 0 \Rightarrow 4a + 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{-1}{2}$$
$$\Rightarrow a - b = -\frac{1}{2}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

منبع: کنکور سراسری

۱ دایره‌ای، محور xها را در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۳ قطع کرده و مرکز آن، بر روی نیمساز ربع اول است. شعاع این دایره کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}$
۲) ۲
۳) $\sqrt{۵}$
۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۲ در یک هذلولی افقی معادلهٔ مجانب‌ها به‌صورت $y = ۲x - ۴$ و $y = -۲x$ هستند، خروج از مرکز این هذلولی، کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$
۲) $\frac{۱}{۲}\sqrt{۵}$
۳) $\sqrt{۳}$
۴) $\sqrt{۵}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۳ به ازای کدام مقادیر a نقاط $(a, ۳)$، $(۶, ۴a + ۱)$ و مبدأ مختصات در یک راستا قرار می‌گیرند؟

۱) $\frac{۹}{۴}$ و -۲
۲) $\frac{۳}{۴}$ و -۲
۳) $\frac{-۳}{۴}$ و -۲
۴) $\frac{-۹}{۴}$ و ۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

۴ یک خط از دسته خطوط به معادلهٔ $(k + ۱)y + ۲kx - k + ۱ =$ بر خط گذرنده از دو نقطهٔ $A(۲, -۱)$ و $B(۸, ۳)$ عمود است، معادلهٔ آن خط کدام است؟

۱) $۲y + ۳x = ۴$
۲) $۲y + ۳x = ۱$
۳) $۲y - ۳x = -۵$
۴) $۳y - ۲x = -۵$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۰

۵ نقطهٔ $A(۷, ۶)$ رأس یک متوازی‌الاضلاع است که دو ضلع آن منطبق بر دو خط به معادلات $۲y - ۳x = ۱۱$ و $۳y + ۴x = ۸$ می‌باشند. مختصات وسط قطر آن کدام است؟

۱) $(۱, ۵)$
۲) $(۳, ۴)$
۳) $(۳, ۵)$
۴) $(۴, ۳)$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۶ به ازای کدام مقدار a، سه خط به معادلات $y + ۲x = ۰$، $۲y + ax + ۵ = ۰$ و $y + ۳x = a$ متقارب‌اند؟

۱) -۱
۲) ۱
۳) ۲
۴) نشدنی

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

۷ معادلهٔ سه ضلع یک مثلث $x + y = ۱$ و $y = ۲x$ و $x = ۱$ است، معادلهٔ خطی که کوچک‌ترین ارتفاع این مثلث بر آن قرار دارد، کدام است؟

۱) $y = \frac{۲}{۳}$

۲) $x = \frac{۲}{۳}$

۳) $y + x = \frac{۲}{۳}$

۴) $y + x = \frac{۱}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۴

۸ دو ضلع یک مستطیل منطبق بر دو خط به معادلات $۲y + x = ۶$ و $۲x - y = ۷$ و یک رأس آن نقطهٔ $A(۸, ۵)$ است. مساحت این مستطیل کدام می‌باشد؟

۱) ۷/۲

۲) ۹/۶

۳) ۱۱/۴

۴) ۱۲/۸

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

۹ دو نقطه بر خط به معادلهٔ $y = x - ۱$ قرار دارند که فاصلهٔ این نقاط از خط به معادلهٔ $۲x - ۳y = ۵$، برابر $\sqrt{۱۳}$ است. طول این دو نقطه، کدام می‌باشد؟

۱) ۹ و ۱۵-

۲) ۱۱ و ۱۵-

۳) ۱۵ و ۱۱-

۴) ۹- و ۱۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۹

۱۰ فاصلهٔ دو خط به معادلات $y = \sqrt{۳}x + ۲$ و $\sqrt{۳}y - ۳x + ۶ = ۰$ کدام است؟

۱) $۲ - \sqrt{۳}$

۲) $\sqrt{۳} - ۱$

۳) $\sqrt{۳} + ۱$

۴) $۲ + \sqrt{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

۱۱ دو ضلع یک مربع منطبق بر دو خط به معادلات $۲x - ۲y = ۳$ و $y = x + ۱$ هستند، مساحت این مربع کدام است؟

۱) $\frac{۹}{۸}$

۲) $\frac{۹}{۴}$

۳) $\frac{۲۵}{۸}$

۴) $\frac{۲۵}{۴}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

۱۲ از دستگاه $۲x + y - z = ۴$، $x + ۲y + ۳z = ۱۳$ و $x + z = ۹$ مقدار y کدام است؟

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۱-

۴) ۲-

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

۱۳ دستگاه معادلات $\frac{x-3y}{5} = \frac{7x+y}{2} = \frac{5x+y}{1} = \frac{3x-y}{3}$، چند دسته جواب دارد؟

۱) یک
۲) دو
۳) فاقد جواب
۴) بی‌شمار

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

۱۴ دستگاه معادلات $\frac{3x+y}{4} = \frac{x+y+1}{1} = \frac{5x+3y}{2} = \frac{2x-y}{3}$، چند دسته جواب دارد؟

۱) یک
۲) دو
۳) فاقد جواب
۴) بی‌شمار

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

۱۵ از دستگاه معادلات $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = z+2$ و $2x+y-2z=16$، مقدار $(x+y)$ کدام است؟

۱) ۹
۲) ۱۰
۳) ۱۱
۴) ۱۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵

۱۶ از دستگاه معادلات $\begin{cases} \frac{x+y}{2} = \frac{y+z}{3} = z-3 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ مقدار y کدام است؟

۱) ‎-۵
۲) ‎-۴
۳) ۲
۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۲

۱۷ نقطهٔ $(a, 2a)$ مرکز دایرهٔ گذرنده بر دو نقطهٔ $(2,1)$ و $(-1,4)$ است. شعاع این دایره کدام می‌باشد؟

۱) ۳
۲) ۴
۳) $2\sqrt{2}$
۴) $3\sqrt{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۴

۱۸ شعاع دایره‌ای که از دو نقطهٔ $(0,0)$ و $(3,1)$ گذشته و مرکز آن روی خط به معادلهٔ $y=2x$ باشد، کدام است؟

۱) $2\sqrt{2}$
۲) $\sqrt{5}$
۳) $\sqrt{10}$
۴) $\sqrt{13}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

۱۹ دایره‌ای از دو نقطهٔ $(0,1)$ و $(3,0)$ گذشته و معادلهٔ یک قطر آن به‌صورت $x-y=2$ است. شعاع این دایره کدام می‌باشد؟

۱) $\sqrt{2}$
۲) ۲
۳) $\sqrt{5}$
۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

۲۰ طول شعاع دایره‌ای که از سه نقطهٔ $A(-۱,۰)$ و $B(۳,۰)$ و $C(۰,-۳)$ می‌گذرد، کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}$
۲) ۲
۳) $\sqrt{۵}$
۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۲

۲۱ شعاع دایره‌ای که از سه نقطه با مختصات $(۲,۱)$ و $(-۲,۴)$ و $(۰,۰)$ می‌گذرد، کدام است؟

۱) ۲
۲) ۲/۵
۳) ۳
۴) ۳/۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

۲۲ به ازای کدام مجموعه مقادیر a منحنی به معادلهٔ $۲x^۲+(a^۲-۷)y^۲+۴y+a=۰$ یک دایره است؟

۱) $\{-۳\}$
۲) $\{۳\}$
۳) $\{-۳,۳\}$
۴) $\varnothing$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

۲۳ به ازای کدام مقدار a دایرهٔ به معادلهٔ $x^۲+y^۲-۲x+۴y+a=۰$ بر خط به معادلهٔ $x+۳y=۰$ مماس است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$
۲) $\frac{۵}{۲}$
۳) ۳
۴) ۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵

۲۴ به ازای کدام مقدار m، خط به معادلهٔ $y=mx+۲$ بر دایرهٔ $x^۲+y^۲-۲x=۳$ مماس است؟

۱) $-\frac{۴}{۳}$ و ۰
۲) $\frac{۴}{۳}$ و ۰
۳) $-\frac{۴}{۳}$ و ۱
۴) $\frac{۲}{۳}$ و ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۲۵ دایره‌ای از دو نقطهٔ $(۲,۰)$ و $(-۲,۰)$ گذشته و بر خط به معادلهٔ $y=۱$ مماس است. شعاع این دایره کدام می‌باشد؟

۱) $\frac{۳}{۲}$
۲) $\sqrt{۵}$
۳) $\frac{۵}{۲}$
۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

۲۶ دایرهٔ به مرکز $(۲,۰)$ و مماس بر نیمساز ربع اول، خط به معادلهٔ $y=۱$ را با کدام طول‌ها قطع می‌کند؟

۱) ۱ و ۳
۲) ۰ و ۴
۳) $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۵}{۲}$
۴) $۲-\sqrt{۲}$ و $۲+\sqrt{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

۲۷ دایره‌ای از نقطهٔ $(-۱,۲)$ گذشته و بر هر دو محور مختصات مماس است. قطر دایرهٔ بزرگ‌تر کدام می‌باشد؟

۱) ۸ ۲) ۱۰

۳) ۱۲ ۴) ۱۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۲۸ هر خط قائم بر یک دایره، از نقطهٔ $(-۲,۱)$ می‌گذرد. این دایره بر خط به معادلهٔ $y = x - ۱$ مماس است. شعاع دایره کدام می‌باشد؟

۱) ۲ ۲) $۲\sqrt{۲}$

۳) ۳ ۴) $۳\sqrt{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

۲۹ دو دایره به معادله‌های $x^۲ + y^۲ - ۴x + ۴y = ۱$ و $x^۲ + y^۲ - ۴x + ۸y + ۱۹ = ۰$ نسبت به یکدیگر چگونه‌اند؟

۱) مماس خارجی ۲) مماس داخلی

۳) متقاطع در دو نقطه ۴) یکی خارج دیگری

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۰

۳۰ دو دایره به معادلات $x^۲ + y^۲ - ۲x + ۴y = ۱۳$ و $x^۲ + y^۲ + ۲x = ۱$ نسبت به هم کدام وضع را دارند؟

۱) مماس داخل ۲) مماس خارج

۳) متقاطع ۴) متداخل

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

۳۱ دو دایره به معادلات $x^۲ + y^۲ - ۲x + ۶y = ۸$ و $x^۲ + y^۲ + ۸x - ۴y + ۱۲ = ۰$ نسبت به هم کدام وضع را دارند؟

۱) مماس خارج ۲) مماس داخل

۳) متقاطع ۴) متخارج

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

۳۲ معادلهٔ وتر مشترک دو دایره به مرکز $(-۱,۲)$ و $(۲,۱)$ و به شعاع‌های مساوی ۲ واحد کدام است؟

۱) $x = ۲y$ ۲) $y = ۳x$

۳) $۳y = ۲x$ ۴) $۲y = ۳x$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

۳۳ مختصات رأس سهمی‌ای که کانون آن $F(۳,۵)$ و معادلهٔ خط هادی آن $x = -۳$ باشد، کدام است؟

۱) $(-۳,۳)$ ۲) $(-۳,۵)$

۳) $(۰,۵)$ ۴) $(۳,۰)$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۰

۳۴ خط به معادلهٔ $y = ۱$ محور تقارن و خط $x = ۲$ خط هادی یک سهمی‌اند. اگر این سهمی از نقطهٔ $(۳,۲)$ بگذرد، فاصلهٔ کانون تا خط هادی آن کدام است؟

۱) ۱
۲) $\frac{۵}{۴}$
۳) $\frac{۳}{۲}$
۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

۳۵ سهمی به کانون $F(۲,۴)$ و خط هادی به معادلهٔ $x = -۱$ محور xها را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) $\frac{۱۷}{۶}$
۲) $\frac{۱۹}{۶}$
۳) $\frac{۱۰}{۳}$
۴) $\frac{۱۱}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

۳۶ یک تلسکوپ انعکاسی دارای آینهٔ سهموی است که فاصلهٔ رأس تا کانون آن ۷۲ سانتی‌متر و قطر قاعدهٔ آن ۱۶۸ سانتی‌متر است. عمق آینه در مرکز، چند سانتی‌متر است؟

۱) ۲۴
۲) ۲۴/۵
۳) ۲۶
۴) ۲۶/۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۹

۳۷ دهانهٔ سهمی به معادلهٔ $y^۲ + a(x-y) = ۰$، روبه‌راست باز می‌شود و فاصلهٔ کانون تا خط هادی آن ۲ واحد است. مختصات کانون این سهمی کدام است؟

۱) $(-۱,-۲)$
۲) $(۰,-۲)$
۳) $(۰,-۱)$
۴) $(۱,۲)$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۲

۳۸ در سهمی به معادلهٔ $y^۲ + ۴y + ۲x + ۱ = ۰$، خط هادی آن از نقطه‌ای با کدام مختصات می‌گذرد؟

۱) $(۱,-۲)$
۲) $(۱,۲)$
۳) $(۲,۱)$
۴) $(۰,۳)$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

۳۹ به ازای کدام مقدار a، خط هادی سهمی به معادلهٔ $y^۲ - ۶y + ۲x + a = ۰$ از نقطهٔ $(۱,۲)$ می‌گذرد؟

۱) ۵
۲) ۶
۳) ۷
۴) ۸

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

۴۰ در سهمی به معادلهٔ $x^2 - 6x + 8 = 2y$ معادلهٔ خط هادی آن کدام است؟

۱) $y = -\frac{3}{2}$
۲) $y = -1$
۳) $y = -\frac{1}{2}$
۴) $y = \frac{1}{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

۴۱ یک سهمی محور xها را در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۵ قطع کرده و خط هادی آن به معادلهٔ $y = -2$ است. عرض رأس این سهمی کدام است؟

۱) ۱-
۲) $-\frac{3}{2}$
۳) $-\frac{1}{2}$
۴) $\frac{1}{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

۴۲ وتری از سهمی به معادلهٔ $y^2 = 4(x+y)$ که از کانون بر محور تقارن آن عمود باشد، قطری از یک دایره است. معادلهٔ این دایره کدام است؟

۱) $x^2 + y^2 - 4y = 0$
۲) $x^2 + y^2 + 4y = 0$
۳) $x^2 + y^2 - 2y = 2$
۴) $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 2$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

۴۳ یک اشعهٔ نورانی را در امتداد خط $x = 3$ و اشعهٔ دیگر را در امتداد خط $x = -1$ از داخل سهمی به معادلهٔ $x^2 - 2x - 4y + 9 = 0$ بر آن می‌تابانیم. مختصات نقطهٔ تلاقی بازتاب این دو پرتو، کدام است؟

۱) $(1, 3)$
۲) $(1, 4)$
۳) $(2, 2)$
۴) $(2, 3)$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۹

۴۴ دو اشعه که به موازات محور xها، بر سهمی به معادلهٔ $y^2 - 2y + 4x = 11$ می‌تابند، پس از بازتاب در کدام نقطه، متقاطع‌اند؟

۱) $(2, 1)$
۲) $(2, 3)$
۳) $(3, 1)$
۴) $(4, 1)$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

۴۵ نقطهٔ $M(x,y)$ بر روی بیضی به معادلهٔ $9y^2 + 4x^2 - 8x = 8$ قرار دارد. مجموع فواصل نقطهٔ M از دو کانون این بیضی کدام است؟

۱) $\sqrt{6}$
۲) ۳
۳) $2\sqrt{3}$
۴) ۶

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

۴۶ در بیضی به معادلهٔ $3x^2 + 4y^2 - 6x + 4y = 44$ فاصلهٔ یک کانون از دورترین رأس آن کدام است؟

۱) ۵
۲) ۶
۳) ۴
۴) $4 + 2\sqrt{3}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۴

۴۷ مساحت محدود به خطوط مماس بر منحنی به معادلهٔ $x^۲ + ۴y^۲ - ۴x = ۴$ در هر رأس کانونی و غیرکانونی آن، کدام است؟

۱) ۸
۲) ۱۲
۳) ۱۶
۴) ۱۸

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

۴۸ دورترین نقطه از بیضی به معادلهٔ $۲x^۲ + y^۲ + ۴x - ۴y + ۲ = ۰$ تا مرکز آن، به کدام مختصات است؟

۱) $(-۱ - \sqrt{۲}, ۲)$
۲) $(-۲, ۲ + \sqrt{۲})$
۳) $(-۱, ۴)$
۴) $(-۱, ۶)$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

۴۹ مختصات دو سر قطر کوچک یک بیضی $(-۱, ۳)$ و $(-۱, -۱)$ است. این بیضی از نقطهٔ $(-۴, ۲)$ می‌گذرد. خروج از مرکز آن کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$
۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
۳) $\frac{\sqrt{۶}}{۳}$
۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

۵۰ در بیضی به معادلهٔ $x^۲ + ۲y^۲ - ۲x = ۱$ اندازهٔ وتری که از کانون بیضی بر قطر بزرگ آن عمود شود، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
۳) ۱
۴) $\sqrt{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

۵۱ در بیضی به معادلهٔ $۳x^۲ + ۴y^۲ = ۱۲$، یک خط از کانون بر قطر بزرگ آن عمود می‌کنیم، تا بیضی را در A و B قطع کند. اندازهٔ وتر AB کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$
۲) $\frac{۵}{۲}$
۳) ۳
۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۵۲ شیب خط قائم بر بیضی به معادلهٔ $x^۲ + ۳y^۲ - ۸x = ۰$ در نقطهٔ برخورد آن با نیمساز ناحیهٔ اول و در این ناحیه، کدام است؟

۱) ۳-
۲) $-\frac{۱}{۳}$
۳) $\frac{۱}{۳}$
۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۱

۵۳ در هذلولی به معادلهٔ $۴y^۲ - ۵x^۲ + ۸y + ۲۰x + ۴ = ۰$، مختصات یکی از کانون‌ها کدام است؟

۱) $(-۲, -۱)$
۲) $(-۱, -۱)$
۳) $(۲, -۱)$
۴) $(۲, ۲)$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

۵۴ نقطهٔ $M(-۲,۱)$، محل تلاقی مجانب‌های هـذلولی به معادلهٔ $۴x^۲+ay^۲+bx+۲y+۱۱=۰$ است، معادلهٔ مجانب آن با شـیب مثبت، کدام است؟

۱) $۲y=x+۴$
۲) $y=x+۱$
۳) $y=۲x+۵$
۴) $y=۴x+۹$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۹

۵۵ دو خط به معادلات $۲y-x+۱=۰$ و $۲y+x-۱=۰$، مجانب‌های یک هـذلولی گذرا بر نقطهٔ $(۳,۰)$ هسـتند. معادلهٔ این هذلولی کدام است؟

۱) $۴x^۲-y^۲-۸x=۰$
۲) $y^۲-۴x^۲-۸y=۸$
۳) $x^۲-۴y^۲-۲x=۳$
۴) $۴y^۲-x^۲+۲x=۵$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

۵۶ در هذلولی به معادلهٔ $۴x^۲-y^۲-۸x-۴y=۴$، فاصلهٔ هر کانون از خط مجانب هذلولی، کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$
۲) $\sqrt{۳}$
۳) ۲
۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۹

۵۷ مساحت مستطیلی که قطرهای آن مجانب‌های هذلولی به معادلهٔ $۴x^۲-y^۲+۴y=۸$ هستند و رأس‌های هذلولی بر دو ضلع آن مماس‌اند، کدام است؟

۱) ۴
۲) ۶
۳) ۸
۴) ۱۰

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۲

۵۸ مجانب‌های یک هذلولی منطبق بر دو قطر یک مستطیل به ابعاد ۶ و ۸ واحد است. اگر این هذلولی بر ضلع بزرگتر مستطیل مماس باشد، خروج از مرکز آن کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۴}$
۲) $\frac{۴}{۳}$
۳) $\frac{۳}{۲}$
۴) $\frac{۵}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

۵۹ اگر نقاط $F(۰,۳)$ و $F'(۰,-۳)$ کانون‌های یک هذلولی با خروج از مرکز $\frac{۳\sqrt{۲}}{۴}$ باشند، معادلهٔ آن کدام است؟

۱) $y^۲-۳x^۲=۴$
۲) $x^۲-۳y^۲=۴$
۳) $x^۲-۸y^۲=۸$
۴) $y^۲-۸x^۲=۸$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵

۶۰ خروج از مرکز هذلولی به معادلهٔ $x^۲ - ۲ax - \frac{۱}{۲}y^۲ = ۱$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}$
۲) ۲
۳) $\sqrt{۵}$
۴) $\sqrt{۱ + a^۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۶۱ در هذلولی به معادلهٔ $x^۲ - ۳y^۲ - ۲x = ۲$ اندازهٔ وتر گذرنده از کانون و عمود بر محور کانونی آن کدام است؟

۱) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$
۲) $\sqrt{۳}$
۳) ۳
۴) $۲\sqrt{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

۶۲ نقطهٔ $S(-۱/۶, -۱)$، رأس سهمی است. هر پرتو که موازی محور xها بر این سهمی بتابد، به نقطهٔ $(۰/۹, -۱)$ بازمی‌تابد. این سهمی محور yها را با کدام عرض، قطع می‌کند؟

۱) -۶ , ۴
۲) -۵ , ۳
۳) -۴ , ۲
۴) -۲ , ۰

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

۶۳ بیضی به معادلهٔ $x^۲ + ۴y^۲ + ay + bx + c = ۰$، در نقطه‌ای به طول ۳ بر محور xها مماس است و از نقطهٔ $(-۱, -۲)$ می‌گذرد. خروج از مرکز آن، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
۴) $\frac{۳}{۴}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

۶۴ خط هادی یک سهمی به معادلهٔ $x = \frac{۱۳}{۴}$ است. هر پرتوی که از نقطهٔ $(-\frac{۵}{۴}, -۲)$ بر این سهمی بتابد، در امتداد محور xها بازمی‌تابد. این سهمی محور xها را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) $\frac{۱}{۳}$
۲) $\frac{۳}{۴}$
۳) $\frac{۵}{۹}$
۴) $\frac{۵}{۴}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

۶۵ هذلولی به معادلهٔ $۵y^۲ - ۴x^۲ - ۲۰y = ۰$ مفروض می‌باشد. معادلهٔ یک بیضی که کانون‌های آن منطبق بر رأس‌های هذلولی و رأس‌های آن در کانون‌های این هذلولی باشد، کدام است؟

۱) $۵y^۲ + ۹x^۲ - ۲۰y = ۲۵$
۲) $۵y^۲ + ۹x^۲ - ۱۰y = ۳۶$
۳) $۴y^۲ + ۵x^۲ - ۱۶y = ۴$
۴) $۹y^۲ + ۵x^۲ - ۳۶y = ۹$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

۶۶ دایره‌ای به مرکز $(۲, -۱)$ و مماس بر خط به معادلهٔ $x - y = ۱$ محور xها را با کدام طول، قطع می‌کند؟

۱) ۳ و ۱   ۲) ۴ و ۱

۳) ۳ و ۲   ۴) ۴ و ۱/۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۶۷ به ازای کدام مقدار k، خروج از مرکز هذلولی به معادلهٔ $kx^۲ - ۲y^۲ + ۴y = ۴$، برابر $\sqrt{۳}$ است؟

۱) ۱   ۲) ۲

۳) ۳   ۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۶۸ مساحت مثلثی با سه رأس به مختصات $A(۲, ۵)$، $B(۳, ۰)$ و $C(۰, ۲)$، کدام است؟

۱) ۶   ۲) ۶/۵

۳) ۷   ۴) ۷/۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۶۹ عمق یک آینهٔ سهموی در مرکز آن ۹ واحد و قطر قاعدهٔ آن ۶۰ واحد است. فاصلهٔ کانون تا رأس آن کدام است؟

۱) ۱۵   ۲) ۲۰

۳) ۲۲/۵   ۴) ۲۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۷۰ مختصات دو سر قطر بزرگ یک بیضی $(۳, ۶)$ و $(۳, -۲)$ و خروج از مرکز آن $\frac{۱}{۲}$ است. این بیضی محور xها را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) $-۱, ۵$ ۲) $-۱, ۷$

۳) $۰, ۶$ ۴) $۱, ۵$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۷۱ به ازای کدام مقدار m، دستگاه معادلات $\begin{cases} mx + y = m - ۱ \\ ۳x + (m - ۲)y = ۴ - ۲m \end{cases}$ دارای بی‌شمار جواب است؟

۱) ۲-   ۲) ۱-

۳) ۳   ۴) هیچ مقدار m

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۷۲ شعاع دایرهٔ گذرا بر سه نقطهٔ $(۰, ۰)$، $(۲, ۱)$ و $(۱, -۲)$، برابر کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$ ۲) $\sqrt{۳}$

۳) $\sqrt{۵}$ ۴) $\frac{\sqrt{۱۳}}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۷۳ در هذلولی به معادلهٔ $۳x^۲ - ۴y^۲ - ۶x - ۹ = ۰$، طول وتری از آن، گذرا بر کانون و عمود بر محور کانونی کدام است؟

۱) ۱
۲) $\sqrt{۷}$
۳) ۳
۴) $۲\sqrt{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۷۴ فاصلهٔ نقطهٔ تلاقی دو منحنی به معادلات $y = ۲^x$ و $y = (\sqrt{۲})^{x+۱} + ۴$ از نقطهٔ $A(۰, ۴)$، کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۷۵ نقطهٔ $A(۳, -۱)$ وسط قطر مربعی است که یک ضلع آن منطبق بر خط به معادلهٔ $۲y - x = ۵$ می‌باشد. مساحت این مربع کدام است؟

۱) ۴۰
۲) ۴۵
۳) ۷۵
۴) ۸۰

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۷۶ شعاع دایره به مرکز $(-۲, ۲)$ و مماس خارج بر دایره $x^۲ + y^۲ - ۲x + ۴y + ۱ = ۰$ کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۲}$
۲) ۳
۳) $۲\sqrt{۳}$
۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۷۷ قدر مطلق تفاضل فواصل نقطهٔ متحرک $M(x, y)$ از دو نقطهٔ ثابت $(۲, -۴)$ و $(۲, ۶)$، همواره برابر ۶ واحد است. این متحرک با کدام عرض، خط به معادلهٔ $x = ۵$ را قطع می‌کند؟

۱) $۱ \pm \frac{۱۵}{۴}$
۲) $۱ \pm ۴\sqrt{۲}$
۳) $۲ \pm \frac{۱۵}{۴}$
۴) $۲ \pm ۳\sqrt{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۷۸ محور تقارن یک سهمی با رأس $(-۱, ۳)$ موازی با محور xها است. اگر این سهمی از نقطهٔ $(۵, ۹)$ بگذرد، فاصلهٔ کانون تا خط هادی آن کدام است؟

۱) ۲/۵
۲) ۳
۳) ۳/۵
۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

۷۹ در بیضی به معادلهٔ $16y^2 + 5x^2 - 10x = 75$ خط گذرا بر کانون و عمود بر محور کانونی، بیضی را در M و N قطع می‌کند. اندازهٔ MN کدام است؟

۱) ۲
۲) ۲/۵
۳) ۳
۴) ۳/۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

۸۰ سهمی با کانون $F(2,3)$ و خط هادی به معادلهٔ $x = -4$ محور xها را با کدام طول، قطع می‌کند؟

۱) $-\frac{1}{2}$
۲) $-\frac{1}{4}$
۳) $\frac{1}{4}$
۴) $\frac{1}{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۸۱ بیضی به کانون‌های $(1,-1)$ و $(1,1)$ و خروج از مرکز $\frac{1}{2}$، خط $y = 2x$ را با کدام طول‌ها قطع می‌کند؟

۱) ۱ و $-\frac{1}{2}$
۲) ۱ و $-\frac{1}{4}$
۳) -1 و $\frac{1}{2}$
۴) ۲ و $-\frac{1}{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

منبع: کنکور سراسری

۱ **گزینه ۳**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

گام اول

الف) دایره محور xها را در دو نقطه به طول ۱ $x=$ و ۳ $x=$ قطع می‌کند؛ بنابراین نقاط $A(1,0)$ و $B(3,0)$ روی دایرهٔ موردنظر قرار دارند.

ب) مرکز دایره روی نیمساز ربع اول (خط $y=x$) است؛ بنابراین مرکز دایره را به‌صورت $O(\alpha,\alpha)$ در نظر می‌گیریم.

گام دوم

چون نقاط A و B روی دایره قرار دارند پس فاصلهٔ آن‌ها تا مرکز دایره باهم برابر و برابر شعاع دایره است.

$$OA=OB=R \Rightarrow \sqrt{(\alpha-1)^2+\alpha^2}=\sqrt{(\alpha-3)^2+\alpha^2} \xrightarrow{\text{به توان ۲}}$$

$$(\alpha-1)^2+\alpha^2=(\alpha-3)^2+\alpha^2 \Rightarrow \alpha^2-2\alpha+1=\alpha^2-6\alpha+9 \Rightarrow 4\alpha=8 \Rightarrow \alpha=2$$

بنابراین مرکز دایره نقطهٔ $O(2,2)$ می‌شود و شعاع دایره برابر است با:

$$R=OA=\sqrt{(2-1)^2+2^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$$

۲ **گزینه ۴**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

گام اول

الف) در هذلولی افقی $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$، شیب مجانب‌ها از رابطهٔ $\pm\frac{b}{a}$ به‌دست می‌آید.

ب) خروج از مرکز هذلولی از رابطهٔ $e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}$ محاسبه می‌شود.

گام دوم

با توجه به معادلهٔ مجانب‌های هذلولی، شیب این مجانب‌ها برابر ± 2 است پس داریم:

$$\frac{b}{a}=2$$

اکنون به‌راحتی می‌توان خروج از مرکز هذلولی را محاسبه کرد:

$$e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\sqrt{1+2^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$$

۳ **گزینه ۴**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

گام اول

الف) شیب خط گذرنده از دو نقطهٔ $A(x_۱ , y_۱)$ و $B(x_۲ , y_۲)$ برابر است با:

$$m_{AB} = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱}$$

ب) اگر سه نقطهٔ A، B و C در یک راستا باشند (روی یک خط راست قرار داشته باشند) آنگاه داریم:

$$m_{AB} = m_{AC}$$

گام دوم

باتوجه‌به گام اول، شرط هم‌راستا بودن سه نقطه را نوشته و مقدار a را به دست می‌آوریم.

$$C(۶ , ۴a + ۱) \ , \ B(a , ۳) \ , \ A(۰ , ۰)$$

$$m_{AB} = m_{AC} \Rightarrow \frac{۳ - ۰}{a - ۰} = \frac{۴a + ۱ - ۰}{۶ - ۰} \Rightarrow \frac{۳}{a} = \frac{۴a + ۱}{۶}$$

$$\Rightarrow ۴a^۲ + a = ۱۸ \Rightarrow ۴a^۲ + a - ۱۸ = ۰ \Rightarrow \Delta = (۱) - ۴(۴)(-۱۸) = ۲۸۹$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{-۱+\sqrt{۲۸۹}}{۸} = \frac{-۱+۱۷}{۸} = \frac{۱۶}{۸} = ۲ \\ a = \frac{-۱-\sqrt{۲۸۹}}{۸} = \frac{-۱-۱۷}{۸} = \frac{-۱۸}{۸} = -\frac{۹}{۴} \end{cases}$$

بنابراین به ازای $-\frac{۹}{۴}$ و $a = ۲$، سه نقطهٔ $A(۰ , ۰)$، $B(a , ۳)$ و $C(۶ , ۴a + ۱)$ در یک راستا قرار می‌گیرند.

۴ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۰

گام اول

الف) دو خط با شیب‌های m_1 و m_2 بر هم عمودند، هرگاه داشته باشیم:

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

ب) شیب خط گذرنده از دو نقطهٔ $A(x_1 , y_1)$ و $B(x_2 , y_2)$ برابر است با:

$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ج) شیب خطی با معادلهٔ استاندارد $ax + by + c = 0$ برابر است با:

$$m = -\frac{a}{b}$$

گام دوم

شیب خط گذرنده از دو نقطهٔ $A(2 , -1)$ و $B(8 , 3)$ برابر است با:

$$m_{AB} = \frac{3-(-1)}{8-2} = \frac{3+1}{6} = \frac{2}{3}$$

شیب خط انتخاب‌شده از میان دسته خطوط با معادلهٔ $(k+1)y + 2kx - k + 1 = 0$ برابر است با:

$$m' = -\frac{2k}{k+1}$$

این دو خط بر هم عمود هستند، بنابراین طبق قسمت (الف) از گام اول، باید داشته باشیم:

$$m_{AB} \cdot m' = -1 \Rightarrow \frac{2}{3} \times \left(-\frac{2k}{k+1}\right) = -1 \Rightarrow \frac{-4k}{3k+3} = -1 \Rightarrow -4k = -3k - 3$$
$$\Rightarrow k = 3$$

به ازای $k = 3$، معادلهٔ خط انتخاب‌شده به دست می‌آید.

$$(k+1)y + 2kx - k + 1 = 0 \xrightarrow{k=3} 4y + 6x - 3 + 1 = 0 \Rightarrow 4y + 6x - 2 = 0$$
$$\Rightarrow 2(2y + 3x - 1) = 0 \Rightarrow 2y + 3x - 1 = 0 \Rightarrow 2y + 3x = 1$$

۵ **گزینه ۳**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

گام اول

اگر M، نقطهٔ وسط دو نقطهٔ $A(x_1 , y_1)$ و $B(x_2 , y_2)$ باشد آنگاه داریم:

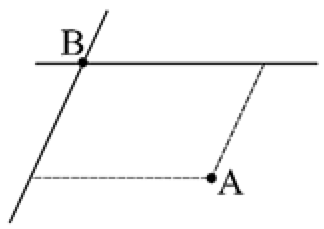
$$\begin{cases} x_M = \frac{x_1+x_2}{2} \\ y_M = \frac{y_1+y_2}{2} \end{cases}$$

گام دوم

مختصات نقطهٔ $A(7 , 6)$ در ضابطهٔ هیچ‌یک از دو خط صدق نمی‌کند:

$$2(6) - 3(7) \neq 11 \quad , \quad 3(6) + 4(7) \neq 8$$

بنابراین نقطهٔ برخورد دو خط قطعاً رأس روبه‌رو به رأس A در متوازی‌الاضلاع است.



مختصات نقطهٔ برخورد دو خط را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} 2y - 3x = 11 \\ 3y + 4x = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8y - 12x = 44 \\ 9y + 12x = 24 \end{cases} \xrightarrow{+} 17y = 68 \Rightarrow y = 4$$

$$2y - 3x = 11 \xrightarrow{y=4} 8 - 3x = 11 \Rightarrow -3x = 3 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow B(-1, 4)$$

اکنون باتوجه‌به گام اول، مختصات وسط قطر AB برابر است با:

$$\left.\begin{aligned} x_M &= \frac{7+(-1)}{2} = \frac{6}{2} = 3 \\ y_M &= \frac{6+4}{2} = \frac{10}{2} = 5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow M(3 , 5)$$

۶ **گزینه ۴**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

گام اول

سه خط متقارب هستند هرگاه هر سه خط در یک نقطه یکدیگر را قطع کنند.

گام دوم

ابتدا مختصات نقطهٔ تلاقی دو خط را به دست می‌آوریم.

$$\begin{cases} y+۲x=۰ \\ y+۳x=a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y-۲x=۰ \\ y+۳x=a \end{cases} \xrightarrow{+} x=a \xrightarrow{y+۲x=۰} y=-۲a \Rightarrow A(a\,,-۲a)$$

برای اینکه سه خط متقارب شوند باید مختصات نقطهٔ A در معادلهٔ خط سوم صدق کند.

$$۲y+ax+۵=۰ \xrightarrow{A(a\,,-۲a)} ۲(-۲a)+a(a)+۵=۰ \Rightarrow -۴a+a^۲+۵=۰$$

$$\Rightarrow \Delta=(-۴)^۲-۴(۱)(۵)=۱۶-۲۰=-۴<۰ \Rightarrow \text{معادله ریشه ندارد}$$

بنابراین متقارب‌بودن سه خط، نشدنی است.

۷ **گزینه ۱**

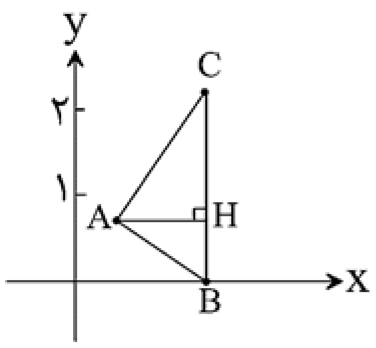
محل برخورد اضلاع مثلث، همان سه رأس مثلث را تشکیل می‌دهد. معادلات سه ضلع را دوبه‌دو تلاقی داده و مختصات سه رأس را به دست می‌آوریم.

$$\begin{cases} x+y=۱ \\ y=۲x \end{cases} \Rightarrow x+۲x=۱ \Rightarrow ۳x=۱ \Rightarrow x=\frac{۱}{۳} \Rightarrow y=\frac{۲}{۳} \Rightarrow A(\frac{۱}{۳}\,,\frac{۲}{۳})$$

$$\begin{cases} x+y=۱ \\ x=۱ \end{cases} \Rightarrow ۱+y=۱ \Rightarrow y=۰ \Rightarrow B(۱,۰)$$

$$\begin{cases} y=۲x \\ x=۱ \end{cases} \Rightarrow y=۲(۱)=۲ \Rightarrow C(۱,۲)$$

مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ را در دستگاه مختصات رسم و کوچک‌ترین ارتفاع آن را مشخص می‌کنیم.



باتوجه‌به شکل، کوتاه‌ترین ارتفاع مثلث AH است که روی خط $y=\frac{۲}{۳}$ قرار دارد.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۴

۸ **گزینه ۲**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

گام اول

فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_{\circ}\ ,\ y_{\circ})$ از خطی با معادلهٔ استاندارد $ax+by+c=\circ$ برابر است با:

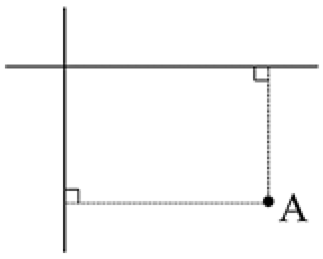
$$d=\frac{|ax_{\circ}+by_{\circ}+c|}{\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}}$$

گام دوم

مختصات نقطهٔ $A(۸\ ,\ ۵)$ در ضابطهٔ هیچ‌یک از دو خط صدق نمی‌کند.

$$۲(۵)+۸\neq ۶ \qquad , \qquad ۲(۸)-۵\neq ۷$$

بنابراین نقطهٔ A روی دو خط قرار ندارد و نقطهٔ برخورد دو خط، رأس روبه‌رو به رأس A خواهد بود. اکنون با محاسبهٔ فاصلهٔ نقطهٔ A از هریک از خطوط، می‌توان طول و عرض مستطیل را به دست آورد.



$$۲y+x=۶ \Rightarrow ۲y+x-۶=\circ$$

$$d_{۱}=\frac{|۲(۵)+۸-۶|}{\sqrt{۴+۱}}=\frac{۱۲}{\sqrt{۵}}$$

$$۲x-y=۷ \Rightarrow ۲x-y-۷=\circ$$

$$d_{۲}=\frac{|۲(۸)-۵-۷|}{\sqrt{۴+۱}}=\frac{۴}{\sqrt{۵}}$$

بنابراین $d_{۱}=\frac{۱۲}{\sqrt{۵}}$ طول مستطیل و $d_{۲}=\frac{۴}{\sqrt{۵}}$ عرض مستطیل است و مساحت آن برابر خواهد بود با:

$$S_{\text{مستطیل}}=d_{۱}\times d_{۲}=\frac{۱۲}{\sqrt{۵}}\times\frac{۴}{\sqrt{۵}}=\frac{۴۸}{۵}=۹/۶$$

۹ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۹

گام اول

فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_۰, y_۰)$ از خطی با معادلهٔ استاندارد $ax+by+c=۰$ برابر است با:

$$d=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

گام دوم

نقطهٔ فرضی $A(\alpha, \alpha-۱)$ را روی خط $y=x-۱$ در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم فاصلهٔ نقطهٔ A از خط به معادلهٔ $۲x-۳y=۵$ برابر با $\sqrt{۱۳}$ باشد؛ بنابراین طبق گام اول داریم:

$$۲x-۳y=۵ \Rightarrow ۲x-۳y-۵=۰$$

$$\sqrt{۱۳}=\frac{|۲\alpha-۳(\alpha-۱)-۵|}{\sqrt{۲^۲+(-۳)^۲}} \Rightarrow \sqrt{۱۳}=\frac{|۲\alpha-۳\alpha+۳-۵|}{\sqrt{۱۳}}$$

$$\Rightarrow ۱۳=|-\alpha-۲| \Rightarrow \begin{cases} -\alpha-۲=۱۳ \Rightarrow \alpha=-۱۵ \\ -\alpha-۲=-۱۳ \Rightarrow \alpha=۱۱ \end{cases}$$

بنابراین دو نقطه روی خط $y=x-۱$ که فاصلهٔ آن‌ها از خط $۲x-۳y=۵$ برابر با $\sqrt{۱۳}$ باشد، دارای طول ۱۱ و ۱۵- است.

۱۰ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

گام اول

فاصلهٔ دو خط موازی با معادلات $ax+by+c=۰$ و $ax+by+c'=۰$ برابر است با:

$$d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

گام دوم

ابتدا شیب دو خط را به دست می‌آوریم:

$$y=\sqrt{۳}x+۲ \Rightarrow m_۱=\sqrt{۳}$$

$$\sqrt{۳}y-۳x+۶=۰ \Rightarrow m_۲=-\frac{-۳}{\sqrt{۳}}=\frac{۳}{\sqrt{۳}}\times\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}}=\frac{۳\sqrt{۳}}{۳}=\sqrt{۳}$$

شیب دو خط برابر با $\sqrt{۳}$ است؛ بنابراین دو خط موازی‌اند. اکنون باتوجه‌به گام اول، معادلهٔ دو خط را به فرم استاندارد می‌نویسیم. دقت کنید که ضریب x و y در دو خط موازی باهم برابر باشند.

$$y=\sqrt{۳}x+۲ \Rightarrow y-\sqrt{۳}x-۲=۰$$

$$\sqrt{۳}y-۳x+۶=۰ \xrightarrow{\div\sqrt{۳}} y-\frac{۳}{\sqrt{۳}}x+\frac{۶}{\sqrt{۳}}=۰ \Rightarrow y-\sqrt{۳}x+۲\sqrt{۳}=۰$$

فاصلهٔ این دو خط موازی برابر است با:

$$d=\frac{|-۲-۲\sqrt{۳}|}{\sqrt{(-\sqrt{۳})^۲+۱^۲}}=\frac{|-۲(۱+\sqrt{۳})|}{\sqrt{۴}}=\frac{۲(۱+\sqrt{۳})}{۲}=۱+\sqrt{۳}$$

۱۱ **گزینه ۳**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

گام اول

فاصلهٔ دو خط موازی با معادلات $ax + by + c = ۰$ و $ax + by + c' = ۰$ برابر است با:

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$$

گام دوم

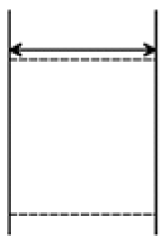
ابتدا شیب دو خط را به دست می‌آوریم:

$$۲x - ۲y = ۳ \Rightarrow m_۱ = -\frac{۲}{-۲} = +۱$$

$$y = x + ۱ \Rightarrow m_۲ = +۱$$

دو خط داده‌شده باهم موازی‌اند؛ بنابراین فاصلهٔ این دو خط از هم برابر با طول ضلع مربع خواهد بود.

برای محاسبهٔ فاصلهٔ میان دو خط موازی، لازم است معادلات دو خط را به فرم استاندارد بنویسیم. دقت کنید که ضریب x و y در دو خط موازی باهم برابر باشند.



$$۲x - ۲y = ۳ \Rightarrow ۲x - ۲y - ۳ = ۰ \xrightarrow{\div -۲} -x + y + \frac{۳}{۲} = ۰$$

$$y = x + ۱ \Rightarrow y - x - ۱ = ۰$$

$$d = \frac{\left|\frac{۳}{۲} - (-۱)\right|}{\sqrt{(-۱)^۲ + ۱^۲}} = \frac{\left|\frac{۳}{۲} + ۱\right|}{\sqrt{۲}} = \frac{\frac{۵}{۲}}{\sqrt{۲}} = \frac{۵}{۲\sqrt{۲}}$$

بنابراین مساحت مربع برابر است با:

$$S_{\text{مربع}} = \frac{۵}{۲\sqrt{۲}} \times \frac{۵}{۲\sqrt{۲}} = \frac{۲۵}{۴\times۲} = \frac{۲۵}{۸}$$

۱۲ **گزینه ۴**

برای حل این دستگاه سه‌معادله و سه‌مجهولی، در یکی از معادلات، یک مجهول را برحسب دو مجهول دیگر نوشته و در دو معادلهٔ باقی‌مانده جایگذاری می‌کنیم تا به یک دستگاه دومعادله و دومجهولی برسیم.

$$x + z = ۹ \Rightarrow z = ۹ - x$$

$$۲x + y - z = ۴ \xrightarrow{z=۹-x} ۲x + y - (۹ - x) = ۴ \Rightarrow ۳x + y = ۱۳$$

$$x + ۲y + ۳z = ۱۳ \xrightarrow{z=۹-x} x + ۲y + ۳(۹ - x) = ۱۳ \Rightarrow -۲x + ۲y = -۱۴$$

$$\xrightarrow{\div(-۲)} x - y = ۷$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۳x + y = ۱۳ \\ x - y = ۷ \end{cases} \Rightarrow ۴x = ۲۰ \Rightarrow x = ۵$$

$$x - y = ۷ \xrightarrow{x=۵} ۵ - y = ۷ \Rightarrow y = ۵ - ۷ = -۲$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

۱۳ **گزینه ۴**

هریک از تساوی‌ها را به‌صورت جداگانه به‌عنوان یک معادله در نظر می‌گیریم:

$$۱)\ \frac{۳x-y}{۳} = \frac{۵x+y}{۱} \Rightarrow ۳x - y = ۳(۵x + y) \Rightarrow ۳x - y = ۱۵x + ۳y$$

$$\Rightarrow ۱۲x + ۴y = ۰ \xrightarrow{\div ۴} ۳x + y = ۰ \qquad (I)$$

$$۲)\ \frac{۵x+y}{۱} = \frac{۷x+y}{۲} \Rightarrow ۲(۵x + y) = ۷x + y \Rightarrow ۱۰x + ۲y = ۷x + y$$

$$\Rightarrow ۳x + y = ۰ \qquad (II)$$

$$۳)\ \frac{۷x+y}{۲} = \frac{x-۳y}{۵} \Rightarrow ۵(۷x + y) = ۲(x - ۳y) \Rightarrow ۳۵x + ۵y = ۲x - ۶y$$

$$\Rightarrow ۳۳x + ۱۱y = ۰ \xrightarrow{\div ۱۱} ۳x + y = ۰ \qquad (III)$$

با طرفین وسطین کردن هریک از تساوی‌ها، به یک معادله رسیدیم. همان‌طور که مشاهده می‌کنید هر سه تساوی معادل با یک معادلهٔ یکسان شد؛ بنابراین دستگاه معادلات داده‌شده، بی‌شمار جواب دارد.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

۱۴ **گزینه ۳**

هریک از تساوی‌ها را به‌عنوان یک معادلهٔ جداگانه درنظر گرفته و بعد از طرفین وسطین کردن، آن را ساده می‌کنیم:

$$1)\ \frac{2x-y}{3} = \frac{5x+3y}{2} \Rightarrow 2(2x-y) = 3(5x+3y) \Rightarrow 4x - 2y = 15x + 9y$$
$$\Rightarrow 11x + 11y = 0 \xrightarrow{\div 11} x + y = 0 \qquad (I)$$

$$2)\ \frac{5x+3y}{2} = \frac{x+y+1}{1} \Rightarrow 5x + 3y = 2(x+y+1) \Rightarrow 5x + 3y = 2x + 2y + 2$$
$$\Rightarrow 3x + y = 2 \qquad (II)$$

$$3)\ \frac{x+y+1}{1} = \frac{3x+y}{4} \Rightarrow 4(x+y+1) = 3x + y \Rightarrow 4x + 4y + 4 = 3x + y$$
$$\Rightarrow x + 3y = -4 \qquad (III)$$

سه معادله و دو مجهول داریم. معادلـهٔ I و II را باهم در نظر گرفته و حل می‌کنیم، سـپس جواب را در معادلهٔ سوم جایگذاری می‌کنیم؛ بررسـی می‌کنیم آیا جواب در این معادله صدق می‌کند یا نه!

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 3x + y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x - y = 0 \\ 3x + y = 2 \end{cases} \xrightarrow{+} 2x = 2 \Rightarrow x = 1$$
$$x + y = 0 \xrightarrow{x=1} y = -x = -1$$
$$(III):\ x + 3y = -4 \xrightarrow{(1,-1)} 1 + 3(-1) = -4 \Rightarrow 1 - 3 = -4 \Rightarrow 2 = -4$$

تساوی به‌دست‌آمده امکان‌پذیر نیست، پس دستگاه معادلات جواب ندارد.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

۱۵ **گزینه ۳**

مسـئله را با اسـتفاده از تغییر متغیر حل می‌کنیم. ابتدا تساوی $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = z + 2$ را برابر بـا t قرار داده و هریـک از متغیرهای x، y و z را برحسب t به دست می‌آوریم، سپس در معادلهٔ $2x + y - 2z = 16$ جایگذاری می‌کنیم و مقدار t را به دست می‌آوریم.

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = z + 2 = t$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x-1}{2} = t \Rightarrow x - 1 = 2t \Rightarrow x = 2t + 1 \\ \frac{y}{3} = t \Rightarrow y = 3t \\ z + 2 = t \Rightarrow z = t - 2 \end{cases}$$
$$2x + y - 2z = 16 \Rightarrow 2(2t+1) + 3t - 2(t-2) = 16$$
$$\Rightarrow 4t + 2 + 3t - 2t + 4 = 16 \Rightarrow 5t + 6 = 16 \Rightarrow 5t = 10 \Rightarrow t = 2$$

بنابراین داریم:

$$x = 2t + 1 \xrightarrow{t=2} x = 2(2) + 1 = 5$$
$$y = 3t \xrightarrow{t=2} y = 3(2) = 6$$
$$z = t - 2 \xrightarrow{t=2} z = 2 - 2 = 0$$

درنتیجه:

$$x + y = 5 + 6 = 11$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵

۱۶ **گزینه ۱**

هریک از تساوی‌های معادلهٔ اول را به‌عنوان یک معادلهٔ جداگانه در نظر می‌گیریم و با طرفین وسطین کردن آن را ساده می‌کنیم:

$$\frac{x+y}{۲} = z - ۳ \Rightarrow x + y = ۲z - ۶ \Rightarrow x + y - ۲z = -۶$$

$$\frac{y+z}{۳} = z - ۳ \Rightarrow y + z = ۳z - ۹ \Rightarrow y - ۲z = -۹$$

بنابراین یک دستگاه سه‌معادله و سه‌مجهولی به‌صورت زیر داریم:

$$\begin{cases} x + y - ۲z = -۶ \\ y - ۲z = -۹ \\ x + y + z = ۰ \end{cases}$$

اکنون یکی از معادلات را انتخاب کرده و یکی از مجهولات را برحسب دو مجهول دیگر می‌نویسیم.

$$x + y + z = ۰ \Rightarrow x + y = -z$$

باتوجه‌به اینکه در معادلهٔ اول عبارت $x + y$ داریم پس در این معادله جایگذاری می‌کنیم.

$$x + y - ۲z = -۶ \Rightarrow -z - ۲z = -۶ \Rightarrow -۳z = -۶ \Rightarrow z = ۲$$

با جایگذاری مقدار z در معادلهٔ دوم، مقدار y را به دست می‌آوریم.

$$y - ۲z = -۹ \xrightarrow{z=۲} y - ۲(۲) = -۹ \Rightarrow y = -۵$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۲

۱۷ **گزینه ۱**

طبق تعریف دایره، فاصلهٔ هر نقطه روی دایره از مرکز دایره برابر با شعاع دایره است. شعاع دایره را R می‌نامیم. با محاسبهٔ فاصلهٔ نقطهٔ $(a\,,\,۲a)$ از هریک از نقاط $(۲\,,\,۱)$ و $(-۱\,,\,۴)$، ابتدا مقدار a و سپس مقدار R را به دست می‌آوریم.

$$\left.\begin{array}{l} R = \sqrt{(a-۲)^۲ + (۲a-۱)^۲} \\ R = \sqrt{(a+۱)^۲ + (۲a-۴)^۲} \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{(a-۲)^۲ + (۲a-۱)^۲} = \sqrt{(a+۱)^۲ + (۲a-۴)^۲}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} (a-۲)^۲ + (۲a-۱)^۲ = (a+۱)^۲ + (۲a-۴)^۲$$

$$\Rightarrow a^۲ - ۴a + ۴ + ۴a^۲ - ۴a + ۱ = a^۲ + ۲a + ۱ + ۴a^۲ - ۱۶a + ۱۶$$

$$\Rightarrow -۸a + ۵ = -۱۴a + ۱۷ \Rightarrow ۶a = ۱۲ \Rightarrow a = ۲$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{(۲-۲)^۲ + (۴-۱)^۲} = \sqrt{۳^۲} = ۳$$

پس دایره‌ای به مرکز $(۲\,,\,۴)$ و شعاع ۳ داریم.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۴

۱۸ **گزینه ۲**

مرکز دایره روی خطی به معادلهٔ $y = 2x$ قرار دارد. فرض می‌کنیم مختصات مرکز دایره $(\alpha , 2\alpha)$ باشد. طبق تعریف دایره، می‌دانیم فاصلهٔ هر نقطه روی دایره از مرکز دایره برابر با شعاع است. شعاع دایره را R می‌نامیم. با محاسبهٔ فاصلهٔ مرکز دایره از هریک از نقاط $(0 , 0)$ و $(3 , 1)$ ابتدا مقدار α و سپس مقدار R را به دست می‌آوریم.

$$\left.\begin{array}{l} R = \sqrt{(\alpha - 0)^2 + (2\alpha - 0)^2} \\ R = \sqrt{(\alpha - 3)^2 + (2\alpha - 1)^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{\alpha^2 + 4\alpha^2} = \sqrt{(\alpha - 3)^2 + (2\alpha - 1)^2}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} 5\alpha^2 = (\alpha - 3)^2 + (2\alpha - 1)^2 \Rightarrow 5\alpha^2 = \alpha^2 - 6\alpha + 9 + 4\alpha^2 - 4\alpha + 1$$

$$\Rightarrow 5\alpha^2 = 5\alpha^2 - 10\alpha + 10 \Rightarrow 10\alpha = 10 \Rightarrow \alpha = 1$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{(1 - 0)^2 + (2 - 0)^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$$

بنابراین دایره‌ای به مرکز $(1 , 2)$ و شعاع $\sqrt{5}$ داریم.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

۱۹ **گزینه ۳**

می‌دانیم هر قطر دایره از مرکز دایره عبور می‌کند؛ بنابراین می‌توان مختصات مرکز دایره را به‌صورت $(\alpha , \alpha - 2)$ در نظر گرفت. ازطرفی طبق تعریف دایره، فاصلهٔ هر نقطه روی دایره از مرکز دایره برابر با شعاع دایره است. شعاع دایره را R می‌نامیم. با محاسبهٔ فاصلهٔ مرکز دایره از هریک از نقاط $(1 , 0)$ و $(0 , 3)$، ابتدا مقدار α و سپس مقدار R را به دست می‌آوریم.

$$\left.\begin{array}{l} R = \sqrt{(\alpha - 0)^2 + (\alpha - 2 - 1)^2} = \sqrt{\alpha^2 + (\alpha - 3)^2} \\ R = \sqrt{(\alpha - 3)^2 + (\alpha - 2 - 0)^2} = \sqrt{(\alpha - 3)^2 + (\alpha - 2)^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{\alpha^2 + (\alpha - 3)^2} = \sqrt{(\alpha - 3)^2 + (\alpha - 2)^2}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} \alpha^2 + (\alpha - 3)^2 = (\alpha - 3)^2 + (\alpha - 2)^2 \Rightarrow \alpha^2 = (\alpha - 2)^2$$

$$\Rightarrow \alpha^2 = \alpha^2 - 4\alpha + 4 \Rightarrow 4\alpha = 4 \Rightarrow \alpha = 1$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{1^2 + (1 - 3)^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

۲۰ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۲

گام اول

معادلهٔ گستردهٔ یک دایره به‌صورت $x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$ است. در این صورت شعاع دایره برابر است با:

$$R = \sqrt{(\frac{a}{۲})^۲ + (\frac{b}{۲})^۲ - c}$$

گام دوم

سه نقطهٔ A، B و C روی دایره قرار دارد، پس مختصات این نقاط در معادلهٔ دایره صدق می‌کند.

$$x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$$

$$\xrightarrow{A(-۱\,,\,۰)} (-۱)^۲ + ۰^۲ + a(-۱) + b(۰) + c = ۰ \Rightarrow ۱ - a + c = ۰ \Rightarrow a - c = ۱ \qquad (I)$$

$$\xrightarrow{B(۳\,,\,۰)} ۳^۲ + ۰^۲ + a(۳) + b(۰) + c = ۰ \Rightarrow ۹ + ۳a + c = ۰ \Rightarrow ۳a + c = -۹ \qquad (II)$$

$$\xrightarrow{C(۰\,,\,-۳)} ۰^۲ + (-۳)^۲ + a(۰) + b(-۳) + c = ۰ \Rightarrow ۹ - ۳b + c = ۰ \Rightarrow c - ۳b = -۹ \qquad (III)$$

بنابراین سه معادله و سه مجهول داریم. با کمی دقت متوجه می‌شویم که دو معادلهٔ I و II فقط شامل دو مجهول a و c است، پس با حل یک دستگاه دو معادله و دو مجهول مقدار a و c را حساب می‌کنیم.

$$\begin{cases} a - c = ۱ \\ ۳a + c = -۹ \end{cases} \xrightarrow{+} ۴a = -۸ \Rightarrow a = -۲$$

$$a - c = ۱ \xrightarrow{a=-۲} c = -۲ - ۱ = -۳$$

با جایگذاری $c = -۳$ در معادلهٔ (III) مقدار b را هم حساب می‌کنیم.

$$c - ۳b = -۹ \xrightarrow{c=-۳} -۳ - ۳b = -۹ \Rightarrow ۳b = ۶ \Rightarrow b = ۲$$

اکنون باتوجه‌به گام اول، شعاع دایره را به دست می‌آوریم.

$$R = \sqrt{(\frac{-۲}{۲})^۲ + (\frac{۲}{۲})^۲ + ۳} = \sqrt{۱ + ۱ + ۳} = \sqrt{۵}$$

۲۱ **گزینه ۲**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

گام اول

معادلهٔ گستردهٔ یک دایره به‌صورت $x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$ است. در این صورت شعاع دایره برابر است با:

$$R = \sqrt{(\frac{a}{۲})^۲ + (\frac{b}{۲})^۲ - c}$$

گام دوم

سه نقطهٔ $(۲\,,۱)$، $(-۲\,,۴)$ و $(۰\,,۰)$ روی دایره قرار دارد، پس مختصات این نقطه در معادلهٔ دایره صدق می‌کند.

$$x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$$

$$\xrightarrow{(۲\,,۱)} ۲^۲ + ۱^۲ + a(۲) + b(۱) + c = ۰ \Rightarrow ۴ + ۱ + ۲a + b + c = ۰ \Rightarrow ۲a + b + c = -۵ \qquad (I)$$

$$\xrightarrow{(-۲\,,۴)} (-۲)^۲ + ۴^۲ + a(-۲) + b(۴) + c = ۰ \Rightarrow ۴ + ۱۶ - ۲a + ۴b + c = ۰ \Rightarrow -۲a + ۴b + c = -۲۰ \qquad (II)$$

$$\xrightarrow{(۰\,,۰)} ۰^۲ + ۰^۲ + a(۰) + b(۰) + c = ۰ \Rightarrow c = ۰ \qquad (III)$$

با جایگذاری $c = ۰$ در دو معادلهٔ I و II به یک دستگاه دومعادله و دومجهول می‌رسیم و آن را حل می‌کنیم.

$$\begin{cases} ۲a + b = -۵ \\ -۲a + ۴b = -۲۰ \end{cases} \xrightarrow{+} ۵b = -۲۵ \Rightarrow b = -۵$$

$$۲a + b = -۵ \xrightarrow{b=-۵} ۲a - ۵ = -۵ \Rightarrow ۲a = ۰ \Rightarrow a = ۰$$

اکنون باتوجه‌به گام اول، شعاع دایره را به دست می‌آوریم.

$$R = \sqrt{(\frac{۰}{۲})^۲ + (\frac{-۵}{۲})^۲ - ۰} = \sqrt{\frac{۲۵}{۴}} = \frac{۵}{۲} = ۲/۵$$

۲۲ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

گام اول

الف) معادلهٔ استاندارد یک دایره به مرکز (α,β) و شعاع R به‌صورت $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$ است.

ب) معادلهٔ گستردهٔ یک دایره به‌صورت $x^2+y^2+ax+by+c=0$ است.

گام دوم

باتوجه‌به معادلهٔ گستردهٔ نوشته‌شده در گام اول، ضریب x^2 و y^2 باید باهم برابر و برابر با یک باشد، بنابراین مقادیر a را به‌گونه‌ای می‌یابیم که ضریب x^2 و y^2 باهم برابر شوند؛ درنتیجه:

$$a^2-7=2\Rightarrow a^2=9\Rightarrow a=\pm 3$$

ازطرفی معادلهٔ این دایره را باید بتوان به‌صورت استاندارد نوشت، بنابراین دو مقدار $a=+3$ و $a=-3$ را در معادلهٔ دایره جایگذاری می‌کنیم تا مقدار صحیح را تشخیص دهیم.

$$a=3:\ 2x^2+(9-7)y^2+4y+3=0\Rightarrow 2x^2+2y^2+4y+3=0$$
$$\Rightarrow 2(x-0)^2+2(y^2+2y+1)+1=0\Rightarrow 2(x-0)^2+2(y+1)^2+1=0$$
$$\xrightarrow{\div 2}(x-0)^2+(y+1)^2+\frac{1}{2}=0\Rightarrow (x-0)^2+(y+1)^2=-\frac{1}{2}\quad \text{غ ق ق}$$

رابطهٔ به‌دست‌آمده همواره غلط است؛ زیرا عبارت سمت چپ تساوی همواره نامنفی می‌باشد ولی مساوی با یک عدد منفی شده است.

$$a=-3:\ 2x^2+(9-7)y^2+4y-3=0\Rightarrow 2x^2+2y^2+4y-3=0$$
$$\Rightarrow 2(x-0)^2+2(y^2+2y+1)-5=0\Rightarrow 2(x-0)^2+2(y+1)^2-5=0$$
$$\xrightarrow{\div 2}(x-0)^2+(y+1)^2-\frac{5}{2}=0\Rightarrow (x-0)^2+(y+1)^2=\frac{5}{2}$$

به ازای $a=-3$، معادلهٔ دایره‌ای به مرکز $(0,-1)$ و شعاع $R=\sqrt{\frac{5}{2}}$ داریم.

۲۳ **گزینه ۲**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵

گام اول

الف) هرگاه خطی بر یک دایره مماس باشد، فاصلهٔ مرکز دایره از این خط برابر با شعاع دایره خواهد بود.

ب) اگر معادلهٔ گستردهٔ دایره‌ای را به‌صورت $x^{۲} + y^{۲} + ax + by + c = ۰$ در نظر بگیریم آنگاه مختصات مرکز این دایره برابر با $(-\frac{a}{۲}, -\frac{b}{۲})$ و شعاع آن برابر با $R = \sqrt{(\frac{a}{۲})^{۲} + (\frac{b}{۲})^{۲} - c}$ است.

ج) هرگاه دو منحنی بر هم مماس باشند، معادلهٔ تلاقی آن‌ها ریشهٔ مضاعف خواهد داشت.

گام دوم

روش اول:

باتوجه‌به گام اول، مرکز این دایره نقطهٔ $(۱, -۲)$ و شعاع آن برابر است با:

$$R = \sqrt{(\frac{-۲}{۲})^{۲} + (\frac{۴}{۲})^{۲} - a} = \sqrt{۱ + ۴ - a} = \sqrt{۵ - a}$$

ازطرفی فاصلهٔ نقطهٔ $(۱, -۲)$ از خط $x + ۳y = ۰$ برابر است با:

$$R = \frac{|۱+۳(-۲)|}{\sqrt{۱^{۲}+۳^{۲}}} = \frac{|-۵|}{\sqrt{۱۰}} = \frac{۵}{\sqrt{۱۰}}$$

بنابراین داریم:

$$\sqrt{۵ - a} = \frac{۵}{\sqrt{۱۰}} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} ۵ - a = \frac{۲۵}{۱۰} \Rightarrow ۵۰ - ۱۰a = ۲۵$$

$$\Rightarrow ۱۰a = ۲۵ \Rightarrow a = \frac{۲۵}{۱۰} = \frac{۵}{۲}$$

روش دوم:

باتوجه‌به قسمت (ج) از گام اول، باید معادلهٔ تلاقی خط و دایره، ریشهٔ مضاعف داشته باشد. داریم:

$$x + ۳y = ۰ \Rightarrow x = -۳y \qquad (I)$$

با جایگذاری رابطهٔ I در معادلهٔ دایره، به یک معادلهٔ درجه دو برحسب y می‌رسیم که ریشهٔ مضاعف دارد.

$$x^{۲} + y^{۲} - ۲x + ۴y + a = ۰ \xrightarrow{I} (-۳y)^{۲} + y^{۲} - ۲(-۳y) + ۴y + a = ۰$$

$$\Rightarrow ۹y^{۲} + y^{۲} + ۶y + ۴y + a = ۰ \Rightarrow ۱۰y^{۲} + ۱۰y + a = ۰$$

$$\Delta = ۰ \Rightarrow ۱۰۰ - ۴(۱۰)a = ۰ \Rightarrow ۱۰۰ - ۴۰a = ۰ \Rightarrow ۴۰a = ۱۰۰ \Rightarrow a = \frac{۵}{۲}$$

۲۴ **گزینه ۲**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

گام اول

دو منحنی در یک نقطه بر هم مماس هستند، هرگاه معادلهٔ تلاقی آن‌ها در آن نقطه ریشهٔ مضاعف داشته باشد.

گام دوم

داریم:

$$x^2+y^2-2x=3 \xrightarrow{y=mx+2} x^2+(mx+2)^2-2x=3 \Rightarrow x^2+m^2x^2+4mx+4-2x=3$$
$$\Rightarrow (m^2+1)x^2+(4m-2)x+1=0$$

این معادله باید ریشهٔ مضاعف داشته باشد پس:

$$\Delta=0 \Rightarrow (4m-2)^2-4(m^2+1)(1)=0 \Rightarrow 16m^2-16m+4-4m^2-4=0$$
$$\Rightarrow 12m^2-16m=0 \Rightarrow m(12m-16)=0 \Rightarrow \begin{cases} m=0 \\ 12m-16=0 \Rightarrow m=\frac{16}{12}=\frac{4}{3} \end{cases}$$

۲۵ **گزینه ۳**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

گام اول

الف) هرگاه خطی بر دایره مماس باشد، فاصلهٔ مرکز دایره از این خط برابر با شعاع دایره خواهد بود.

ب) عمودمنصف هر وتر از دایره، از مرکز دایره عبور می‌کند.

گام دوم

دو نقطهٔ $A(2\,,0)$ و $B(-2\,,0)$ روی دایره قرار دارد بنـابراین پاره‌خط AB وتری از دایره است که طبـق گـام اول، عمودمنصف آن از مرکز دایره عبور می‌کند. خط $x=0$ عمودمنصف پاره‌خط AB است؛ پس فرض می‌کنیم نقطهٔ $O(0\,,\alpha)$، مرکز دایره است. فاصلهٔ مرکز دایره از نقاط A و B و خط $y=1$ برابر با شعاع دایره است، پس داریم:

$$R=OA=\sqrt{(2-0)^2+(0-\alpha)^2}=\sqrt{4+\alpha^2}$$
$$y=1 \Rightarrow y-1=0 \Rightarrow R=\frac{|\alpha-1|}{\sqrt{1^2}}=|\alpha-1|$$
$$\Rightarrow \sqrt{4+\alpha^2}=|\alpha-1| \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 4+\alpha^2=(\alpha-1)^2$$
$$\Rightarrow 4+\alpha^2=\alpha^2-2\alpha+1 \Rightarrow -2\alpha=3 \Rightarrow \alpha=-\frac{3}{2}$$

بنابراین شعاع دایره برابر است با:

$$R=|\alpha-1|=\left|-\frac{3}{2}-1\right|=\left|-\frac{5}{2}\right|=\frac{5}{2}$$

۲۶ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

گام اول

الف) هرگاه خطی بر دایره مماس باشد، فاصلهٔ مرکز دایره از این خط برابر با شعاع دایره خواهد بود.

ب) معادلهٔ دایره‌ای به مرکز (α , β) و شعاع R به‌صورت زیر است:

$$(x-\alpha)^{۲} + (y-\beta)^{۲} = R^{۲}$$

گام دوم

طبق قسمت (الف) از گام اول، شعاع دایره برابر است با فاصلهٔ نقطهٔ $(۲ , ۰)$ از خط $y = x$، پس داریم:

$$y = x \Rightarrow -x + y = ۰$$

$$R = \frac{|-۲+۰|}{\sqrt{(-۱)^{۲}+۱^{۲}}} = \frac{۲}{\sqrt{۲}} = \sqrt{۲}$$

معادلهٔ این دایره به‌صورت زیر است:

$$(x-۲)^{۲} + (y-۰)^{۲} = (\sqrt{۲})^{۲} \Rightarrow (x-۲)^{۲} + y^{۲} = ۲$$

اکنون نقطهٔ تلاقی دایره با خط $y = ۱$ را به دست می‌آوریم:

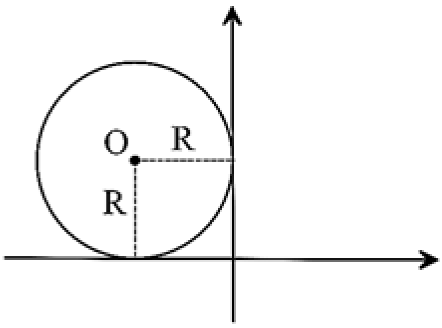
$$(x-۲)^{۲} + y^{۲} = ۲ \xrightarrow{y=۱} (x-۲)^{۲} + ۱ = ۲ \Rightarrow (x-۲)^{۲} = ۱$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-۲ = ۱ \Rightarrow x = ۳ \\ x-۲ = -۱ \Rightarrow x = ۱ \end{cases}$$

پس این دایره، خط $y = ۱$ را در نقاطی با طول‌های ۱ و ۳ قطع می‌کند.

۲۷ **گزینه ۲**

باتوجه‌به اینکه دایره بر هر دو محور مختصات مماس است پس باید به‌طور کامل در یکی از چهار ناحیهٔ مختصاتی قرار بگیرد. چون دایره از نقطهٔ $(-۱, ۲)$ نیز عبور می‌کند و این نقطه در ناحیهٔ دوم قرار دارد، پس دایرهٔ موردنظر به‌صورت زیر خواهد بود:



بنابراین دایره‌ای به شعاع R و به مرکز $(-R, R)$ داریم. معادلهٔ این دایره برابر است با:

$$(x+R)^۲ + (y-R)^۲ = R^۲$$

چون دایره از نقطهٔ $(-۱, ۲)$ عبور می‌کند پس مختصات این نقطه در معادلهٔ دایره صدق می‌کند:

$$\xrightarrow{x=-۱, y=۲} (-۱+R)^۲ + (۲-R)^۲ = R^۲ \Rightarrow ۱ - ۲R + R^۲ + ۴ - ۴R + R^۲ = R^۲$$

$$\Rightarrow R^۲ - ۶R + ۵ = ۰ \Rightarrow (R-۵)(R-۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} R - ۵ = ۰ \Rightarrow R = ۵ \\ R - ۱ = ۰ \Rightarrow R = ۱ \end{cases}$$

قطر بزرگ‌تر به ازای شعاع بزرگ‌تر به دست می‌آید که برابر است با:

$$۲R = ۲(۵) = ۱۰$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۲۸ **گزینه ۲**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

گام اول

الف) هر خط قائم بر دایره، از مرکز دایره عبور می‌کند.

ب) هرگاه خطی بر دایره مماس باشد، فاصلهٔ مرکز دایره از این خط برابر با شعاع دایره است.

گام دوم

باتوجه‌به اینکه هر خط قائم بر دایره از نقطهٔ $(-۲, ۱)$ عبور می‌کند و باتوجه‌به قسمت (الف) از گام اول، نقطهٔ $(-۲, ۱)$ همان مرکز دایره است.

طبق قسمت (ب) از گام اول، فاصلهٔ نقطهٔ $(-۲, ۱)$ از خط $y = x - ۱$ برابر با شعاع دایره است؛ پس داریم:

$$y = x - ۱ \Rightarrow x - y - ۱ = ۰$$

$$R = \frac{|-۲-۱-۱|}{\sqrt{۱^۲ + (-۱)^۲}} = \frac{|-۴|}{\sqrt{۲}} = \frac{۴}{\sqrt{۲}} = ۲\sqrt{۲}$$

۲۹ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۰

گام اول

در یک دایره به معادلهٔ $x^2+y^2+ax+by+c=0$ مختصات مرکز دایره $(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2})$ می‌باشد و شعاع این دایره برابر است با:

$$R=\sqrt{(\frac{a}{2})^2+(\frac{b}{2})^2-c}$$

گام دوم

برای مشـخص‌کردن وضـعیت دو دایره نسـبت به هم، فاصـلهٔ میان مرکز دو دایره (طول خط‌المرکزین) را با دو مقـدار R_1+R_2 و $|R_1-R_2|$ مقایسه می‌کنیم، بنابراین لازم است ابتدا مختصات مرکز دو دایره و شعاع آن‌ها را به دست آوریم.

$$x^2+y^2-4x+4y=1\Rightarrow x^2+y^2-4x+4y-1=0$$

مرکز دایره : $O_1(-\frac{-4}{2},-\frac{4}{2})\Rightarrow O_1(2,-2)$

شعاع دایره : $R_1=\sqrt{(-\frac{4}{2})^2+(\frac{4}{2})^2-(-1)}=\sqrt{4+4+1}=3$

$$x^2+y^2-4x+8y+19=0$$

مرکز دایره : $O_2(-\frac{-4}{2},-\frac{8}{2})\Rightarrow O_2(2,-4)$

شعاع دایره : $R_2=\sqrt{(-\frac{4}{2})^2+(\frac{8}{2})^2-19}=\sqrt{4+16-19}=1$

طول خط‌المرکزین دو دایره برابر است با:

$$O_1O_2=\sqrt{(2-2)^2+(-4+2)^2}=\sqrt{0+(-2)^2}=\sqrt{4}=2$$

همچنین داریم:

$$|R_1-R_2|=|3-1|=2$$

بنابراین $O_1O_2=|R_1-R_2|$ است، پس دو دایره مماس داخل هستند.

۳۰ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

گام اول

در یک دایره به معادلهٔ $x^{۲}+y^{۲}+ax+by+c=$ نقطهٔ $(-\frac{a}{۲}, -\frac{b}{۲})$ مرکز دایره می‌باشد و شعاع این دایره برابر است با:

$$R=\sqrt{(\frac{a}{۲})^{۲}+(\frac{b}{۲})^{۲}-c}$$

گام دوم

برای مشخص‌کردن وضعیت دو دایره نسبت به هم، مختصات مرکز دو دایره و شعاع آن‌ها را به دست می‌آوریم، سپس فاصلهٔ میان مرکز دو دایره (طول خط‌المرکزین) را با دو مقدار $|R_{۱}-R_{۲}|$ و $R_{۱}+R_{۲}$ مقایسه می‌کنیم.

$$x^{۲}+y^{۲}-۲x+۴y=۱۳ \Rightarrow x^{۲}+y^{۲}-۲x+۴y-۱۳=۰$$

مرکز دایره : $O_{۱}(-\frac{-۲}{۲}, -\frac{۴}{۲}) \Rightarrow O_{۱}(۱, -۲)$

شعاع دایره : $R_{۱}=\sqrt{(-\frac{۲}{۲})^{۲}+(\frac{۴}{۲})^{۲}+۱۳}=\sqrt{۱+۴+۱۳}=\sqrt{۱۸}=۳\sqrt{۲}$

$$x^{۲}+y^{۲}+۲x=۱ \Rightarrow x^{۲}+y^{۲}+۲x-۱=۰$$

مرکز دایره : $O_{۲}(-\frac{۲}{۲}, -\frac{۰}{۲}) \Rightarrow O_{۲}(-۱, ۰)$

شعاع دایره : $R_{۲}=\sqrt{(\frac{۲}{۲})^{۲}+۰+۱}=\sqrt{۱+۱}=\sqrt{۲}$

بنابراین داریم:

$$O_{۱}O_{۲}=\sqrt{(-۱-۱)^{۲}+(۰+۲)^{۲}}=\sqrt{۴+۴}=\sqrt{۸}=۲\sqrt{۲}$$

$$R_{۱}+R_{۲}=۳\sqrt{۲}+\sqrt{۲}=۴\sqrt{۲}$$

$$|R_{۱}-R_{۲}|=|۳\sqrt{۲}-\sqrt{۲}|=۲\sqrt{۲}$$

بنابراین $O_{۱}O_{۲}=|R_{۱}-R_{۲}|$ است و دو دایره نسبت به هم مماس داخل هستند.

۳۱ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

گام اول

در یک دایره به معادلهٔ $x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$ نقطهٔ $(-\frac{a}{۲}, -\frac{b}{۲})$ مرکز دایره می‌باشد و شعاع این دایره برابر است با:

$$R = \sqrt{(\frac{a}{۲})^۲ + (\frac{b}{۲})^۲ - c}$$

گام دوم

برای مشــخص‌کردن وضــعیت دو دایره نسـبت به هم، مختصات مرکز دو دایره و شـعاع آن‌ها را به دست می‌آوریم، سپس فاصلهٔ میان مرکز دو دایره (طول خط‌المرکزین) را با دو مقدار $R_۱ + R_۲$ و $|R_۱ - R_۲|$ مقایسه می‌کنیم.

$$x^۲ + y^۲ - ۲x + ۶y = ۸ \Rightarrow x^۲ + y^۲ - ۲x + ۶y - ۸ = ۰$$

$$\text{مرکز دایره}: O_۱(-\frac{-۲}{۲}, -\frac{۶}{۲}) \Rightarrow O_۱(۱, -۳)$$

$$\text{شعاع دایره}: R_۱ = \sqrt{(-\frac{۲}{۲})^۲ + (\frac{۶}{۲})^۲ + ۸} = \sqrt{۱ + ۹ + ۸} = \sqrt{۱۸} = ۳\sqrt{۲}$$

$$x^۲ + y^۲ + ۸x - ۴y + ۱۲ = ۰$$

$$\text{مرکز دایره}: O_۲(-\frac{۸}{۲}, -\frac{-۴}{۲}) \Rightarrow O_۲(-۴, ۲)$$

$$\text{شعاع دایره}: R_۲ = \sqrt{(\frac{۸}{۲})^۲ + (\frac{-۴}{۲})^۲ - ۱۲} = \sqrt{۱۶ + ۴ - ۱۲} = \sqrt{۸} = ۲\sqrt{۲}$$

بنابراین داریم:

$$O_۱O_۲ = \sqrt{(-۴ - ۱)^۲ + (۲ + ۳)^۲} = \sqrt{۲۵ + ۲۵} = ۵\sqrt{۲}$$

$$R_۱ + R_۲ = ۳\sqrt{۲} + ۲\sqrt{۲} = ۵\sqrt{۲}$$

چون $O_۱O_۲ = R_۱ + R_۲$ است پس دو دایره مماس خارج هستند.

۳۲ گزینه ۲

برای به دست آوردن معادلهٔ وتر مشترک دو دایره، کافی است تفاضل معادلهٔ گستردهٔ دو دایره را برابر با صفر قرار دهیم.

معادلهٔ دایرهٔ اول:

$$(x - (-۱))^۲ + (y - ۲)^۲ = ۲^۲ \Rightarrow (x + ۱)^۲ + (y - ۲)^۲ = ۴$$
$$\Rightarrow x^۲ + ۲x + ۱ + y^۲ - ۴y + ۴ = ۴ \Rightarrow x^۲ + y^۲ + ۲x - ۴y + ۱ = ۰$$

معادلهٔ دایرهٔ دوم:

$$(x - ۲)^۲ + (y - ۱)^۲ = ۲^۲ \Rightarrow (x - ۲)^۲ + (y - ۱)^۲ = ۴$$
$$\Rightarrow x^۲ - ۴x + ۴ + y^۲ - ۲y + ۱ = ۴ \Rightarrow x^۲ + y^۲ - ۴x - ۲y + ۱ = ۰$$

این دو معادله را از هم کم می‌کنیم و برابر با صفر قرار می‌دهیم:

$$x^۲ + y^۲ + ۲x - ۴y + ۱ - (x^۲ + y^۲ - ۴x - ۲y + ۱) = ۰$$
$$\Rightarrow x^۲ + y^۲ + ۲x - ۴y + ۱ - x^۲ - y^۲ + ۴x + ۲y - ۱ = ۰$$
$$\Rightarrow ۶x - ۲y = ۰ \xrightarrow{\div ۲} ۳x - y = ۰ \Rightarrow y = ۳x$$

بنابراین معادلهٔ وتر مشترک دو دایره به‌صورت $y = ۳x$ است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

۳۳ گزینه ۳

باتوجه‌به اینکه معادلهٔ خط هادی سهمی به‌صورت $x = -۳$ است، یک سهمی افقی داریم؛ بنابراین عرض کانون و رأس سهمی برابر است یعنی:

$$y_S = y_F = ۵$$

همچنین می‌دانیم رأس سهمی دقیقاً وسط خط هادی و کانون سهمی قرار دارد و فاصلهٔ کانون تا خط هادی برابر $۲p$ است. به‌این ترتیب داریم:

$$x_S = \frac{x_F + x_H}{۲} = \frac{۳+(-۳)}{۲} = \frac{۳-۳}{۲} = ۰$$

بنابراین مختصات رأس سهمی به‌صورت $S(۰, ۵)$ است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۰

۳۴ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

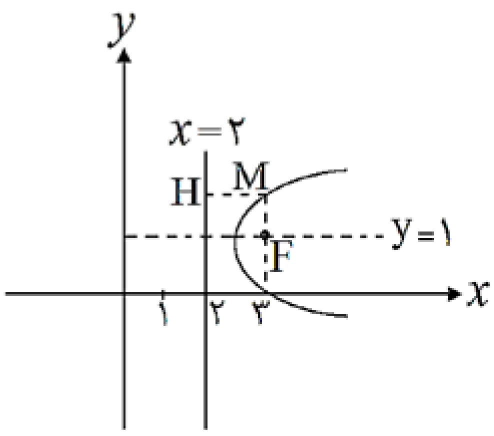
گام اول

فاصلهٔ هر نقطه روی سهمی، از کانون و خط هادی سهمی برابر است.

گام دوم

باتوجه‌به اینکه معادلهٔ خط هادی سهمی به‌صورت $x = ۲$ است، یک سهمی افقی داریم. چون خط $y = ۱$ محور تقارن سهمی است، می‌توان مختصات کانون سهمی را به‌صورت $F(a, ۱)$ در نظر گرفت.

اکنون با مساوی قرار دادن فاصلهٔ نقطهٔ $M(۳, ۲)$ از کانون و خط هادی، مقدار a را تعیین می‌کنیم.



$$MH = |x_M - x_H| = |۳ - ۲| = ۱$$

$$MF = \sqrt{(a-۳)^۲ + (۱-۲)^۲} = \sqrt{(a-۳)^۲ + ۱}$$

$$MH = MF \Rightarrow \sqrt{(a-۳)^۲ + ۱} = ۱ \xrightarrow{\text{به توان ۲}} (a-۳)^۲ + ۱ = ۱ \Rightarrow (a-۳)^۲ = ۰$$

$$\Rightarrow a - ۳ = ۰ \Rightarrow a = ۳$$

بنابراین کانون سهمی نقطهٔ $F(۳, ۱)$ است که فاصلهٔ آن تا خط هادی برابر با یک است.

۳۵ **گزینه ۲**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

گام اول

الف) معادلهٔ یک سهمی افقی با رأس (α,β) و فاصلهٔ کانونی p به‌صورت زیر است:

$$(y-\beta)^{۲} = ۴p(x-\alpha)$$

ب) فاصلهٔ کانون تا خط هادی سهمی، دو برابر فاصلهٔ کانونی است و رأس سهمی دقیقاً وسط کانون و خط هادی قرار دارد.

گام دوم

باتوجه‌به اینکه معادلهٔ خط هادی سهمی به‌صورت $x=-۱$ است، یک سهمی افقی داریم. طبق گام اول داریم:

$$۲p = |۲-(-۱)| = ۳ \Rightarrow p = \frac{۳}{۲}$$

$$y_S = ۴ \Rightarrow x_S = \frac{۲+(-۱)}{۲} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow S(\frac{۱}{۲},۴)$$

با داشتن مختصات رأس و فاصلهٔ کانونی سهمی می‌توانیم معادلهٔ سهمی را بنویسیم:

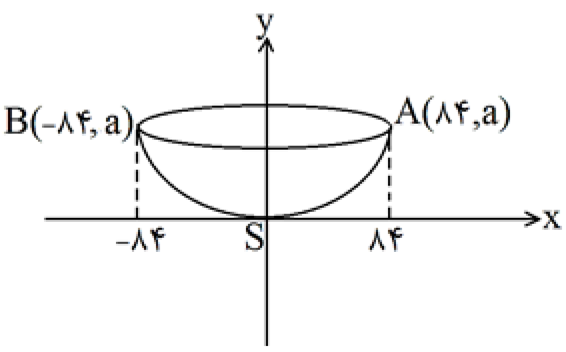
$$(y-۴)^{۲} = ۴(\frac{۳}{۲})(x-\frac{۱}{۲}) \Rightarrow (y-۴)^{۲} = ۶x-۳$$

برای تعیین نقطهٔ برخورد سهمی با محور xها، $y=۰$ قرار داده می‌شود.

$$(y-۴)^{۲} = ۶x-۳ \xrightarrow{y=۰} (۰-۴)^{۲} = ۶x-۳ \Rightarrow ۱۶ = ۶x-۳ \Rightarrow ۶x = ۱۹ \Rightarrow x = \frac{۱۹}{۶}$$

۳۶ **گزینه ۲**

تلسکوپ انعکاسی با آینهٔ سهموی را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:



فرض می‌کنیم عمق آینه برابر با a باشد، در این صورت داریم:

$$p = ۷۲\,,\, A(۸۴,a)\,,\, B(-۸۴,a)\,,\, S(۰,۰)$$

معادلهٔ این سهمی قائم به‌صورت زیر است:

$$x^{۲} = ۴py \xrightarrow{p=۷۲} x^{۲} = ۴\times ۷۲y \Rightarrow x^{۲} = ۲۸۸y$$

نقطهٔ $A(۸۴,a)$ روی سهمی قرار دارد، پس مختصات آن در معادلهٔ این سهمی صدق می‌کند، پس داریم:

$$x^{۲} = ۲۸۸y \xrightarrow{A(۸۴,a)} ۸۴^{۲} = ۲۸۸a \Rightarrow a = \frac{۸۴\times۸۴}{۲۸۸} = \frac{۴۹}{۲} = ۲۴/۵$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۹

۳۷ **گزینه ۲**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۲

گام اول

الف) معادلهٔ استاندارد یک سهمی افقی با رأس $S(\alpha,\beta)$ و فاصلهٔ کانونی p به‌صورت زیر است:

$$(y-\beta)^۲ = ۴p(x-\alpha)$$

ب) در هر سهمی، فاصلهٔ کانون تا خط هادی، دو برابر فاصلهٔ کانونی است.

گام دوم

باتوجه‌به اینکه فاصلهٔ کانون تا خط هادی، ۲ واحد است داریم:

$$۲p = ۲ \Rightarrow p = ۱$$

دهانهٔ سهمی روبه‌راست باز می‌شود، پس یک سهمی افقی داریم. معادلهٔ آن را به‌صورت استاندارد می‌نویسیم:

$$y^۲ + a(x-y) = ۰ \Rightarrow y^۲ + ax - ay = ۰ \Rightarrow (y^۲ - ay + \frac{a^۲}{۴}) - \frac{a^۲}{۴} + ax = ۰$$

$$\Rightarrow (y-\frac{a}{۲})^۲ = -ax + \frac{a^۲}{۴} \Rightarrow (y-\frac{a}{۲})^۲ = -a(x-\frac{a}{۴})$$

بنابراین رأس سهمی نقطهٔ $S(\frac{a}{۴},\frac{a}{۲})$ است، همچنین چون دهانهٔ سهمی روبه‌راست است پس $-a > ۰$ و درنتیجه $a < ۰$ خواهد بود. داریم:

$$۴p = -a \Rightarrow a = -۴p \xrightarrow{p=۱} a = -۴ \Rightarrow S(-۱,-۲)$$

مختصات کانون یک سهمی افقی روبه‌راست، به‌صورت $F(x_S + p, y_S)$ است، بنابراین مختصات کانون این سهمی برابر است با:

$$F(x_S + p, y_S) \Rightarrow F(-۱+۱,-۲) \Rightarrow F(۰,-۲)$$

۳۸ **گزینه ۳**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

گام اول

معادلهٔ استاندارد یک سهمی افقی (روبه‌چپ) به رأس (α,β) و فاصلهٔ کانونی p، به‌صورت زیر است:

$$(y-\beta)^۲ = -۴p(x-\alpha)$$

گام دوم

معادلهٔ داده‌شده به یک سهمی افقی مربوط می‌شود. آن را به‌صورت استاندارد می‌نویسیم:

$$y^۲ + ۴y + ۲x + ۱ = ۰ \Rightarrow (y^۲ + ۴y + ۴) - ۴ + ۲x + ۱ = ۰$$

$$\Rightarrow (y+۲)^۲ = -۲x + ۳ \Rightarrow (y+۲)^۲ = -۲(x - \frac{۳}{۲})$$

در این سهمی افقی، نقطهٔ $S(\frac{۳}{۲},-۲)$ رأس سهمی است و داریم:

$$-۴p = -۲ \Rightarrow ۴p = ۲ \Rightarrow p = \frac{۱}{۲}$$

دهانهٔ سهمی روبه‌چپ است و خط $x = x_S + p$ خط هادی سهمی است.

$$x = x_S + p \Rightarrow x = \frac{۳}{۲} + \frac{۱}{۲} = \frac{۴}{۲} = ۲ \Rightarrow x = ۲ \text{ خط هادی}$$

باتوجه‌به گزینه‌ها، خط هادی از نقطهٔ $(۲,۱)$ عبور می‌کند.

۳۹ گزینه ۴

با استاندارد کردن معادلهٔ سهمی، مختصات رأس و فاصلهٔ کانونی آن را تعیین می‌کنیم.

$$y^۲ - ۶y + ۲x + a = ۰ \Rightarrow (y^۲ - ۶y + ۹) - ۹ + ۲x + a = ۰$$
$$\Rightarrow (y - ۳)^۲ = -۲x - a + ۹ \Rightarrow (y - ۳)^۲ = -۲(x - (\frac{۹-a}{۲}))$$

رأس این سهمی نقطهٔ $S(\frac{۹-a}{۲}, ۳)$ است و چون ضریب عبارت سمت راست تساوی منفی است پس سهمی روبه‌چپ باز می‌شود و داریم:

$$-۴p = -۲ \Rightarrow ۴p = ۲ \Rightarrow p = \frac{۱}{۲}$$

معادلهٔ خط هادی این سهمی از رابطهٔ $x = x_S + p$ به دست می‌آید، پس داریم:

$$x = \frac{۹ - a}{۲} + \frac{۱}{۲} = \frac{۱۰ - a}{۲} \Rightarrow x = \frac{۱۰ - a}{۲} \quad \text{خط هادی}$$

ازطرفی خط هادی سهمی از نقطهٔ $(۱, ۲)$ عبور می‌کند، پس مختصات این نقطه در معادلهٔ خط هادی صدق می‌کند.

$$x = \frac{۱۰ - a}{۲} \xrightarrow{x=۱} ۱ = \frac{۱۰ - a}{۲} \Rightarrow ۱۰ - a = ۲ \Rightarrow a = ۱۰ - ۲ = ۸$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

۴۰ گزینه ۲

با استاندارد کردن معادلهٔ سهمی، مختصات رأس و فاصلهٔ کانونی آن را تعیین می‌کنیم.

$$x^۲ - ۶x + ۸ = ۲y \Rightarrow (x^۲ - ۶x + ۹) - ۹ + ۸ = ۲y$$
$$\Rightarrow (x - ۳)^۲ = ۲y + ۱ \Rightarrow (x - ۳)^۲ = ۲(y + \frac{۱}{۲})$$

این معادله به یک سهمی قائم روبه‌بالا مربوط می‌شود که رأس آن نقطهٔ $S(۳, -\frac{۱}{۲})$ است و داریم:

$$۴p = ۲ \Rightarrow p = \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲}$$

معادلهٔ خط هادی یک سهمی قائم روبه‌بالا به‌صورت $y = y_S - p$ است، پس داریم:

$$y = -\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲} = -۱ \Rightarrow y = -۱ \quad \text{خط هادی}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

۴۱ گزینه ۱

باتوجه‌به اینکه سهمی از دو نقطهٔ $M(۱,۰)$ و $N(۵,۰)$ عبور می‌کند و خط $y=-۲$ خط هادی آن است، یک سهمی قائم روبه‌بالا داریم. عرض دو نقطهٔ M و N، برابر است؛ بنابراین عمودمنصف پاره‌خط MN، محور تقارن سهمی است.

$$x=\frac{۱+۵}{۲}=\frac{۶}{۲}=۳$$

بنابراین خط $x=۳$ محور تقارن سهمی است. ازآنجایی‌که محور تقارن سهمی، از رأس سهمی عبور می‌کند، پس $x_S=۳$ است. ازطرفی می‌دانیم معادلهٔ خط هادی در یک سهمی قائم روبه‌بالا به‌صورت $y=y_S-p$ است و چون $y=-۲$ خط هادی این سهمی است، داریم:

$$-۲=y_S-p\Rightarrow p=y_S+۲\qquad (I)$$

با نوشتن معادلهٔ این سهمی سعی می‌کنیم مقدار y_S را به دست آوریم.

$$(x-x_S)^۲=۴p(y-y_S)\Rightarrow (x-۳)^۲=۴p(y-y_S)$$

سهمی از نقطهٔ $M(۱,۰)$ عبور می‌کند؛ پس مختصات این نقطه در معادلهٔ سهمی صدق می‌کند.

$$\xrightarrow{M(۱,۰)}(۱-۳)^۲=۴p(۰-y_S)\Rightarrow ۴=-۴py_S\xrightarrow{(I)}۱=-(y_S+۲)y_S$$
$$\Rightarrow y_S^۲+۲y_S+۱=۰\Rightarrow (y_S+۱)^۲=۰\Rightarrow (y_S+۱)=۰\Rightarrow y_S=-۱$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

۴۲ گزینه ۱

معادلهٔ این سهمی را به‌صورت استاندارد آن می‌نویسیم:

$$y^۲=۴(x+y)\Rightarrow y^۲=۴x+۴y\Rightarrow (y^۲-۴y+۴)-۴=۴x$$
$$\Rightarrow (y-۲)^۲=۴x+۴\Rightarrow (y-۲)^۲=۴(x+۱)$$

در این سهمی افقی، نقطهٔ $S(-۱,۲)$ رأس سهمی و $p=۱$ فاصلهٔ کانونی آن است؛ بنابراین نقطهٔ $F(۰,۲)$ کانون سهمی و درنتیجه مرکز دایره است. برای نوشتن معادلهٔ دایره اندازهٔ شعاع آن را لازم داریم. قطر دایره، وتری از سهمی است که از کانون عبور کرده و بر محور تقارن سهمی عمود است (وتر کانونی). طول وتر کانونی سهمی برابر $|۴p|$ است، درنتیجه شعاع این دایره برابر با $۲p=۲$ می‌شود، پس داریم:

$$(x-۰)^۲+(y-۲)^۲=۲^۲\Rightarrow x^۲+y^۲-۴y+۴=۴\Rightarrow x^۲+y^۲-۴y=۰$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

۴۳ **گزینه ۱**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۹

گام اول

طبق فیزیک آیینه‌ها، هرگاه پرتو نوری موازی محور تقارن آینهٔ سهموی بر آن بتابد، آنگاه بازتاب آن پرتو از کانون می‌گذرد.

گام دوم

باتوجه‌به معادلهٔ سهمی، یک سهمی قائم داریم، بنابراین دو اشعهٔ تابیده‌شده موازی محور تقارن این سهمی است که طبق گام اول در کانون سهمی، همرس‌اند، پس کافی است با استاندارد کردن معادلهٔ سهمی مختصات کانون این سهمی را به دست آوریم.

$$x^{۲} - ۲x - ۴y + ۹ = ۰ \Rightarrow (x^{۲} - ۲x + ۱) - ۱ - ۴y + ۹ = ۰$$

$$(x - ۱)^{۲} = ۴y - ۸ \Rightarrow (x - ۱)^{۲} = ۴(y - ۲)$$

بنابراین یک سهمی قائم روبه‌بالا داریم که نقطهٔ $S(۱, ۲)$ رأس سهمی و $p = ۱$ فاصلهٔ کانونی و $x = ۱$ محور تقارن آن است. همچنین نقطهٔ $F(۱, ۳)$ کانون سهمی و درنتیجه محل تلاقی دو اشعه است.

۴۴ **گزینه ۱**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

گام اول

طبق فیزیک آینه‌ها، هرگاه پرتوی نوری موازی محور تقارن یک آینهٔ سهموی بر آن بتابد، پس از بازگشت از کانون سهمی عبور می‌کند.

گام دوم

باتوجه‌به معادلهٔ سهمی، یک سهمی افقی داریم، پس دو اشعه موازی محور تقارن سهمی بر آن تابیده است. طبق گام اول، بازتاب دو اشعه از کانون سهمی عبور کرده و در کانون همرس هستند، بنابراین کافی است مختصات کانون سهمی را به دست بیاوریم. با استاندارد کردن معادلهٔ سهمی، داریم:

$$y^{۲} - ۲y + ۴x = ۱۱ \Rightarrow (y^{۲} - ۲y + ۱) - ۱ + ۴x = ۱۱ \Rightarrow (y - ۱)^{۲} = -۴x + ۱۲$$

$$\Rightarrow (y - ۱)^{۲} = -۴(x - ۳)$$

بنابراین یک سهمی افقی روبه‌چپ داریم که نقطهٔ $S(۳, ۱)$ رأس سهمی و $p = ۱$ فاصله کانونی است، همچنین نقطهٔ $F(۲, ۱)$ مختصات کانون سهمی و محل برخورد بازتاب دو اشعه است.

۴۵ **گزینه ۳**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

گام اول

طبق تعریف بیضی، مجموع فاصلهٔ هر نقطه روی بیضی از دو کانون آن، مقداری ثابت و برابر با $2a$ است. $2a$ برابر با طول قطر بزرگ بیضی است.

گام دوم

معادلهٔ بیضی را به فرم استاندارد آن می‌نویسیم:

$$9y^2 + 4x^2 - 8x = 8 \Rightarrow 9y^2 + 4(x^2 - 2x + 1) - 4 = 8$$

$$\Rightarrow 9y^2 + 4(x-1)^2 = 12 \Rightarrow \frac{9y^2}{12} + \frac{4(x-1)^2}{12} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{\frac{4}{3}} + \frac{(x-1)^2}{3} = 1$$

باتوجه‌به معادلهٔ استاندارد بیضی، $a^2 = 3$ و درنتیجه $a = \sqrt{3}$ است، بنابراین مجموع فاصلهٔ نقطهٔ M از دو کانون برابر با $2a = 2\sqrt{3}$ می‌شود.

۴۶ **گزینه ۲**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۴

گام اول

طبق تعریف بیضی، فاصلهٔ یک کانون بیضی از دورترین رأس آن برابر با $a + c$ است.

گام دوم

معادلهٔ بیضی را به‌فرم استاندارد آن می‌نویسیم تا مقادیر پارامترهای a، b و c مشخص شود.

$$3x^2 + 4y^2 - 6x + 4y = 44 \Rightarrow 3(x^2 - 2x + 1) - 3 + 4(y^2 + y + \tfrac{1}{4}) - 1 = 44$$

$$\Rightarrow 3(x-1)^2 + 4\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 48 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{16} + \frac{\left(y + \frac{1}{2}\right)^2}{12} = 1$$

پس داریم:

$$\begin{cases} a^2 = 16 \Rightarrow a = 4 \\ b^2 = 12 \end{cases} \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16 - 12} = 2$$

بنابراین فاصلهٔ کانون از دورترین رأس بیضی برابر است با:

$$a + c = 4 + 2 = 6$$

۴۷ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

گام اول

مساحت محدود به خطوط مماس بر منحنی بیضی در رأس‌های کانونی و غیرکانونی آن، برابر است با مساحت مستطیلی به طول قطر بزرگ بیضی و به عرض قطر کوچک آن.

گام دوم

معادلهٔ بیضی را به‌فرم استاندارد آن می‌نویسیم تا پارامترهای a و b مشخص شود. می‌دانیم اندازهٔ قطر بزرگ بیضی برابر با $۲a$ و اندازهٔ قطر کوچک آن برابر با $۲b$ است.

$$x^۲ + ۴y^۲ - ۴x = ۴ \Rightarrow (x^۲ - ۴x + ۴) - ۴ + ۴y^۲ = ۴$$

$$\Rightarrow (x-۲)^۲ + ۴y^۲ = ۸ \Rightarrow \frac{(x-۲)^۲}{۸} + \frac{y^۲}{۲} = ۱$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^۲ = ۸ \Rightarrow a = \sqrt{۸} \\ b^۲ = ۲ \Rightarrow b = \sqrt{۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{مساحت} = ۲a \times ۲b = ۴ab = ۴(\sqrt{۸} \times \sqrt{۲}) = ۴\sqrt{۸ \times ۲} = ۴ \times ۴ = ۱۶$$

۴۸ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

گام اول

دورترین نقطهٔ بیضی از مرکز آن، همان رئوس کانونی بیضی است.

گام دوم

معادلهٔ بیضی را به‌فرم استاندارد آن می‌نویسیم تا با مشخص‌شدن پارامترهای a و b و مختصات مرکز بیضی، بتوانیم مختصات رأس‌های کانونی آن را به دست آوریم.

$$۲x^۲ + y^۲ + ۴x - ۴y + ۲ = ۰ \Rightarrow ۲(x^۲ + ۲x + ۱) - ۲ + (y^۲ - ۴y + ۴) - ۴ + ۲ = ۰$$

$$\Rightarrow ۲(x+۱)^۲ + (y-۲)^۲ = ۴ \Rightarrow \frac{(x+۱)^۲}{۲} + \frac{(y-۲)^۲}{۴} = ۱$$

بنابراین یک بیضی قائم داریم که نقطهٔ $(-۱, ۲)$ مرکز آن و $a = ۲$ و $b = \sqrt{۲}$ است.

رأس‌های کانونی این بیضی دارای مختصات $(-۱, ۲ \pm ۲)$ است که نقطهٔ $(-۱, ۴)$ جزء گزینه‌ها است.

۴۹ **گزینه ۳**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

گام اول

در هر بیضی، خروج از مرکز بیضی برابر است با: $\frac{c}{a}$

گام دوم

دو نقطهٔ $(-۱,۳)$ و $(-۱,-۱)$ دو سر قطر کوچک بیضی است پس یک بیضی افقی داریم. می‌دانیم مرکز بیضی دقیقاً نقطهٔ وسط قطر بیضی است پس داریم:

$$\alpha = -۱ , \beta = \frac{-۱+۳}{۲} = +۱$$

ازطرفی اندازهٔ قطر کوچک بیضی برابر با $۲b$ است پس:

$$۲b = ۴ \Rightarrow b = ۲$$

بنابراین می‌توانیم معادلهٔ بیضی را به‌صورت زیر بنویسیم:

$$\frac{(x+۱)^۲}{a^۲} + \frac{(y-۱)^۲}{۴} = ۱$$

باتوجه‌به صورت سؤال، نقطهٔ $(-۴,۲)$ روی بیضی قرار دارد؛ پس مختصات این نقطه در معادلهٔ بیضی صدق می‌کند.

$$\xrightarrow{(-۴,۲)} \frac{(-۴+۱)^۲}{a^۲} + \frac{(۲-۱)^۲}{۴} = ۱ \Rightarrow \frac{۹}{a^۲} + \frac{۱}{۴} = ۱ \Rightarrow \frac{۹}{a^۲} = \frac{۳}{۴}$$
$$\Rightarrow ۳a^۲ = ۴ \times ۹ \Rightarrow a^۲ = ۱۲ \Rightarrow a = ۲\sqrt{۳}$$

همچنین:

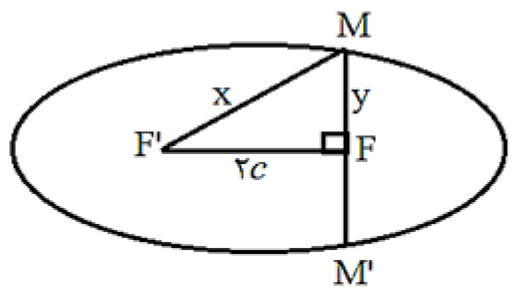
$$c = \sqrt{a^۲ - b^۲} = \sqrt{۱۲ - ۴} = \sqrt{۸} = ۲\sqrt{۲}$$

بنابراین خروج از مرکز بیضی برابر است با:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{۲\sqrt{۲}}{۲\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۶}}{۳}$$

۵۰ **گزینه ۴**

با رسم شکل ساده‌ای به درک مسئله کمک می‌کنیم:



هدف محاسبهٔ اندازهٔ MM' است. طبق تعریف بیضی، مجموع فاصلهٔ هر نقطه روی بیضی از دو کانون آن برابر با $2a$ است؛ بنابراین داریم:

$$x + y = 2a \Rightarrow x = 2a - y \qquad (I)$$

ازطرفی طبق قضیهٔ فیثاغورس می‌توانیم بنویسیم:

$$(2c)^2 + y^2 = x^2 \xrightarrow{(I)} 4c^2 + y^2 = (2a - y)^2$$
$$\Rightarrow 4c^2 + y^2 = 4a^2 - 4ay + y^2 \Rightarrow 4c^2 = 4a^2 - 4ay$$
$$\xrightarrow{c^2 = a^2 - b^2} 4a^2 - 4b^2 = 4a^2 - 4ay \Rightarrow -4b^2 = -4ay \Rightarrow y = \frac{b^2}{a}$$

بنابراین:

$$MM' = 2y = \frac{2b^2}{a}$$

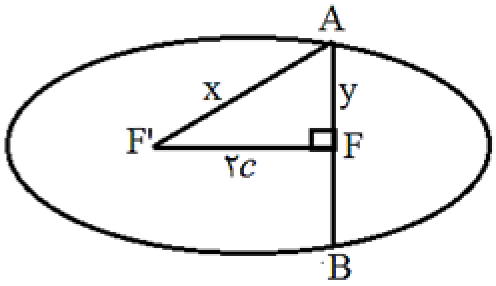
اکنون با استانداردکردن معادلهٔ بیضی، مقادیر a و b و نهایتاً اندازهٔ MM' را محاسبه می‌کنیم.

$$x^2 + 2y^2 - 2x = 1 \Rightarrow (x^2 - 2x + 1) - 1 + 2y^2 = 1$$
$$\Rightarrow (x-1)^2 + 2y^2 = 2 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{y^2}{1} = 1$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 = 2 \Rightarrow a = \sqrt{2} \\ b^2 = 1 \Rightarrow b = 1 \end{cases} \Rightarrow MM' = \frac{2\times 1}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

۵۱ **گزینه ۳**

با رسم یک شکل ساده، به‌درک مسئله کمک می‌کنیم.



طبق تعریف بیضی، مجموع فاصلهٔ هر نقطه روی بیضی از دو کانون آن برابر با $۲a$ است، پس داریم:

$$x+y=۲a \Rightarrow x=۲a-y \qquad (I)$$

ازطرفی باتوجه‌به قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$(۲c)^۲+y^۲=x^۲ \xrightarrow{(I)} ۴c^۲+y^۲=(۲a-y)^۲ \Rightarrow ۴c^۲+y^۲=۴a^۲-۴ay+y^۲$$

$$\Rightarrow ۴c^۲=۴a^۲-۴ay \xrightarrow{c^۲=a^۲-b^۲} ۴a^۲-۴b^۲=۴a^۲-۴ay \Rightarrow -۴b^۲=-۴ay$$

$$\Rightarrow y=\frac{b^۲}{a} \Rightarrow AB=\frac{۲b^۲}{a}$$

اکنون با استاندارد کردن معادلهٔ بیضی، مقادیر a و b و سپس طول AB را به دست می‌آوریم.

$$۳x^۲+۴y^۲=۱۲ \Rightarrow \frac{۳x^۲}{۱۲}+\frac{۴y^۲}{۱۲}=۱ \Rightarrow \frac{x^۲}{۴}+\frac{y^۲}{۳}=۱$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^۲=۴ \Rightarrow a=۲ \\ b^۲=۳ \Rightarrow b=\sqrt{۳} \end{cases} \Rightarrow AB=\frac{۲b^۲}{a}=\frac{۲\times۳}{۲}=۳$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۵۲ **گزینه ۱**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۱

گام اول

الف) شیب خط قائم بر منحنی تابع در یک نقطه، قرینه و معکوس شیب خط مماس بر منحنی تابع در آن نقطه است.

$$m_{\text{قائم}} = -\frac{1}{m_{\text{مماس}}}$$

ب) شیب خط مماس بر منحنی تابع در یک نقطه واقع بر آن، برابر است با مقدار مشتق تابع در آن نقطه.

گام دوم

ابتدا نقطهٔ تلاقی بیضی و نیمساز ناحیهٔ اول را پیدا می‌کنیم. مختصات نقطهٔ برخورد در معادلهٔ بیضی و همچنین معادلهٔ نیمساز ناحیهٔ اول (خط $y = x$) صدق می‌کند؛ پس داریم:

$$x^2 + 3y^2 - 8x = 0 \xrightarrow{y=x} x^2 + 3x^2 - 8x = 0 \Rightarrow 4x^2 - 8x = 0 \Rightarrow 4x(x-2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x = 0 \Rightarrow x = 0 \ \text{غ ق ق (در ناحیهٔ اول نیست)} \\ x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = 2 \end{cases}$$

برای یافتن شیب خط مماس بر بیضی در نقطهٔ $(2, 2)$، مشتق معادلهٔ بیضی را نوشته و مقدار آن را در این نقطه به دست می‌آوریم:

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{2x-8}{6y}$$

$$\Rightarrow m_{\text{مماس}} = -\frac{2(2)-8}{6(2)} = -\frac{-4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow m_{\text{قائم}} = -\frac{1}{m_{\text{مماس}}} = -\frac{1}{\frac{1}{3}} = -3$$

۵۳ **گزینه ۲**

معادلهٔ هذلولی را به فرم استاندارد آن نوشته و مختصات مرکز و پارامترهای a و b را مشخص می‌کنیم.

$$4y^2 - 5x^2 + 8y + 20x + 4 = 0 \Rightarrow 4(y^2 + 2y + 1) - 4 - 5(x^2 - 4x + 4) + 20 + 4 = 0$$

$$\Rightarrow 4(y+1)^2 - 5(x-2)^2 = -20 \Rightarrow \frac{5(x-2)^2}{20} - \frac{4(y+1)^2}{20} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y+1)^2}{5} = 1$$

بنابراین یک هذلولی افقی به مرکز $(2, -1)$ داریم به‌طوری‌که:

$$\begin{cases} a^2 = 4 \Rightarrow a = 2 \\ b^2 = 5 \Rightarrow b = \sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 = 4 + 5 = 9 \Rightarrow c = 3$$

مختصات کانون‌های این هذلولی به‌صورت زیر است:

$$\begin{cases} (2+3, -1) = (5, -1) \\ (2-3, -1) = (-1, -1) \end{cases}$$

که نقطهٔ $(-1, -1)$ در میان گزینه‌ها است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

۵۴ **گزینه ۳**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۹

گام اول

الف) محل تلاقی مجانب‌های یک هذلولی، مرکز هذلولی است.

ب) مختصات مرکز یک هذلولی به معادلهٔ $Ax^۲ + By^۲ + Cx + Dy + E =$ به‌صورت $(-\frac{C}{۲A}, -\frac{D}{۲B})$ است.

گام دوم

نقطهٔ $M(-۲, ۱)$ مرکز هذلولی به معادلهٔ $۴x^۲ + ay^۲ + bx + ۲y + ۱۱ = ۰$ است بنابراین داریم:

$$(-\frac{b}{۸}, -\frac{۲}{۲a}) = (-۲, ۱) \Rightarrow \begin{cases} -\frac{b}{۸} = -۲ \Rightarrow -b = -۱۶ \Rightarrow b = ۱۶ \\ -\frac{۲}{۲a} = ۱ \Rightarrow -۲ = ۲a \Rightarrow a = -۱ \end{cases}$$

معادلهٔ هذلولی را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$۴x^۲ - y^۲ + ۱۶x + ۲y + ۱۱ = ۰$$

این معادله را به‌فرم استاندارد نوشته و سپس معادلات مجانب هذلولی را تعیین می‌کنیم.

$$۴(x^۲ + ۴x + ۴) - ۱۶ - (y^۲ - ۲y + ۱) + ۱ + ۱۱ = ۰ \Rightarrow ۴(x + ۲)^۲ - (y - ۱)^۲ - ۴ = ۰$$

$$\Rightarrow ۴(x + ۲)^۲ - (y - ۱)^۲ = ۴ \Rightarrow \frac{۴(x+۲)^۲}{۴} - \frac{(y-۱)^۲}{۴} = ۱$$

$$\Rightarrow \frac{(x+۲)^۲}{۱} - \frac{(y-۱)^۲}{۴} = ۱$$

بنابراین یک هذلولی افقی به مرکز $(-۲, ۱)$ داریم به‌طوری‌که:

$$\begin{cases} a^۲ = ۱ \Rightarrow a = ۱ \\ b^۲ = ۴ \Rightarrow b = ۲ \end{cases}$$

معادلهٔ مجانب این هذلولی با شیب مثبت برابر است با:

$$\frac{y-۱}{۲} = +\frac{x+۲}{۱} \Rightarrow y - ۱ = ۲x + ۴ \Rightarrow y = ۲x + ۵$$

۵۵ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

گام اول

الف) محل تلاقی مجانب‌های هذلولی، مرکز هذلولی است.

ب) در هر هذلولی افقی قدرمطلق شیب مجانب‌ها برابر با $\frac{b}{a}$ است.

گام دوم

روش اول: باتوجه‌به گام اول، مختصات مرکز هذلولی و همچنین مقدار پارامترهای a و b را به دست می‌آوریم، سپس معادلهٔ هذلولی را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} ۲y - x + ۱ = ۰ \\ ۲y + x - ۱ = ۰ \end{cases} \xrightarrow{+} ۴y = ۰ \Rightarrow y = ۰$$

$$۲y - x + ۱ = ۰ \xrightarrow{y=۰} x = ۱$$

بنابراین نقطهٔ $(۱, ۰)$ مرکز تقارن هذلولی است. قدرمطلق شیب هر دو مجانب هذلولی برابر با $\frac{۱}{۲}$ است، پس داریم:

$$\frac{b}{a} = \frac{۱}{۲}$$

مرکز تقارن هذلولی و نقطهٔ $(۳, ۰)$ در یک راستا قرار دارند، بنابراین نقطهٔ $(۳, ۰)$ حتماً رأس هذلولی است و داریم:

$$a = ۳ - ۱ = ۲$$

بنابراین:

$$b = \frac{۱}{۲}a = \frac{۱}{۲} \times ۲ = ۱$$

پس معادلهٔ این هذلولی به‌صورت زیر است:

$$\frac{(x-۱)^۲}{۴} - \frac{y^۲}{۱} = ۱ \Rightarrow (x-۱)^۲ - ۴y^۲ = ۴ \Rightarrow x^۲ - ۴y^۲ - ۲x = ۳$$

روش دوم: هذلولی از نقطهٔ $(۳, ۰)$ عبور می‌کند؛ بنابراین مختصات این نقطه حتماً در معادلهٔ هذلولی صدق می‌کند. از میان گزینه‌ها، نقطهٔ $(۳, ۰)$ فقط در معادلهٔ $x^۲ - ۴y^۲ - ۲x = ۳$ صدق می‌کند.

۵۶ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۹

گام اول

در هر هذلولی، فاصلهٔ کانون از خطوط مجانب هذلولی برابر با b است.

گام دوم

معادلهٔ هذلولی را به‌فرم استاندارد آن نوشته و مقدار پارامتر b را مشخص می‌کنیم.

$$۴x^۲ - y^۲ - ۸x - ۴y = ۴ \Rightarrow ۴(x^۲ - ۲x + ۱) - ۴ - (y^۲ + ۴y + ۴) + ۴ = ۴$$

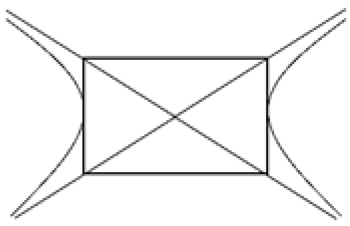
$$\Rightarrow ۴(x-۱)^۲ - (y+۲)^۲ = ۴ \Rightarrow \frac{۴(x-۱)^۲}{۴} - \frac{(y+۲)^۲}{۴} = ۱$$

$$\Rightarrow \frac{(x-۱)^۲}{۱} - \frac{(y+۲)^۲}{۴} = ۱$$

بنابراین $b^۲ = ۴$ و $b = ۲$ است.

۵۷ **گزینه ۳**

معادلهٔ این هذلولی را به‌فرم استاندارد آن می‌نویسیم تا بتوانیم پارامترهای مختلف آن را تعیین کنیم.



$$۴x^۲ - y^۲ + ۴y = ۸ \Rightarrow ۴x^۲ - (y^۲ - ۴y + ۴) + ۴ = ۸ \Rightarrow ۴x^۲ - (y - ۲)^۲ = ۴$$

$$\Rightarrow \frac{۴x^۲}{۴} - \frac{(y-۲)^۲}{۴} = ۱ \Rightarrow \frac{x^۲}{۱} - \frac{(y-۲)^۲}{۴} = ۱$$

یک هذلولی افقی به مرکز $(۰, ۲)$ داریم به‌طوری‌که:

$$\begin{cases} a^۲ = ۱ \Rightarrow a = ۱ \\ b^۲ = ۴ \Rightarrow b = ۲ \end{cases} \Rightarrow c^۲ = a^۲ + b^۲ = ۱ + ۴ = ۵ \Rightarrow c = \sqrt{۵}$$

دو نقطهٔ $(۱, ۲)$ و $(-۱, ۲)$، رأس‌های این هذلولی هستند؛ بنابراین اندازهٔ یکی از ضلع‌های مستطیل به‌وجودآمده برابر با $۲a = ۲$ است. معادلهٔ مجانب‌های این هذلولی به‌صورت زیر است:

$$\frac{y-۲}{۲} = \pm x \Rightarrow \begin{cases} y = ۲x + ۲ \\ y = -۲x + ۲ \end{cases}$$

برای پیدا کردن اندازهٔ ضلع دیگر مستطیل کافی است نقطهٔ برخورد مجانب‌ها و خطی که بر رأس هذلولی مماس می‌شود را تعیین کنیم. یکی از رأس‌های این هذلولی افقی نقطهٔ $(۱, ۲)$ است، پس خط $x = ۱$ بر این رأس، مماس می‌شود؛ بنابراین داریم:

$$\xrightarrow{x=۱} \begin{cases} y = ۲(۱) + ۲ = ۴ \Rightarrow (۱, ۴) \\ y = -۲(۱) + ۲ = ۰ \Rightarrow (۱, ۰) \end{cases}$$

فاصلهٔ میان این دو نقطه طول ضلع دیگر مستطیل است یعنی برابر با ۴ است، بنابراین:

$$\text{مساحت مستطیل} = ۴ \times ۲ = ۸$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۲

۵۸ **گزینه ۴**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

گام اول

الف) ابعاد مستطیلی که از برخورد مجانب‌های یک هذلولی و خطوط مماس بر رأس‌های هذلولی به وجود می‌آید برابر با $۲a$ و $۲b$ است.

ب) خروج از مرکز یک هذلولی برابر است با:

$$e = \frac{c}{a}$$

گام دوم

باتوجه‌به گام اول و باتوجه‌به این‌که هذلولی بر ضلع بزرگ‌تر مستطیل مماس است، داریم:

$$\begin{cases} ۲a = ۶ \Rightarrow a = ۳ \\ ۲b = ۸ \Rightarrow b = ۴ \end{cases} \Rightarrow c^۲ = a^۲ + b^۲ \Rightarrow c^۲ = ۹ + ۱۶ = ۲۵ \Rightarrow c = ۵$$

بنابراین:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{۵}{۳}$$

۵۹ **گزینه ۴**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵

گام اول

الف) مرکز تقارن یک هذلولی، دقیقاً وسط پاره‌خطی است که کانون‌ها را به‌هم وصل می‌کند.

ب) فاصلهٔ میان دو کانون هذلولی برابر با $2c$ است.

ج) خروج از مرکز یک هذلولی برابر است با:

$$e=\frac{c}{a}$$

گام دوم

باتوجه‌به مختصات کانون‌ها، یک هذلولی قائم داریم. مرکز این هذلولی نقطهٔ $(0,0)$ است. همچنین داریم:

$$2c=6\Rightarrow c=3$$

باتوجه‌به این‌که خروج از مرکز هذلولی برابر با $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ است، داریم:

$$\frac{c}{a}=\frac{3\sqrt{2}}{4}\Rightarrow\frac{3}{a}=\frac{3\sqrt{2}}{4}\Rightarrow a=\frac{12}{3\sqrt{2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$$
$$\Rightarrow b^2=c^2-a^2=9-8=1$$

بنابراین معادلهٔ هذلولی به‌صورت زیر است:

$$\frac{(y-0)^2}{8}-\frac{(x-0)^2}{1}=1\Rightarrow y^2-8x^2=8$$

۶۰ **گزینه ۱**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

گام اول

خروج از مرکز یک هذلولی برابر است با:

$$e=\frac{c}{a}$$

گام دوم

معادلهٔ هذلولی را به‌فرم استاندارد آن نوشته و مقادیر پارامترهای a، b و c را مشخص می‌کنیم.

$$x^2-2ax-\tfrac{1}{2}y^2=1\Rightarrow(x^2-2ax+a^2)-a^2-\tfrac{1}{2}y^2=1$$
$$\Rightarrow(x-a)^2-\tfrac{1}{2}y^2=1+a^2\Rightarrow\frac{(x-a)^2}{1+a^2}-\frac{y^2}{2(1+a^2)}=1$$
$$\Rightarrow\begin{cases}a'^2=1+a^2\\ b^2=2(1+a^2)\end{cases}\Rightarrow c^2=a'^2+b^2=1+a^2+2(1+a^2)=3(1+a^2)$$
$$\Rightarrow e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3(1+a^2)}}{\sqrt{1+a^2}}=\sqrt{3}$$

۶۱ **گزینه ۱**

نقطـهٔ تقاطع وتر گذرنـده از کانون و هـذلولی، یک مؤلفـهٔ مشترک با کانون دارد و چون مختصات نقطهٔ تقاطع در معادلهٔ هذلولی صدق می‌کند، پس با جایگـذاری در معادلـهٔ هذلولی به‌راحتی مؤلفهٔ دیگر آن نیز به دست می‌آید. اندازهٔ وتر برابر با فاصلـهٔ میان دو نقطهٔ تقاطع وتر و هذلولی است.

با استانداردکردن معادلهٔ هذلولی، مقدار پارامترهای مختلف آن و از جمله مختصات کانون هذلولی را تعیین می‌کنیم.

$$x^۲ - ۳y^۲ - ۲x = ۲ \Rightarrow (x^۲ - ۲x + ۱) - ۱ - ۳y^۲ = ۲ \Rightarrow (x-۱)^۲ - ۳y^۲ = ۳$$

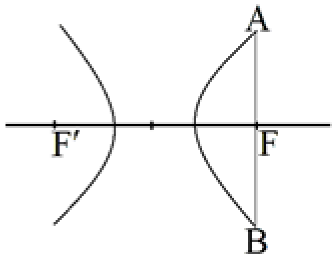
$$\Rightarrow \frac{(x-۱)^۲}{۳} - \frac{۳y^۲}{۳} = ۱ \Rightarrow \frac{(x-۱)^۲}{۳} - \frac{y^۲}{۱} = ۱$$

بنابراین یک هذلولی افقی با مرکز تقارن $(۱, ۰)$ داریم؛ به‌طوری‌که:

$$\begin{cases} a^۲ = ۳ \Rightarrow a = \sqrt{۳} \\ b^۲ = ۱ \Rightarrow b = ۱ \end{cases} \Rightarrow c^۲ = a^۲ + b^۲ = ۳ + ۱ = ۴ \Rightarrow c = ۲$$

دو نقطهٔ F و F' با مختصات زیر، کانون‌های هذلولی است:

$$F : (۱+۲, ۰) = (۳, ۰) \quad , \quad F' : (۱-۲, ۰) = (-۱, ۰)$$



مختصات دو نقطـهٔ تقاطع وتر رسم‌شده از کانون F و هـذلولی را تعیین می‌کنیم. طـول این دو نقطه برابر بـا طول F است. پس با جایگـذاری $x = ۳$ در معادلهٔ هذلولی مختصات A و B به دست می‌آید.

$$x^۲ - ۳y^۲ - ۲x = ۲ \xrightarrow{x=۳} ۹ - ۳y^۲ - ۶ = ۲ \Rightarrow -۳y^۲ = -۱ \Rightarrow y^۲ = \frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{۱}{۳}} = \pm\frac{\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow \begin{cases} A\,(۳, \frac{\sqrt{۳}}{۳}) \\ B(۳, -\frac{\sqrt{۳}}{۳}) \end{cases}$$

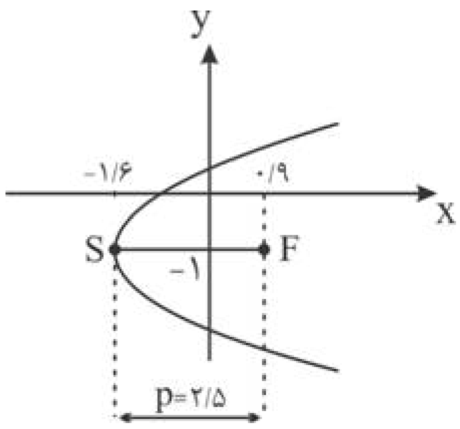
بنابراین اندازهٔ وتر AB برابر است با:

$$\sqrt{(۳-۳)^۲ + (\frac{\sqrt{۳}}{۳} + \frac{\sqrt{۳}}{۳})^۲} = \sqrt{(\frac{۲\sqrt{۳}}{۳})^۲} = \frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

۶۲ **گزینه ۲**

چون هر پرتو موازی محور xها که به سهمی می‌تابد به نقطهٔ $(۰/۹, ۱)$ بازمی‌تابد بنابراین کانون سهمی نقطهٔ $F(۰/۹, -۱)$ است. از آنجا که رأس سهمی نقطهٔ $(-۱/۶, -۱)$ است، نمودار سهمی را می‌توان به‌صورت زیر رسم کرد:



$$(y - y_S)^۲ = ۴p(x - x_S)$$
$$\Rightarrow (y - (-۱))^۲ = ۴(۲/۵)(x - (-۱/۶))$$

برای یافتن نقطهٔ تقاطع سهمی با محور عرض‌ها $x = ۰$ قرار می‌دهیم:

$$(y + ۱)^۲ = ۱۰(۰ + ۱/۶) \Rightarrow (y + ۱)^۲ = ۱۶$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y + ۱ = ۴ \Rightarrow y = ۳ \\ y + ۱ = -۴ \Rightarrow y = -۵ \end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

۶۳ **گزینه ۳**

در معادلهٔ گستردهٔ بیضی، خروج از مرکز به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\text{خروج از مرکز بیضی} = \sqrt{۱ - \frac{b^۲}{a^۲}} = \sqrt{۱ - \frac{\text{ضریب کوچک‌تر } x^۲ \text{ یا } y^۲}{\text{ضریب بزرگ‌تر } x^۲ \text{ یا } y^۲}}$$
$$= \sqrt{۱ - \frac{۱}{۴}} = \sqrt{\frac{۳}{۴}} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

۶۴ **گزینه ۳**

هر پرتوی که از نقطهٔ $(-\frac{۵}{۴},-۲)$ بتابد بازتاب آن در امتداد محور xها است پس این نقطه کانون سهمی می‌باشد. خط هادی سهمی به معادلهٔ $x=\frac{۱۳}{۴}$ است پس سهمی افقی بوده و دهانهٔ آن به سمت چپ باز می‌شود.

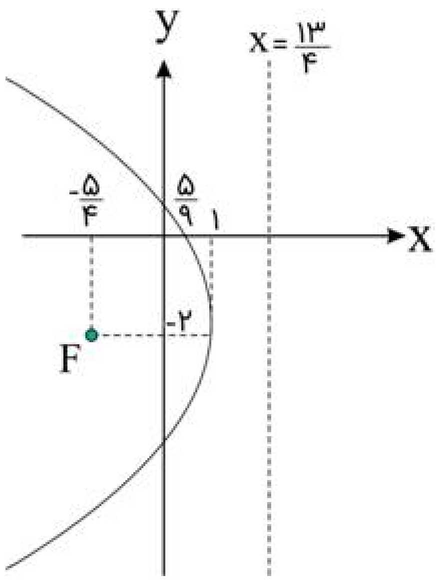
طول رأس سهمی وسط خط هادی و کانون سهمی می‌باشد و چون سهمی افقی است، عرض رأس آن با عرض کانون یکی می‌باشد پس $y_s=-۲$ و داریم:

$$X_S=\frac{\frac{۱۳}{۴}+\frac{-۵}{۴}}{۲}=۱\ ,\ S(۱,-۲)$$

(فاصلهٔ بین خط هادی و رأس) $P=\frac{۱۳}{۴}-۱=\frac{۹}{۴}$

$$\Rightarrow (y+۲)^۲=-۴P(x-۱)\Rightarrow (y+۲)^۲=-۴\left(\frac{۹}{۴}\right)(x-۱)\Rightarrow (y+۲)^۲=-۹x+۹$$

محل برخورد با محور xها : $y=۰\Rightarrow ۴=-۹x+۹\Rightarrow ۹x=۵\Rightarrow x=\frac{۵}{۹}$



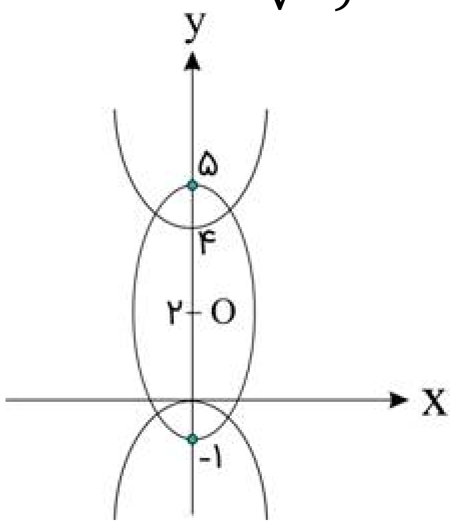
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

۶۵ **گزینه ۱**

ابتدا معادله را به شکل استاندارد تبدیل می‌کنیم.

$$5y^2 - 20y - 4x^2 = 0 \Rightarrow 5(y^2 - 4y + 4 - 4) - 4x^2 = 0$$
$$\Rightarrow 5(y-2)^2 - 20 - 4x^2 = 0 \Rightarrow 5(y-2)^2 - 4x^2 = 20$$
$$\Rightarrow \frac{(y-2)^2}{4} - \frac{x^2}{5} = 1 \Rightarrow O\Big|\begin{matrix}0\\2\end{matrix}$$ هذلولی قائم است

$$\left.\begin{matrix} a^2 = 4 \Rightarrow a = 2 \\ b^2 = 5 \Rightarrow b = \sqrt{5} \end{matrix}\right\} \Rightarrow c = \sqrt{4+5} = 3$$



در بیضی : $a = 3$ و $c = 2 \Rightarrow b = \sqrt{5}$ و $O\Big|\begin{matrix}0\\2\end{matrix}$

بیضی قائم است $\Rightarrow \dfrac{(x-0)^2}{5} + \dfrac{(y-2)^2}{9} = 1$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{5} + \frac{y^2 - 4y + 4}{9} = 1 \Rightarrow 9x^2 + 5y^2 - 20y + 20 = 45$$
$$\Rightarrow 9x^2 + 5y^2 - 20y = 25$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

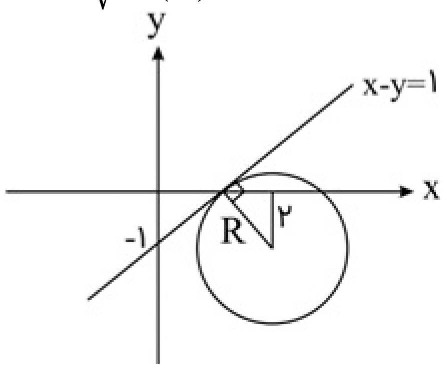
۶۶ گزینه ۱

فاصلهٔ مرکز دایره از خط مماس بر دایره برابر با شعاع دایره است. فاصلهٔ یک نقطه با مختصات $(x_\circ,y_\circ)$ از خط به معادلهٔ $ax+by+c=\circ$ برابر است با:

$$d=\frac{|ax_\circ+by_\circ+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

بنابراین شعاع دایره برابر است با:

$$R=\frac{|۲+۱-۱|}{\sqrt{۱^۲+(-۱)^۲}}=\sqrt{۲}$$



معادلهٔ دایره : $(x-۲)^۲+(y+۱)^۲=۲\xrightarrow{y=\circ}(x-۲)^۲=۱\Rightarrow\begin{cases}x-۲=۱\Rightarrow x=۳\\x-۲=-۱\Rightarrow x=۱\end{cases}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۶۷ گزینه ۴

معادلهٔ هذلولی را به شکل استاندارد می‌نویسیم:

$$kx^۲-۲(y^۲-۲y+۱-۱)=۴\Rightarrow kx^۲-۲(y-۱)^۲=۲\Rightarrow\frac{x^۲}{\frac{۲}{k}}-(y-۱)^۲=۱\xrightarrow{\frac{(x-x_S)^۲}{a^۲}-\frac{(y-y_S)^۲}{b^۲}=۱}\begin{cases}a^۲=\frac{۲}{k}\\b^۲=۱\end{cases}$$

$$\xrightarrow[c^۲=a^۲+b^۲]{e=\frac{c}{a}}e^۲=\frac{a^۲+b^۲}{a^۲}=۱+(\frac{b}{a})^۲\Rightarrow(\sqrt{۳})^۲=۱+\frac{k}{۲}\Rightarrow k=۴$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۶۸ گزینه ۲

سه رأس داده‌شده مربوط به مثلث قائم‌الزاویه است، زیرا:

$$\begin{cases}m_{AC}=\frac{۳}{۲}\\m_{BC}=-\frac{۲}{۳}\end{cases}$$

$$S=\frac{(AC)\times(BC)}{۲}\xrightarrow{AC=\sqrt{۴+۹}=\sqrt{۱۳},BC=\sqrt{۴+۹}=\sqrt{۱۳}}S=\frac{\sqrt{۱۳}\times\sqrt{۱۳}}{۲}=۶/۵$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۶۹ گزینه ۴

سهمی قائم با رأس: $S(\circ,\circ)$

$$x^{۲}=۴py\xrightarrow{A(۳\circ,۹)}(۳\circ)^{۲}=۴p(۹)$$
$$\Rightarrow ۹\circ\circ=۳۶p\Rightarrow p=۲۵$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۷۰ گزینه ۳

$$A(۳,۶)\ \ ,\ \ A'(۳,-۲)\xrightarrow{\text{هم‌طول}}\text{بیضی قائم}\ O'(۳,۲)$$
$$۲a=AA'=|۶-(-۲)|=۸\Rightarrow a=۴\Rightarrow\frac{c}{a}=\frac{۱}{۲}\xrightarrow{a=۴}c=۲$$
$$b^{۲}=a^{۲}-c^{۲}=۱۶-۴=۱۲$$
$$\frac{(x-۳)^{۲}}{۱۲}+\frac{(y-۲)^{۲}}{۱۶}=۱\xrightarrow{y=\circ}\frac{(x-۳)^{۲}}{۱۲}+\frac{۴}{۱۶}=۱\Rightarrow\begin{cases}x=\circ\\x=۶\end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۷۱ گزینه ۲

شرط اینکه دستگاه دارای بی‌شمار جواب باشد آن است که دو خط بر هم منطبق باشند یعنی:

$$\frac{m}{۳}=\frac{۱}{m-۲}=\frac{m-۱}{۴-۲m}\Rightarrow m=-۱$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۷۲ گزینه ۱

$$x^{۲}+y^{۲}+ax+by+c=\circ$$
$$\xrightarrow{(\circ,\circ)\ \text{را صدق می‌دهیم}}c=\circ$$
$$\xrightarrow{(۲,۱)\ \text{را صدق می‌دهیم}}۴+۱+۲a+b=\circ$$
$$\xrightarrow{(۱,-۲)\ \text{را صدق می‌دهیم}}۱+۴+a-۲b=\circ$$

اکنون با معلوم بودن مقادیر a، b و c شعاع دایره برابر است با:

$$\begin{array}{l}\xrightarrow{\times۲}۴a+۲b=-۱\circ\\ \quad a-۲b=-۵\end{array}\Rightarrow ۵a=-۱۵\Rightarrow a=-۳,b=۱$$
$$R=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^{۲}+b^{۲}-۴c}=\frac{۱}{۲}\sqrt{(-۳)^{۲}+(۱)^{۲}-۴(\circ)}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱\circ}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۷۳ **گزینه ۳**

در هر هذلولی یا بیضی با معادلهٔ $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$ طول وتری که از کانون گذشته و بر محور کانونی عمود می‌باشد (وتر کانونی) برابر با $D = \frac{2b^2}{a}$ است، پس داریم:

$$3x^2 - 6x - 4y^2 = 9 \Rightarrow 3(x^2 - 2x) - 4y^2 = 9 \Rightarrow 3(x-1)^2 - 3 - 4y^2 = 9$$

$$\Rightarrow 3(x-1)^2 - 4y^2 = 12 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1 \Rightarrow a = 2, b = \sqrt{3} \Rightarrow D = \frac{2b^2}{a} = \frac{6}{2} = 3$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۷۴ **گزینه ۴**

$$\begin{cases} y = 2^x \\ y = (\sqrt{2})^{x+1} + 4 \end{cases} \Rightarrow 2^x = \sqrt{2} \times 2^{\frac{x}{2}} + 4 \xrightarrow{2^{\frac{x}{2}} = t} t^2 = \sqrt{2}t + 4 \Rightarrow t^2 - \sqrt{2}t - 4 = 0$$

$$\Rightarrow t = \frac{\sqrt{2} \pm 3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} t = 2\sqrt{2} \\ t = -\sqrt{2} \text{ غقق} \end{cases}$$

$$2^{\frac{x}{2}} = t \xrightarrow{t = 2\sqrt{2}} 2^{\frac{x}{2}} = 2^{\frac{3}{2}} \Rightarrow x = 3 \Rightarrow y = 2^3 = 8$$

$$d = \sqrt{(3-0)^2 + (8-4)^2} = \sqrt{25} = 5$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۷۵ **گزینه ۴**

فاصلهٔ نقطهٔ A را از خط راست به دست می‌آوریم. فاصلهٔ به‌دست‌آمده نصف اندازهٔ ضلع مربع است.

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow d = \frac{2 + 3 + 5}{\sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{5}}$$

$$d = \frac{a}{2} \Rightarrow a = 2d = \frac{20}{\sqrt{5}} \Rightarrow s = a^2 = \left(\frac{20}{\sqrt{5}}\right)^2 = 80$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۷۶ **گزینه ۲**

ابتدا معادلهٔ دایره را به‌صورت استاندارد می‌نویسیم.

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 - 1 - 4 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 4 \Rightarrow O_1 : (1, -2), R_1 = 2$$

چون دو دایره مماس خارج هستند، بنابراین فاصلهٔ مراکز آن‌ها از یکدیگر برابر مجموع اندازه‌های شعاع‌های آن‌ها است.

$$O_1O_2 = R_1 + R_2 \Rightarrow \sqrt{(1-(-2))^2 + (-2-2)^2} = 2 + R_2 \Rightarrow 5 = 2 + R_2 \Rightarrow R_2 = 3$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۷۷ **گزینه ۱**

ابتدا معادلهٔ هذلولی را به دست می‌آوریم. باتوجه‌به اینکه کانون‌های هذلولی، روی خط $x = ۲$ قرار دارند، بنابراین هذلولی از نوع قائم است.

$$\frac{(y-y_{\circ})^{۲}}{a^{۲}} - \frac{(x-x_{\circ})^{۲}}{b^{۲}} = ۱$$

$$\left.\begin{array}{l} ۲a = ۶ \Rightarrow a = ۳ \\ ۲c = ۶ - (-۴) \Rightarrow c = ۵ \\ x_{\circ} = ۲, y_{\circ} = \dfrac{۶-۴}{۲} = ۱ \end{array}\right\} \Rightarrow b^{۲} = c^{۲} - a^{۲} = ۵^{۲} - ۳^{۲} = ۴^{۲}$$

بنابراین معادلهٔ هذلولی به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{(y-۱)^{۲}}{۳^{۲}} - \frac{(x-۲)^{۲}}{۴^{۲}} = ۱ \xrightarrow{x=۵} \frac{(y-۱)^{۲}}{۳^{۲}} = ۱ + \frac{۳^{۲}}{۴^{۲}} = \frac{۳^{۲}+۴^{۲}}{۴^{۲}}$$

$$\Rightarrow \frac{(y-۱)^{۲}}{۳^{۲}} = \frac{۵^{۲}}{۴^{۲}} \Rightarrow \frac{y-۱}{۳} = \pm\frac{۵}{۴} \Rightarrow y = ۱ \pm \frac{۱۵}{۴}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۷۸ **گزینه ۲**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

گام اول

سهمی یک سهمی افقی است، چون سهمی از نقطهٔ $(۵,۹)$ عبور می‌کند، دهانهٔ سهمی به‌سمت راست است.

گام دوم

معادلهٔ سهمی را تشکیل می‌دهیم:

$$(y-۳)^{۲} = ۴p(x+۱) \xrightarrow[y=۹]{x=۵} (۹-۳)^{۲} = ۴p(۵+۱)$$

$$\Rightarrow ۳۶ = ۴p \times ۶ \Rightarrow ۳۶ = ۲۴p \Rightarrow p = \frac{۳}{۲}$$

فاصلهٔ کانون تا خط هادی برابر $۲p$ است:

$$۲p = ۲ \times \frac{۳}{۲} = ۳$$

۷۹ **گزینه ۲**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

گام اول

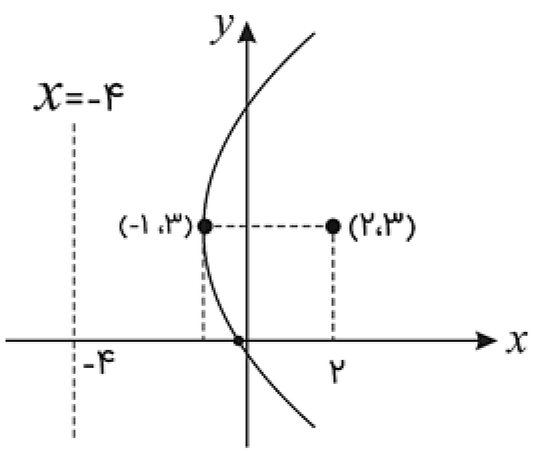
خط گذرا بر کانون و عمود بر محور کانونی همان وتر کانونی است. در معادلهٔ استاندارد بیضی، اندازهٔ وتر کانونی از رابطهٔ $\frac{2b^2}{a}$ به دست می‌آید.

گام دوم

$$16y^2 + 5x^2 - 10x = 75 \Rightarrow 16y^2 + 5(x^2 - 2x) = 75$$
$$\Rightarrow 16y^2 + 5(x-1)^2 - 5 = 75 \Rightarrow 16y^2 + 5(x^2 - 2x + 1) = 75 + 5$$
$$\Rightarrow 16y^2 + 5(x-1)^2 = 80 \xrightarrow{\div 80} \frac{y^2}{5} + \frac{(x-1)^2}{16} = 1$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 = 16 \\ b^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow MN = \frac{2b^2}{a} = \frac{2\times 5}{4} = \frac{5}{2} = 2/5$$

۸۰ **گزینه ۲**

سهمی افقی و دهانه به سمت راست باز می‌شود.



$$2P = 6 \Rightarrow P = 3 \Rightarrow S(-1, 3)$$
$$(y-3)^2 = 12(x+1) \xrightarrow[y=0]{\text{محور } x\text{ها}} 9 = 12(x+1) \Rightarrow x + 1 = \frac{3}{4} \Rightarrow \underline{x = \frac{-1}{4}}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۸۱ **گزینه ۱**

باتوجه‌به مختصات کانون‌های بیضی، بیضی قائم است، بنابراین مختصات مرکز بیضی به‌صورت $(۱, ۰)$ می‌باشد، بنابراین داریم:

$$F(۱, -۱)\ ,\ \ F'(۱, ۱) \Rightarrow ۲c = ۲ \Rightarrow \underline{c = ۱}$$

$$\xrightarrow{\text{باتوجه‌به فرض}} e = \frac{۱}{۲} = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{a} \Rightarrow \underline{a = ۲}$$

بیضی قائم $\Rightarrow a^۲ = b^۲ + c^۲ \Rightarrow ۴ = b^۲ + ۱ \Rightarrow \underline{b = \sqrt{۳}}$

بنابراین معادلهٔ بیضی به مرکز $(۱, ۰)$ به‌صورت:

$$\frac{(y-\beta)^۲}{a^۲} + \frac{(x-\alpha)^۲}{b^۲} = ۱ \Rightarrow \frac{(y)^۲}{۴} + \frac{(x-۱)^۲}{۳} = ۱$$

$$\xrightarrow{y=۲x} \frac{(۲x)^۲}{۴} + \frac{(x-۱)^۲}{۳} = ۱ \Rightarrow \frac{۴x^۲}{۴} + \frac{(x-۱)^۲}{۳} = ۱ \Rightarrow x^۲ + \frac{(x-۱)^۲}{۳} = ۱$$

$$\Rightarrow ۳x^۲ + x^۲ - ۲x + ۱ = ۳ \Rightarrow ۴x^۲ - ۲x - ۲ = ۰ \Rightarrow ۲x^۲ - x - ۱ = ۰$$

$$\Rightarrow (۲x+۱)(x-۱) = ۰ \Rightarrow x = -\frac{۱}{۲}\ ,\ \ x = ۱$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

منبع: کنکور سراسری

۱ حاصل $\int_{-1}^{2} [x]\,|x|\,dx$ کدام است؟ (نماد [] به مفهوم جزء صحیح است.)

۱) $\frac{1}{2}$
۲) ۱
۳) $\frac{3}{2}$
۴) ۲

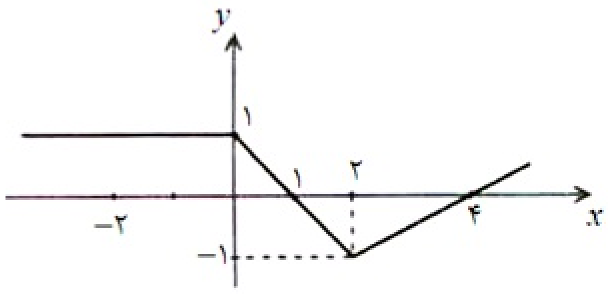
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۲ اگر $\int \frac{5x^2+3x}{\sqrt{x}}\,dx = x\sqrt{x}f(x)+C$ باشد، آنگاه $f(x)$ کدام است؟

۱) $x+2$
۲) $x+3$
۳) $2x+2$
۴) $2x+3$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

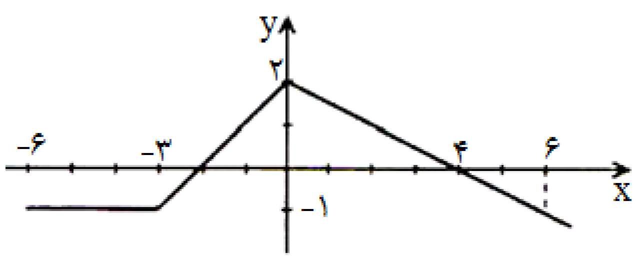
۳ شکل زیر، نمودار تابع f است. حاصل $\int_{-2}^{4} f(x)dx$ کدام است؟



۱) $\frac{1}{2}$
۲) $-\frac{1}{2}$
۳) ۱
۴) $\frac{3}{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۱

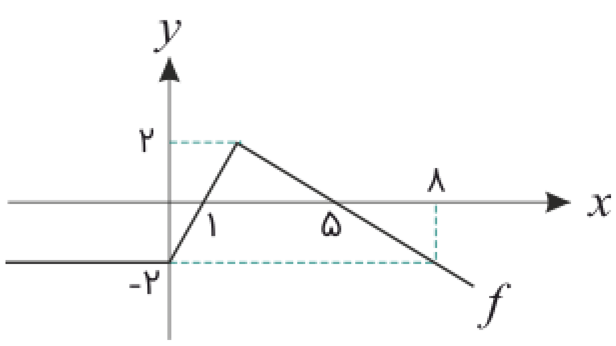
۴ شکل زیر، نمودار تابع f است. $\int_{-6}^{6} f(x)dx$ برابر کدام است؟



۱) ۱
۲) $\frac{1}{2}$
۳) $\frac{3}{2}$
۴) $\frac{5}{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

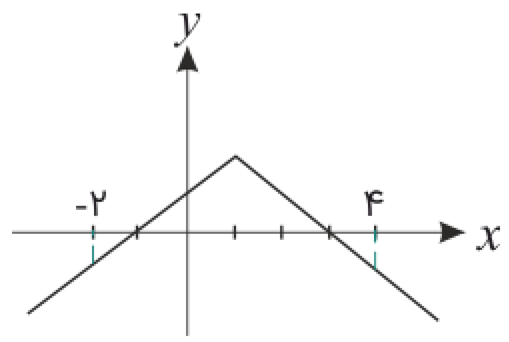
۵ شکل زیر، نمودار تابع f است. حاصل $\int_{0}^{8} f(x)dx$ کدام است؟



۱) $\frac{-1}{2}$
۲) صفر
۳) $\frac{1}{2}$
۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

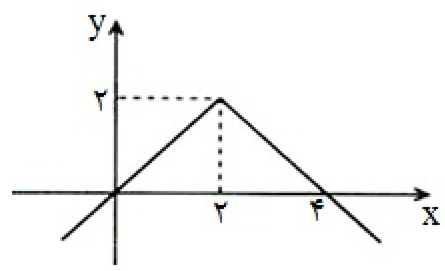
۶ باتوجه‌به نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = ۲ - |x - ۱|$، حاصل انتگرال معین $\int_{-۲}^{۴} f(x)dx$ کدام است؟



۱) ۲
۲) $\frac{۵}{۲}$
۳) ۳
۴) $\frac{۷}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۹

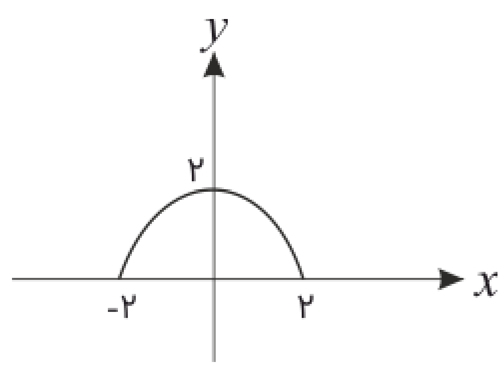
۷ باتوجه‌به شکل زیر، حاصل $\int_{۰}^{۴} (۲ - |x - ۲|)dx$ کدام است؟



۱) ۲
۲) ۳
۳) ۳/۵
۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

۸ باتوجه‌به شکل زیر، حاصل $\int_{-۲}^{۲} \sqrt{۴ - x^۲}dx$ کدام است؟



۱) $۲\pi - ۲$
۲) $\pi + ۲$
۳) ۲π
۴) ۴π

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۹ حاصل $\int_{-۲}^{۲} (۲x + |x|)dx$ کدام است؟

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۶
۴) ۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

۱۰ اگر $f(x) = |x| + |x + ۱|$، حاصل $\int_{-۱}^{۲} f(x)dx$ کدام است؟

۱) ۵
۲) ۶
۳) ۶/۵
۴) ۷

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۱۱ حاصل $\int_{-۲}^{۲} (۲ - [x])dx$ کدام است؟

۱) ۶
۲) ۸
۳) ۱۰
۴) ۱۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

۱۲ حاصل $\int_{-2}^{1}[x]x dx$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$
۲) $\frac{5}{2}$
۳) $\frac{7}{2}$
۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

۱۳ حاصل $\int_{-2}^{2}(x+[x])dx$، کدام است؟

۱) ۲-
۲) صفر
۳) ۲
۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

۱۴ اگر $f(x)=|x|-[x]$، آنگاه حاصل $\int_{-1}^{2}f(x)dx$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$
۲) ۲
۳) $\frac{5}{2}$
۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

۱۵ اگر $f(x)=(x+|x|)[x]$، آنگاه $\int_{-1}^{2}f(x)dx$ برابر کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۴

۱۶ اگر $\int x(1-5\sqrt{x})dx=\frac{x^2}{2}.f(x)+c$ تابع $f(x)$ کدام است؟

۱) $1-4\sqrt{x}$
۲) $1-2\sqrt{x}$
۳) $x-2\sqrt{x}$
۴) $x-x\sqrt{x}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵

۱۷ اگر $\int\frac{1-x}{\sqrt{x}}dx=\frac{2}{3}\sqrt{x}f(x)+c$، آنگاه $f(x)$ کدام است؟

۱) $2-3x$
۲) $2-x$
۳) $3-x$
۴) $3-2x$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

۱۸ اگر $\int\frac{1-x}{x\sqrt{x}}dx=\frac{2f(x)}{\sqrt{x}}+c$، آنگاه $f(x)$ کدام است؟

۱) $-x-1$
۲) $x-2$
۳) $x+1$
۴) $2x-1$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۱۹ اگر $\int \frac{x^{2}+1}{x\sqrt{x}}dx = \frac{f(x)}{3\sqrt{x}} + c$، آنگاه $f(x)$ کدام است؟

۱) $2x-3$
۲) $3x+2$
۳) $2x^{2}-6$
۴) $2x^{2}+3$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

۲۰ اگر $\int \frac{5x^{2}-3x}{\sqrt{x}}dx = f(x)(2x\sqrt{x}) + C$، آنگاه $f(x)$ کدام است؟

۱) $x-2$
۲) $x-1$
۳) $3x-2$
۴) $5x-3$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

۲۱ اگر $\int (3\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})dx = \sqrt{x}f(x) + c$، آنگاه $f(x)$ کدام است؟

۱) $3x-1$
۲) $3x-3$
۳) $2x-2$
۴) $x-2$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

۲۲ با شرط $x > 1$ داریم: $\int \frac{3-3x}{1-\sqrt{x}}dx = x.f(x) + c$، $f(x)$ برابر کدام است؟

۱) $3+2\sqrt{x}$
۲) $3+\sqrt{x}$
۳) $3x-\sqrt{x}$
۴) $2x-3\sqrt{x}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۲۳ اگر $\int \frac{(1+\sqrt{x})^{2}-x}{\sqrt{x}}dx = \sqrt{x}.f(x) + c$، آنگاه $f(x)$ برابر کدام است؟

۱) $1+\sqrt{x}$
۲) $1+2\sqrt{x}$
۳) $2+\sqrt{x}$
۴) $2+2\sqrt{x}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

۲۴ اگر $\int \frac{3x-2}{\sqrt{x}}dx = f(x).\sqrt{x} + c$، آنگاه $f(x)$ برابر کدام است؟

۱) $2x-1$
۲) $2x-4$
۳) $2x-2$
۴) $2x-3$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۲

۲۵ اگر $\int \frac{4x-4}{3\sqrt[3]{x^{2}}}dx = \sqrt[3]{x}.f(x) + c$، آنگاه $f(x)$ کدام است؟

۱) $x-4$
۲) $x-2$
۳) $2x-1$
۴) $4x-1$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

۲۶ اگر $\int \frac{(1-\sqrt{x})^2}{2\sqrt{x}}dx = \sqrt{x}.f(x) + c$، آنگاه $f(x)$ کدام است؟

۱) $1 - \sqrt{x} + \frac{1}{3}x$
۲) $1 + \sqrt{x} - \frac{1}{3}x$
۳) $2 - \sqrt{x} + \frac{2}{3}x$
۴) $2 - \sqrt{x} + 3x$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۹

۲۷ حاصل $\int \frac{\sin^2 x}{1-\cos x}dx$ برابر کدام است؟

۱) $x + \sin x + c$
۲) $x - \sin x + c$
۳) $-x + \cos x + c$
۴) $x - \cos x + c$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

۲۸ با شرط $x \neq k\pi + \frac{\pi}{4}$ حاصل $\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}dx$ کدام است؟

۱) $\sin x + \cos x + c$
۲) $\sin x - \cos x + c$
۳) $-\sin x + \cos x + c$
۴) $-\sin x - \cos x + c$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

۲۹ با شرط $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$، حاصل $\int \sqrt{1 + \tan^2 x}\sin 2x dx$ کدام است؟

۱) $-2\cos x + c$
۲) $-2\sin x + c$
۳) $2\cos x + c$
۴) $2\sin x + c$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۳۰ اگر $G(x) = \int_2^x \frac{t}{\sqrt{1+t^3}}dt$، آنگاه مشتق راست تابع $y = x.G(x)$ در نقطهٔ $x = 2$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$
۲) $\frac{2}{3}$
۳) $\frac{4}{3}$
۴) $\frac{5}{3}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

۳۱ حاصل $\int_0^1 (\sqrt[3]{x} + \frac{1}{(1+x)^2})dx$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$
۲) $\frac{5}{4}$
۳) $\frac{3}{4}$
۴) $\frac{5}{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۴

۳۲ حاصل $\int_1^2 (1 - \frac{1}{x})^2 dx$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2} - \ln 2$
۲) $\frac{3}{2} - \ln 4$
۳) $\frac{-1}{2} - \ln 2$
۴) $\frac{-1}{2} - \ln 4$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

۳۳ حاصل $\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۶}} (cos^{۲}x - sin^{۲}x)dx$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\sqrt{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۲

۳۴ مساحت ناحیهٔ محصور بین نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} x & ; \ -۲ \leq x < \circ \\ x^{۲} & ; \ \circ \leq x \leq ۳ \end{cases}$ محور xها و دو خط $x = -۲$ و $x = ۳$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۹

۳) ۱۰ ۴) ۱۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

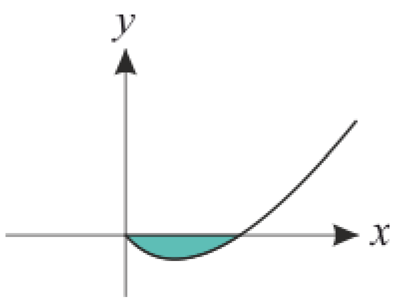
۳۵ مساحت ناحیهٔ محدود به نمودار تابع $f(x) = |۲x - ۱|$ و محور xها و دو خط $x = ۱$ و $x = -۱$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) ۲

۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۳۶ باتوجه‌به نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = x - \sqrt{x}$، مساحت ناحیهٔ سایه‌زده، کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۶}$

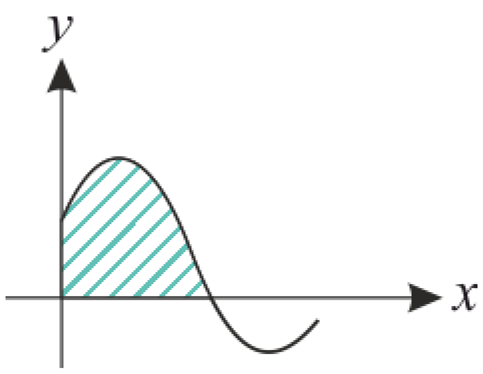
۲) $\frac{۱}{۴}$

۳) $\frac{۱}{۳}$

۴) $\frac{۲}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

۳۷ باتوجه‌به قسمتی از نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = sin\,x + cos\,x$ در شکل زیر، مساحت ناحیهٔ سایه‌زده‌شده کدام است؟



۱) $۲ - \sqrt{۲}$

۲) $\sqrt{۲}$

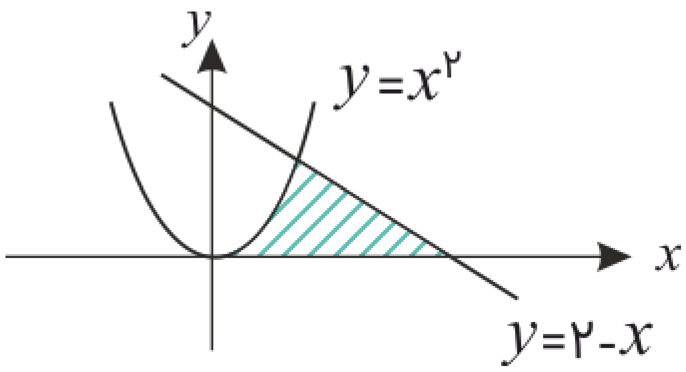
۳) ۲

۴) $۱ + \sqrt{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

نام و نام خانوادگی:

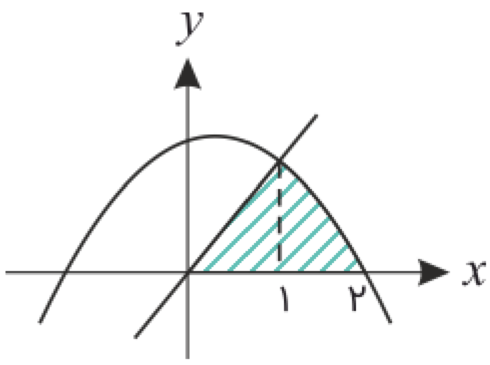
۳۸ باتوجه‌به شکل زیر، مساحت ناحیهٔ سایه‌زده چقدر است؟



۱) $\frac{۴}{۳}$
۲) $\frac{۷}{۶}$
۳) $\frac{۵}{۶}$
۴) $\frac{۲}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

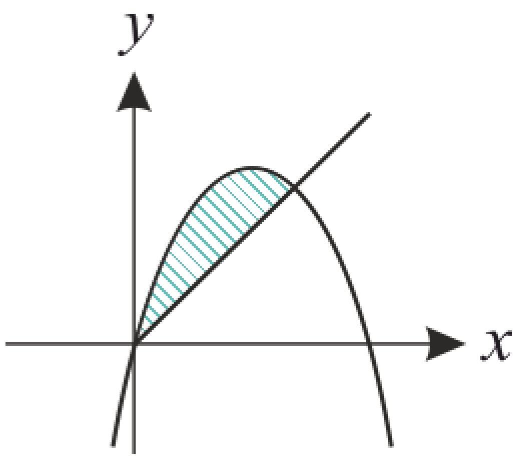
۳۹ مساحت ناحیهٔ محدود به منحنی $y = ۴ - x^{۲}$ و خط به معادلهٔ $y = ۳x$ و محور xها در ناحیهٔ اول کدام است؟



۱) $\frac{۱۳}{۶}$
۲) $\frac{۷}{۳}$
۳) $\frac{۸}{۳}$
۴) $\frac{۱۹}{۶}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵

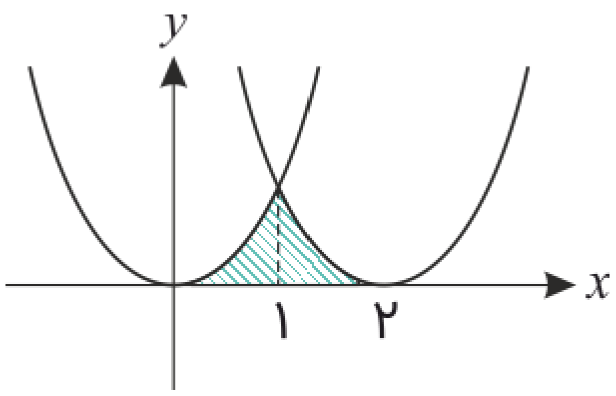
۴۰ مساحت ناحیهٔ زیر منحنی به معادلهٔ $y = -x^{۲} + ۵x$ و بالای خط $y = x$ کدام است؟



۱) $\frac{۱۶}{۳}$
۲) $\frac{۲۲}{۳}$
۳) $\frac{۲۸}{۳}$
۴) $\frac{۳۲}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

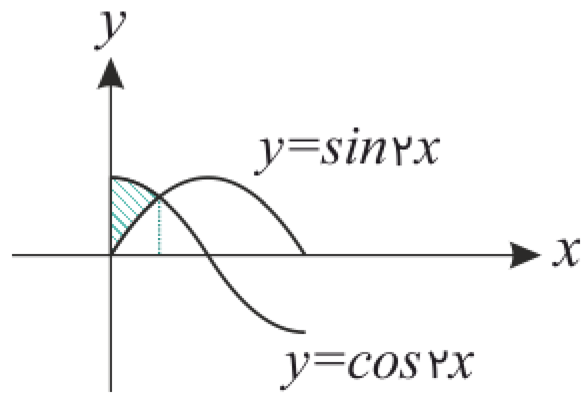
۴۱ مساحت ناحیهٔ محدود به منحنی به معادلات $y = x^{۲}$ و $y = (x - ۲)^{۲}$ و محور xها کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۳}$
۲) $\frac{۲}{۳}$
۳) ۱
۴) $\frac{۴}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

۴۲ مساحت ناحیهٔ هاشورزدهٔ شکل زیر، کدام است؟



۱) $۲-\sqrt{۲}$
۲) $\sqrt{۲}-۱$
۳) $\frac{۱}{۲}(۲-\sqrt{۲})$
۴) $\frac{۱}{۲}(\sqrt{۲}-۱)$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۰

۴۳ مقدار انتگرال معین $\int_{-۱}^{۳}(x+[x])dx$ کدام است؟

۱) ۵
۲) ۵/۵
۳) ۶
۴) ۶/۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۴۴ اگر $\int \frac{(۱+\sqrt{x})^{۳}-۱}{x}dx = ۳\sqrt{x}.f(x)+c$ باشد، $f(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}x+۳\sqrt{x}+۲$
۲) $\frac{۲}{۳}x+\sqrt{x}+۶$
۳) $\frac{۲}{۹}x+۳\sqrt{x}+۶$
۴) $\frac{۲}{۹}x+\sqrt{x}+۲$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۴۵ حاصل $\int_{۰}^{\pi}\frac{dx}{\sqrt{۱+tan^{۲}x}}$ برابر کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) π
۴) صفر

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

۴۶ اگر $\int \frac{۷x^{۲}-۴x}{\sqrt[۳]{x^{۲}}}dx = ۳\sqrt[۳]{x}f(x)+c$ باشد، آنگاه $f(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}x^{۲}-۲x$
۲) $\frac{۲}{۳}x^{۲}-۱$
۳) $x^{۲}-x$
۴) $x^{۲}-۲$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

۴۷ حاصل $\int_{۰}^{۲\pi}\sqrt{۲-۲\cos x}dx$، کدام است؟

۱) ۲
۲) ۴
۳) ۶
۴) ۸

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

۴۸ اگر $\int \frac{4x^2-1}{\sqrt[3]{x}}dx = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}f(x)+c$، آنگاه $f(x)$ کدام است؟

۱) $2x^2-x$
۲) x^2-x
۳) x^2-1
۴) $2x^2-1$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

۴۹ حاصل $\int_{-1}^{1}(|3x|-[x])dx$ کدام است؟ (نماد [ ] به مفهوم جزء صحیح است)

۱) $\frac{5}{2}$
۲) ۳
۳) $\frac{7}{2}$
۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۵۰ اگر $\int \frac{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x})}{x^2}dx = \frac{1}{\sqrt{x}}f(x)+C$ باشد، آنگاه $f(x)$ کدام است؟

۱) $2x+2$
۲) $2x-1$
۳) $x-2$
۴) $x+2$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۵۱ مقدار انتگرال معیّن $\int_{-2}^{1}(|x|-[x])dx$ کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است)

۱) ۴
۲) ۴/۵
۳) ۵
۴) ۵/۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۵۲ اگر $\int \left(\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right)^2 dx = \frac{f(x)}{2x}+C$ باشد، $f(x)$ کدام است؟

۱) $x^3-8x\sqrt{x}+2$
۲) $x^3-4x\sqrt{x}+2$
۳) $x^3-8x\sqrt{x}-2$
۴) $x^3-4x\sqrt{x}-2$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۵۳ اگر $f(x)=x-|x-2|$ باشد، حاصل $\int_0^4 f(x)dx$ کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

۵۴ اگر $\int \left(3x+\frac{1}{x}\right)^2 dx = \frac{1}{x}f(x)+C$ باشد، آنگاه $f(x)$ کدام است؟

۱) $3x^3+6x^2-1$
۲) $3x^3+3x-1$
۳) $3x^4+3x^2-1$
۴) $3x^4+6x^2-1$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

۵۵ اگر $f(x) = |x-2| - 2$ باشد، حاصل $\int_0^6 f(x)dx$، کدام است؟

۱) $-2/5$

۲) -2

۳) $-1/5$

۴) -1

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۵۶ اگر $\int \frac{x-1}{x^3}dx = \frac{1}{2x^2}f(x) + C$ باشد، آنگاه $f(x)$ کدام است؟

۱) $-2x+1$

۲) $-x+2$

۳) $x-2$

۴) $2x-1$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

منبع: کنکور سراسری

۱ **گزینه ۲**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

گام اول

الف) تابع $y = [x]$ در نقاط صحیح ناپیوسته است.

ب) می‌دانیم: $|x| = \begin{cases} x & ;x \geq ۰ \\ -x & ;x < ۰ \end{cases}$

گام دوم

با توجه به وجود $[x]$ و $|x|$، محدودهٔ انتگرال‌گیری را به سه زیر بازهٔ $(-۱, ۰)$، $(۰, ۱)$ و $(۱, ۲)$ تقسیم می‌کنیم؛ بنابراین داریم:

$$\int_{-۱}^{۲} [x]|x|dx = \int_{-۱}^{۰} [x]|x|dx + \int_{۰}^{۱} [x]|x|dx + \int_{۱}^{۲} [x]|x|dx$$

$$= \int_{-۱}^{۰} (-۱)(-x)dx + ۰ + \int_{۱}^{۲} xdx = \frac{x^۲}{۲}\Big]_{-۱}^{۰} + \frac{x^۲}{۲}\Big]_{۱}^{۲} =$$

$$\left(۰ - \frac{۱}{۲}\right) + \left(۲ - \frac{۱}{۲}\right) = -\frac{۱}{۲} + \frac{۳}{۲} = ۱$$

۲ **گزینه ۳**

ابتدا حاصل انتگرال داده‌شده را به‌دست می‌آوریم:

$$\int \frac{۵x^۲ + ۳x}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{۵x^۲ + ۳x}{x^{\frac{۱}{۲}}}dx = \int \left(\frac{۵x^۲}{x^{\frac{۱}{۲}}} + \frac{۳x}{x^{\frac{۱}{۲}}}\right)dx = \int \left(۵x^{\frac{۳}{۲}} + ۳x^{\frac{۱}{۲}}\right)dx =$$

$$۵\left(\frac{x^{\frac{۵}{۲}}}{\frac{۵}{۲}}\right) + ۳\left(\frac{x^{\frac{۳}{۲}}}{\frac{۳}{۲}}\right) + C = ۲x^{\frac{۵}{۲}} + ۲x^{\frac{۳}{۲}} + C$$

برای اینکه ضابطهٔ $f(x)$ را به دست آوریم از $x\sqrt{x}$ فاکتور می‌گیریم، داریم:

$$۲x^{\frac{۵}{۲}} + ۲x^{\frac{۳}{۲}} + C = x\sqrt{x}\,(۲x + ۲) + C$$

بنابراین ضابطهٔ $f(x)$ به‌صورت $f(x) = ۲x + ۲$ است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۳ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۱

گام اول

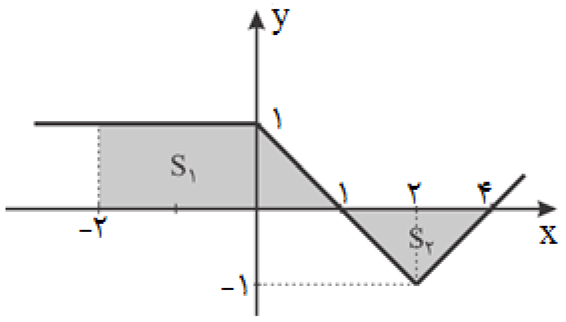
الف) حاصل $\int_{-2}^{4} f(x)dx$ برابر است با مساحت سطح زیر نمودار تابع $f(x)$ در بازهٔ $[-2,4]$.

ب) در محاسبهٔ سطح زیر نمودار برای به دست آوردن حاصل انتگرال، مساحت سطوحی که پایین محور xها قرار دارند را منفی و مساحت سطوحی که بالای محور xها قرار دارند را مثبت در نظر می‌گیریم.

گام دوم

باتوجه‌به گام اول، مجموع مساحت ذوزنقهٔ بالای محور xها با علامت مثبت و مساحت مثلث پایین محور xها با علامت منفی را به دست می‌آوریم.

$$\int_{-2}^{4} f(x)dx = S_1 - S_2 = \frac{1}{2}(3+2)\times 1 - \frac{1}{2}\times 1\times 3$$
$$= \frac{5}{2} - \frac{3}{2} = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow \int_{-2}^{4} f(x)dx = 1$$



۴ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

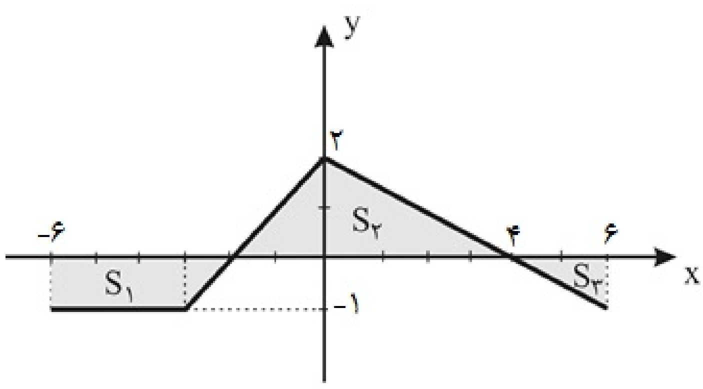
گام اول

حاصل $\int_{-6}^{6} f(x)dx$ برابر است با مساحت سطح محصور بین نمودار تابع $f(x)$ و محور xها در بازهٔ $[-6,6]$.

گام دوم

در محاسبهٔ مساحت زیر نمودار، دقت کنید که مساحت سطح‌هایی که پایین محور xها قرار دارند با علامت منفی و مساحت سطح‌هایی که بالای محور xها قرار دارند با علامت مثبت در نظر گرفته می‌شوند. حاصل انتگرال با جمع جبری مساحت‌ها برابر است.

$$\int_{-6}^{6} f(x)dx = -S_1 + S_2 - S_3 = -\frac{(4+3)\times 1}{2} + \frac{2\times 6}{2} - \frac{2\times 1}{2}$$
$$= -\frac{7}{2} + 6 - 1 = \frac{3}{2} \Rightarrow \int_{-6}^{6} f(x)dx = \frac{3}{2}$$



۵ **گزینه ۲**

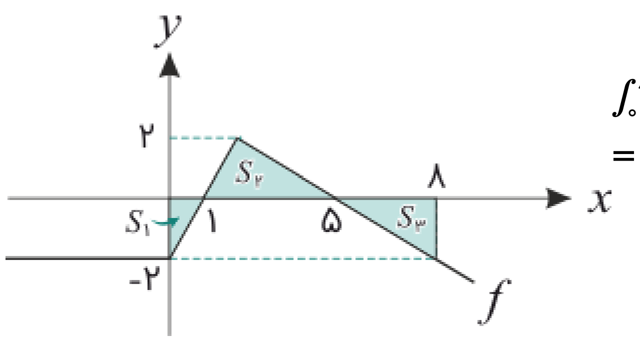
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

گام اول

الف) حاصل $\int_{\circ}^{\lambda} f(x)dx$ برابر است با مساحت سطح محصور بین نمودار تابع $f(x)$ و محور xها در بازهٔ $[\circ, \lambda]$.

ب) مساحت سطحی که پایین محور xها قرار دارد، منفی و مساحت سطحی که بالای محور xها قرار دارد مثبت، در نظر گرفته می‌شود.

گام دوم



$$\int_{\circ}^{۸} f(x)dx = -S_۱ + S_۲ - S_۳ = S_۲ - S_۱ - S_۳$$
$$= \frac{۲\times۴}{۲} - \frac{۲\times۱}{۲} - \frac{۲\times۳}{۲} = ۴ - ۱ - ۳ = \circ$$

پس حاصل انتگرال $\int_{\circ}^{۸} f(x)dx$ برابر صفر می‌شود.

۶ **گزینه ۳**

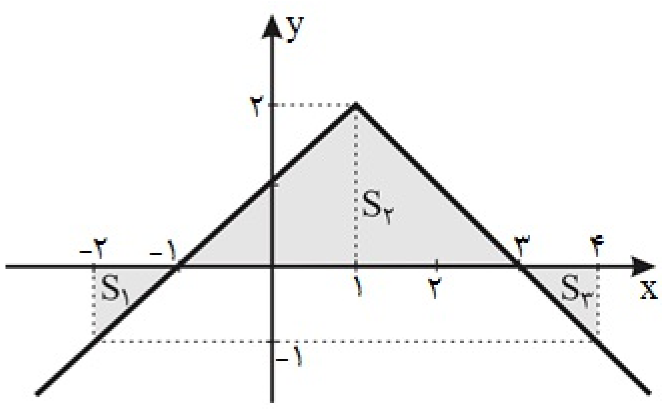
برای به دست آوردن حاصل انتگرال معین $\int_{-۲}^{۴} f(x)dx$ باید مساحت سطح محصور بین نمودار تابع $f(x) = ۲ - |x - ۱|$ و محور xها را در بازهٔ $[-۲, ۴]$ مشخص کنیم. ابتدا باید نقاط برخورد تابع $f(x)$ با محور xها و همچنین بیشترین مقدار تابع را تعیین کنیم.

$$f(x) = \circ \Rightarrow ۲ - |x - ۱| = \circ \Rightarrow |x - ۱| = ۲ \Rightarrow \begin{cases} x - ۱ = ۲ \Rightarrow x = ۳ \\ x - ۱ = -۲ \Rightarrow x = -۱ \end{cases}$$

برای اینکه حاصل $f(x) = ۲ - |x - ۱|$ بیشترین مقدار باشد، باید حاصل قدر مطلق صفر باشد؛ بنابراین داریم:

$$x - ۱ = \circ \Rightarrow x = ۱ \Rightarrow f(۱) = ۲ - \circ = ۲$$

حالا شکل را کامل کرده و حاصل انتگرال معین را به دست می‌آوریم.



$$\int_{-۲}^{۴} f(x)dx = -S_۱ + S_۲ - S_۳ = S_۲ - S_۱ - S_۳$$
$$= \frac{۴\times۲}{۲} - \frac{۱\times۱}{۲} - \frac{۱\times۱}{۲} = ۴ - \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲} = ۳$$
$$\Rightarrow \int_{-۲}^{۴} f(x)dx = ۳$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۹

۷ گزینه ۴

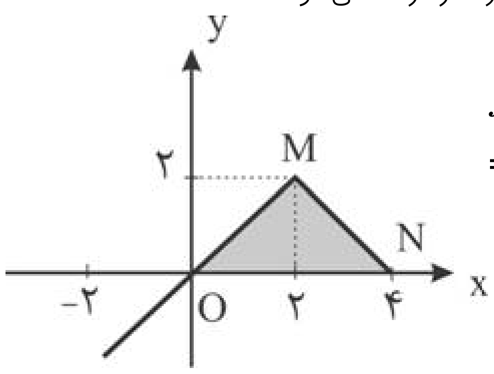
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

گام اول

حاصل انتگرال معین داده‌شده، برابر با مساحت سطح محصور بین نمودار تابع و محور xها در بازهٔ $[0, 4]$ است.

گام دوم

سطح محصور بین نمودار تابع و محور xها، مساحت مثلث OMN است و چون بالای محور قرار دارد، با علامت مثبت در نظر گرفته می‌شود.



$$\int_0^4 (2 - |x - 2|)dx = S_{\overset{\Delta}{OMN}} = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4$$
$$\Rightarrow \int_0^4 (2 - |x - 2|)dx = 4$$

۸ گزینه ۳

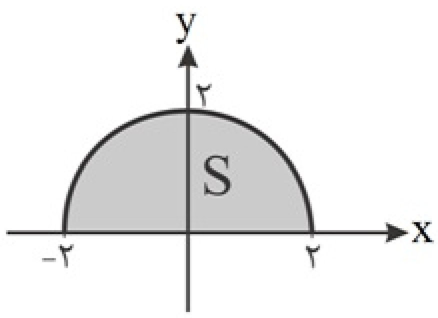
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

گام اول

حاصل انتگرال معین داده‌شده، برابر با مساحت سطح محصور بین نمودار تابع و محور xها در بازهٔ $[-2, 2]$ است.

گام دوم

نمودار تابع $f(x)$ در بازهٔ $[-2, 2]$ یک نیم‌دایره به شعاع ۲ است. برای محاسبهٔ حاصل انتگرال معین $\int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2}dx$، کافی است مساحت نیم‌دایره‌ای که بالای محور xها قرار گرفته است را به دست آوریم. چون سطح محصور بین نمودار تابع و محور xها بالای محور قرار دارد، پس حاصل انتگرال مثبت است.



$$\int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2}dx = S_{\text{نیم‌دایره}}$$
$$= \frac{1}{2} \times \pi \times 2^2 = \frac{4\pi}{2} = 2\pi$$

۹ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

گام اول

می‌دانیم: $\int_a^b x^n dx = \frac{۱}{n+۱}x^{n+۱}]_a^b$

گام دوم

برای محاسبهٔ انتگرال‌هایی که در آن عبارت قدر مطلقی دیده می‌شود، ابتدا باید تکلیف قدر مطلق را مشخص کنیم. در این سوال، محدودهٔ اولیهٔ انتگرال‌گیری را به دو بازهٔ $(-۲,۰)$ و $(۰,۲)$ تفکیک کرده و در هر حالت حاصل انتگرال را به‌صورت جداگانه محاسبه می‌کنیم.

$$x \in (-۲,۰) \Rightarrow x < ۰ \Rightarrow |x| = -x$$
$$x \in (۰,۲) \Rightarrow x > ۰ \Rightarrow |x| = x$$
$$\int_{-۲}^{۲} (۲x + |x|)\, dx = \int_{-۲}^{۰} (۲x + |x|)\, dx + \int_{۰}^{۲} (۲x + |x|)\, dx$$
$$= \int_{-۲}^{۰} (۲x - x)\, dx + \int_{۰}^{۲} (۲x + x)\, dx = \int_{-۲}^{۰} x dx + \int_{۰}^{۲} ۳x dx$$
$$= \frac{۱}{۲}x^۲]_{-۲}^{۰} + \frac{۳}{۲}x^۲]_{۰}^{۲} = (۰ - \frac{۴}{۲}) + (\frac{۳}{۲} \times ۴ - ۰) = -۲ + ۶ = ۴$$

۱۰ گزینه ۴

ابتدا تکلیف عبارت‌های قدر مطلقی را در بازهٔ $(-۱,۲)$ روشن و ضابطهٔ تابع $f(x)$ را ساده می‌کنیم.

$$-۱ < x < ۰ \Rightarrow ۰ < x+۱ < ۱ \Rightarrow \begin{cases} |x| = -x \\ |x+۱| = x+۱ \end{cases}$$
$$۰ < x < ۲ \Rightarrow ۱ < x+۱ < ۳ \Rightarrow \begin{cases} |x| = x \\ |x+۱| = x+۱ \end{cases}$$

اکنون محدودهٔ اصلی انتگرال‌گیری، یعنی بازهٔ $(-۱,۲)$، را به دو بازهٔ $(-۱,۰)$ و $(۰,۲)$ تقسیم کرده و حاصل انتگرال را در هریک از این زیربازه‌ها محاسبه و درنهایت باهم جمع می‌کنیم.

$$\int_{-۱}^{۲} f(x)dx = \int_{-۱}^{۲} (|x| + |x+۱|)dx$$
$$= \int_{-۱}^{۰} (|x| + |x+۱|)\, dx + \int_{۰}^{۲} (|x| + |x+۱|)\, dx$$
$$= \int_{-۱}^{۰} (-x + x + ۱)\, dx + \int_{۰}^{۲} (x + x + ۱)\, dx = \int_{-۱}^{۰} dx + \int_{۰}^{۲} (۲x+۱)\, dx$$
$$= x]_{-۱}^{۰} + (x^۲ + x)]_{۰}^{۲} = (۰ - (-۱)) + (۶ - ۰) = ۱ + ۶ = ۷$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۱۱ **گزینه ۳**

ابتدا محدودهٔ اصلی انتگرال‌گیری را به محدوده‌های کوچک‌تری تقسیم می‌کنیم به‌طوری‌که در هر محدوده حاصل $[x]$ یکسان باشد، سپس حاصل انتگرال را روی هر زیربازه محاسبه و باهم جمع می‌کنیم.

$$-2 < x < -1 \Rightarrow [x] = -2$$
$$-1 < x < 0 \Rightarrow [x] = -1$$
$$0 < x < 1 \Rightarrow [x] = 0$$
$$1 < x < 2 \Rightarrow [x] = 1$$
$$\int_{-2}^{2} (2 - [x])dx = \int_{-2}^{-1} (2 - (-2))dx + \int_{-1}^{0} (2 - (-1))dx + \int_{0}^{1} (2 - 0)dx + \int_{1}^{2} (2 - 1)dx$$
$$= \int_{-2}^{-1} 4dx + \int_{-1}^{0} 3dx + \int_{0}^{1} 2dx + \int_{1}^{2} dx = 4x]_{-2}^{-1} + 3x]_{-1}^{0} + 2x]_{0}^{1} + x]_{1}^{2}$$
$$= (-4 - (-8)) + (0 - (-3)) + (2 - 0) + (2 - 1) = -4 + 8 + 3 + 2 + 1 = 10$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

۱۲ **گزینه ۳**

برای تعیین مقدار $[x]$، محدودهٔ اصلی انتگرال‌گیری را به سه زیربازهٔ $(-2,-1)$ و $(-1,0)$ و $(0,1)$ تقسیم می‌کنیم.

$$-2 < x < -1 \Rightarrow [x] = -2$$
$$-1 < x < 0 \Rightarrow [x] = -1$$
$$0 < x < 1 \Rightarrow [x] = 0$$
$$\int_{-2}^{1} [x]xdx = \int_{-2}^{-1} [x]xdx + \int_{-1}^{0} [x]xdx + \int_{0}^{1} [x]xdx = \int_{-2}^{-1} -2xdx + \int_{-1}^{0} -xdx + \int_{0}^{1} 0dx$$
$$= -x^2]_{-2}^{-1} + -\frac{x^2}{2}]_{-1}^{0} + 0 = -((-1)^2 - (-2)^2) - \frac{1}{2}(0 - (-1)^2)$$
$$= -(1 - 4) - \frac{1}{2}(-1) = -(-3) + \frac{1}{2} = 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

۱۳ گزینه ۱

تست را به دو روش حل می‌کنیم. در روش اول با تفکیک بازه‌ها و به دست آوردن مقدار $[x]$، جواب را به دست می‌آوریم و در روش دوم از رسم شکل و محاسبهٔ سطح زیر نمودار استفاده می‌کنیم.

روش اول:

باتوجه‌به وجود عبارت $[x]$، برای به دست آوردن مقدار انتگرال، محدودهٔ اصلی انتگرال‌گیری که بازهٔ $(-2,2)$ است را به چهار زیر بازهٔ $(-2,-1)$ و $(-1,0)$ و $(0,1)$ و $(1,2)$ تقسیم کرده و در هر زیربازه مقدار $[x]$ را به دست می‌آوریم.

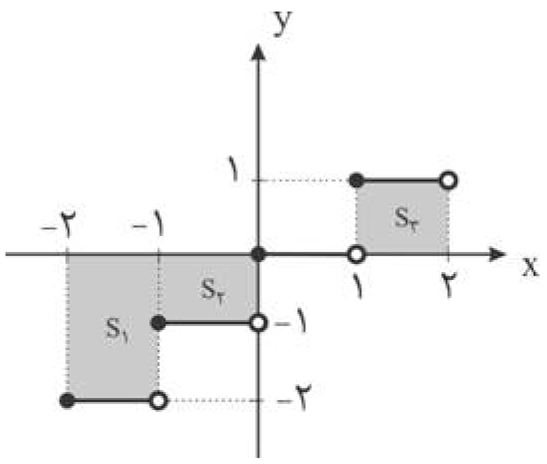
$$-2 < x < -1 \Rightarrow [x] = -2$$
$$-1 < x < 0 \Rightarrow [x] = -1$$
$$0 < x < 1 \Rightarrow [x] = 0$$
$$1 < x < 2 \Rightarrow [x] = 1$$
$$\int_{-2}^{2}(x+[x])dx = \int_{-2}^{-1}(x-2)dx + \int_{-1}^{0}(x-1)dx + \int_{0}^{1}xdx + \int_{1}^{2}(x+1)dx$$
$$= (\frac{x^2}{2}-2x)]_{-2}^{-1} + (\frac{x^2}{2}-x)]_{-1}^{0} + \frac{x^2}{2}]_{0}^{1} + (\frac{x^2}{2}+x)]_{1}^{2}$$
$$= \left((\frac{1}{2}+2)-(2+4)\right) + \left(0-(\frac{1}{2}+1)\right) + \left(\frac{1}{2}-0\right) + \left(4-\frac{3}{2}\right)$$
$$= \frac{5}{2} - 6 - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + 4 - \frac{3}{2} = -2$$

روش دوم:

برای محاسبهٔ $\int_{-2}^{2}(x+[x])dx$ می‌توانیم به‌صورت زیر عمل کنیم:

$$\int_{-2}^{2}(x+[x])dx = \int_{-2}^{2}xdx + \int_{-2}^{2}[x]dx$$

حاصل $\int_{-2}^{2}xdx$ به‌راحتی محاسبه می‌شود؛ اما برای محاسبهٔ $\int_{-2}^{2}[x]dx$ نمودار آن را در بازهٔ $(-2,2)$ رسم کرده و سطح محصور بین نمودار و محور xها را به دست می‌آوریم. داریم:



$$\int_{-2}^{2}xdx = \frac{x^2}{2}]_{-2}^{2} = \frac{4}{2} - \frac{4}{2} = 2 - 2 = 0$$
$$\int_{-2}^{2}[x]dx = -S_1 - S_2 + S_3 = -(2\times 1) - (1\times 1) + (1\times 1) = -2 - 1 + 1 = -2$$
$$\int_{-2}^{2}(x+[x])dx = 0 + (-2) = 0 - 2 = -2$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

۱۴ **گزینه ۳**

چون $[x]$ داریم، بازهٔ $(-1,2)$ را به سه زیربازهٔ $(-1,0)$ و $(0,1)$ و $(1,2)$ تقسیم کرده و حاصل $[x]$ و $|x|$ را در هریک از این بازه‌ها مشخص می‌کنیم.

$$-1 < x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \ , \ |x| = -x$$
$$0 < x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \ , \ |x| = x$$
$$1 < x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \ , \ |x| = x$$

$$\int_{-1}^{2} f(x)dx = \int_{-1}^{2} (|x| - [x])dx$$
$$= \int_{-1}^{0} (-x - (-1))dx + \int_{0}^{1} (x - 0)dx + \int_{1}^{2} (x - 1)dx$$
$$= (-\frac{x^2}{2} + x)\Big]_{-1}^{0} + \frac{x^2}{2}\Big]_{0}^{1} + (\frac{x^2}{2} - x)\Big]_{1}^{2}$$
$$= (0 - (-\frac{3}{2})) + (\frac{1}{2} - 0) + (0 - (-\frac{1}{2})) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

۱۵ **گزینه ۳**

در ضابطهٔ تابع $f(x)$ هم $|x|$ داریم و هم $[x]$؛ بنابراین بازهٔ اولیه را به بازه‌های $(-1,0)$ و $(0,1)$ و $(1,2)$ تقسیم کرده و با مشخص کردن حاصل $|x|$ و $[x]$ در هریک از این بازه‌ها، حاصل انتگرال را به دست می‌آوریم.

$$-1 < x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \ , \ |x| = -x$$
$$0 < x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \ , \ |x| = x$$
$$1 < x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \ , \ |x| = x$$

$$\int_{-1}^{2} f(x)dx = \int_{-1}^{2} (x + |x|)[x]$$
$$= \int_{-1}^{0} (x - x)(-1) + \int_{0}^{1} (x + x)(0) + \int_{1}^{2} (x + x)(1)$$
$$= \int_{-1}^{0} 0 + \int_{0}^{1} 0 + \int_{1}^{2} 2x = 0 + 0 + x^2\Big]_{1}^{2} = 4 - 1 = 3$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۴

۱۶ **گزینه ۱**

ابتدا حاصل انتگرال نامعین سمت چپ تساوی را به دست می‌آوریم.

$$\int x(1 - 5\sqrt{x})dx = \int x(1 - 5x^{\frac{1}{2}})dx = \int (x - 5x^{\frac{3}{2}})dx$$
$$= \frac{x^2}{2} - 5 \times \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + c = \frac{x^2}{2} - 2x^{\frac{5}{2}} + c = \frac{x^2}{2} - 2x^2\sqrt{x} + c$$
$$= \frac{x^2}{2}(1 - 4\sqrt{x}) + c$$
$$\Rightarrow \frac{x^2}{2}(1 - 4\sqrt{x}) + c = \frac{x^2}{2}f(x) + c \Rightarrow f(x) = 1 - 4\sqrt{x}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵

۱۷ گزینه ۳

برای حل سؤال گام‌های زیر را برمی‌داریم:

الف) ابتدا حاصل انتگرال نامعین $\int \frac{1-x}{\sqrt{x}}dx$ را تعیین می‌کنیم. برای راحتی در محاسبهٔ انتگرال عبارت کسری را تفکیک می‌کنیم.

ب) از حاصل انتگرال نامعین عبارت $\frac{2}{3}\sqrt{x}$ را فاکتور می‌گیریم. عبارت باقی‌مانده ضابطهٔ تابع $f(x)$ است.

$$\int \frac{1-x}{\sqrt{x}}dx = \int (\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{x}{\sqrt{x}})dx = \int (x^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}})dx$$
$$= \frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}} + c$$
$$= 2x^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c = 2\sqrt{x} - \frac{2}{3}x\sqrt{x} + c$$
$$= \frac{2}{3}\sqrt{x}(3-x) + c$$
$$\Rightarrow \frac{2}{3}\sqrt{x}(3-x) + c = \frac{2}{3}\sqrt{x}f(x) + c \Rightarrow f(x) = 3 - x$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

۱۸ گزینه ۱

ابتدا حاصل انتگرال نامعین را با ساده کردن به دست می‌آوریم، سپس با فاکتورگیری از عبارت $\frac{2}{\sqrt{x}}$، ضابطهٔ $f(x)$ را مشخص می‌کنیم.

$$\int \frac{1-x}{x\sqrt{x}}dx = \int (\frac{1}{x\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}})dx = \int (x^{-\frac{3}{2}} - x^{-\frac{1}{2}})dx$$
$$= \frac{1}{-\frac{3}{2}+1}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}} + c = \frac{-2}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x} + c$$
$$= \frac{2}{\sqrt{x}}(-1-x) + c$$
$$\Rightarrow \frac{2}{\sqrt{x}}(-1-x) + c = \frac{2f(x)}{\sqrt{x}} + c \Rightarrow f(x) = -x - 1$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۱۹ گزینه ۳

ابتدا حاصل انتگرال نامعین را به دست می‌آوریم، سپس با فاکتورگیری از عبارت $\frac{1}{3\sqrt{x}}$، ضابطهٔ $f(x)$ را مشخص می‌کنیم.

$$\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x}}dx = \int (\frac{x^2}{x\sqrt{x}} + \frac{1}{x\sqrt{x}})dx$$
$$= \int (x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{3}{2}})dx = \frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{-\frac{3}{2}+1}x^{-\frac{1}{2}} + c = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2x^{-\frac{1}{2}} + c$$
$$= \frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + c = \frac{1}{3\sqrt{x}}(2x^2 - 6) + c$$
$$\Rightarrow \frac{1}{3\sqrt{x}}(2x^2 - 6) + c = \frac{f(x)}{3\sqrt{x}} + c \Rightarrow f(x) = 2x^2 - 6$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

۲۰ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

گام اول

می‌دانیم: $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$

گام دوم

ابتدا کسر درون انتگرال را تفکیک کرده و حاصل انتگرال نامعین را به دست می‌آوریم، سپس با فاکتورگیری از عبارت $2x\sqrt{x}$، ضابطهٔ $f(x)$ را تعیین می‌کنیم.

$$\int \frac{5x^2-3x}{\sqrt{x}} = \int (\frac{5x^2}{\sqrt{x}} - \frac{3x}{\sqrt{x}})dx = \int (5x\sqrt{x} - 3\sqrt{x})dx$$
$$= \int (5x^{\frac{3}{2}} - 3x^{\frac{1}{2}})dx = 5 \times \frac{1}{\frac{3}{2}+1}x^{\frac{5}{2}} - 3 \times \frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{3}{2}} + C$$
$$= 5 \times \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - 3 \times \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C = 2x^{\frac{5}{2}} - 2x^{\frac{3}{2}} + C$$
$$= 2x^2\sqrt{x} - 2x\sqrt{x} + C = 2x\sqrt{x}(x-1) + C$$
$$\Rightarrow 2x\sqrt{x}(x-1) + C = f(x)(2x\sqrt{x}) + C \Rightarrow f(x) = x - 1$$

۲۱ گزینه ۳

بعد از به دست آوردن حاصل انتگرال نامعین، از $\sqrt{x}$ فاکتور می‌گیریم تا ضابطهٔ تابع $f(x)$ مشخص شود.

$$\int (3\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})dx = \int (3x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}})dx$$
$$= 3 \times \frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}} + c = 3 \times \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} + c$$
$$= 2x\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + c = \sqrt{x}(2x-2) + c$$
$$\Rightarrow \sqrt{x}(2x-2) + c = \sqrt{x}f(x) + c \Rightarrow f(x) = 2x - 2$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

۲۲ گزینه ۱

ابتـدا با اسـتفاده از اتحاد مزدوج، عبارت درون انتگرال را ساده می‌کنیم، سـپس حاصل انتگرال نامعین را به دست آورده و از x فاکتور می‌گیریم تا ضابطـهٔ تابع $f(x)$ مشخص شود.

$$\frac{3-3x}{1-\sqrt{x}} = \frac{3(1-x)}{1-\sqrt{x}} = \frac{3(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x})} = 3(1+\sqrt{x})$$
$$\int \frac{3-3x}{1-\sqrt{x}}dx = \int 3(1+\sqrt{x})dx = 3\int (1+\sqrt{x})dx$$
$$= 3\int (1 + x^{\frac{1}{2}})dx = 3(x + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}) + c$$
$$= 3x + 2x\sqrt{x} + c = x(3 + 2\sqrt{x}) + c$$
$$\Rightarrow x(3 + 2\sqrt{x}) + c = xf(x) + c \Rightarrow f(x) = 3 + 2\sqrt{x}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۲۳ **گزینه ۴**

بعد از به دست آوردن حاصل انتگرال نامعین، از $\sqrt{x}$ فاکتور می‌گیریم تا عبارت سمت راست تساوی را در سمت چپ شبیه‌سازی کرده باشیم و ضابطهٔ $f(x)$ مشخص شود.

$$\frac{(1+\sqrt{x})^2-x}{\sqrt{x}}=\frac{1+2\sqrt{x}+x-x}{\sqrt{x}}=\frac{1+2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}}+2$$

$$\int\frac{(1+\sqrt{x})^2-x}{\sqrt{x}}dx=\int(\frac{1}{\sqrt{x}}+2)dx=\int(x^{-\frac{1}{2}}+2)dx$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}+2x+c=2\sqrt{x}+2x+c=\sqrt{x}(2+2\sqrt{x})+c$$

$$\Rightarrow\sqrt{x}(2+2\sqrt{x})+c=\sqrt{x}f(x)+c\Rightarrow f(x)=2+2\sqrt{x}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

۲۴ **گزینه ۲**

با تفکیک کسر درون انتگرال، حاصل انتگرال نامعین را به دست می‌آوریم، سپس از عبارت $\sqrt{x}$ فاکتور می‌گیریم تا ضابطهٔ $f(x)$ مشخص شود.

$$\int\frac{3x-2}{\sqrt{x}}dx=\int(\frac{3x}{\sqrt{x}}-\frac{2}{\sqrt{x}})dx=\int(3\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}})dx$$

$$=\int(3x^{\frac{1}{2}}-2x^{-\frac{1}{2}})dx=3\times\frac{1}{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}}-2\times\frac{1}{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}+c$$

$$=3(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}})-2(2x^{\frac{1}{2}})+c=2x\sqrt{x}-4\sqrt{x}+c$$

$$=\sqrt{x}(2x-4)+c$$

$$\Rightarrow\sqrt{x}(2x-4)+c=\sqrt{x}f(x)+c\Rightarrow f(x)=2x-4$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۲

۲۵ **گزینه ۱**

حاصل انتگرال نامعین را به دست می‌آوریم، سپس از عامل $\sqrt[3]{x}$ فاکتور گرفته و ضابطهٔ $f(x)$ را مشخص می‌کنیم.

$$\int\frac{4x-4}{3\sqrt[3]{x^2}}dx=\int\frac{4x-4}{3x^{\frac{2}{3}}}dx=\int(\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}-\frac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}})dx$$

$$=\frac{4}{3}\times\frac{1}{\frac{4}{3}}x^{\frac{4}{3}}-\frac{4}{3}\times\frac{1}{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}+c=\frac{4}{3}(\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}})-\frac{4}{3}(3x^{\frac{1}{3}})+c$$

$$=x\sqrt[3]{x}-4\sqrt[3]{x}+c=\sqrt[3]{x}(x-4)+c$$

$$\Rightarrow\sqrt[3]{x}(x-4)+c=\sqrt[3]{x}f(x)+c\Rightarrow f(x)=x-4$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

۲۶ گزینه ۱

ابتدا عبارت درون انتگرال را به‌صورت کسرهای تفکیک‌شده نوشته، سپس حاصل انتگرال نامعین را به دست می‌آوریم. از عبارت $\sqrt{x}$ فاکتور می‌گیریم تا ضابطهٔ $f(x)$ مشخص شود.

$$\frac{(1-\sqrt{x})^2}{2\sqrt{x}} = \frac{1-2\sqrt{x}+x}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 1 + \frac{\sqrt{x}}{2}$$

$$\int \frac{(1-\sqrt{x})^2}{2\sqrt{x}}dx = \int (\frac{1}{2\sqrt{x}} - 1 + \frac{\sqrt{x}}{2})dx = \int (\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 1 + \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}})dx$$

$$= \frac{1}{2}(\frac{1}{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}) - x + \frac{1}{2}(\frac{1}{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}}) + c = \frac{1}{2}(2\sqrt{x}) - x + \frac{1}{2}(\frac{2}{3}x\sqrt{x}) + c$$

$$= \sqrt{x} - x + \frac{1}{3}x\sqrt{x} + c = \sqrt{x}(1 - \sqrt{x} + \frac{1}{3}x) + c$$

$$\Rightarrow \sqrt{x}(1 - \sqrt{x} + \frac{1}{3}x) + c = \sqrt{x}f(x) + c \Rightarrow f(x) = 1 - \sqrt{x} + \frac{1}{3}x$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۹

۲۷ گزینه ۱

$$\int \frac{\sin^2 x}{1-\cos x}dx = \int \frac{(1-\cos^2 x)}{(1-\cos x)}dx = \int \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{(1-\cos x)}dx$$

$$= \int (1 + \cos x)dx = \int dx + \int \cos x dx = x + \sin x + c$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

۲۸ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

گام اول

می‌دانیم:

۱) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

۲) $\int \sin ax dx = -\frac{1}{a}\cos ax + c$

۳) $\int \cos ax dx = \frac{1}{a}\sin ax + c$

گام دوم

$$\int \frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}dx = \int \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos x-\sin x}dx = \int \frac{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}{(\cos x-\sin x)}dx$$

$$= \int (\cos x + \sin x)dx = \sin x - \cos x + c$$

۲۹ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

گام اول

می‌دانیم:

$$1)\ 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$2)\ \sin 2x = 2\sin x \cos x$$

گام دوم

باتوجه‌به گام اول، حاصل انتگرال نامعین را به دست می‌آوریم.

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \sqrt{1 + \tan^2 x} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{1}{|\cos x|}$$
$$\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \cos x < 0 \Rightarrow |\cos x| = -\cos x$$
$$\Rightarrow \sqrt{1 + \tan^2 x} = -\frac{1}{\cos x}$$
$$\Rightarrow \int \sqrt{1 + \tan^2 x}\sin 2x dx = \int (-\frac{1}{\cos x})(2\sin x \cos x)dx = \int -2\sin x dx = 2\cos x + c$$

۳۰ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

گام اول

الف) مشتق تابع $y = uv$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید: $y' = u'v + v'u$

ب) اگر تابع $G(x) = \int_a^x g(x)dt$ باشد، در این صورت $G'(x) = g(x)$ است.

ج) حاصل $\int_a^a f(x)dx = 0$ است.

گام دوم

مشتق راست تابع y را در نقطه‌ای به طول ۲ $x =$ به دست می‌آوریم.

$$y = x.G(x) \Rightarrow y' = G(x) + xG'(x)$$
$$G'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^3}}$$
$$y'_+(2) = G(2) + 2G'(2) = 0 + 2 \times \frac{2}{\sqrt{1+8}} = 2 \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

۳۱ گزینه ۲

بهتر است عبارت‌های درون انتگرال را به‌صورت توان‌دار بنویسیم تا به دست آوردن حاصل انتگرال به‌سادگی انجام شود.

$$\int_0^1 (\sqrt[3]{x} + \frac{1}{(1+x)^2})dx = \int_0^1 (x^{\frac{1}{3}} + (1+x)^{-2})dx$$
$$= (\frac{1}{\frac{4}{3}}x^{\frac{4}{3}} + \frac{1}{-2+1}(1+x)^{-1})]_0^1 = (\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} - (1+x)^{-1})]_0^1$$
$$= (\frac{3}{4} - \frac{1}{2}) - (0 - 1) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{2}{4} = \frac{5}{4}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۴

۳۲ گزینه ۲

ابتدا عبارت درون انتگرال را به توان ۲ می‌رسانیم، سپس حاصل انتگرال معین را محاسبه می‌کنیم.

$$\int_{1}^{2}(1-\frac{1}{x})^{2}dx=\int_{1}^{2}(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^{2}})dx$$
$$=\int_{1}^{2}dx-2\int_{1}^{2}\frac{dx}{x}+\int_{1}^{2}\frac{1}{x^{2}}dx=x]_{1}^{2}-2\ln x]_{1}^{2}-\frac{1}{x}]_{1}^{2}$$
$$=(2-1)-2(\ln 2-\ln 1)-(\frac{1}{2}-\frac{1}{1})$$
$$=1-2(\ln 2-0)-(-\frac{1}{2})=1-2\ln 2+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}-\ln 2^{2}=\frac{3}{2}-\ln 4$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

۳۳ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۲

گام اول

بر اساس فرمول‌های کمان 2α می‌دانیم: $\cos 2\alpha=\cos^{2}\alpha-\sin^{2}\alpha$

گام دوم

حاصل انتگرال معین داده‌شده را محاسبه می‌کنیم.

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}(\cos^{2}x-\sin^{2}x)dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\cos 2x\,dx=\frac{1}{2}\sin 2x]_{0}^{\frac{\pi}{6}}$$
$$=\frac{1}{2}(\sin 2(\frac{\pi}{6})-\sin 2(0))=\frac{1}{2}(\sin\frac{\pi}{3}-\sin 0)$$
$$=\frac{1}{2}(\frac{\sqrt{3}}{2}-0)=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

۳۴ **گزینه ۴**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

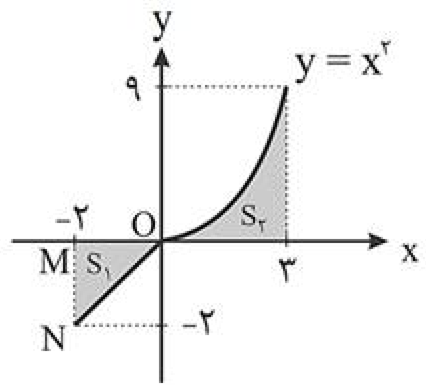
گام اول

الف) ابتدا نمودار تابع $f(x)$ را در بازهٔ $[-۲,۳]$ رسم می‌کنیم. توجه کنید که نمودار تابع در بازهٔ $-۲ \leq x < ۰$ خط $y = x$ و در بازهٔ $۰ \leq x \leq ۳$ منحنی $y = x^۲$ است.

ب) سطح محصور بین منحنی و محور xها را در دو مرحله حساب می‌کنیم. قسمتی که بین خط $y = x$ و محور xها قرار دارد را با محاسبهٔ مساحت مثلث OMN و قسمت محصور بین منحنی $y = x^۲$ و محور xها را با محاسبهٔ انتگرال معین $\int_۰^۳ x^۲dx$ به دست می‌آوریم.

گام دوم

دقت کنید که چون مساحت همواره مقداری مثبت است هر دو مساحت محاسبه‌شده مثبت در نظر گرفته می‌شود.



$$S_۱ = S_{O\overset{\Delta}{M}N} = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۲ = ۲$$
$$S_۲ = \int_۰^۳ x^۲dx = \frac{۱}{۳}x^۳]_۰^۳$$
$$= \frac{۱}{۳}(۳^۳ - ۰^۳) = \frac{۱}{۳} \times ۲۷ = ۹ \Rightarrow S_۲ = ۹$$
$$\text{مساحت کل محصور} = S_۱ + S_۲ = ۲ + ۹ = ۱۱$$

۳۵ **گزینه ۳**

در انتگرال معین اگر عبارت درون انتگرال یک عبارت قدر مطلقی بود، قدم اول تعیین ریشه یا ریشه‌های عبارت داخل قدر مطلق است. چون باید مشخص شود در چه محدوده‌ای عبارت داخل قدر مطلق مثبت و در چه محدوده‌ای منفی است تا بتوانیم قدر مطلق را ساده کنیم، سـپس هریک از انتگرال‌های معین را در بازه‌های مربوط به خودشان محاسبه کرده و آن‌ها را باهم جمع می‌کنیم.

$$۲x - ۱ = ۰ \Rightarrow ۲x = ۱ \Rightarrow x = \frac{۱}{۲}$$

مساحت سطح محصور بین منحنی $f(x)$ محور xها و دو خط $x = ۱$ و $x = -۱$ یعنی محاسبهٔ $\left|\int_{-۱}^{۱} f(x)dx\right|$. چون $x = \frac{۱}{۲}$ ریشهٔ عبارت داخل قدر مطلق است، پس بازه‌های انتگرال‌گیری به دو قسـمت $[-۱,\frac{۱}{۲}]$ و $[\frac{۱}{۲},۱]$ تقسـیم می‌شود. چون مقـدار مساحت بایـد مثبت باشـد، قدر مطلق هر دو انتگرال معین را به دسـت می‌آوریم:

$$-۱ < x < \frac{۱}{۲} \Rightarrow ۲x - ۱ < ۰ \Rightarrow |۲x - ۱| = -(۲x - ۱) = ۱ - ۲x$$
$$\frac{۱}{۲} < x < ۱ \Rightarrow ۲x - ۱ > ۰ \Rightarrow |۲x - ۱| = ۲x - ۱$$
$$S = \left|\int_{-۱}^{۱} f(x)dx\right| = \left|\int_{-۱}^{۱} |۲x - ۱|dx\right| =$$
$$\left|\int_{-۱}^{\frac{۱}{۲}} (۱ - ۲x)dx\right| + \left|\int_{\frac{۱}{۲}}^{۱} (۲x - ۱)dx\right| = \left|(x - x^۲)]_{-۱}^{\frac{۱}{۲}}\right| + \left|(x^۲ - x)]_{\frac{۱}{۲}}^{۱}\right| =$$
$$\left|[(\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۴}) - (-۱ - ۱)]\right| + \left|[(۱ - ۱) - (\frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۲})]\right| = \frac{۱}{۴} + ۲ + ۰ + \frac{۱}{۴} = \frac{۵}{۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۳۶ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

گام اول

الف) در شکل، محل برخورد منحنی $f(x) = x - \sqrt{x}$ با محور xها مشـخص نشده است پس ابتدا با حل معادلهٔ $f(x) = 0$ محل برخورد با محور xها را به دست می‌آوریم.

ب) اگر محل برخورد با محور xها را $x = a$ فرض کنیم، مساحت ناحیهٔ سایه‌زده برابر است با:

$$S = \left|\int_0^a f(x)dx\right|$$

گام دوم

$$f(x) = 0 \Rightarrow x - \sqrt{x} = 0 \Rightarrow (\sqrt{x})^2 - \sqrt{x} = 0 \Rightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) = 0$$

$$\xrightarrow[\sqrt{x}\neq 0]{x>0} \sqrt{x} - 1 = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = 1 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x = 1$$

بنابراین مساحت ناحیهٔ سایه‌زده برابر است با:

$$S = \left|\int_0^1 f(x)dx\right| = \left|\int_0^1 (x - \sqrt{x})dx\right| = \left|\int_0^1 (x - x^{\frac{1}{2}})dx\right|$$

$$= \left|\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\Big]_0^1\right| = \left|\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right)\right| = \left|-\frac{1}{6}\right| = \frac{1}{6}$$

۳۷ گزینه ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

گام اول

الف) ابتدا اولین ریشهٔ بزرگ‌تر از صـفر معادلهٔ $\sin x + \cos x = 0$ را به دست می‌آوریم تـا محل برخورد منحنی $f(x)$ با محور xها و درنتیجه محدودهٔ انتگرال‌گیری مشخص شود.

ب) با فرض اینکه اولین محل برخورد $f(x)$ با محور xها نقطه‌ای به طول $x = a$ باشد، مساحت ناحیهٔ سایه‌زده برابر است با: $S = \left|\int_0^a f(x)dx\right|$

گام دوم

$$f(x) = 0 \Rightarrow \sin x + \cos x = 0 \Rightarrow \sin x = -\cos x$$

$$\xrightarrow{\div \cos x} \tan x = -1 \xrightarrow{\text{اولین ریشه بعد از صفر}} x = \frac{3\pi}{4}$$

پس مساحت ناحیهٔ سایه‌زده برابر است با:

$$S = \left|\int_0^{\frac{3\pi}{4}} f(x)dx\right| = \left|\int_0^{\frac{3\pi}{4}} (\sin x + \cos x)dx\right| = \left|(-\cos x + \sin x)\Big]_0^{\frac{3\pi}{4}}\right|$$

$$= \left|\left(-\cos\frac{3\pi}{4} + \sin\frac{3\pi}{4}\right) - (-\cos 0 + \sin 0)\right| = \left|\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - (-1 + 0)\right| = \left|\sqrt{2} + 1\right| = \sqrt{2} + 1$$

۳۸ گزینه ۳

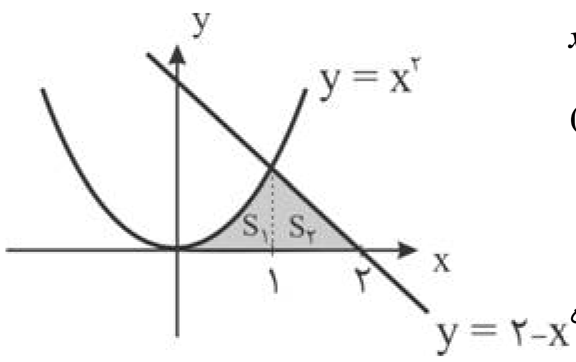
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

گام اول

الف) ابتدا محل برخورد منحنی $y=x^{۲}$ و خط $y=۲-x$ را مشـخص می‌کنیم. حواستان باشد باتوجه‌به شکل رسم‌شده، ریشهٔ مثبت این معادله باید در نظر گرفته شود. همچنین محل برخورد خط با محور xها نیز باید مشخص شود.

ب) اگر محل برخورد منحنی و خط نقطه‌ای به طول $x=a$ باشد، در بازهٔ $(۰,a)$ سطح محصور بین منحنی $y=x^{۲}$ و محور xها و در بازهٔ بعدی سطح محصور بین خط $y=۲-x$ و محور xها را به دست می‌آوریم.

گام دوم



$$x^{۲}=۲-x\Rightarrow x^{۲}+x-۲=۰$$

$$(x+۲)(x-۱)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=-۲ & \text{غ ق ق}\\ x=۱\end{cases}$$

$$۲-x=۰\Rightarrow x=۲$$

$$\text{مساحت ناحیهٔ سایه‌زده}=S_{۱}+S_{۲}=\left|\int_{۰}^{۱}x^{۲}dx\right|+\left|\int_{۱}^{۲}(۲-x)dx\right|$$

$$=\left|\tfrac{۱}{۳}x^{۳}\Big]_{۰}^{۱}\right|+\left|(۲x-\tfrac{x^{۲}}{۲})\Big]_{۱}^{۲}\right|=\left|\tfrac{۱}{۳}-۰\right|+\left|(۴-۲)-(۲-\tfrac{۱}{۲})\right|$$

$$=\tfrac{۱}{۳}+\left|۲-\tfrac{۳}{۲}\right|=\tfrac{۱}{۳}+\tfrac{۱}{۲}=\tfrac{۵}{۶}$$

۳۹ گزینه ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵

گام اول

ناحیهٔ محصور در بازهٔ $(۰,۱)$ بین خط $y=۳x$ و محور xها قرار داشته و در بازهٔ $(۱,۲)$ بین منحنی $y=۴-x^{۲}$ و محور xها قرار می‌گیرد.

گام دوم

برای محاسبهٔ مساحت ناحیهٔ سایه‌زده، دو انتگرال معین را محاسبه کرده (البته هر دو داخل قدر مطلق) و آن‌ها را باهم جمع می‌کنیم.

$$\text{مساحت ناحیهٔ سایه‌زده}=\left|\int_{۰}^{۱}۳xdx\right|+\left|\int_{۱}^{۲}(۴-x^{۲})dx\right|$$

$$=\left|\tfrac{۳}{۲}x^{۲}\Big]_{۰}^{۱}\right|+\left|(۴x-\tfrac{۱}{۳}x^{۳})\Big]_{۱}^{۲}\right|=\left|(\tfrac{۳}{۲}-۰)\right|+\left|(۸-\tfrac{۸}{۳})-(۴-\tfrac{۱}{۳})\right|$$

$$=\tfrac{۳}{۲}+\left|۴-\tfrac{۷}{۳}\right|=\tfrac{۳}{۲}+\tfrac{۵}{۳}=\tfrac{۹+۱۰}{۶}=\tfrac{۱۹}{۶}$$

۴۰ **گزینه ۴**

ابتدا محل برخورد خط $y = x$ و منحنی $y = -x^۲ + ۵x$ را به دست می‌آوریم. معلوم است که $x = ۰$ یکی از نقاط برخورد است، ما نقطهٔ برخورد با طول مثبت را می‌خواهیم.

اگر $x = a$ طول نقطهٔ برخورد خط و منحنی باشد، مساحت ناحیهٔ محصور بین خط و منحنی از رابطهٔ $S = \left|\int_۰^a (-x^۲ + ۵x - x)dx\right|$ به دست می‌آید.

$$x = -x^۲ + ۵x \Rightarrow -x^۲ + ۵x - x = ۰ \Rightarrow -x^۲ + ۴x = ۰$$
$$\Rightarrow x(-x + ۴) = ۰ \xrightarrow{x \neq ۰} -x + ۴ = ۰ \Rightarrow x = ۴$$

پس مساحت ناحیهٔ محصور برابر است با:

$$S = \left|\int_۰^۴ (-x^۲ + ۵x - x)dx\right| = \left|\int_۰^۴ (-x^۲ + ۴x\right| = \left|(-\frac{۱}{۳}x^۳ + ۲x^۲)\right]_۰^۴\right|$$
$$= \left|(-\frac{۶۴}{۳} + ۳۲) - ۰\right| = ۳۲ - \frac{۶۴}{۳} = \frac{۹۶}{۳} - \frac{۶۴}{۳} = \frac{۳۲}{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

۴۱ **گزینه ۲**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

گام اول

مساحت محدود به منحنی‌های رسم‌شده و محور xها را در دو مرحله محاسبه می‌کنیم. در بازهٔ $(۰, ۱)$ مساحت محدود بین منحنی $y = x^۲$ و محور xها و در بازهٔ $(۱, ۲)$ مساحت محدود بین منحنی $y = (x - ۲)^۲$ و محور xها را حساب می‌کنیم.

گام دوم

روش اول:

$$\text{مساحت ناحیهٔ محصور} = \left|\int_۰^۱ x^۲dx\right| + \left|\int_۱^۲ (x - ۲)^۲dx\right|$$
$$= \left|\int_۰^۱ x^۲dx\right| + \left|\int_۱^۲ (x^۲ - ۴x + ۴)dx\right| = \left|\frac{۱}{۳}x^۳\right]_۰^۱\right| + \left|(\frac{۱}{۳}x^۳ - ۲x^۲ + ۴x)\right]_۱^۲\right|$$
$$= \left|\frac{۱}{۳} - ۰\right| + \left|(\frac{۸}{۳} - ۸ + ۸) - (\frac{۱}{۳} - ۲ + ۴)\right| = \frac{۱}{۳} + \left|\frac{۸}{۳} - \frac{۷}{۳}\right| = \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۳} = \frac{۲}{۳}$$

روش دوم:

باتوجه‌به نمودار، ناحیهٔ مشـخص‌شده متقارن است بنابراین می‌توانیم مساحت محصور بین منحنی $y = x^۲$ و محور xها را در بازهٔ $(۰, ۱)$ به دست آورده و آن را دو برابر کنیم. دراین‌صورت هم جواب $\frac{۲}{۳}$ به دست می‌آید.

۴۲ گزینه ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۰

گام اول

الف) محل تلاقی نمودار منحنی‌های $y = \sin 2x$ و $y = \cos 2x$ را تعیین می‌کنیم. این محل برخورد باید نقطه‌ای با کمترین طول مثبت باشد.

ب) در محدودهٔ موردنظر نمودار $y = \cos 2x$ بالای نمودار $y = \sin 2x$ قرار دارد، پس اگر نقطـهٔ برخورد را نقطه‌ای به طول $x = a$ در نظر بگیریم، مساحت ناحیهٔ هاشورزده برابر است با:

$$S = \left|\int_0^a (\cos 2x - \sin 2x)dx\right|$$

گام دوم

$$\sin 2x = \cos 2x \xrightarrow{\div \cos 2x} \tan 2x = 1 \xrightarrow{\text{کمترین طول مثبت}} 2x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{\pi}{8}$$

پس مساحت ناحیهٔ هاشورخورده برابر است با:

$$S = \left|\int_0^{\frac{\pi}{8}} (\cos 2x - \sin 2x)dx\right| = \left|\left(\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x\right)\right]_0^{\frac{\pi}{8}}\right|$$
$$= \left|\frac{1}{2}(\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}) - \frac{1}{2}(\sin 0 + \cos 0)\right| = \left|\frac{1}{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}) - \frac{1}{2}(0 + 1)\right|$$
$$= \left|\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1)$$

۴۳ گزینه ۳

چون درون انتگرال عبـارت $[x]$ مشاهـده می‌شود؛ بنابراین محـدودهٔ اولیـهٔ انتگرال‌گیری را به زیربازه‌هایی تقسـیم می‌کنیم که در آن مقدار $[x]$ یکسان باشد، سپس حاصل انتگرال معین را محاسبه می‌کنیم.

$$-1 \le x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \quad , \quad 0 \le x < 1 \Rightarrow [x] = 0$$
$$1 \le x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \quad , \quad 2 \le x < 3 \Rightarrow [x] = 2$$

$$\int_{-1}^{3} (x + [x])dx = \int_{-1}^{0} (x - 1)dx + \int_0^1 xdx + \int_1^2 (x + 1)dx + \int_2^3 (x + 2)dx$$
$$= (\frac{1}{2}x^2 - x)]_{-1}^{0} + \frac{1}{2}x^2]_0^1 + (\frac{1}{2}x^2 + x)]_1^2 + (\frac{1}{2}x^2 + 2x)]_2^3$$
$$= (0 - \frac{3}{2}) + (\frac{1}{2} - 0) + (4 - \frac{3}{2}) + (\frac{21}{2} - 6) = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2} + \frac{5}{2} + \frac{9}{2} = 6$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۴۴ گزینه ۴

ابتدا حاصل انتگرال نامعین را به دست می‌آوریم، سپس از عبارت $3\sqrt{x}$ فاکتور می‌گیریم تا ضابطهٔ $f(x)$ مشخص شود.

$$\int \frac{(1+\sqrt{x})^3 - 1}{x}dx = \int \frac{1+3(\sqrt{x})^2+3\sqrt{x}+(\sqrt{x})^3-1}{x}dx$$
$$= \int \frac{3x+3\sqrt{x}+x\sqrt{x}}{x}dx = \int (3 + \frac{3}{\sqrt{x}} + \sqrt{x})dx$$
$$= \int (3 + 3x^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}})dx = 3x + \frac{3}{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}} + c$$
$$= 3x + 6x^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c = 3x + 6\sqrt{x} + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + c = 3\sqrt{x}(\sqrt{x} + 2 + \frac{2}{9}x) + c$$
$$\Rightarrow 3\sqrt{x}(\sqrt{x} + 2 + \frac{2}{9}x) + c = 3\sqrt{x}.f(x) + c \Rightarrow f(x) = \sqrt{x} + 2 + \frac{2}{9}x$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۴۵ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

گام اول

از روابط مثلثاتی می‌دانیم:

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

گام دوم

باتوجه‌به اینکه $\cos x$ در بازهٔ $(0, \pi)$ چه علامتی می‌تواند بگیرد، مقدار انتگرال معین را در بازهٔ $(0, \pi)$ به دست می‌آوریم.

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \sqrt{1 + \tan^2 x} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{1}{|\cos x|}$$

$$0 < x < \pi \Rightarrow |\cos x| = \begin{cases} \cos x & ;\ 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ -\cos x & ;\ \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

بنابراین حاصل انتگرال معین برابر است با:

$$\int_0^\pi \frac{dx}{\sqrt{1+\tan^2 x}} = \int_0^\pi |\cos x| dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\cos x dx$$

$$= \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = (\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0) - (\sin \pi - \sin \frac{\pi}{2})$$

$$= (1 - 0) - (0 - 1) = 1 + 1 = 2$$

۴۶ گزینه ۳

ابتدا عبارت درون انتگرال را به‌صورت کسرهای تفکیک‌شده نوشته، بعد از به دست آوردن حاصل انتگرال نامعین از $3\sqrt[3]{x}$ فاکتور می‌گیریم تا ضابطهٔ $f(x)$ مشخص شود.

$$\int \frac{7x^2 - 4x}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \int \frac{7x^2 - 4x}{x^{\frac{2}{3}}} dx$$

$$= \int (\frac{7x^2}{x^{\frac{2}{3}}} - \frac{4x}{x^{\frac{2}{3}}}) dx = \int (7x^{\frac{4}{3}} - 4x^{\frac{1}{3}}) dx$$

$$= 7 \times \frac{1}{\frac{7}{3}} x^{\frac{7}{3}} - 4 \times \frac{1}{\frac{4}{3}} x^{\frac{4}{3}} + c = 3x^{\frac{7}{3}} - 3x^{\frac{4}{3}} + c$$

$$= 3x^2\sqrt[3]{x} - 3x\sqrt[3]{x} + c = 3\sqrt[3]{x}(x^2 - x) + c$$

$$\Rightarrow 3\sqrt[3]{x}(x^2 - x) + c = 3\sqrt[3]{x} f(x) + c \Rightarrow f(x) = x^2 - x$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

۴۷ گزینه ۴

از رابطهٔ $1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$ برای ساده‌تر کردن عبارت داخل انتگرال استفاده می‌کنیم:

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos x)}dx = \int_0^{2\pi} \sqrt{2\left(2\sin^2 \frac{x}{2}\right)}dx$$
$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2 \frac{x}{2}}dx = \int_0^{2\pi} 2\left|\sin \frac{x}{2}\right|dx$$

در فاصلهٔ $(0, 2\pi)$، $\frac{x}{2}$ در فاصلهٔ $(0, \pi)$ قرار دارد و سینوس در این فاصله مثبت است پس:

$$\int_0^{2\pi} 2\sin \frac{x}{2}dx = -2\left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\right)\cos \frac{x}{2}\Big]_0^{2\pi}$$
$$= -4\cos \frac{x}{2}\Big]_0^{2\pi} = (-4\cos \pi) - (-4\cos 0) = 4 + 4 = 8$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

۴۸ گزینه ۳

$$\int \frac{4x^2-1}{\sqrt[3]{x}}dx = \int \left(\frac{4x^2}{x^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\right)dx = \int \left(4x^{\frac{5}{3}} - x^{\frac{-1}{3}}\right)dx$$
$$= 4\left(\frac{x^{\frac{8}{3}}}{\frac{8}{3}}\right) - \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + c = \frac{3}{2}x^{\frac{8}{3}} - \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + c$$

چون در طرف راست از $\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$ فاکتور گرفته شده، بنابراین از $\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$ فاکتور می‌گیریم:

$$= \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}(x^2 - 1) + c = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\underbrace{(x^2-1)}_{f(x)} + c$$

پس:

$$f(x) = x^2 - 1$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

۴۹ گزینه ۴

$$\int_{-1}^{1} (|3x| - [x])dx = \int_{-1}^{0} (-3x+1)dx + \int_{0}^{1} 3xdx = (\frac{-3}{2}x^2 + x)\Big|_{-1}^{0} + \frac{3}{2}x^2\Big|_0^1 = 0 - (-\frac{3}{2} - 1) + (\frac{3}{2} - 0)$$
$$= 4$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۵۰ گزینه ۱

انتگرال را ساده می‌کنیم:

$$A=\int\frac{(\sqrt{x}-1)\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{x^{۲}}dx=\int\frac{(x-1)}{x^{\frac{۳}{۲}}}dx=\int x^{-\frac{۱}{۲}}dx-\int x^{-\frac{۳}{۲}}dx\Rightarrow A=۲x^{\frac{۱}{۲}}+۲x^{-\frac{۱}{۲}}+C$$
$$=۲\sqrt{x}+\frac{۲}{\sqrt{x}}+C=\frac{۱}{\sqrt{x}}(۲x+۲)+C$$

با مقایسهٔ رابطهٔ بالا با $\frac{۱}{\sqrt{x}}f(x)+C$ خواهیم داشت:

$$f(x)=۲x+۲$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۵۱ گزینه ۴

$$\int_{-۲}^{۱}(|x|-[x])dx=\int_{-۲}^{-۱}(-x+۲)dx+\int_{-۱}^{۰}(-x+۱)dx+\int_{۰}^{۱}xdx$$
$$=(\frac{-x^{۲}}{۲}+۲x)]_{-۲}^{-۱}+(\frac{-x^{۲}}{۲}+x)]_{-۱}^{۰}+(\frac{۱}{۲}x^{۲})]_{۰}^{۱}=-\frac{۱}{۲}-۲+\frac{۲^{۲}}{۲}+۲\times۲-۰+\frac{۱}{۲}+۱+\frac{۱}{۲}-۰=\frac{۱۱}{۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۵۲ گزینه ۳

$$\int(\sqrt{x}-\frac{۱}{x})^{۲}dx=\int(x+\frac{۱}{x^{۲}}-\frac{۲}{\sqrt{x}})dx=\frac{۱}{۲}x^{۲}-\frac{۱}{x}-۴\sqrt{x}+C$$
$$\Rightarrow\frac{f(x)}{۲x}=\frac{۱}{۲}x^{۲}-\frac{۱}{x}-۴\sqrt{x}\Rightarrow f(x)=x^{۳}-۸x\sqrt{x}-۲$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۵۳ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

گام اول

$x=۲$ ریشهٔ قدر مطلق است، پس بازهٔ $(۰,۴)$ را به دو بازهٔ $(۰,۲)$ و $(۲,۴)$ تقسیم می‌کنیم.

گام دوم

$$\int_{۰}^{۴}f(x)\,dx=\int_{۰}^{۴}x-|x-۲|\,dx$$
$$=\int_{۰}^{۲}(x+x-۲)dx+\int_{۲}^{۴}(x-(x-۲))\,dx$$
$$=\int_{۰}^{۲}(۲x-۲)dx+\int_{۲}^{۴}۲dx=x^{۲}-۲x]_{۰}^{۲}+۲x]_{۲}^{۴}$$
$$=(۴-۴)-۰+۲(۴-۲)=۰+۴=۴$$

۵۴ گزینه ۴

$$\int (3x+\frac{1}{x})^2 dx = \int (9x^2+\frac{1}{x^2}+2(3x)(\frac{1}{x}))dx$$
$$= \int (9x^2+\frac{1}{x^2}+6)dx = 9\times\frac{x^3}{3}-\frac{1}{x}+6x+C$$
$$= 3x^3-\frac{1}{x}+6x+C = \frac{3x^4-1+6x^2}{x}+C$$
$$= \frac{1}{x}(3x^4+6x^2-1)+C = \frac{1}{x}f(x)+C \Rightarrow f(x)=3x^4+6x^2-1$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

۵۵ گزینه ۲

باتوجه‌به ریشهٔ داخل قدر مطلق، باید محدودهٔ انتگرال‌گیری را تعیین کنیم:

$$\int_0^6 |x-2|\,dx - \int_0^6 2\,dx = \int_0^2 (2-x)\,dx + \int_2^6 (x-2)\,dx + \int_0^6 2\,dx$$

$$= 2x\Big|_0^2 - \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 + \frac{x^2}{2}\Big|_2^6 - 2x\Big|_2^6 - 2x\Big|_0^6$$

$$= (4-0)-(2-0)+(18-2)-(12-4)-(12-0)$$
$$= 4-2+16-8-12 = -2$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۵۶ گزینه ۱

$$\int \frac{x-1}{x^3}dx = \frac{1}{2x^2}f(x)+C$$

$$\int \frac{x-1}{x^3}dx = \int \frac{1}{x^2}dx - \int \frac{1}{x^3}dx = \int x^{-2}dx - \int x^{-3}dx$$

$$= \frac{x^{-1}}{-1}-\frac{x^{-2}}{-2}+C = \frac{-1}{x}+\frac{1}{2x^2}+C = \frac{-2x+1}{2x^2}+C$$

$$\Rightarrow \frac{-2x+1}{2x^2}+C = \frac{f(x)}{2x^2}+C \Rightarrow \underline{f(x)=1-2x}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۱ در نمودار جعبه‌ای ۲۳ دادهٔ آماری، میانگین دنباله‌های سمت چپ و سمت راست به ترتیب ۲۱/۶ و ۳۳ و میانگین داده‌های داخل و روی جعبه ۲۵ است. میانگین کل این داده‌ها کدام است؟

۱) ۲۵/۸
۲) ۲۶
۳) ۲۶/۱
۴) ۲۶/۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

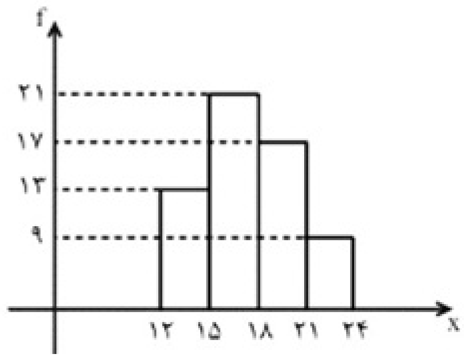
۲ در ۳۰ دادهٔ آماری، مجموع تمام داده‌ها برابر ۲۴۰ و مجموع مربعات این داده‌ها ۲۱۹۰ است. ضریب تغییرات، کدام است؟

۱) ۰/۲۲۵
۲) ۰/۲۷۵
۳) ۰/۳۲۵
۴) ۰/۳۷۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۳ از داده‌های آماری با نمودار مستطیلی زیر، سه دادهٔ ۱۴، ۱۶ و ۱۶ حذف شده است. در نمودار دایره‌ای داده‌های جدید، بزرگ‌ترین زاویهٔ مرکزی نظیر دسته‌ها، چند درجه است؟

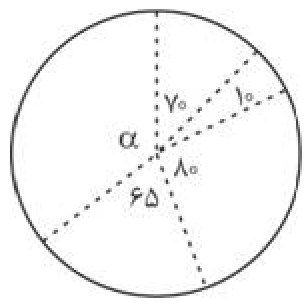
۱) ۹۰
۲) ۱۰۵
۳) ۱۲۰
۴) ۱۳۵



قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۶
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

۴ افراد یک جامعه، به ۵ گروه سنّی تقسیم شده‌اند که نمودار دایره‌ای آن‌ها با زاویهٔ مرکزی برحسب درجه رسم شده است. گروه سنّی با زاویهٔ مرکزی α، شامل چند درصد این جامعه است؟

۱) ۲۳
۲) ۳۲/۵
۳) ۳۶
۴) ۳۷/۵



کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

۵ میانگین اضلاع مربع‌هایی برابر ۸ و میانگین مساحت آن‌ها ۶۵/۴۴ است. ضریب تغییرات در طول اضلاع این مربع‌ها، کدام است؟

۱) ۰/۱۲
۲) ۰/۱۵
۳) ۰/۲
۴) ۰/۲۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

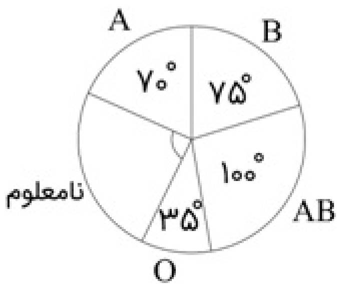
۶ داده‌های آماری به‌صورت ساقه و برگ نشان داده شده‌اند. در نمودار جعبه‌ای، تفاضل میانه از میانگین داده‌های داخل جعبه، کدام است؟

ساقه	برگ									
۵	۰	۱	۱	۲	۴	۴	۶	۷	۹	۹
۶	۰	۰	۲	۳	۳	۵	۵	۶		
۷	۱	۱	۲	۲	۴	۷	۸			

۱) صفر
۲) ۰/۵
۳) ۱
۴) ۱/۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

۷ نمودار دایره‌ای زیر، متناسب با تعداد کارکنان سازمانی با گروه خونی متمایز می‌باشد. گروه خونی ۳۲ نفر از آنان تعیین نشده است. چند نفر از آن‌ها، دارای نوع خون B هستند؟



۱) ۲۵
۲) ۳۰
۳) ۳۶
۴) ۴۰

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۸ میانگین طول اضلاع مربع‌هایی ۱۵ واحد با ضریب تغییرات ۰/۲ محاسبه شده است. میانگین مساحت این مربع‌ها، کدام است؟

۱) ۲۲۹
۲) ۲۳۲
۳) ۲۳۴
۴) ۲۳۶

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۹ در جدول فراوانی مطلق، میانگین داده‌ها کدام است؟

حدود دسته	۱۳-۱۷	۱۷-۲۱	۲۱-۲۵	۲۵-۲۹	۲۹-۳۳
فراوانی	۳	۴	۵	۲	۱

۱) ۲۱/۴
۲) ۲۱/۶
۳) ۲۱/۷
۴) ۲۱/۸

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۱۰ میانگین محیط مربع‌هایی برابر ۸۴ و میانگین مساحت این مربع‌ها ۴۹۰ می‌باشند. ضریب تغییرات در طول ضلع این مربع‌ها، کدام است؟

۱) ۰/۲۵
۲) ۰/۲۷
۳) ۰/۲۸
۴) ۰/۳۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۱۱ در جدول فراوانی تجمعی زیر، میانگین داده‌ها کدام است؟

مرکز دسته	۷	۸	۹	۱۰	۱۱
فراوانی تجمعی	۸	۲۴	۴۴	۶۸	۸۰

۱) ۹/۲
۲) ۹/۳
۳) ۹/۴
۴) ۹/۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

۱۲ در ۱۵۰ دادهٔ آماری با میانگین ۱۲، به دو برابر هریک از داده‌ها ۳ واحد اضافه می‌کنیم تا داده‌های جدیدی حاصل شود. ضریب تغییرات داده‌های جدید چندبرابر ضریب تغییرات داده‌های قبلی است؟

۱) $\frac{۷}{۹}$
۲) $\frac{۵}{۶}$
۳) $\frac{۷}{۸}$
۴) $\frac{۸}{۹}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

۱۳ جمع‌آوری داده‌ها به کدام طریق موردقبول نیست؟

۱) مصاحبه
۲) مشاهده
۳) انجام آزمایش
۴) پرسش هدایت‌کننده

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

۱۴ میانگین ۵۰ دادهٔ دسته‌بندی‌شدهٔ زیر با روش سریع کدام است؟

x	۱۱۰	۱۱۶	۱۲۲	۱۲۸	۱۳۴
f	۵	۸	۱۵	۱۲	۱۰

۱) ۱۲۳/۶۲
۲) ۱۲۳/۶۸
۳) ۱۲۴/۰۲
۴) ۱۲۴/۰۶

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

۱۵ نوع آلایندگی هوا چگونه متغیری است؟

۱) کمّی گسسته
۲) کمّی پیوسته
۳) کیفی اسمی
۴) کیفی ترتیبی

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۱۶ داده‌های آماری در ۴ دسته با درصد فراوانی نسبی آن‌ها بیان شده است. میانگین این داده‌ها کدام است؟

۲۱	۱۸	۱۵	۱۲	مرکز دسته
a	۲۵	۳۰	۱۵	درصد فراوانی نسبی

۱) ۱۶/۵
۲) ۱۶/۸
۳) ۱۷
۴) ۱۷/۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۱۷ در جدول فراوانی زیر، اگر میانگین داده‌ها ۱۸/۴ باشد، در نمودار دایره‌ای، زاویهٔ مربوط به بازهٔ $[21,25)$ چند درجه است؟

۲۵-۲۹	۲۱-۲۵	۱۷-۲۱	۱۳-۱۷	۹-۱۳	حدود دسته
۱	x	۷	۴	۳	فراوانی

۱) ۶۰
۲) ۷۵
۳) ۸۰
۴) ۹۰

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۱۸ کدام طریق برای جمع‌آوری داده‌ها مناسب نیست؟

۱) مصاحبه
۲) الگوی خاص
۳) مشاهده
۴) آزمایش

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

۱۹ شرکتی ۱۶۰ کارمند دارد که مدارک تحصیلی آنان با ۶ کد متمایز مشخص شده‌اند. در نمودار دایره‌ای، زاویهٔ مرکزی هر گروه با واحد درجه، مطابق جدول زیر است. تعداد کارکنان با کد ۴ کدام است؟

۶	۵	۴	۳	۲	۱	کد
۱۸	۵۴	α	۹۹	۴۵	۲۷	زاویهٔ مرکزی

۱) ۵۲
۲) ۵۴
۳) ۵۶
۴) ۵۸

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

۲۰ در جدول فراوانی زیر، واریانس داده‌ها کدام است؟

۲۴	۲۱	۱۸	۱۵	۱۲	مرکز دسته
۲	۷	۹	۳	۴	فراوانی

۱) ۱۱/۷۲
۲) ۱۱/۹۶
۳) ۱۲/۲۴
۴) ۱۲/۳۶

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

۲۱ در یک شرکت دارویی جدول توزیع مدرک کارکنان را با نمودارهای دایره‌ای نشان می‌دهیم. زاویهٔ مربوط به کارکنان ارشد، چند درجه است؟

دکترا	ارشد	کارشناسی	کاردانی	دیپلم	نوع مدرک
۳۰	۱۲۰	۱۸۰	۹۰	۳۰	تعداد

۱) ۸۴°
۲) ۹۲°
۳) ۹۶°
۴) ۱۰۵°

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۲۲ در ۲۵ دادهٔ آماری، میانگین و انحراف معیار به‌ترتیب ۳۰ و ۸ است. اگر داده‌های ناجور ۱۰، ۱۵، ۴۵ و ۵۰، از بین آن‌ها حذف شوند، واریانس داده‌های باقی‌مانده، تقریباً کدام است؟

۱) ۱۴/۷۲
۲) ۱۴/۸۱
۳) ۱۵/۳۳
۴) ۱۶/۶۶

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳
قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۵
قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۶
قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۸ ۱۳۹۴

۲۳ نمودار ساقه و برگ زیر درصد نمرات قبولی یک کلاس است. اگر این نمرات به ۵ گروه دسته‌بندی شوند، در نمودار میله‌ای فراوانی نسبی، بلندی میلهٔ نظیر دادهٔ ۷۷/۵، کدام است؟

برگ					ساقه
۹	۷	۴	۲	۰	۶
۶	۵	۳	۳	۲	۷
۸	۵	۵	۴	۱	۸
۵	۳	۳	۱	۰	۹

۱) ۰/۱
۲) ۰/۱۵
۳) ۰/۲
۴) ۰/۲۵

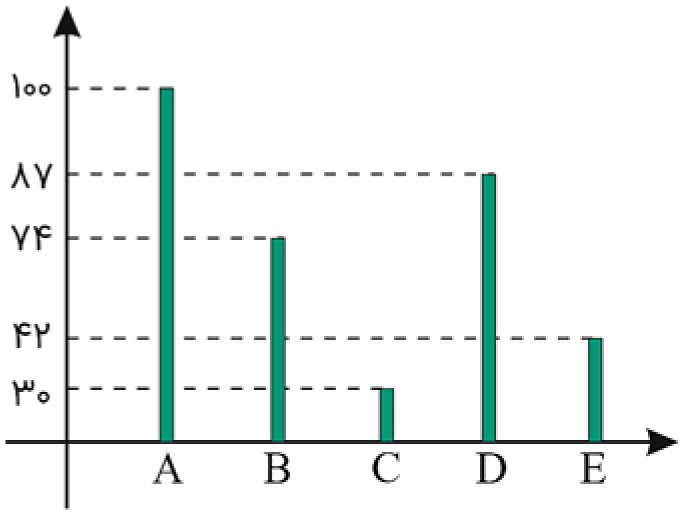
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۲۴ میانگین و انحراف معیار ۱۸ دادهٔ آماری به ترتیب ۲۵ و ۳ است. اگر داده‌های ۲۰، ۲۷ و ۲۸ به آنـان افزوده شود، واریانس ۲۱ دادهٔ جدید کدام است؟

۱) ۹/۲۵
۲) ۹/۳۶
۳) ۹/۵۲
۴) ۹/۶۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۲۵ نمودار میله‌ای زیر تعداد کارکنان با مهارت فنی در ۵ گروه متمایز است. در نمایش آن با نمودار دایره‌ای زاویهٔ مربوط به گروه B چند درجه است؟



۱) ۷۵
۲) ۸۰
۳) ۸۴
۴) ۹۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

۲۶ ضریب تغییرات در داده‌های آماری زیر با فراوانی تجمعی داده‌شده کدام است؟

مرکز دسته	۶	۸	۱۰	۱۲	۱۴
فراوانی تجمعی	۷	۱۶	۳۳	۴۴	۵۰

۱) ۰/۱۶
۲) ۰/۱۸
۳) ۰/۲۴
۴) ۰/۲۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

۲۷ داده‌های آماری را که با نمودار ساقه و برگ نشان داده شده است با نمودار جعبه‌ای نشان می‌دهیم. واریانس داده‌های داخل جعبه کدام است؟

ساقه	برگ
۲	۵ ۶ ۷ ۹
۳	۱ ۳ ۴ ۵ ۶
۴	۰ ۱ ۲ ۴

۱) ۹/۲۵
۲) ۹/۷۵
۳) ۱۰/۱۵
۴) ۱۰/۸۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

نام و نام خانوادگی:

۲۸ یک جامعه به‌اندازهٔ ۱۲ و واریانس ۱۲/۶، با جامعهٔ دیگری به‌اندازهٔ ۲۴ و واریانس ۷/۲، تشکیل جامعهٔ جدیدی داده‌اند. اگر میانگین این دو جامعه یکسان باشد، انحراف معیار جامعهٔ جدید کدام است؟

۱) ۲/۹ ۲) ۳

۳) ۳/۱ ۴) ۳/۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

۲۹ در داده‌های آماری با نمودار ساقه و برگ زیر، میانگین تفاضل مُد از تمام داده‌ها، کدام است؟

ساقه	برگ
۲	۳ ۵ ۵ ۷ ۷
۳	۰ ۱ ۲ ۲ ۲ ۳ ۶
۴	۲ ۴ ۴ ۵

۱) ۰/۵

۲) ۱

۳) ۱/۵

۴) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

۳۰ در ۲۵ دادهٔ آماری، مجموع تمام داده‌ها ۲۷۵ و مجموع مربعات آن‌ها ۳۲۵۰ می‌باشد. ضریب تغییرات در این داده‌ها کدام است؟

۱) ۰/۲۵۷۲ ۲) ۰/۲۶۴۵

۳) ۰/۲۶۷۲ ۴) ۰/۲۷۲۷

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

۳۱ ضریب تغییرات، در داده‌های آماری زیر، کدام است؟

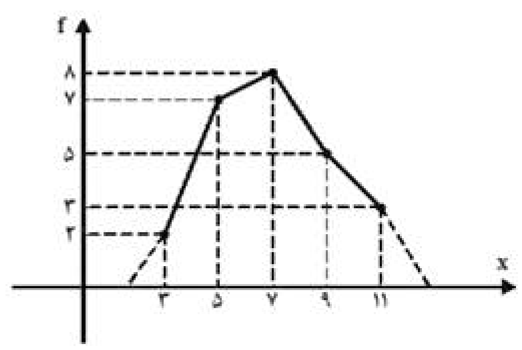
مرکز دسته	۱۲	۱۴	۱۶	۱۸	۲۰
فراوانی	۷	۹	۱۷	۱۱	۶

۱) ۰/۱۰ ۲) ۰/۱۵

۳) ۰/۲۰ ۴) ۰/۲۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۳۲ با توجه به نمودار چندبر فراوانی مقابل، واریانس کل داده‌ها، کدام است؟



۱) ۴/۵

۲) ۴/۸

۳) ۴/۹۲

۴) ۵/۱۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک دوم داخل ۱۳۹۵

۳۳ داده‌های $x_i = ۱, ۲, ۳, ۴, ۵$ مفروض است. ضریب تغییرات داده‌های $u_i = ۱۲x_i + ۶$ کدام است؟

۱) ۰/۴
۲) ۰/۴۸
۳) ۰/۵۲
۴) ۰/۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک دوم داخل ۱۳۹۵

۳۴ نمرات آزمون مهارت فنی دو کارگر A و B به‌صورت زیر است:

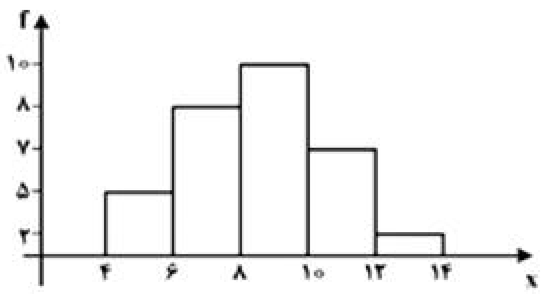
$A : ۱۵, ۱۴, ۱۵, ۱۶, ۱۷, ۱۹$
$B : ۱۶, ۱۴, ۱۷, ۱۴, ۱۷, ۱۸$

دقت عمل کدام بیشتر است؟

۱) A
۲) B
۳) یکسان
۴) غیرقابل پیش‌بینی

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۸ ۱۳۹۴
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۳

۳۵ باتوجه‌به نمودار مستطیلی زیر، میانگین کل داده‌ها، کدام است؟



۱) ۸/۴۲
۲) ۸/۵۶
۳) ۸/۶۵
۴) ۸/۷۵

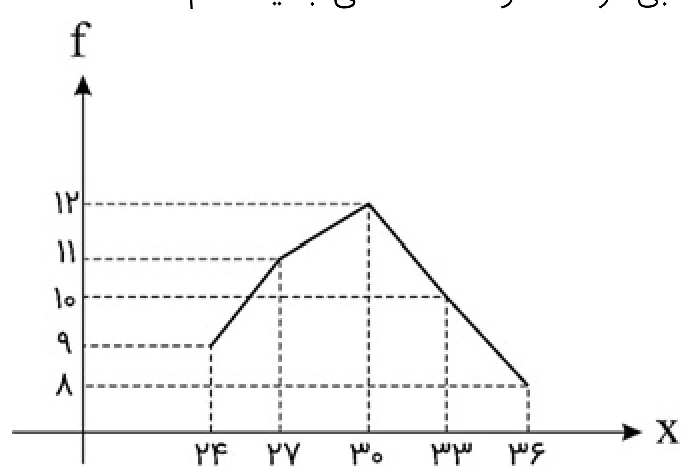
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۳۶ دستگاه A کالـیی با میانگین وزن ۱۵۰ و انحراف معیـار ۳/۶ و دستگاه B همـان کالـ را با میانگین وزن ۱۶۰ و انحراف معیـار ۳/۸۴ بسته‌بندی می‌کند. دقت عمل کدام، پیرامون میانگین با اطمینان بیشتر است؟

۱) یکسان
۲) A
۳) B
۴) نمی‌توان اظهارنظر کرد.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۳۷ اگر به داده‌های آماری با نمودار چندبر زیر، دو دادهٔ ۲۹ و ۳۲ افزوده شود، درصد فراوانی نسبی در دستهٔ وسط داده‌های جدید کدام است؟



۱) ۲۳
۲) ۲۴
۳) ۲۵
۴) ۲۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۴

۳۸ اگر میانگین داده‌های دسته‌بندی‌شده، برابر ۱۶ باشد، با تعیین فراوانی دستهٔ چهارم مقدار واریانس کدام است؟

نمایندهٔ دسته	۱۲	۱۴	۱۶	۱۸	۲۰
فراوانی	۵	۷	۱۰	A	۳

۱) ۴/۸۵
۲) ۴/۹۲
۳) ۵/۵۵
۴) ۵/۷۴

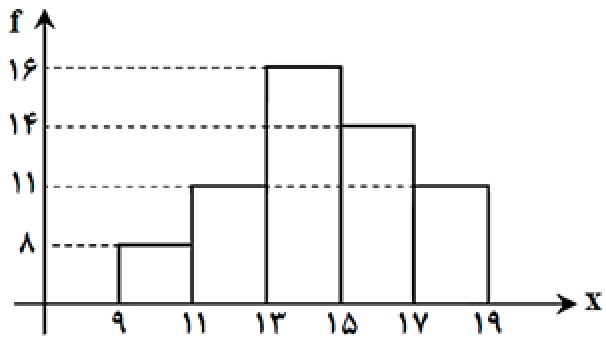
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۴

۳۹ در داده‌های دسته‌بندی‌شده با متغیر پیوسته، اگر S مساحت نمودار مستطیلی و S' مساحت سطح زیر چندبر فراوانی آن باتوجه‌به دو دستهٔ فرضی باشد، این دو مساحت چگونه‌اند؟

۱) $S = S'$
۲) $S > S'$
۳) $S < S'$
۴) اظهارنظر نمی‌توان کرد

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

۴۰ باتوجه‌به نمودار مستطیلی زیر، میانگین داده‌های آماری کدام است؟



۱) ۱۴/۲
۲) ۱۴/۳
۳) ۱۴/۴
۴) ۱۴/۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

۴۱ داده‌های آماری به‌صورت نمودار ساقه و برگ زیر است. اگر به تمام داده‌ها ۴ واحد اضافه کنیم و سپس بر ۵ تقسیم کنیم، میانگین داده‌های جدید کدام است؟

ساقه	برگ				
۵	۸	۸	۹		
۶	۰	۱	۴	۵	
۷	۱	۲	۲	۵	۷

۱) ۱۴
۲) ۱۵/۲
۳) ۱۵/۸
۴) ۱۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۴۲ میانگین طول اضلاع مربع‌هایی ۱۲ و واریانس آن‌ها ۵ است. میانگین مساحت این مربع‌ها، کدام است؟

۱) ۱۲۴
۲) ۱۳۴
۳) ۱۴۹
۴) ۱۶۹

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۴۳ تمام داده‌های نمودار ساقه و برگ زیر را سه برابر کرده، سپس ۴۰ واحد از آن‌ها کم می‌کنیم. میانگین داده‌های جدید کدام است؟

ساقه	برگ
۸	۰ ۱ ۵
۹	۲ ۴ ۶ ۷
۱۰	۰ ۰ ۳ ۴ ۸

۱) ۲۴۰

۲) ۲۴۵

۳) ۲۵۰

۴) ۲۵۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

۴۴ در ۱۲ دادهٔ آماری مجموع تمام داده‌ها ۷۲ و مجموع مجذورات آن‌ها ۴۸۰ است، ضریب تغییرات این داده‌ها کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۲}{۹}$

۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۵}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

۴۵ جدول زیر فراوانی نسبی داده‌های دسته‌بندی شده است با تعیین α، مقدار واریانس کدام است؟

مرکز دسته	۸	۱۲	۱۶	۲۰
فراوانی نسبی	۰/۱	۰/۲۵	۰/۲	α

۱) ۱۶/۵ ۲) ۱۶/۸

۳) ۱۷/۲ ۴) ۱۷/۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۳

۴۶ در مجموعهٔ اعداد $\{۶۳, ۷۰, ۶۶, ۵۰, ۷۷, ۶۵, ۶۴, x\}$، به ازای کدام مقدار x شاخص‌های میانگین - مد - میانه برابر هم هستند؟

۱) ۶۴ ۲) ۶۵

۳) ۶۶ ۴) نشدنی

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۳

۴۷ باتوجه‌به جدول آماری دسته‌بندی‌شدهٔ زیر، مقدار ضریب تغییرات داده‌های x کدام است؟

$x-۴۴$	-۳	-۱	۱	۳	۵
فراوانی	۴	۷	۵	۳	۱

۱) ۰/۰۵ ۲) ۰/۰۸

۳) ۰/۱ ۴) ۰/۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۳

۴۸ در جدول فراوانی تجمعی داده‌های آماری زیر، اگر میانگین جامعه ۴۱ باشد، در نمودار دایره‌ای زاویهٔ مربوط به دستهٔ $[۳۹,۴۳)$ چند درجه است؟

نمایندهٔ دسته	۳۳	۳۷	۴۱	۴۵	۴۹
فراوانی تجمعی	۷	۱۷	۳۲	۴۴	a

۱) ۹۶
۲) ۹۸
۳) ۱۰۲
۴) ۱۰۸

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

۴۹ اگر میانگین و ضریب تغییرات اندازهٔ اضلاع مربع‌هایی ۱۵ و ۰/۲ باشد، میانگین مساحت این مربع‌ها کدام است؟

۱) ۲۲۷
۲) ۲۲۹
۳) ۲۳۲
۴) ۲۳۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

۵۰ واریانس ۱۱ دادهٔ آماری صفر است. اگر داده‌های ۱۶،۲۴ و ۲۶ به آن اضافه شود، میانگین داده‌ها تغییر نمی‌کند، انحراف معیار ۱۴ دادهٔ حاصل کدام است؟

۱) ۰/۷۵
۲) ۱/۲۵
۳) ۱/۵
۴) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۱

۵۱ در جدول زیر مرکز دسته با درصد فراوانی نسبی داده شده است، در نمودار دایره‌ای زاویهٔ مربوط به بازهٔ $[۲۵,۲۸)$ چند درجه است؟

مرکز دسته	۱۷/۵	۲۰/۵	۲۳/۵	۲۶/۵	۲۹/۵
درصد فراوانی نسبی	۱۷	۲۰/۵	۲۲	x	۱۸

۱) ۷۲
۲) ۸۱
۳) ۸۴
۴) ۹۰

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۱

۵۲ هشتاد دادهٔ آماری در ۷ طبقه دسته‌بندی شده‌اند. اگر ۲۰ دادهٔ جدید به این جدول افزوده شود، فراوانی نسبی دستهٔ وسط تغییر نمی‌کند. نسبت افزایش داده‌های دستهٔ مذکور به فراوانی مطلق قبلی آن کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۸}$
۲) $\frac{۱}{۵}$
۳) $\frac{۱}{۴}$
۴) $\frac{۱}{۸}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

۵۳ در نمودار جعبه‌ای ۳۶ دادهٔ آماری، میانگین داده‌های دو طرف جعبه جداگانه به ترتیب ۲۲ و ۳۰ است. اگر میانگین تمام داده‌ها ۲۷/۵ باشد، آنگاه میانگین داده‌های داخل جعبه کدام است؟

۱) ۲۸
۲) ۲۸/۵
۳) ۲۹
۴) ۲۹/۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

۵۴ در ۸۰ دادهٔ آماری دسته‌بندی‌شده، فراوانی نسبی دستهٔ اول ۰/۱۱۲۵ است. اگر ۱۰ دادهٔ دیگر بزرگ‌تر از میانه به آن‌ها افزوده شود، فراوانی نسبی جدید در دستهٔ اول کدام است؟

۱) ۰/۱
۲) ۰/۱۰۲
۳) ۰/۱۰۵
۴) ۰/۱۱

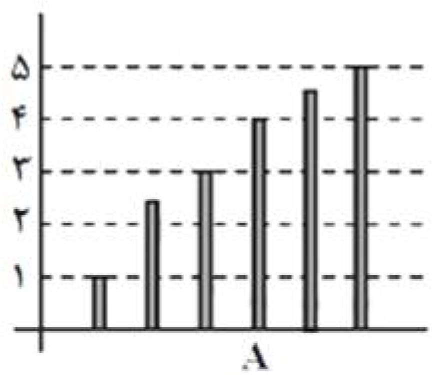
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۰

۵۵ داده‌های آماری ۱۸،۷،۲۰،۱۶،۱۷،۹،۱۰،۱۱،۱۲،۱۷،۲۱،۱۲،۱۳ را با نمودار جعبه‌ای نشان می‌دهیم. واریانس داده‌های داخل جعبه تقریباً کدام است؟

۱) ۴/۵۹
۲) ۴/۹۵
۳) ۵/۲۴
۴) ۵/۷۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۰

۵۶ در مقایسهٔ سطح زیر کشت غله‌ای در شش استان، نمودار میله‌ای زیررسم شده است. در نمودار دایره‌ای، زاویهٔ مرکزی متناظر استان A، چند درجه است؟ (قسمت غیرصحیح هر دو میله ۰/۵ است)



۱) ۶۴
۲) ۷۲
۳) ۸۰
۴) ۹۶

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۱ **گزینه ۲**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

گام اول

الف) در یک نمودار جعبه‌ای، ۲۵% داده‌ها سمت چپ جعبه، ۲۵% آن‌ها سمت راست جعبه و مابقی داخل و روی جعبه قرار می‌گیرند.

ب) میانگین n دادهٔ $x_۱, x_۲, ..., x_n$ از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$\text{میانگین} = \frac{x_۱+x_۲+...+x_n}{n}$$

گام دوم

تعداد کل داده‌ها ۲۳ است، داریم:

$$\left[۲۳ \times \frac{۲۵}{۱۰۰}\right] = ۵$$

بنابراین:

تعداد داده‌های سمت چپ جعبه: ۵

تعداد داده‌های سمت راست جعبه: ۵

تعداد داده‌های داخل و روی جعبه: $۲۳ - (۵ + ۵) = ۱۳$

برای محاسبهٔ میانگین کل داده‌ها، لازم است مجموع آن‌ها را داشته باشیم لذا ابتدا مجموع داده‌های هر قسمت را به دست می‌آوریم. داریم:

میانگین × تعداد داده‌ها = جمع داده‌ها

$$\text{مجموع داده های سمت چپ جعبه} = ۵ \times ۲۱/۶ = ۱۰۸$$

$$\text{مجموع داده های سمت راست جعبه} = ۵ \times ۳۳ = ۱۶۵$$

$$\text{مجموع داده های داخل و روی جعبه} = ۱۳ \times ۲۵ = ۳۲۵$$

جمع کل داده‌ها برابر است با:

$$\text{جمع کل داده ها} = ۱۰۸ + ۱۶۵ + ۳۲۵ = ۵۹۸$$

بنابراین میانگین کل داده‌ها برابر است با:

$$\text{میانگین} = \frac{\text{مجموع کل داده ها}}{\text{تعداد کل داده ها}} = \frac{۵۹۸}{۲۳} = ۲۶$$

۲ **گزینه ۴**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

گام اول

الف) ضریب تغییرات از رابطهٔ $CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$ به دست می‌آید که σ انحراف معیار و $\bar{x}$ میانگین داده‌ها است. می‌دانیم:

$$\bar{x} = \frac{x_۱+x_۲+...+x_n}{n}$$

و

$$\sigma^۲ = \frac{x_۱^۲+x_۲^۲+...+x_n^۲}{n} - (\bar{x})^۲$$

ب) داریم:

$$n = ۳۰$$
$$x_۱ + x_۲ + ... + x_{۳۰} = ۲۴۰$$
$$x_۱^۲ + x_۲^۲ + ... + x_{۳۰}^۲ = ۲۱۹۰$$

گام دوم

با توجه به اطلاعات موجود، ابتدا میانگین و انحراف معیار داده‌ها را به دست آوریم:

$$\bar{x} = \frac{۲۴۰}{۳۰} = ۸$$

$$\sigma^۲ = \frac{x_۱^۲+x_۲^۲+...+x_{۳۰}^۲}{۳۰} - (\bar{x})^۲ \Rightarrow \sigma^۲ = \frac{۲۱۹۰}{۳۰} - ۸^۲ = ۷۳ - ۶۴ = ۹ \Rightarrow \sigma = \sqrt{۹} = ۳$$

پس ضریب تغییرات داده‌ها برابر است با:

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{۳}{۸} = ۰/۳۷۵$$

۳ **گزینه ۳**

تعداد کل داده‌ها برابر است با مجموع فراوانی مطلق طبقات مطابق جدول زیر:

حدود دسته‌ها	فراوانی مطلق f_i
$[۱۲, ۱۵)$	۱۳
$[۱۵, ۱۸)$	۲۱
$[۱۸, ۲۱)$	۱۷
$[۲۱, ۲۴]$	۹

$$\text{مجموع فراوانی‌ها} = ۱۳ + ۲۱ + ۱۷ + ۹ = ۶۰$$

اگر داده‌های ۱۴، ۱۶ و ۱۶ را حذف کنیم، از تعداد داده‌های دستهٔ دوم دوتا و از فراوانی مطلق دستهٔ اول، یکی کم می‌شود؛ بنابراین فراوانی مطلق دستهٔ دوم ۱۹تا می‌شود که بیشترین فراوانی مطلق است و بزرگ‌ترین زاویهٔ مرکزی را در نمودار دایره‌ای خواهد داشت. ازآنجایی‌که سه‌تا از داده‌ها را کنار گذاشته‌ایم تعداد کل داده‌ها نیز ۵۷ خواهد بود.

$$S_i = \frac{f_i}{n} \times ۳۶۰^\circ = \frac{۱۹}{۵۷} \times ۳۶۰^\circ = ۱۲۰^\circ$$

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۶

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

۴ **گزینه ۴**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

گام اول

الف) باتوجه‌به اینکه مجموع درجه‌ها در نمودار دایره‌ای برابر ۳۶۰° است، ابتدا اندازهٔ α را حساب می‌کنیم.

ب) برای به دست آوردن درصد گروه سنی با زاویهٔ مرکزی α از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$\text{درصد گروه سنی} = \frac{\alpha}{۳۶۰} \times ۱۰۰$$

گام دوم

$$\alpha + ۷۰ + ۱۰ + ۸۰ + ۶۵ = ۳۶۰ \Rightarrow \alpha + ۲۲۵ = ۳۶۰ \Rightarrow$$
$$\alpha = ۳۶۰ - ۲۲۵ = ۱۳۵^\circ \Rightarrow \alpha = ۱۳۵^\circ$$

درصد گروه سنی با زاویهٔ مرکزی ۱۳۵° برابر است با:

$$\text{درصد گروه سنی} = \frac{۱۳۵}{۳۶۰} \times ۱۰۰ = ۳۷/۵\%$$

۵ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

گام اول

برای به دست آوردن ضریب تغییرات در طول اضلاع این مربع‌ها، ابتدا انحراف معیار طول اضلاع را با σ نشان داده و از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum x_i^{۲}}{n} - \bar{x}^{۲}}$$

در این تست $\bar{x} = ۸$ و $\frac{\sum x_i^{۲}}{n} = ۶۵/۴۴$ است، پس σ را محاسبه کرده و با استفاده از فرمول $CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$، ضریب تغییرات را مشخص می‌کنیم.

گام دوم

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum x_i^{۲}}{n} - \bar{x}^{۲}} = \sqrt{۶۵/۴۴ - ۸^{۲}} = \sqrt{۶۵/۴۴ - ۶۴} = \sqrt{۱/۴۴} = ۱/۲$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{۱/۲}{۸} = ۰/۱۵$$

۶ گزینه ۱

تعداد کل داده‌ها ۲۵ تا است که دادهٔ سیزدهم میانه می‌باشد و برابر است با ۶۲ و میانهٔ ۱۲ دادهٔ اول برابر چارک اول (میانگین داده‌های ششم و هفتم) و $Q_{۱} = \frac{۵۴+۵۶}{۲} = ۵۵$ و میانهٔ ۱۲ دادهٔ آخر نیز برابر چارک سوم می‌باشد (میانگین داده‌های نوزدهم و بیستم) و $Q_{۳} = \frac{۷۱+۷۱}{۲} = ۷۱$؛ پس:

و در این حالت داده‌هایی که در داخل جعبه قرار می‌گیرند عبارت است از:

$$۵۶, ۵۷, ۵۹, ۵۹, ۶۰, ۶۰, ۶۲, ۶۳, ۶۳, ۶۵, ۶۵, ۶۶, ۷۱ \Rightarrow \text{میانه} = ۶۲$$

$$\text{میانگین} = \frac{۵۶ + ۵۷ + \dots + ۷۱}{۱۳} = \frac{۸۰۶}{۱۳} = ۶۲$$

$$\text{اختلاف میانه و میانگین} = ۰$$

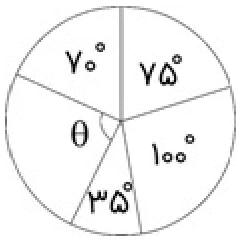
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

۷ گزینه ۲

$$\theta = ۳۶۰^\circ - (۷۰^\circ + ۷۵^\circ + ۳۵^\circ + ۱۰۰^\circ) = ۸۰^\circ$$

$$۳۲ = \frac{۸۰^\circ}{۳۶۰^\circ} \times \text{فراوانی کل} \Rightarrow \text{فراوانی کل} = ۱۴۴$$

$$\text{فراوانی کل گروه خونی } B = \frac{۷۵^\circ}{۳۶۰^\circ} \times ۱۴۴ = ۳۰$$



کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۸ گزینه ۳

$$\text{ضریب تغییرات} = \frac{\text{انحراف معیار}}{\text{میانگین}} \Rightarrow CV = \frac{\sigma}{\bar{a}} \xrightarrow[CV=۰/۲]{\bar{a}=۱۵} \sigma = ۳ \Rightarrow \sigma^۲ = ۹$$

مطابق رابطهٔ واریانس داریم:

$$\sigma^۲ = \frac{a_۱^۲+a_۲^۲+...+a_n^۲}{n} - \bar{a}^۲ \xrightarrow[\bar{a}=۱۵]{a_i^۲=S_i} ۹ + ۱۵^۲ = \frac{S_۱+S_۲+...+S_n}{n} = \bar{S} \Rightarrow \bar{S} = ۲۳۴$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۹ گزینه ۱

x_i	۱۵	۱۹	۲۳	۲۷	۳۱
f_i	۳	۴	۵	۲	۱

$x_i - ۲۳$	-۸	-۴	۰	۴	۸
f_i	۳	۴	۵	۲	۱

$$\bar{x} - ۲۳ = \frac{\Sigma x_i f_i}{\Sigma f_i} = \frac{(-۲۴)+(-۱۶)+۰+(۸)+(۸)}{۱۵} = \frac{-۲۴}{۱۵} = -۱/۶ \Rightarrow \bar{x} = ۲۳ - ۱/۶ = ۲۱/۴$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۱۰ **گزینه ۴**

$$\sigma^{۲} = \frac{\Sigma x_i^{۲}}{n} - \bar{x}^{۲} \xrightarrow{\bar{P}=۴\bar{x},۴\bar{x}=۸۴\Rightarrow\bar{x}=۲۱} \sigma^{۲} = ۴۹۰ - ۴۴۱ = ۴۹ \Rightarrow \sigma = ۷$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{۷}{۲۱} = \frac{۱}{۳} \simeq ۰/۳۳$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۱۱ **گزینه ۱**

فراوانی تجمعی دستهٔ اول با فراوانی مطلق آن برابر است و از دستهٔ دوم به بعد، فراوانی مطلق هر دسته برابر است با فراوانی تجمعی آن دسته منهای فراوانی تجمعی دستهٔ قبل، پس باتوجه‌به جدول صورت سؤال، می‌توان به جدول زیر رسید:

مرکز دسته (x_i)	۷	۸	۹	۱۰	۱۱
فراوانی مطلق (f_i)	۸	۱۶	۲۰	۲۴	۱۲

برای سهولت انجام محاسبات، از همهٔ داده‌ها، ۹ واحد کم می‌کنیم:

$x_i - ۹$	-۲	-۱	۰	۱	۲
f_i	۸	۱۶	۲۰	۲۴	۱۲

باتوجه‌به اینکه تعداد کل داده‌ها، برابر با فراوانی تجمعی دستهٔ آخر است، داریم:

$$\overline{x - ۹} = \frac{(-۲\times۸)+(-۱\times۱۶)+(۰\times۲۰)+(۱\times۲۴)+(۲\times۱۲)}{۸۰} \Rightarrow \overline{x - ۹} = \frac{۱۶}{۸۰} \Rightarrow \overline{x - ۹} = ۰/۲$$

حال باتوجه‌به اینکه $\overline{ax + b} = a\bar{x} + b$ از $\overline{x - ۹} = ۰/۲$ نتیجه می‌شود که:

$$\bar{x} - ۹ = ۰/۲ \Rightarrow \bar{x} = ۹/۲$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

۱۲ گزینه ۴

انحراف معیار و میانگین داده‌های اولیه را به ترتیب با σ_x و $\bar{x}$ نشان می‌دهیم، در این صورت ضریب تغییرات این داده‌ها برابر می‌شود با:

$$CV_x = \frac{\sigma_x}{\bar{x}} \quad (*)$$

برای محاسبهٔ ضریب تغییرات داده‌های جدید داریم:

$$CV_{(۲x+۳)} = \frac{\sigma_{(۲x+۳)}}{\overline{۲x+۳}}$$

می‌دانیم $\begin{cases} \overline{ax+b} = a\bar{x}+b \\ \sigma_{ax+b} = |a|\sigma_x \end{cases}$، پس:

$$CV_{(۲x+۳)} = \frac{۲\sigma_x}{۲\bar{x}+۳} \quad (**)$$

$$\xrightarrow{(*),(**)} \frac{CV_{(۲x+۳)}}{CV_x} = \frac{\frac{۲\sigma_x}{۲\bar{x}+۳}}{\frac{\sigma_x}{\bar{x}}} = \frac{۲\bar{x}}{۲\bar{x}+۳}$$

باتوجه‌به فرض سؤال $\bar{x} = ۱۲$ پس نسبت ضریب تغییرات داده‌های جدید به ضریب تغییرات داده‌های اولیه، برابر است با:

$$\frac{۲\times۱۲}{۲\times۱۲+۳} = \frac{۲۴}{۲۷} = \frac{۸}{۹}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

۱۳ گزینه ۴

چهار روش جمع‌آوری داده وجود دارد:

۱- استفاده از داده‌های از پیش تهیه‌شده.

۲- از طریق پرسش‌نامه: مستقیماً از اشخاص (شفاهی، مصاحبه)، پرسش‌نامهٔ کتبی

۳- از طریق مشاهده و ثبت وقایع

۴- از طریق انجام آزمایش

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

۱۴ گزینه ۲

اگر میانگین این داده‌ها را با $\bar{x}$ نشان دهیم، باتوجه‌به گزینه‌ها $۱۲۳ < \bar{x} < ۱۲۵$ است، پس میانگین تخمینی را $\bar{X} = ۱۲۴$ در نظر می‌گیریم، به‌طوری‌که $a = x - \bar{X}$ است. داریم:

x	۱۱۰	۱۱۶	۱۲۲	۱۲۸	۱۳۴
$a = x - \bar{X}$	-۱۴	-۸	-۲	۴	۱۰
f	۵	۸	۱۵	۱۲	۱۰

ازطرفی:

$$\bar{a} = \frac{\sum f_i a_i}{\sum f_i} = \frac{۵(-۱۴)+۸(-۸)+۱۵(-۲)+۱۲(۴)+۱۰(۱۰)}{۵+۸+۱۵+۱۲+۱۰} = \frac{-۷۰-۶۴-۳۰+۴۸+۱۰۰}{۵۰} = \frac{-۱۶}{۵۰} = -۰/۳۲$$
$$(*)$$

$$a = x - \bar{X} \Rightarrow \bar{a} = \bar{x} - \bar{X} \xrightarrow{(*)} -۰/۳۲ = \bar{x} - ۱۲۴ \Rightarrow \bar{x} = ۱۲۴ - ۰/۳۲ \Rightarrow \bar{x} = ۱۲۳/۶۸$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

۱۵ گزینه ۳

ازآنجایی‌که نوع آلایندگی هوا می‌تواند به‌صورت آلایندگی مونوکسید کربن، دی‌اکسید کربن و غیره باشد، پس کیفی اسمی است. توجه کنید در این سؤال میزان آلایندگی هوا که کمّی پیوسته می‌باشد، سؤال نشده است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۱۶ گزینه ۴

مجموع درصد فراوانی‌های نسبی باید برابر با ۱۰۰ درصد باشد. داریم:

$$۱۵ + ۳۰ + ۲۵ + \alpha = ۱۰۰ \Rightarrow \alpha = ۳۰ \text{ درصد}$$

اگر F_i و f_i به ترتیب فراوانی نسبی و فراوانی مطلق دستهٔ iام و n تعداد کل داده‌ها باشد، داریم: $F_i = \frac{f_i}{n} \Rightarrow f_i = nF_i$

$$\text{میانگین} = \frac{۱۲ \times f_۱ + ۱۵ \times f_۲ + ۱۸ \times f_۳ + ۲۱ \times f_۴}{n} = \frac{۱۲ \times nF_۱ + ۱۵ \times nF_۲ + ۱۸ \times nF_۳ + ۲۱ \times nF_۴}{n}$$

$$\Rightarrow \text{میانگین} = ۱۲ \times F_۱ + ۱۵ \times F_۲ + ۱۸ \times F_۳ + ۲۱ \times F_۴ = ۱۲ \times ۰/۱۵ + ۱۵ \times ۰/۳ + ۱۸ \times ۰/۲۵ + ۲۱ \times ۰/۳$$

$$= ۱۷/۱$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۱۷ گزینه ۴

باتوجه‌به جدول صورت سؤال می‌توان به جدول زیر رسید:

مرکز دسته (x_i)	۱۱	۱۵	۱۹	۲۳	۲۷
فراوانی (f_i)	۳	۴	۷	x	۱

$$\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} \xrightarrow{\bar{x}=۱۸/۴} ۱۸/۴ = \frac{۳۳ + ۶۰ + ۱۳۳ + ۲۳x + ۲۷}{۳ + ۴ + ۷ + x + ۱} \Rightarrow ۱۸/۴ = \frac{۲۵۳ + ۲۳x}{۱۵ + x}$$

$$\Rightarrow ۱۸/۴ = \frac{۲۳(۱۱ + x)}{۱۵ + x} \Rightarrow \frac{۱۸/۴}{۲۳} = \frac{۱۱ + x}{۱۵ + x} \Rightarrow ۰/۸ = \frac{۱۱ + x}{۱۵ + x} \Rightarrow ۰/۸(۱۵ + x) = ۱۱ + x$$

$$\Rightarrow ۱۲ + ۰/۸x = ۱۱ + x \Rightarrow ۱ = ۰/۲x \Rightarrow x = ۵$$

$$\text{زاویهٔ دستهٔ } i \text{ در نمودار دایره‌ای} : \alpha_i = \frac{f_i}{\Sigma f_i} \times ۳۶۰^\circ$$

$$\text{زاویهٔ مورد نظر} : \alpha = \frac{۵}{۱۵ + ۵} \times ۳۶۰^\circ = ۹۰^\circ$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۱۸ **گزینه ۲**

معمولاً برای جمع‌آوری داده، نمونه‌گیری می‌کنیم. نتایج حاصل از اندازه‌گیری و بررسی نمونه‌ها را داده می‌نامیم. مصاحبه، آزمایش و مشاهده، روش‌هایی برای جمع‌آوری داده هستند.

نکتهٔ مهم آن است که اعضای نمونه باید به‌طور تصادفی انتخاب شوند؛ یعنی انتخاب آن‌ها نباید از قانون خاصی پیروی کند.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

۱۹ **گزینه ۱**

مجموع زوایای مرکزی در نمودار دایره‌ای ۳۶۰ درجه است، پس:

$$۲۷^\circ + ۴۵^\circ + ۹۹^\circ + \alpha + ۵۴^\circ + ۱۸^\circ = ۳۶۰^\circ \Rightarrow \alpha = ۱۱۷^\circ$$

ازطرفی اگر α، زاویهٔ متناظر با دسته‌ای با فراوانی f در N دادهٔ آماری دسته‌بندی‌شده باشد، آنگاه:

$$\alpha = \frac{f}{N} \times ۳۶۰^\circ \Rightarrow ۱۱۷^\circ = \frac{f}{۱۶۰} \times ۳۶۰^\circ \Rightarrow f = \frac{۱۶۰^\circ \times ۱۱۷}{۳۶۰^\circ} = ۵۲$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

۲۰ **گزینه ۳**

ابتدا از همهٔ داده‌ها، ۱۱ واحد کم می‌کنیم. با انجام این تغییر، واریانس داده‌ها تغییری نمی‌کند؛ بنابراین به جدول زیر می‌رسیم که با استفاده از رابطهٔ $\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i}$ میانگین داده‌ها را محاسبه می‌کنیم:

مرکز دسته (x_i)	۱	۴	۷	۱۰	۱۳
فراوانی (f_i)	۴	۳	۹	۷	۲

$$\bar{x} = \frac{۴ \times ۱ + ۳ \times ۴ + ۹ \times ۷ + ۷ \times ۱۰ + ۲ \times ۱۳}{۴ + ۳ + ۹ + ۷ + ۲} = \frac{۱۷۵}{۲۵} = ۷$$

$$\text{واریانس}: \sigma^۲ = \frac{\Sigma f_i (x_i - \bar{x})^۲}{\Sigma f_i} = \frac{۴(۱-۷)^۲ + ۳(۴-۷)^۲ + ۹(۷-۷)^۲ + ۷(۱۰-۷)^۲ + ۲(۱۳-۷)^۲}{۴ + ۳ + ۹ + ۷ + ۲}$$

$$= \frac{۱۴۴ + ۲۷ + ۰ + ۶۳ + ۷۲}{۲۵} = \frac{۳۰۶}{۲۵} = ۱۲/۲۴$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

۲۱ **گزینه ۳**

$$\text{زاویهٔ دستهٔ } i \text{ درنمودار دایره‌ای}\ \alpha_i = \frac{f_i}{\Sigma f_i} \times ۳۶۰^\circ$$

$$\alpha = \frac{۱۲۰}{۳۰ + ۹۰ + ۱۸۰ + ۱۲۰ + ۳۰} \times ۳۶۰^\circ = \frac{۱۲۰}{۴۵۰} \times ۳۶۰^\circ = ۹۶^\circ$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۲۲ **گزینه ۴**

میانگین داده‌ها با حذف داده‌های ناجور : $\bar{x} = \frac{۲۵\times۳۰-(۵۰+۴۵+۱۵+۱۰)}{۲۵-۴} = \frac{۷۵۰-۱۲۰}{۲۱} = \frac{۶۳۰}{۲۱} = ۳۰$

با حذف داده‌ها، میانگین تغییری نکرد، بنابراین برای محاسبهٔ واریانس داده‌های باقی‌مانده، کافی است جملات مربوط به داده‌های ناجور را از واریانس حذف کنیم:

$$\sigma^۲ = (۸)^۲ = ۶۴ \Rightarrow (\sigma')^۲ = \frac{۶۴\times ۲۵ - [(۱۰-۳۰)^۲ + (۱۵-۳۰)^۲ + (۴۵-۳۰)^۲ + (۵۰-۳۰)^۲]}{۲۵-۴}$$

$$= \frac{۱۶۰۰-۱۲۵۰}{۲۱} = \frac{۳۵۰}{۲۱} = ۱۶/۶۶$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳
قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۵
قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۶
قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۸ ۱۳۹۴

۲۳ **گزینه ۱**

باتوجه‌به نمودار، کمترین داده ۶۰ و بیشترین داده ۹۵ است. پس دامنهٔ تغییرات برابر $۹۵-۶۰=۳۵$ می‌شود.

$$\text{طول هر دسته} = \frac{\text{دامنهٔ تغییرات}}{\text{تعداد دسته}} = \frac{۳۵}{۵} = ۷$$

$$[۶۰,۶۷), [۶۷,۷۴), [۷۴,۸۱), [۸۱,۸۸), [۸۸,۹۵]$$

دادهٔ ۷۷/۵ مربوط به بازهٔ $[۷۴,۸۱)$ می‌باشد و فراوانی مطلق این بازه برابر ۲ است (داده‌های ۷۵ و ۷۶)؛ بنابراین داریم:

$$\text{فراوانی نسبی} = \frac{\text{فراوانی مطلق}}{\text{فراوانی کل}} = \frac{۲}{۲۰} = ۰/۱$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۲۴ **گزینه ۳**

$$\text{واریانس} = \frac{\sum (x_i-\bar{x})^۲}{n} \Rightarrow ۹ = \frac{\sum (x_i-\bar{x})^۲}{۱۸} \Rightarrow \sum_{i=۱}^{۱۸} (x_i - ۲۵)^۲ = ۱۸\times ۹ = ۱۶۲$$

ازآنجاکه میانگین سه دادهٔ آماری اضافه‌شده برابر ۲۵ می‌باشد $\left(\frac{۲۰+۲۷+۲۸}{۳} = ۲۵\right)$ بنابراین میانگین داده‌های جدید همان ۲۵ است.

$$\sigma'^۲ = \frac{\sum_{i=۱}^{۲۱}(x_i-۲۵)^۲}{۲۱} = \frac{\sum_{i=۱}^{۱۸}(x_i-۲۵)^۲ + (۲۰-۲۵)^۲ + (۲۷-۲۵)^۲ + (۲۸-۲۵)^۲}{۲۱}$$

$$= \frac{۱۶۲+۲۵+۴+۹}{۲۱} = \frac{۲۰۰}{۲۱} \simeq ۹/۵۲$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۲۵ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

گام اول

با استفاده از رابطهٔ $\alpha_i = \frac{f_i}{n} \times ۳۶۰^\circ$، زاویهٔ مربوط به گروه B را تعیین می‌کنیم.

گام دوم

$$\alpha_B = \frac{۷۴}{۱۰۰+۷۴+۳۰+۸۷+۴۲} \times ۳۶۰^\circ = \frac{۷۴}{۳۳۳} \times ۳۶۰^\circ = \frac{۲}{۹} \times ۳۶۰^\circ = ۸۰$$

۲۶ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

گام اول

جدول داده‌شده بر حسب فراوانی تجمعی است. ابتدا جدول را بر اساس فراوانی مطلق بازنویسی می‌کنیم، سپس با استفاده از فرمول $CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$، ضریب تغییرات را محاسبه می‌کنیم.

گام دوم

x_i	۶	۸	۱۰	۱۲	۱۴
f_i	۷	۹	۱۷	۱۱	۶

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{(۶\times۷)+(۸\times۹)+(۱۰\times۱۷)+(۱۲\times۱۱)+(۱۴\times۶)}{۷+۹+۱۷+۱۱+۶} = ۱۰$$

$$\sigma^۲ = \frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^۲}{\sum f_i} = \frac{۷(۶-۱۰)^۲+۹(۸-۱۰)^۲+۱۷(۱۰-۱۰)^۲+۱۱(۱۲-۱۰)^۲+۶(۱۴-۱۰)^۲}{۵۰}$$

$$= \frac{۲۸۸}{۵۰} = ۵/۷۶ \Rightarrow \sigma = \sqrt{۵/۷۶} = ۲/۴$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{۲/۴}{۱۰} = ۰/۲۴$$

۲۷ گزینه ۴

باتوجه‌به آنکه تعداد داده‌ها برابر با ۱۳ است، پس دادهٔ هفتم میانه بوده و درنتیجه چارک اول بین داده‌های سوم و چهارم و چارک سوم بین داده‌های دهم و یازدهم قرار می‌گیرد، یعنی نمودار جعبه‌ای شامل داده‌های چهارم تا دهم است.

$$۲۹, ۳۱, ۳۳, ۳۴, ۳۵, ۳۶, ۴۰$$

$$\bar{x} = \frac{۲۹+۳۱+۳۳+۳۴+۳۵+۳۶+۴۰}{۷} = ۳۴$$

$$\sigma^۲ = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^۲}{n} = \frac{۷۶}{۷} = ۱۰/۸۵$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

۲۸ **گزینه ۲**

اگر داده‌های جامعهٔ اول را با x_i و داده‌های جامعهٔ دوم را با y_i نمایش دهیم، آنگاه داریم:

$$\sigma_1^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n_1} \Rightarrow 12/6 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{12}$$
$$\Rightarrow \sum (x_i - \bar{x})^2 = 151/2$$
$$\sigma_2^2 = \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n_2} \Rightarrow 7/2 = \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{24}$$
$$\Rightarrow \sum (y_i - \bar{y})^2 = 172/8$$

باتوجه‌به آنکه $\bar{x} = \bar{y}$ پس واریانس کل داده‌ها برابر است با:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 + \sum (y_i - \bar{y})^2}{n_1 + n_2} = \frac{324}{36} = 9$$

و درنتیجه انحراف معیار داده‌ها برابر با $\sigma = 3$ است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

۲۹ **گزینه ۲**

مد داده‌ها برابر ۳۲ است. داریم:

$$\text{میانگین تفاضل مد از تمام داده‌ها} = \frac{(23 - 32) + (25 - 32) + \ldots + (45 - 32)}{16}$$
$$= \frac{(23 + 25 + \ldots + 45) - 16 \times 32}{16} = \frac{528}{16} - 32 = 33 - 32 = 1$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

۳۰ **گزینه ۴**

$$\sigma^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - (\bar{x})^2 = \frac{3250}{25} - \left(\frac{275}{25}\right)^2 = 130 - 121 = 9 \Rightarrow \sigma = 3$$
$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}, \bar{x} = \frac{275}{25} = 11$$
$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{3}{11} = 0/2727$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

۳۱ **گزینه ۲**

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{5}f_ix_i}{N}\Rightarrow \bar{x}=\frac{84+126+272+198+120}{50}=\frac{800}{50}\Rightarrow \bar{x}=16$$

$$\sigma^2=\frac{\sum_{i=1}^{5}f_i(x_i-\bar{x})^2}{N}=\frac{7(12-16)^2+9(14-16)^2+17(16-16)^2+11(18-16)^2+6(20-16)^2}{50}$$

$$\sigma^2=\frac{112+36+0+44+96}{50}=\frac{288}{50}\Rightarrow \sigma^2=\frac{144}{25}\Rightarrow \sigma=\frac{12}{5}$$

$$CV=\frac{\sigma}{\bar{x}}=\frac{\frac{12}{5}}{16}\Rightarrow CV=\frac{12}{16\times 5}=0/15$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۳۲ **گزینه ۴**

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک دوم داخل ۱۳۹۵

گام اول

اگر کل داده‌ها در n دسته قرار داشته باشند به‌طوری که x_i مرکز دستهٔ iام و f_i فراوانی این دسته باشد، آنگاه میانگین $(\bar{x})$ و واریانس (σ^2) کل داده‌ها از روابط زیر به‌دست می‌آید:

$$\bar{x}=\frac{f_1x_1+f_2x_2+\ldots+f_nx_n}{f_1+f_2+\ldots+f_n}$$

$$\sigma^2=\frac{f_1(x_1-\bar{x})^2+f_2(x_2-\bar{x})^2+\ldots+f_n(x_n-\bar{x})^2}{f_1+f_2+\ldots+f_n}$$

گام دوم

با توجه به نمودار چندبر فراوانی داده‌شده، ابتدا جدول فراوانی مربوط به داده‌ها را رسم می‌کنیم:

x_i	۳	۵	۷	۹	۱۱
f_i	۲	۷	۸	۵	۳

با استفاده از روابط گام اول، میانگین و سپس واریانس داده‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$\bar{x}=\frac{2(3)+7(5)+8(7)+5(9)+3(11)}{2+7+8+5+3}=\frac{175}{25}=7$$

$$\sigma^2=\frac{2(3-7)^2+7(5-7)^2+8(7-7)^2+5(9-7)^2+3(11-7)^2}{2+7+8+5+3}=5/12$$

۳۳ **گزینه ۱**

گام اول

اگر n دادهٔ $x_1, x_2, ..., x_n$ داشته باشیم، ضریب تغییرات این داده‌ها به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

که $\bar{x}$ میانگین داده‌هاست و داریم:

$$\bar{x} = \frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}$$

و σ انحراف معیار داده‌هاست و داریم:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+...+(x_n-\bar{x})^2}{n}$$

گام دوم

با دو روش می‌توان ضریب تغییرات u_iها را محاسبه کرد.

روش اول:

$$u_i = 12x_i + 6 \Rightarrow u_i = 18, 30, 42, 54, 66$$

$$\bar{x} = \frac{18+30+42+54+66}{5} = \frac{210}{5} = 42$$

$$\sigma^2 = \frac{(18-42)^2+(30-42)^2+(42-42)^2+(54-42)^2+(66-42)^2}{5} = \frac{576+144+0+144+576}{5} = 288$$

$$\Rightarrow \sigma = \sqrt{288} = 12\sqrt{2}$$

بنابراین ضریب تغییرات u_iها برابر است با:

$$CV = \frac{12\sqrt{2}}{42} = \frac{2\sqrt{2}}{7} \simeq \frac{2\times 1/4}{7} = 0/4$$

روش دوم:

نکتهٔ ۱: اگر تمام داده‌ها را در یک عدد ثابت ضـرب کنیم آنگاه میانگین داده‌ها نیز در آن عدد ثابت ضـرب می‌شود و اگر تمام داده‌ها با یک عدد ثابت جمع شود آنگاه میانگین داده‌ها نیز با آن عدد ثابت جمع می‌شود.

نکتهٔ ۲: اگر تمام داده‌ها را در یک عدد ثابت ضـرب کنیم آنگاه انحراف معیار داده‌ها نیز در آن عدد ثابت ضرب می‌شود و اگر تمام داده‌ها با یک عدد ثابت جمع شود آنگاه انحراف معیار داده‌ها تغییری نمی‌کند.

ابتدا با اسـتفاده از روابط گام اول، میانگین و انحراف معیار x_iها را به‌دست می‌آوریم، سـپس با توجه به دو نکتهٔ بالا، میانگین و انحراف معیار u_iها و در آخر ضریب تغییرات آنها را محاسبه می‌کنیم.

$$x_i = 1, 2, 3, 4, 5$$

$$\bar{x} = \frac{15}{5} = 3 \Rightarrow \bar{x}_{\text{جدید}} = 12\bar{x} + 6 = 12(3) + 6 = 42$$

$$\sigma^2 = \frac{(1-3)^2 + (2-3)^2 + (3-3)^2 + (4-3)^2 + (5-3)^2}{5} = \frac{4+1+0+1+4}{5} = 2$$

$$\Rightarrow \sigma = \sqrt{2} \Rightarrow \sigma_{\text{جدید}} = 12\sigma = 12(\sqrt{2}) = 12\sqrt{2}$$

بنابراین:

$$CV_{\text{جدید}} = \frac{\sigma_{\text{جدید}}}{\bar{x}_{\text{جدید}}} = \frac{12\sqrt{2}}{42} \simeq \frac{2\times 1/4}{7} = 0/4$$

۳۴ **گزینه ۲**

ضریب تغییرات نمرات آزمون هر کارگری کمتر باشد به منزلهٔ آن است که دقت بیشتری دارد.

$$\bar{x}_A = \frac{۱۵+۱۴+۱۵+۱۶+۱۷+۱۹}{۶} = ۱۶$$
$$\bar{x}_B = \frac{۱۶+۱۴+۱۷+۱۴+۱۷+۱۸}{۶} = ۱۶$$
$$\sigma_A^۲ = \frac{(-۱)^۲+(-۲)^۲+(-۱)^۲+۰^۲+۱^۲+۳^۲}{۶} = \frac{۸}{۳}$$
$$\sigma_B^۲ = \frac{۰^۲+(-۲)^۲+۱^۲+(-۲)^۲+۱^۲+۲^۲}{۶} = \frac{۷}{۳}$$
$$\sigma_B^۲ < \sigma_A^۲ \Rightarrow \sigma_B < \sigma_A \xrightarrow{\bar{x}_A=\bar{x}_B} CV_B < CV_A$$

پس دقت عمل B بیشتر است.

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۸ ۱۳۹۴
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۳

۳۵ **گزینه ۲**

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{۵\times۵+۷\times۸+۹\times۱۰+۱۱\times۷+۱۳\times۲}{۵+۸+۱۰+۷+۲} = \frac{۲۷۴}{۳۲} = ۸/۵۶$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۳۶ **گزینه ۱**

برای مقایسهٔ دقت عمل دو دستگاه، باید ضریب تغییرات مربوط به دو دستگاه را به دست آوریم.

$$\text{دستگاه } A: CV_A = \frac{\alpha_A}{x_A} = \frac{۳/۶}{۱۵۰} = ۰/۰۲۴$$
$$\text{دستگاه } B: CV_B = \frac{\alpha_B}{x_B} = \frac{۳/۸۴}{۱۶۰} = ۰/۰۲۴$$

چون ضریب تغییرات دو دستگاه یکسان است؛ پس دقت عمل دو دستگاه نیز یکسان می‌باشد.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۳۷ **گزینه ۳**

جدول فراوانی داده‌های متناظر با نمودار چندبر فراوانی به‌صورت زیر است:

۲۲/۵−۲۵/۵	۲۵/۵−۲۸/۵	۲۸/۵−۳۱/۵	۳۱/۵−۳۴/۵	۳۴/۵−۳۷/۵
۹	۱۱	۱۲	۱۰	۸

دادهٔ ۲۹ در دسـتهٔ سوم (دستهٔ وسط) و دادهٔ ۳۲ در دستهٔ چهارم قرار می‌گیرد؛ بنابراین فراوانی دستهٔ سوم برابر ۱۳ و فراوانی کل داده‌ها برابر ۵۲ می‌گردد و داریم:

$$\text{درصد فراوانی نسبی دستهٔ وسط} = \frac{۱۳}{۵۲} \times ۱۰۰ = ۲۵$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۴

۳۸ گزینه ۳

ابتدا A را به دست می‌آوریم:

$$\bar{x} = \frac{۶۰+۹۸+۱۶۰+۱۸A+۶۰}{۲۵+A} = ۱۶ \Rightarrow A = ۱۱$$

واریانس داده‌ها برابر است با:

$$\sigma^۲ = \frac{۵(۱۲-۱۶)^۲+۷(۱۴-۱۶)^۲+۱۱(۱۸-۱۶)^۲+۳(۲۰-۱۶)^۲}{۳۶} = \frac{۲۰۰}{۳۶} = ۵/۵۵$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۴

۳۹ گزینه ۱

مساحت زیر نمودار مستطیلی با مساحت زیر نمودار چندبر فراوانی نظیر برابر است، بنابراین: $S = S'$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

۴۰ گزینه ۲

فراوانی	مرکز دسته	حدود دسته
۸	۱۰	$[۹, ۱۱)$
۱۱	۱۲	$[۱۱, ۱۳)$
۱۶	۱۴	$[۱۳, ۱۵)$
۱۴	۱۶	$[۱۵, ۱۷)$
۱۱	۱۸	$[۱۷, ۱۹]$

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{۸\times۱۰+۱۱\times۱۲+۱۶\times۱۴+۱۴\times۱۶+۱۱\times۱۸}{۸+۱۱+۱۶+۱۴+۱۱} = \frac{۸۵۸}{۶۰} = ۱۴/۳$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

۴۱ گزینه ۱

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{۱۲} = ۶۶ \quad ; \quad \bar{y} = \frac{\bar{x}+۴}{۵} = ۱۴$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۴۲ گزینه ۳

$$\sigma^۲ = \frac{\Sigma x_i^۲}{n} - \bar{x}^۲ \Rightarrow ۵ = \frac{\Sigma x_i^۲}{n} - ۱۲^۲ \Rightarrow \frac{\Sigma x_i^۲}{n} = \text{میانگین مساحت‌ها} = ۱۴۹$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۴۳ **گزینه ۲**

میانگین داده‌های نمودار برابر است با:

$$\text{مجموع داده‌ها} = ۳ \times ۸۰ + ۴ \times ۹۰ + ۵ \times ۱۰۰ + (۱ + ۵ + ۲ + ۴ + ۶ + ۷ + ۳ + ۴ + ۸) = ۱۱۴۰$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{۱۱۴۰}{۱۲} = ۹۵$$

میانگین داده‌های جدید برابر است با:

$$\bar{y} = ۳ \times ۹۵ - ۴۰ = ۲۴۵$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

۴۴ **گزینه ۳**

$$\text{میانگین داده‌ها} : \ \bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{n} = \frac{۷۲}{۱۲} = ۶$$

$$\text{واریانس داده‌ها} : \ \sigma^۲ = \frac{\Sigma x_i^۲}{n} - \bar{x}^۲ = \frac{۴۸۰}{۱۲} - ۳۶ = ۴$$

$$\Rightarrow \text{ضریب تغییرات داده‌ها} : \ CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۳}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

۴۵ **گزینه ۴**

$$۰/۱ + ۰/۲۵ + ۰/۲ + \alpha = ۱ \Rightarrow \alpha = ۰/۴۵$$
$$\bar{x} = ۸ \times ۰/۱ + ۱۲ \times ۰/۲۵ + ۱۶ \times ۰/۲ + ۲۰ \times ۰/۴۵ = ۱۶$$
$$\sigma^۲ = ۰/۱ \times (۸ - ۱۶)^۲ + ۰/۲۵(۱۲ - ۱۶)^۲$$
$$+ ۰/۲(۱۶ - ۱۶)^۲ + ۰/۴۵(۲۰ - ۱۶)^۲ = ۱۷/۶$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۳

۴۶ **گزینه ۲**

مد داده‌ها، آن داده‌ای است که بیشترین تکرار را دارد، پس x برابر هرکدام از داده‌های دیگر که باشد، آن داده، بیشترین تکرار را دارد. اگر داده‌ها را بدون x مرتب کنیم، داریم:

$$۵۰, ۶۳, ۶۴, ۶۵, ۶۶, ۷۰, ۷۷$$

چون تعداد داده‌ها برابر ۸ است (با در نظر گرفتن x)، پس میانه برابر نصف مجموع دو دادهٔ وسط است. اگر x دادهٔ چهارم یا پنجم نباشد، میانه برابر $\frac{۶۴+۶۵}{۲} = ۶۴/۵$ می‌شود که نمی‌تواند با مد داده‌ها یکسان شود، پس قطعاً x یکی از دو دادهٔ وسط است و درنتیجه $x = ۶۵$ است. حال میانگین داده‌های موردنظر نیز برابر ۶۵ می‌شود، پس میانه، میانگین و مد برابر یکدیگر هستند.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۳

۴۷ **گزینه ۱**

مقادیر داده‌شده انحراف از میانگین می‌باشند؛ درنتیجه:

$$\sigma^{۲} = \frac{۴(-۳)^{۲} + ۷(-۱)^{۲} + ۵(۱)^{۲} + ۳(۳)^{۲} + ۱(۵)^{۲}}{۲۰} = ۵ \Rightarrow \sigma = \sqrt{۵}$$

$$\Rightarrow CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{۵}}{۴۴} \simeq ۰/۰۵$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۳

۴۸ **گزینه ۴**

جدول فراوانی متناظر با داده‌های مفروض به‌صورت زیر است:

x_i	۳۳	۳۷	۴۱	۴۵	۴۹
f_i	۷	۱۰	۱۵	۱۲	$a - ۴۴$

میانگین جامعه برابر ۴۱ است، پس داریم:

$$۴۱ = \frac{۷ \times ۳۳ + ۱۰ \times ۳۷ + ۱۵ \times ۴۱ + ۱۲ \times ۴۵ + (a - ۴۴) \times ۴۹}{a}$$

$$\Rightarrow ۱۷۵۶ + ۴۹a - ۲۱۵۶ = ۴۱a \Rightarrow ۸a = ۴۰۰ \Rightarrow a = ۵۰$$

می‌دانیم زاویهٔ متناظر با دادهٔ x_i در نمودار دایره‌ای برابر است با حاصل‌ضرب فراوانی نسبی آن دسته در ۳۶۰°، پس زاویهٔ مربوط به دستهٔ $[۳۹, ۴۳)$ برابر است با:

$$\frac{۱۵}{۵۰} \times ۳۶۰^\circ = ۱۰۸^\circ$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

۴۹ **گزینه ۴**

می‌دانیم واریانس داده‌ها را می‌توان از رابطهٔ $\sigma^{۲} = \frac{\Sigma x_i^{۲}}{n} - (\frac{\Sigma x_i}{n})^{۲}$ به دست آورد.

اگر طول اضلاع مربع‌ها را x_i درنظر بگیریم، باتوجه‌به فرض سؤال داریم:

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = ۰/۲ \xrightarrow{\bar{x}=۱۵} \sigma = ۱۵ \times ۰/۲ = ۳ \Rightarrow ۹ = \frac{\Sigma x_i^{۲}}{n} - ۱۵^{۲} \Rightarrow \frac{\Sigma x_i^{۲}}{n} = ۲۳۴$$

ازآنجاکه مساحت مربع‌ها به‌صورت $x_i^{۲}$ است، پس میانگین مساحت مربع‌ها برابر ۲۳۴ است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

۵۰ **گزینه ۴**

چون واریانس برابر صفر است نتیجه می‌گیریم تمام داده‌ها باهم برابرند و چون با افزودن ۲۴ و ۱۶ و ۲۶ میانگین تغییر نمی‌کند میانگین این ۳ عدد برابر یازده دادهٔ قبلی است.

$$\bar{x} = \frac{۲۴+۱۶+۲۶}{۳} = ۲۲$$

بنابراین باید انحراف معیار داده‌های زیر را حساب کنیم:

$$\underbrace{۲۲,\ldots,۲۲}_{۱۱},۱۶,۲۴,۲۶,\bar{x} = ۲۲$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{(۲۲-۱۶)^۲ + (۲۴-۲۲)^۲ + (۲۶-۲۲)^۲}{۱۴}} = ۲$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۱

۵۱ **گزینه ۲**

زاویهٔ موردنظر برابر است با: $۳۶۰^\circ \times$ فراوانی نسبی

مرکز دستهٔ موردنظر ۲۶/۵ و درصد فراوانی نسبی آن x است.

$$x = ۱۰۰ - (۱۷ + ۲۰/۵ + ۲۲ + ۱۸) = ۲۲/۵$$

$$\text{زاویهٔ موردنظر} = \frac{۲۲/۵}{۱۰۰} \times ۳۶۰^\circ = ۸۱^\circ$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۱

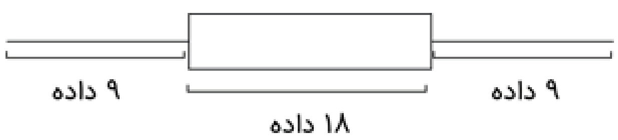
۵۲ **گزینه ۳**

فرض کنید x داده به دستهٔ وسط افزوده شود. داریم:

$$\frac{f_i}{۸۰} = \frac{f_i+x}{۱۰۰} \Rightarrow ۱۰۰f_i = ۸۰f_i + ۸۰x \Rightarrow ۲۰f_i = ۸۰x \Rightarrow \frac{x}{f_i} = \frac{۱}{۴}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

۵۳ **گزینه ۳**



در هریک از دو طرف جعبه، $\frac{۱}{۴}$ داده‌ها یعنی ۹ داده قرار دارد و نصف داده‌ها یعنی ۱۸ داده درون جعبه قرار دارد. اگر میانگین داده‌های درون جعبه را m در نظر بگیریم، داریم:

$$\text{مجموع کل داده‌ها} = \text{میانگین} \times \text{تعداد داده‌ها} = ۲۷/۵ \times ۳۶ = ۹۹۰ = ۹ \times ۲۲ + ۱۸m + ۹ \times ۳۰ \Rightarrow$$

$$۹۹۰ = ۴۶۸ + ۱۸m \Rightarrow ۱۸m = ۵۲۲ \Rightarrow m = ۲۹$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

۵۴ **گزینه ۱**

فراوانی نسبی دستهٔ اول برابر ۰/۱۱۲۵ و فراوانی کل داده‌ها برابر ۸۰ است. داریم:

$$\frac{f_۱}{\Sigma f_i} = ۰/۱۱۲۵ \Rightarrow \frac{f_۱}{۸۰} = ۰/۱۱۲۵ \Rightarrow f_۱ = ۹$$

حال با اضافه شدن ۱۰ دادهٔ جدید، فراوانی کل داده‌ها برابر ۹۰ است و تعداد داده‌های دستهٔ اول تغییر نمی‌کند (چون داده‌های اضافه‌شده، بزرگ‌تر از میانه هستند). فراوانی نسبی دستهٔ اول برابر است با:

$$\frac{f_۱}{\Sigma f_i} = \frac{۹}{۹۰} = ۰/۱$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۰

۵۵ **گزینه ۴**

ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ، مرتب می‌کنیم:

$$۷, ۹, ۱۰, ۱۱, ۱۲, ۱۲, ۱۳, ۱۶, ۱۷, ۱۷, ۱۸, ۲۰, ۲۱$$

دادهٔ وسط یعنی ۱۳، میانه است و سپس چارک‌های اول و سوم را مشخص می‌کنیم تا معلوم شود، کدام داده‌ها در نمودار جعبه‌ای قرار می‌گیرند.

$$۷, ۹, \underbrace{۱۰, ۱۱}_{\text{چارک اول}=۱۰/۵}, ۱۲, ۱۲, ۱۳, ۱۶, ۱۷, \underbrace{۱۷, ۱۸}_{\text{چارک سوم}=۱۷/۵}, ۲۰, ۲۱$$

اعداد بین چارک اول و سوم، درون جعبه هستند که عبارت‌اند از:

$$۱۱, ۱۲, ۱۲, ۱۳, ۱۶, ۱۷, ۱۷$$

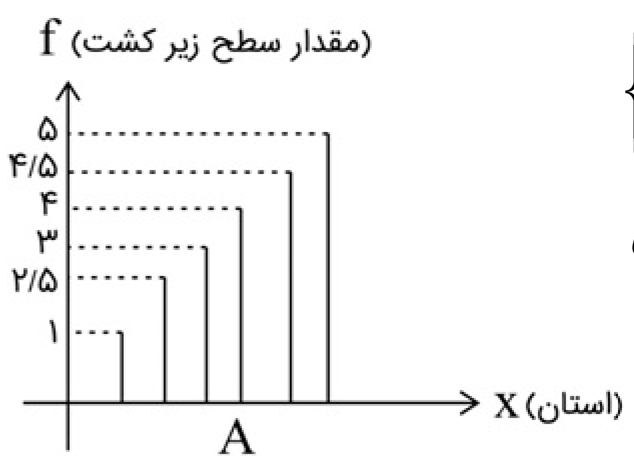
میانگین و واریانس این داده‌ها به ترتیب برابر است با:

$$\bar{x} = \frac{۱۱+۱۲+۱۲+۱۳+۱۶+۱۷+۱۷}{۷} = \frac{۹۸}{۷} = ۱۴$$

$$\sigma^۲ = \frac{\Sigma(x_i-\bar{x})^۲}{n} = \frac{۹+۴+۴+۱+۴+۹+۹}{۷} = \frac{۴۰}{۷} = ۵/۷۱$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۰

۵۶ **گزینه ۲**



$$\begin{cases} A \text{ فراوانی دستهٔ} : f_A = ۴ \\ \text{فراوانی کل} : N = \Sigma f_i = ۱ + ۲/۵ + ۳ + ۴ + ۴/۵ + ۵ = ۲۰ \end{cases}$$

$$\text{در نمودار دایره‌ای } A \text{ زاویهٔ متناظر با دستهٔ} : \alpha_A = \frac{f_A}{N} \times ۳۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha_A = \frac{۴}{۲۰} \times ۳۶۰^\circ = ۷۲^\circ$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

منبع: کنکور سراسری

۱ اگر $A=\begin{bmatrix} a & -۳ \\ ۵ & a+۲ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ باشند، به ازای کدام مقدار a ماتریس $A+۲B$، وارون‌پذیر نیست؟

۱) ۵، -۷   ۲) ۷، -۵

۳) ۴، -۷   ۴) ۵، -۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۲ اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۳ & -۲ \\ -۵ & ۴ \end{bmatrix}$ باشند، ماتریس $(A\times B)^{-۱}$، کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰/۵ & ۰/۵ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰/۵ & ۱ \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} ۰/۵ & ۰ \\ -۰/۵ & ۱ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۰/۵ & ۰/۵ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

۳ اگر $A=\begin{bmatrix} ۱۲ & -۸ \\ ۱۰ & ۵ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱۰ & -۶ \\ ۷ & ۳ \end{bmatrix}$ باشند، ماتریس $(A-B)^{-۱}$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} -۰/۲ & ۰/۱ \\ ۰/۳ & ۰/۲ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۰/۳ & -۰/۲ \\ ۰/۲ & ۰/۴ \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} ۰/۲ & -۰/۲ \\ ۰/۳ & ۰/۴ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۰/۲ & ۰/۲ \\ -۰/۳ & ۰/۲ \end{bmatrix}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

۴ اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ -۳ & ۱ \end{bmatrix}$ باشند، وارون ماتریس $A\times B$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}\begin{bmatrix} ۳ & -۴ \\ ۷ & -۸ \end{bmatrix}$ ۲) $\frac{۱}{۴}\begin{bmatrix} ۸ & ۷ \\ -۴ & -۳ \end{bmatrix}$

۳) $\frac{۱}{۴}\begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ -۷ & -۸ \end{bmatrix}$ ۴) $\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} -۹ & -۸ \\ ۵ & ۴ \end{bmatrix}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۵ اگر $\begin{bmatrix} ۵ & ۳ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} = X + \begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ ۵ & -۱ \end{bmatrix}$ باشد، وارون ماتریس X کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۲ & -۳ \end{bmatrix}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

۶ اگر $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$، ماتریس B از معادلهٔ $A.B = ۲I$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} -۱ & ۴ \\ ۱ & -۲ \end{bmatrix}$
۲) $\begin{bmatrix} ۱ & -۴ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}$
۳) $\begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ ۴ & -۱ \end{bmatrix}$
۴) $\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ -۴ & ۱ \end{bmatrix}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۷ ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۴ & ۷ \end{bmatrix}$ مفروض است. اگر $A \times B$ ماتریس واحد باشد، مجموع درایه‌های سطر اول ماتریس B کدام است؟

۱) ۱
۲) ۱/۵
۳) ۲
۴) ۲/۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۸ دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۴ & ۳ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۳ & -۴ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. درایهٔ واقع در سطر اول و ستون اول وارون ماتریس $B \times A$، کدام است؟

۱) $-۰/۹$
۲) $-۰/۱$
۳) $۰/۱$
۴) $۰/۹$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۹ اگر $A = \begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۵ & ۴ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۴ & -۶ \\ ۳ & -۵ \end{bmatrix}$ باشند، ماتریس $A^{-۱}.(۲B)$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۵ & -۷ \\ -۱۱ & ۱۵ \end{bmatrix}$
۲) $\begin{bmatrix} ۸ & -۱۵ \\ -۷ & ۱۱ \end{bmatrix}$
۳) $\begin{bmatrix} ۱۰ & -۷ \\ -۹ & ۱۳ \end{bmatrix}$
۴) $\begin{bmatrix} ۱۰ & -۱۴ \\ -۱۱ & ۱۵ \end{bmatrix}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

۱۰ اگر $A = \begin{bmatrix} ۷ & ۳ \\ -۴ & -۲ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & ۴ \end{bmatrix}$ باشند، ماتریس $B.(۲A^{-۱})$، کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} -۸ & -۱۵ \\ -۱۴ & -۲۵ \end{bmatrix}$
۲) $\begin{bmatrix} ۸ & -۱۵ \\ ۱۴ & -۲۵ \end{bmatrix}$
۳) $\begin{bmatrix} -۷ & -۱۲ \\ -۹ & -۱۰ \end{bmatrix}$
۴) $\begin{bmatrix} -۸ & ۱۵ \\ ۱۴ & -۲۵ \end{bmatrix}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

منبع: کنکور سراسری

۱ **گزینه ۱**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

گام اول

الف) ماتریس A وارون‌پذیر است هرگاه $|A| \neq ۰$ باشد.

ب) دترمینان ماتریس مربعی $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

برابر است با:

$$|A| = ad - bc$$

گام دوم

برای اینکه ماتریس $A + ۲B$ وارون‌پذیر نباشد باید مقداری از a را تعیین کنیم که به ازای آن دترمینان ماتریس برابر صفر می‌شود.

$$A + ۲B = \begin{bmatrix} a & -۳ \\ ۵ & a+۲ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -۲ & ۶ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-۲ & ۳ \\ ۹ & a+۴ \end{bmatrix}$$

دترمینان ماتریس $A + ۲B$ را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$|A+۲B| = ۰ \Rightarrow (a-۲)(a+۴) - ۲۷ = ۰ \Rightarrow a^۲ + ۲a - ۸ - ۲۷ = ۰$$
$$\Rightarrow a^۲ + ۲a - ۳۵ = ۰ \Rightarrow (a+۷)(a-۵) = ۰ \Rightarrow a = -۷ \;,\; a = ۵$$

۲ **گزینه ۱**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

گام اول

الف) با داشتن دو ماتریس A و B، ابتدا ماتریس $A \times B$ را تشکیل می‌دهیم.

ب) برای بـه دست آوردن وارون مـاتریس $A \times B$ اول دترمینـان مـاتریس را به دست آورده و درنهـایت با اسـتفاده از فرمول وارون ماتریس ۲×۲، وارون آن را تعیین می‌کنیم.

گام دوم

$$A \times B = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & -۲ \\ -۵ & ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}$$
$$|A \times B| = (۲ \times ۱) - ۰ = ۲$$
$$(A \times B)^{-۱} = \frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰/۵ & ۰/۵ \end{bmatrix}$$

۳ گزینه ۴

$$A - B = \begin{bmatrix} 12 & -8 \\ 10 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10 & -6 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow (A - B)^{-1} = \frac{1}{(2)(2) - (-2)(3)} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0/2 & 0/2 \\ -0/3 & 0/2 \end{bmatrix}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

۴ گزینه ۱

$$A \times B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 4 \\ -7 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow |A \times B| = -8 \times 3 + 4 \times 7 = 4$$
$$(A \times B)^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 7 & -8 \end{bmatrix}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۵ گزینه ۱

ابتدا ماتریس X را به دست می‌آوریم:

$$X + \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

ازطرفی می‌دانیم اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$، آنگاه با شرط $ad - bc \neq 0$، وارون ماتریس A برابر است با $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$، پس:

$$X = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow X^{-1} = \frac{1}{2\times2-(-1)\times(-3)} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow X^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

۶ **گزینه ۱**

مطابق عبارت زیر، طرفین معادلهٔ $AB = ۲I$ را در ماتریس $A^{-۱}$ ضرب می‌کنیم:

$$A^{-۱} \times AB = A^{-۱} \times ۲I \Rightarrow \underbrace{(A^{-۱} \times A)}_{I}B = ۲A^{-۱} \Rightarrow B = ۲A^{-۱}$$

حال ماتریس $A^{-۱}$ را پیدا می‌کنیم:

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-۱} = \frac{۱}{۲-۴}\begin{bmatrix} ۱ & -۴ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{۱}{۲} & ۲ \\ \frac{۱}{۲} & -۱ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow B = ۲ \times \begin{bmatrix} -\frac{۱}{۲} & ۲ \\ \frac{۱}{۲} & -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ & ۴ \\ ۱ & -۲ \end{bmatrix}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۷ **گزینه ۳**

$$AB = I \Rightarrow B = A^{-۱} \Rightarrow B = A^{-۱} = \frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۷ & -۳ \\ -۴ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۷}{۲} & \frac{-۳}{۲} \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\text{مجموع درایه‌های سطر اول} = \frac{۷}{۲} - \frac{۳}{۲} = ۲$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۸ **گزینه ۲**

وارون ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ برابر است با $A^{-۱} = \frac{۱}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

$$B \times A = \begin{bmatrix} -۱۰ & -۹ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow (B \times A)^{-۱} = \left(\frac{۱}{-۱۰-۰}\right)\begin{bmatrix} ۱ & ۹ \\ ۰ & -۱۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{۱}{۱۰} & -\frac{۹}{۱۰} \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

بنابراین درایه‌ی سطر اول و ستون اول وارون ماتریس $B \times A$، $\frac{-۱}{۱۰}$ است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۹ گزینه ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

گام اول

وارون ماتریس A را تعیین می‌کنیم، سپس حاصل $A^{-۱}(۲B)$ را به دست می‌آوریم.

گام دوم

$$A=\begin{bmatrix}۳ & ۲\\ ۵ & ۴\end{bmatrix}\Rightarrow A^{-۱}=\frac{۱}{۳\times ۴-۲\times ۵}\begin{bmatrix}۴ & -۲\\ -۵ & ۳\end{bmatrix}=\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix}۴ & -۲\\ -۵ & ۳\end{bmatrix}$$

$$A^{-۱}.(۲B)=۲A^{-۱}B=۲\times\frac{۱}{۲}\times\begin{bmatrix}۴ & -۲\\ -۵ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۴ & -۶\\ ۳ & -۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۰ & -۱۴\\ -۱۱ & ۱۵\end{bmatrix}$$

۱۰ گزینه ۱

$$\det(A)=-۱۴+۱۲=-۲\Rightarrow A^{-۱}=\frac{۱}{-۲}\begin{bmatrix}-۲ & -۳\\ ۴ & ۷\end{bmatrix}$$

$$۲A^{-۱}=\begin{bmatrix}+۲ & +۳\\ -۴ & -۷\end{bmatrix}$$

$$(B)(۲A^{-۱})=\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ ۱ & ۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ -۴ & -۷\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۸ & -۱۵\\ -۱۴ & -۲۵\end{bmatrix}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۱ در مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB = AC)$ در رأس A خط عمود بر AC نیمساز زاویهٔ داخلی C را در D قطع می‌کند. اگر M محل تلاقی نیمسازهای داخلی مثلث مفروض باشد. AD برابر کدام است؟

۱) AM　　۲) MD

۳) MC　　۴) $\frac{۱}{۲}AC$

۲ در مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB = AC)$، قاعده BC را به‌اندازهٔ ساق تا نقطهٔ D امتداد می‌دهیم. اگر زاویهٔ خارجی رأس A از مثلث ABD برابر ۱۰۲ درجه باشد، کوچک‌ترین زاویهٔ مثلث ABC، چند درجه است؟

۱) ۳۴　　۲) ۳۸

۳) ۴۲　　۴) ۴۴

۳ در ذوزنقه‌ای اندازهٔ قاعده‌ها ۹ و ۴ واحد و طول ساق‌ها ۶ و ۵ واحد است. محیط مثلثی که از امتداد ساق‌ها در بیرون ذوزنقه تشکیل شود، کدام است؟

۱) ۱۱/۴　　۲) ۱۱/۶

۳) ۱۲/۲　　۴) ۱۲/۸

۴ در داخل نیمکره به شعاع ۹ واحد، استوانه‌ای به ارتفاع ۶ واحد جای گرفته است. بیشترین حجم ممکن این استوانه، کدام است؟

۱) ۱۸۰π　　۲) ۲۱۰π

۳) ۲۴۰π　　۴) ۲۷۰π

۵ در مثلث ABC زاویهٔ $\hat{A} = ۱۰۸^\circ$ است. ضلع BC را از هر دو طرف به‌اندازه‌های $BD = BA$ و $CE = CA$ امتداد می‌دهیم. کوچک‌ترین زاویهٔ خارجی مثلث ADE چند درجه است؟

۱) ۲۴　　۲) ۳۲

۳) ۳۶　　۴) ۵۴

۶ طول ضلع یک مربع برابر محیط مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین به ضلع قائم ۲ واحد است. با حذف گوشه‌های این مربع، بزرگ‌ترین هشت ضلعی منتظم ممکن داخل آن ساخته شده است. مساحت این هشت ضلعی، کدام است؟

۱) ۳۲　　۲) $۲۴\sqrt{۲}$

۳) $۲۴ + ۸\sqrt{۲}$　　۴) $۱۶ + ۱۶\sqrt{۲}$

۷ زاویه‌های مثلثی متناسب با اعداد ۶، ۵، ۱ هستند. کوچک‌ترین ارتفاع این مثلث چند برابر بزرگ‌ترین ضلع آن است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$　　۲) $\frac{۱}{۳}$

۳) $\frac{۲}{۵}$　　۴) $\frac{۱}{۲}$

۸ مکعبی به طول یال ۲ واحد، در داخل کوچک‌ترین کره ممکن جای گرفته است. مساحت این کره کدام است؟

۱) ۸π ۲) ۹π

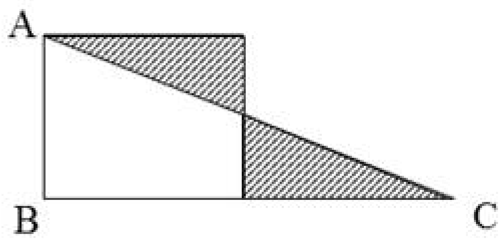
۳) ۱۲π ۴) ۱۸π

۹ در مثلث ABC داریم $AB = AC$ و $\hat{A} = ۸۰^\circ$، عمودمنصف‌های دو ساق مثلث، قاعدهٔ BC را در M و N قطع می‌کنند. کوچک‌ترین زاویهٔ مثلث AMN چند درجه است؟

۱) ۱۵ ۲) ۲۰

۳) ۲۵ ۴) ۳۰

۱۰ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC بر روی ضلع AB مربعی ساخته شده است. اگر دو مثلث سایه‌زده همنهشت باشند، مساحت ذوزنقه چند برابر مساحت مربع است؟



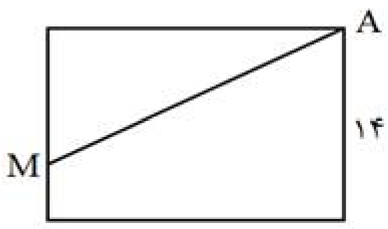
۱) $\frac{۵}{۹}$

۲) $\frac{۲}{۳}$

۳) $\frac{۳}{۴}$

۴) $\frac{۴}{۵}$

۱۱ در شکل زیر، پاره‌خط AM مساحت مستطیل را به دو جزء با نسبت مساحت‌های $\frac{۵}{۹}$ تقسیم کرده است. اگر قطر مستطیل ۲۵ واحد باشد، پاره‌خط AM چند واحد است؟



۱) ۲۱

۲) ۲۳

۳) $۹\sqrt{۷}$

۴) $۱۰\sqrt{۶}$

۱۲ در یک مکعب به طول یال $۴\sqrt{۲}$، فاصلهٔ وسط هریک از دو وجه غیرموازی از یکدیگر چقدر است؟

۱) ۳ ۲) $۲\sqrt{۳}$

۳) ۴ ۴) $۳\sqrt{۲}$

۱۳ در مثلث ABC $(\hat{A} = ۹۰^\circ)$، ارتفاع AH مثلث مفروض را به دو جزء تقسیم می‌کند. مساحت مثلث اصلی ۶/۷۶ برابر مساحت مثلث کوچک‌تر است. نسبت فواصل H از دو ضلع قائم کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۸}$ ۲) $\frac{۵}{۱۲}$

۳) $\frac{۷}{۱۲}$ ۴) $\frac{۳}{۸}$

۱۴ در یک مثلث قائم‌الزاویه، طول اضلاع قائم به نسبت ۱ و ۳ و مساحت آن ۶۰ واحد مربع است. ارتفاع وارد بر وتر چقدر است؟

۱) ۵
۲) $۴\sqrt{۲}$
۳) ۶
۴) ۸

۱۵ بزرگ‌ترین مکعب ممکن داخل یک کره به قطر ۶ واحد جای گرفته است. سطح کل این مکعب کدام است؟

۱) ۵۴
۲) ۶۳
۳) ۷۲
۴) ۸۱

۱۶ قاعدهٔ یک منشور مایل مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۴ واحد است. طول یال‌های جانبی منشور ۶ واحد و زاویهٔ یال‌ها با صفحهٔ قاعده ۶۰ درجه است. حجم این منشور کدام است؟

۱) $۱۲\sqrt{۳}$
۲) ۲۴
۳) $۱۸\sqrt{۳}$
۴) ۳۶

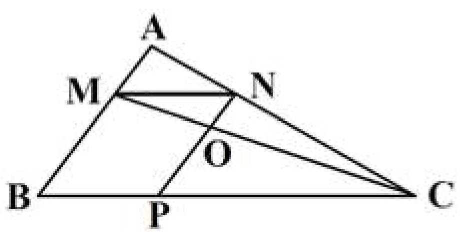
۱۷ در یک مثلث قائم‌الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر، مثلث مفروض را به دو جزء تقسیم می‌کند. اگر مساحت مثلث کوچک‌تر $\frac{۱}{۵}$ مساحت مثلث اصلی باشد، نسبت فواصل پای ارتفاع از دو ضلع قائم آن کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{۲}{۳}$
۳) $\frac{۳}{۴}$
۴) $\frac{۴}{۵}$

۱۸ مثلثی به اضلاع b و a و ۳ با مثلثی به طول اضلاع ۵ و ۴ و ۳ متشابه است و دو مثلث قابل انطباق نیستند. بیشترین محیط از مثلث اول کدام است؟

۱) ۷/۲
۲) ۹
۳) ۱۰
۴) ۱۳/۵

۱۹ در شکل زیر $\frac{MA}{MB} = \frac{۳}{۷}$ و چهار ضلعی $MNPB$ متوازی‌الاضلاع است. مساحت مثلث OMN چند درصد مساحت مثلث AMN است؟



۱) ۶۳
۲) ۶۰
۳) ۷۰
۴) ۸۴

۲۰ ظرفی است به شکل نیمکره، به ضخامت یکنواخت ۳ واحد و قطر خارجی دهانهٔ آن ۱۶ واحد است. سطح کل این ظرف چند برابر π است؟

۱) ۲۰۸
۲) ۲۱۲
۳) ۲۱۵
۴) ۲۱۷

۲۱ در مثلثی اندازه‌های دو ضلع ۱۰ و ۱۵ واحد است. مجموع ارتفاع‌های وارد بر این دو ضلع، برابر ارتفاع ضلع سوم است. اندازهٔ ضلع سوم، کدام است؟

۱) ۶
۲) ۷
۳) ۷/۵
۴) ۸

۲۲ مساحت یک شش ضلعی منتظم، برابر $۹\sqrt{۳}$ واحد مربع است، اندازهٔ قطر کوچک آن، کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۶}$
۲) $۳\sqrt{۲}$
۳) $۲\sqrt{۳}$
۴) ۳

۲۳ درون مثلثی به اضلاع ۹ و ۷ و ۵ واحد، مثلث دیگر طوری رسم می‌کنیم که اضلاع آن موازی اضلاع مثلث اصلی باشد، اگر بزرگ‌ترین ضلع این مثلث ۶ واحد باشد، مساحت محدود به این دو مثلث، چند برابر مساحت مثلث کوچک‌تر است؟

۱) ۰/۷۵
۲) ۱
۳) ۱/۲۵
۴) ۱/۵

۲۴ مساحت مقطع یک مکعب با صفحه قطری آن برابر $۹\sqrt{۲}$ است، اندازهٔ قطر مکعب کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۳}$
۲) $۳\sqrt{۲}$
۳) $۲\sqrt{۶}$
۴) $۳\sqrt{۳}$

۲۵ کره‌ای از تمام رأس‌های یک مکعب مستطیل به ابعاد $۲\sqrt{۵}$ و ۶ و ۵ گذشته است. سطح این کره چند برابر π است؟

۱) ۶۴
۲) ۸۱
۳) ۱۴۴
۴) ۱۳۶

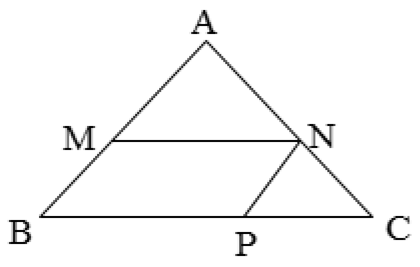
۲۶ در یک مستطیل با ابعاد ۱ و ۲ واحد، از انتهای یک قطر، خطی بر آن قطر عمود می‌کنیم تا امتداد ضلع کوچک‌تر مستطیل را در M قطع کند. فاصلهٔ نقطهٔ M از سر دیگر این قطر چند واحد است؟

۱) ۴
۲) ۴/۵
۳) ۵
۴) ۶

۲۷ مثلثی به اضلاع ۵ و ۴ و a با مثلثی به طول اضلاع ۹ و ۷ و b متشابه است. بیش‌ترین مقدار ممکن برای عدد a کدام است؟

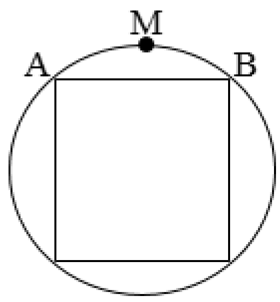
۱) $\frac{۳۶}{۷}$
۲) $\frac{۴۵}{۷}$
۳) $\frac{۳۶}{۵}$
۴) $\frac{۳۵}{۴}$

۲۸ در شکل زیر $\frac{MA}{MB} = \frac{۳}{۲}$ است. مساحت متوازی‌الاضلاع $MNPB$ چند درصد مساحت مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ است؟



۱) ۴۸
۲) ۵۲
۳) ۵۴
۴) ۵۶

۲۹ در شکل زیر، ضلع مربع برابر ۲ واحد است. فاصلهٔ وسط کمان AB از نزدیک‌ترین رأس مربع چقدر است؟



۱) $\sqrt{۲ - \sqrt{۲}}$
۲) $\sqrt{۴ - ۲\sqrt{۲}}$
۳) $\sqrt{۲}$
۴) $\sqrt{۱ + \sqrt{۲}}$

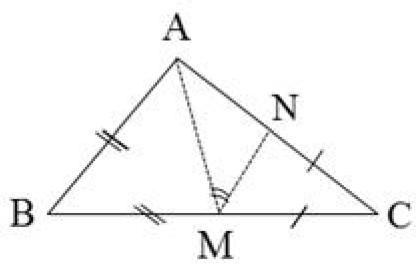
۳۰ قاعدهٔ یک هرم، مربعی به ضلع $\sqrt{۶}$ واحد است. وجوه جانبی آن مثلث‌های قائم‌الزاویه هستند. اگر طول کوتاه‌ترین یال آن ۲ واحد باشد، اندازهٔ بلندترین یال آن چند واحد است؟

۱) ۴
۲) $۳\sqrt{۲}$
۳) $۲\sqrt{۵}$
۴) ۵

۳۱ در یک مکعب، فاصلهٔ هر رأس از صفحهٔ گذرا از انتهای سه یالی که از همین رأس می‌گذرند، چند برابر یال این مکعب است؟

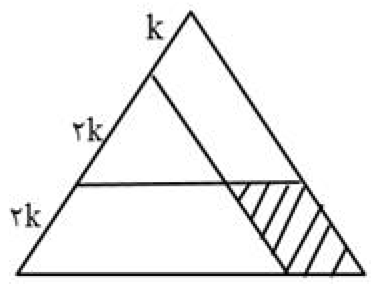
۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$
۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$
۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

۳۲ در شکل زیر، دو مثلث کناری متساوی‌الساقین‌اند و $\hat{M} = ۴۳^\circ$، اندازهٔ زاویهٔ $B\hat{A}C$ چند درجه است؟



۱) ۹۳
۲) ۹۴
۳) ۹۶
۴) ۹۷

۳۳ در شکل زیر، یک ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع به نسبت‌های ۱، ۲ و ۲ تقسیم شده است. مساحت متوازی‌الاضلاع سایه‌زده، چند درصد مساحت مثلث اصلی است؟



۱) ۱۶
۲) ۱۸
۳) ۲۰
۴) ۲۴

۳۴ در یک مکعب مستطیل به ابعاد ۵، ۶ و $۲\sqrt{۵}$، فاصلهٔ دو رأس غیرواقع در یک وجه، کدام است؟

۱) ۷
۲) ۸
۳) $۵\sqrt{۳}$
۴) ۹

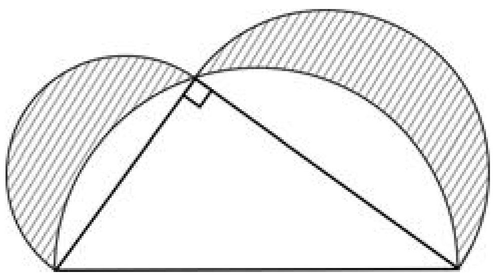
۳۵ در مثلث متساوی‌الساقین $\overset{\triangle}{ABC}$، $AB = AC = ۴$ و $BC = ۲\sqrt{۷}$ است. ضلع AC را به‌اندازهٔ خود تا نقطهٔ D امتداد می‌دهیم ($AD = AC$). اندازهٔ BD کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۱۰}$
۲) $۴\sqrt{۲}$
۳) ۶
۴) ۷

۳۶ مساحت یک مثلث قائم‌الزاویه برابر با مساحت مربعی است که بر روی ضلع کوچک‌تر آن ساخته می‌شود. اندازهٔ میانهٔ وارد بر ضلع متوسط چند برابر ضلع متوسط این مثلث است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
۳) $\sqrt{۲}$
۴) $\sqrt{۳}$

۳۷ در مثلث قائم‌الزاویهٔ زیر، طول اضلاع قائم ۳ و ۴ واحد است. نیم‌دایره‌ها به قطر اضلاع رسم شده‌اند. مجموع مساحت دو ناحیهٔ سایه‌زده، کدام است؟



۱) ۲π
۲) ۶
۳) ۷
۴) ۳π

۳۸ در مثلث متساوی‌الساقین $\overset{\triangle}{ABC}$، قاعدهٔ BC را از دو طرف به‌اندازهٔ ساق‌ها تا نقاط D و E امتداد می‌دهیم. در مثلث $\overset{\triangle}{ADE}$ کوچک‌ترین زاویهٔ خارجی، چند برابر کوچک‌ترین زاویهٔ داخلی آن است؟

۱) ۱
۲) $\frac{۳}{۲}$
۳) ۲
۴) ۳

۳۹ مساحت مثلث قائم‌الزاویه‌ای $\frac{۱}{۸}$ مجذور وتر آن است. کوچک‌ترین زاویهٔ این مثلث، چند درجه است؟

۱) ۱۵
۲) ۱۰/۵
۳) ۲۲/۵
۴) ۳۰

۴۰ نیم‌کره‌ای به قطر ۱۲ واحد، در داخل کوچک‌ترین استوانهٔ ممکن جای گرفته است. حجم محدود به این نیم‌کره و استوانه چند برابر π است؟

۱) ۳۶
۲) ۴۲
۳) ۵۴
۴) ۷۲

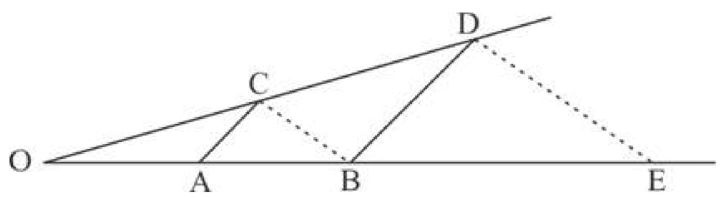
۴۱ در مثلث $ABC(\hat{A} = ۹۰^\circ, \hat{C} = ۲۴^\circ)$، از رأس C خطی بر CA عمود کرده و بر روی آن، $CD = CB$ را طوری جدا می‌کنیم که BD ضلع AC را قطع کند. زاویهٔ $D\hat{B}C$ چند درجه است؟

۱) ۳۳
۲) ۳۶
۳) ۳۸
۴) ۴۸

۴۲ در مثلث متساوی‌الساقین $ABC(AB = AC)$، ساق AB را به‌اندازهٔ $BD = BC$ امتداد می‌دهیم. اگر CD برابر AC باشد، زاویهٔ A چند درجه است؟

۱) ۲۵
۲) ۳۰
۳) ۳۲
۴) ۳۶

۴۳ در شکل زیر، دو جفت پاره‌خط موازی‌اند. $OA = ۳$ و $AB = ۵$، اندازهٔ BE، کدام است؟



۱) $۱۳\frac{۱}{۳}$
۲) $۱۲\frac{۲}{۳}$
۳) $۱۱\frac{۱}{۳}$
۴) $۱۰\frac{۲}{۳}$

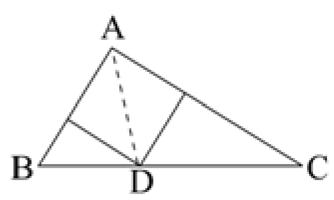
۴۴ مکعب مستطیلی به ابعاد ۳ و ۴ و ۵ واحد، در داخل کوچک‌ترین کرهٔ ممکن جای گرفته است. مساحت سطح این کره، کدام است؟

۱) ۲۴π
۲) ۲۵π
۳) ۴۸π
۴) ۵۰π

۴۵ در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین، با زاویهٔ ۶۰ درجه، قاعدهٔ کوچک‌تر برابر ساق آن است. اگر محیط این ذوزنقه ۳۰ واحد باشد، مساحت آن کدام است؟

۱) $۲۴\sqrt{۳}$
۲) $۲۷\sqrt{۳}$
۳) ۴۸
۴) ۵۴

۴۶ در مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع قائم ۳ و ۷ واحد، طول نیمساز داخلی زاویهٔ قائمه کدام است؟



۱) $۱/۴\sqrt{۲}$
۲) ۲/۱
۳) ۲/۸
۴) $۲/۱\sqrt{۲}$

۴۷ در ذوزنقه‌ای با طول قاعده‌های ۸ و ۱۲ و ارتفاع ۱۰ واحد، مساحت مثلث محدود به دو قطر و یک ساق آن، چند واحد مربع است؟

۱) ۱۸
۲) ۲۰
۳) ۲۴
۴) ۲۸

۴۸ در یک مکعب به طول یال ۴ واحد، بر انتهای سه یال گذرا بر یک رأس، صفحه‌ای می‌گذرد. مساحت مقطع این صفحه با مکعب کدام است؟

۱) ۸
۲) $۴\sqrt{۶}$
۳) ۱۲
۴) $۸\sqrt{۳}$

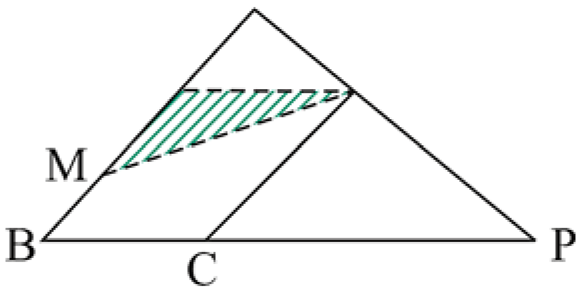
۴۹ در متوازی‌الاضلاعی اندازهٔ دو قطر ۱۲ و ۸ واحد و زاویهٔ بین دو قطر ۱۳۵ درجه است. مساحت متوازی‌الاضلاع چندبرابر $\sqrt{۲}$ است؟

۱) ۱۸
۲) ۲۴
۳) ۳۲
۴) ۳۶

۵۰ در چهار ضلعی محدب $ABCD$، رابطهٔ $\frac{۵\hat{D}}{۱۲} = \frac{\hat{C}}{۵} = \frac{\hat{B}}{۴} = \frac{\hat{A}}{۳}$ بین زاویه‌ها برقرار است. زاویهٔ حاده بین نیمسازهای داخلی دو زاویهٔ متقابل $\hat{A}$ و $\hat{C}$ چند درجه است؟

۱) ۲۰
۲) ۲۵
۳) ۳۰
۴) ۳۵

۵۱ در شکل زیر نقطهٔ M وسط ضلع متوازی‌الاضلاع است. اگر $PC = \frac{۲}{۳}PB$ باشد، مساحت مثلث سایه‌زده چندبرابر مساحت بزرگ‌ترین مثلث‌ها است؟



۱) $\frac{۱}{۱۲}$
۲) $\frac{۱}{۹}$
۳) $\frac{۱}{۸}$
۴) $\frac{۳}{۱۶}$

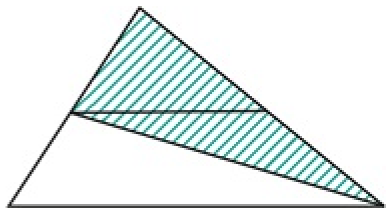
۵۲ یک ظرف استوانه‌ای مدرج به قطر دهانهٔ ۸، تا ارتفاع ۱۰ واحد پُر از مایع است. اگر یک گوی کروی وزین داخل آن قرار گیرد، ارتفاع مایع $\frac{۲}{۳}$ واحد بالا می‌آید. سطح این کره کدام است؟

۱) ۶π
۲) ۸π
۳) ۱۲π
۴) ۱۶π

۵۳ در چهار ضلعی محدب ABCD، رابطهٔ $\frac{\hat{C}+\hat{D}}{۱۱} = \frac{\hat{B}}{۳} = \frac{\hat{A}}{۴}$، بین زاویه‌ها برقرار است. زاویهٔ حادهٔ بین نیمسازهای داخلی دو زاویهٔ مجاور $\hat{A}$ و $\hat{B}$، چند درجه است؟

۱) ۵۰
۲) ۶۰
۳) ۷۰
۴) ۷۵

۵۴ در شکل زیر، نسبت قاعده‌های ذوزنقه $\frac{۳}{۵}$ است. مساحت مثلث سایه‌زده، چند برابر مساحت ذوزنقه است؟



۱) $\frac{۳}{۴}$

۲) $\frac{۷}{۸}$

۳) $\frac{۱۴}{۱۵}$

۴) $\frac{۱۵}{۱۶}$

۵۵ از داخل یک استوانهٔ قائم توپُر، به شعاع قاعدهٔ ۴ و ارتفاع ۵ واحد، بزرگ‌ترین مخروط قائم ممکن را حذف می‌کنیم. جسم حاصل را با صفحه‌ای موازی قاعدهٔ مخروط به فاصلهٔ ۳ واحد از آن قطع می‌دهیم. مساحت مقطع حاصل، کدام است؟

۱) $۱۰/۳۶\pi$

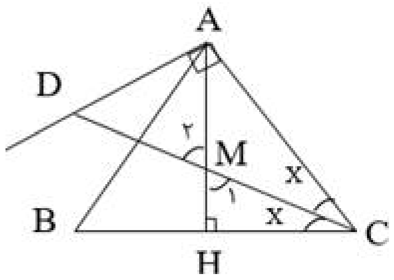
۲) $۱۱/۲۸\pi$

۳) $۱۲/۵۶\pi$

۴) $۱۳/۴۴\pi$

۱ **گزینه ۱**

ابتدا با توجه به توضیحات صورت سؤال، یک شکل دقیق و ساده رسم می‌کنیم.



مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ متساوی‌الساقین است؛ بنابراین نیمساز رأس مثلث (یعنی AH)، ارتفاع وارد بر ضلع BC نیز هست.

CD نیمساز زاویهٔ $\hat{C}$ است. نصف این زاویه را برابر $\hat{x}$ در نظر گرفته و زوایای دیگر را برحسب آن به دست می‌آوریم.

در مثلث قائم‌الزاویهٔ $\overset{\triangle}{MHC}$ داریم:

$$\overset{\triangle}{MHC}: \hat{x} + \hat{M}_۱ + ۹۰^\circ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{M}_۱ = ۹۰^\circ - \hat{x}$$

دو زاویهٔ $\hat{M}_۱$ و $\hat{M}_۲$ متقابل به رأس هستند، بنابراین:

$$\hat{M}_۱ = \hat{M}_۲ \Rightarrow \hat{M}_۲ = ۹۰^\circ - \hat{x} \qquad (I)$$

مثلث $\overset{\triangle}{CAD}$ نیز قائم‌الزاویه است و داریم:

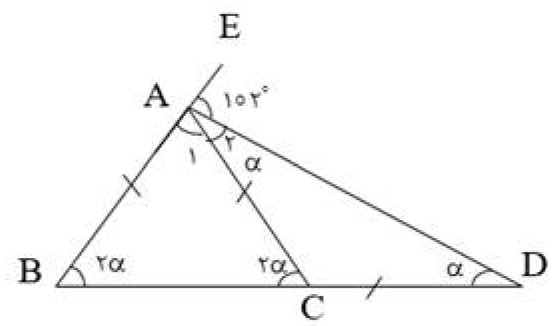
$$\overset{\triangle}{CAD}: \hat{A} + \hat{x} + \hat{D} = ۱۸۰^\circ \xrightarrow{\hat{A}=۹۰^\circ} ۹۰^\circ + \hat{x} + \hat{D} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{D} = ۹۰^\circ - \hat{x} \qquad (II)$$

از دو رابطهٔ (I) و (II) نتیجه می‌شود: $\hat{M}_۲ = \hat{D}$

بنابراین مثلث $\overset{\triangle}{ADM}$ متساوی‌الساقین است و $AM = AD$ می‌شود.

۲ گزینه ۴

با توجه به توضیحات داده‌شده در صورت سؤال، شکل زیر را رسم می‌کنیم.



$AC = CD$ است، بنابراین مثلث $\overset{\triangle}{ACD}$ متساوی‌الساقین می‌شود. زاویهٔ $\hat{D}$ را برابر α فرض کرده و داریم:

$$AC = CD \Rightarrow \hat{D} = \hat{A}_۲ = \alpha$$

$A\hat{C}B$ زاویهٔ خارجی مثلث $\overset{\triangle}{ACD}$ است بنابراین اندازهٔ آن برابر مجموع اندازهٔ دو زاویهٔ داخلی غیرمجاورش می‌شود یعنی:

$$A\hat{C}B = \alpha + \alpha = ۲\alpha$$

مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ متساوی‌الساقین است بنابراین:

$$\overset{\triangle}{ABC} : AB = AC \Rightarrow A\hat{B}C = A\hat{C}B = ۲\alpha$$

$E\hat{A}D$ زاویهٔ خارجی مثلث $\overset{\triangle}{ABD}$ است بنابراین:

$$E\hat{A}D = ۱۰۲^\circ = \hat{B} + \hat{D} = ۲\alpha + \alpha = ۳\alpha \Rightarrow ۳\alpha = ۱۰۲^\circ \Rightarrow \alpha = \frac{۱۰۲}{۳} = ۳۴^\circ$$

با توجه به مقدار $\alpha = ۳۴^\circ$، اندازهٔ زوایای مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ برابر است با:

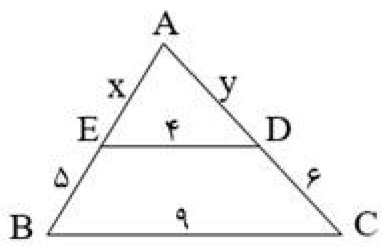
$$A\hat{B}C = A\hat{C}B = ۲\alpha = ۲ \times ۳۴^\circ = ۶۸^\circ$$

$$\hat{A}_۱ = ۱۸۰^\circ - (A\hat{B}C + A\hat{C}B) = ۱۸۰^\circ - (۶۸^\circ + ۶۸^\circ) = ۱۸۰^\circ - ۱۳۶^\circ = ۴۴^\circ$$

بنابراین زاویهٔ $\hat{A}_۱ = ۴۴^\circ$ کوچک‌ترین زاویهٔ مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ است.

۳ **گزینه ۴**

ذوزنقهٔ $BCDE$ را با مشخصات گفته‌شده رسم می‌کنیم. دو ساق آن را امتداد می‌دهیم تا یکدیگر را در نقطهٔ A قطع کنند.



با محاسبهٔ مقدار x و y، محیط مثلث $\overset{\Delta}{ADE}$ را به دست می‌آوریم.

دو خط BC و DE در ذوزنقهٔ $BCDE$ موازی یکدیگرند، بنابراین دو مثلث $\overset{\Delta}{ADE}$ و $\overset{\Delta}{ABC}$ متشابه هستند و می‌توان نسبت تشابه اضلاع دو مثلث را چنین نوشت:

$$\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{ADE} \Rightarrow \frac{۴}{۹} = \frac{y}{y+۶} = \frac{x}{x+۵}$$

اکنون مقادیر x و y به راحتی قابل‌محاسبه است.

$$\frac{y}{y+۶} = \frac{۴}{۹} \Rightarrow ۹y = ۴y + ۲۴ \Rightarrow ۵y = ۲۴ \Rightarrow y = \frac{۲۴}{۵} = ۴/۸ \Rightarrow y = ۴/۸$$

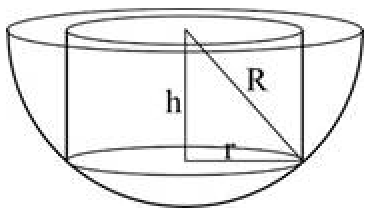
$$\frac{x}{x+۵} = \frac{۴}{۹} \Rightarrow ۹x = ۴x + ۲۰ \Rightarrow ۵x = ۲۰ \Rightarrow x = ۴$$

می‌دانیم محیط یک مثلث برابر مجموع اضلاع آن است؛ بنابراین محیط مثلث $\overset{\Delta}{ADE}$ برابر است با:

$$\text{محیط مثلث } \overset{\Delta}{ADE} = x + y + ۴ = ۴ + ۴/۸ + ۴ = ۱۲/۸$$

۴ **گزینه ۴**

طبق اطلاعات داده‌شده در صورت سؤال، استوانه‌ای به شعاع r و ارتفاع $h = ۶$ را درون نیمکره‌ای به شعاع $R = ۹$ محاط می‌کنیم. برای اینکه حجم استوانهٔ محاط شده بیشترین مقدار ممکن باشد، باید سطح بالایی آن بر سطح نیمکره منطبق شود.



اکنون با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس اندازهٔ شعاع و سپس حجم استوانه را به دست می‌آوریم.

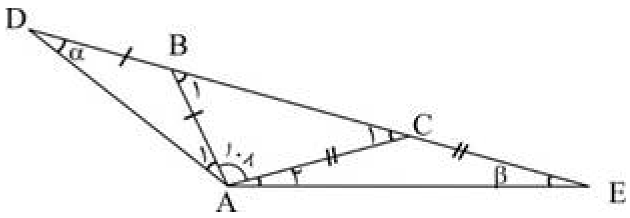
$$r^۲ + h^۲ = R^۲ \xrightarrow[h=۶]{R=۹} r^۲ + ۶^۲ = ۹^۲ \Rightarrow r^۲ + ۳۶ = ۸۱ \Rightarrow r^۲ = ۸۱ - ۳۶ = ۴۵$$

می‌دانیم حجم استوانه از رابطهٔ $V = \pi r^۲ h$ محاسبه می‌شود بنابراین داشتن مقدار $r^۲$ کافی است.

$$V = \pi r^۲ h = \pi \times ۴۵ \times ۶ = ۲۷۰\pi \Rightarrow V_{\max} = ۲۷۰\pi$$

۵ **گزینه ۳**

شکلی متناسب با توضیحات صورت سؤال رسم می‌کنیم.



کوچک‌ترین زاویـهٔ خارجی مثلث، مکمل بزرگ‌ترین زاویهٔ داخلی مثلث است. بزرگ‌ترین زاویه در مثلث $\overset{\triangle}{ADE}$، زاویهٔ $\hat{A}$ است. پس با توجه به فرض‌های مطرح‌شده، ابتدا اندازهٔ زاویهٔ $\hat{A}$ را به دست می‌آوریم.

چون $BD = BA$ است، مثلث $\overset{\triangle}{ABD}$ متساوی‌الساقین می‌شود بنابراین:

$$\overset{\triangle}{ABD} : BD = BA \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{D} = \alpha$$

زاویهٔ $\hat{B}_1$ زاویهٔ خارجی مثلث $\overset{\triangle}{ABD}$ است بنابراین اندازهٔ آن برابر مجموع دو زاویهٔ داخلی غیرمجاورش می‌شود، یعنی:

$$\hat{B}_1 = \hat{A}_1 + \hat{D} = 2\alpha$$

از طرفی چون $CE = CA$ است، مثلث $\overset{\triangle}{ACE}$ متساوی‌الساقین می‌شود بنابراین:

$$\overset{\triangle}{ACE} : CE = CA \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{E} = \beta$$

زاویهٔ $\hat{C}_1$ زاویهٔ خارجی مثلث $\overset{\triangle}{ACE}$ است بنابراین اندازهٔ آن برابر مجموع دو زاویهٔ داخلی غیرمجاورش می‌شود، یعنی:

$$\hat{C}_1 = \hat{A}_2 + \hat{E} = 2\beta$$

می‌دانیم مجموع زوایای داخلی هر مثلث برابر 180° است. با توجه به این نکته در مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$، اندازهٔ $\alpha + \beta$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\overset{\triangle}{ABC} : B\hat{A}C + \hat{B}_1 + \hat{C}_1 = 180^\circ \xrightarrow{\hat{A}=108^\circ} 108^\circ + 2\alpha + 2\beta = 180^\circ$$
$$\Rightarrow 2(\alpha + \beta) + 108 = 180 \Rightarrow 2(\alpha + \beta) = 72^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 36^\circ$$

اکنون اندازهٔ زاویهٔ $\hat{A}$ (بزرگ‌ترین زاویهٔ مثلث $\overset{\triangle}{ADE}$) را تعیین می‌کنیم:

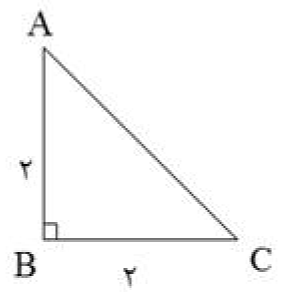
$$\overset{\triangle}{ADE} : \hat{A} + \hat{D} + \hat{E} = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} + \alpha + \beta = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} + 36 = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} = 144^\circ$$

بنابراین اندازهٔ کوچک‌ترین زاویهٔ خارجی مثلث $\overset{\triangle}{ADE}$ برابر است با:

$$180^\circ - 144^\circ = 36^\circ$$

۶ **گزینه ۴**

ابتدا مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین $\overset{\triangle}{ABC}$ به ضلع قائم ۲ واحد را رسم می‌کنیم.



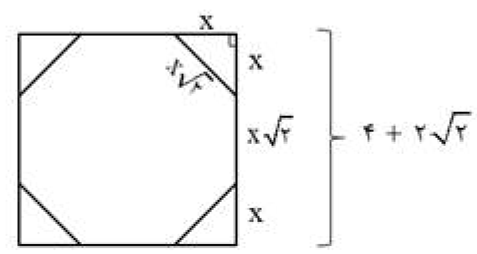
محیط این مثلث برابر طول ضلع یک مربع است. با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس اندازهٔ ضلع AC و سپس محیط مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ را محاسبه می‌کنیم.

$$AC^{۲} = AB^{۲} + BC^{۲} \Rightarrow AC^{۲} = ۴ + ۴ = ۸ \Rightarrow AC = ۲\sqrt{۲}$$

$$\text{محیط مثلث } \overset{\triangle}{ABC} = ۲ + ۲ + ۲\sqrt{۲} = ۴ + ۲\sqrt{۲}$$

پس طول ضلع مربع موردنظر برابر $۴ + ۲\sqrt{۲}$ است.

می‌خواهیم با حذف گوشه‌های این مربع، یک هشت ضلعی منتظم را درون آن محاط کنیم. اگر اندازهٔ اضلاع قائمه چهار مثلث گوشه‌ای را x در نظر بگیریم، طول ضلع هشت ضلعی منتظم با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس برابر $x\sqrt{۲}$ می‌شود.



با توجه به اینکه طول ضلع مربع برابر $۴ + ۲\sqrt{۲}$ است، مقدار x را حساب می‌کنیم:

$$x + x + x\sqrt{۲} = ۴ + ۲\sqrt{۲} \Rightarrow ۲x + x\sqrt{۲} = ۴ + ۲\sqrt{۲} \Rightarrow x = ۲$$

برای محاسبهٔ مساحت هشت ضلعی منتظم، کافی است مساحت چهار مثلث گوشه‌ای را از مساحت مربع کم کنیم:

$$S_{\text{مربع}} = (۴ + ۲\sqrt{۲})^{۲}$$

$$S_{\text{مثلث}} = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۲ = ۲$$

پس مساحت هشت ضلعی برابر است با:

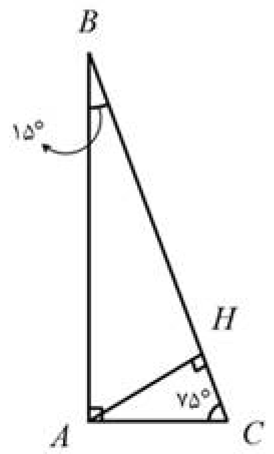
$$S_{\text{هشت ضلعی}} = S_{\text{مربع}} - (۴ \times S_{\text{مثلث}}) = (۴ + ۲\sqrt{۲})^{۲} - ۸ = ۱۶ + ۱۶\sqrt{۲} + ۸ - ۸ = ۱۶ + ۱۶\sqrt{۲}$$

۷ گزینه ۱

زوایای مثلث را x و $5x$ و $6x$ در نظر می‌گیریم. با توجه به اینکه مجموع زوایای داخلی هر مثلث برابر 180° است، x را حساب می‌کنیم:

$$x + 5x + 6x = 180^\circ \Rightarrow 12x = 180^\circ \Rightarrow x = 15^\circ$$

پس یک مثلث قائم‌الزاویه با زوایای 15°، 75° و 90° داریم. مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ با مشخصات گفته‌شده را رسم می‌کنیم. بزرگ‌ترین ضلع مثلث قائم‌الزاویه، وتر آن و کوچک‌ترین ارتفاعش، ارتفاع وارد بر وتر است.



در مثلث قائم‌الزاویه‌ای که یک زاویهٔ آن 15° باشد، ارتفاع وارد بر وتر $\frac{1}{4}$ وتر است (* در ادامه اثبات می‌شود)؛ بنابراین:

$$AH = \frac{1}{4}BC \Rightarrow \frac{AH}{BC} = \frac{1}{4}$$

* اثبات:

دو مثلث $\overset{\triangle}{AHC}$ و $\overset{\triangle}{AHB}$ متشابه‌اند و نسبت اضلاع متشابه را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\frac{AH}{BH} = \frac{CH}{AH}$$

بنابراین داریم:

$$AH^2 = BH \times CH$$

از طرفی $BH = AB \cos 15^\circ$ و $CH = AC \sin 15^\circ$ است، پس رابطهٔ فوق را می‌توان این‌گونه بازنویسی کرد:

$$AH^2 = AB \cos 15^\circ \times AC \sin 15^\circ$$

مساحت مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ برابر است با:

$$\text{مساحت مثلث } \overset{\triangle}{ABC} = \frac{1}{2}AB \times AC = \frac{1}{2}AH \times BC$$

درنتیجه $AB \times AC = AH \times BC$ همچنین می‌دانیم $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha.\cos\alpha$ است بنابراین:

$$AH^2 = AB \times AC \times (\sin 15^\circ \cos 15^\circ) = AH \times BC \times \frac{1}{2}\sin 30^\circ \Rightarrow AH = \frac{1}{4}BC$$

۸ گزینه ۳

مکعب درون یک کره محاط شده است بنابراین قطر مکعب و قطر کره باهم برابر است. می‌دانیم اگر اندازهٔ یال یک مکعب a باشد قطر مکعب برابر $a\sqrt{3}$ می‌شود. در این سؤال نیز قطر مکعب و درنتیجه قطر کره برابر $2\sqrt{3}$ است. اگر اندازهٔ شعاع کره را R بنامیم آنگاه داریم:

$$2R = 2\sqrt{3} \Rightarrow R = \sqrt{3}$$

بنابراین مساحت کره برابر است با:

$$S_{\text{کره}} = 4\pi R^2 = 4\pi(\sqrt{3})^2 = 4\pi \times 3 = 12\pi$$

۹ گزینه ۲

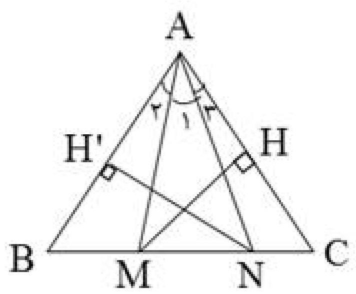
گام اول

الف) مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ متساوی‌الساقین است.

ب) اگر نقطه‌ای روی عمودمنصف یک پاره‌خط قرار داشته باشد، فاصلهٔ آن نقطه از دو سر پاره‌خط به یک اندازه خواهد بود.

گام دوم

مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ و عمودمنصف‌های MH و NH' را مطابق صورت سؤال به شکل زیر رسم می‌کنیم:



$\overset{\triangle}{ABC}$ متساوی‌الساقین است پس $\hat{B} = \hat{C}$ می‌شود. با توجه به اینکه $\hat{A} = ۸۰^\circ$ و مجموع زوایای داخلی هر مثلث ۱۸۰° است، اندازهٔ دو زاویهٔ $\hat{B}$ و $\hat{C}$ را تعیین می‌کنیم:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ \xrightarrow{\hat{A}=۸۰^\circ} \hat{B} + \hat{C} = ۱۰۰^\circ \xrightarrow{\hat{B}=\hat{C}} \hat{B} = \hat{C} = ۵۰^\circ$$

نقطهٔ M روی عمودمنصف ضلع AC قرار دارد؛ بنابراین داریم:

$$MA = MC \Rightarrow \text{متساوی الساقین}\ \overset{\triangle}{AMC} \Rightarrow \hat{A}_۱ + \hat{A}_۳ = \hat{C} = ۵۰^\circ \Rightarrow$$
$$\hat{M} = ۱۸۰^\circ - (\hat{A}_۱ + \hat{A}_۳ + \hat{C}) = ۱۸۰^\circ - ۱۰۰^\circ = ۸۰^\circ$$

نقطهٔ N روی عمودمنصف ضلع AB قرار دارد؛ بنابراین داریم:

$$NA = NB \Rightarrow \text{متساوی الساقین}\ \overset{\triangle}{ANB} \Rightarrow \hat{A}_۱ + \hat{A}_۲ = \hat{B} = ۵۰^\circ \Rightarrow$$
$$\hat{N} = ۱۸۰^\circ - (\hat{A}_۱ + \hat{A}_۲ + \hat{B}) = ۱۸۰^\circ - ۱۰۰^\circ = ۸۰^\circ$$

مجموع زوایای داخلی مثلث $\overset{\triangle}{AMN}$ برابر ۱۸۰° است بنابراین:

$$\hat{A}_۱ + \hat{M} + \hat{N} = ۱۸۰^\circ \xrightarrow{\hat{M}=\hat{N}=۸۰^\circ} \hat{A}_۱ + ۱۶۰^\circ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{A}_۱ = ۱۸۰^\circ - ۱۶۰^\circ = ۲۰^\circ$$

پس کوچک‌ترین زاویهٔ مثلث $\overset{\triangle}{AMN}$ زاویهٔ $\hat{A}_۱$ برابر ۲۰° است.

۱۰ **گزینه ۳**

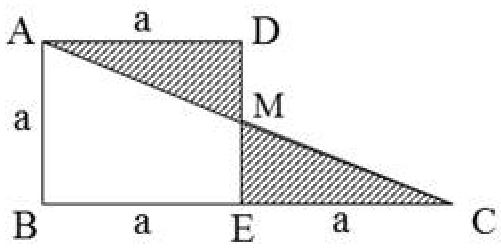
گام اول

الف) طول ضلع مربع $ABED$ و ارتفاع مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ برابر است.

ب) اضلاع متناظر در دو مثلث هم‌نهشت $\overset{\triangle}{AMD}$ و $\overset{\triangle}{EMC}$ برابرند.

ج) $\frac{S_{\text{ذوزنقه}}}{S_{\text{مربع}}} = ?$

گام دوم



فرض می‌کنیم طول ضلع مربع برابر a باشد. چون دو مثلث $\overset{\triangle}{AMD}$ و $\overset{\triangle}{EMC}$ هم‌نهشت هستند پس داریم:

$$\overset{\triangle}{AMD} \cong \overset{\triangle}{EMC} \Rightarrow \begin{cases} EC = AD = a \\ MD = EM = \frac{1}{2}a \end{cases}$$

مساحت ذوزنقه و مربع را برحسب a به دست آورده و نسبت آن‌ها را محاسبه می‌کنیم. می‌دانیم "ارتفاع × مجموع دو قاعده × $\frac{1}{2}$ = مساحت ذوزنقه" و "خودش×یک ضلع = مساحت مربع" است؛ بنابراین:

$$S_{\text{ذوزنقه}} = \frac{1}{2}(EM + AB)BE = \frac{1}{2}(\frac{a}{2} + a)a = \frac{1}{2}(\frac{3}{2}a)a = \frac{3}{4}a^2$$

$$S_{\text{مربع}} = a \times a = a^2$$

$$\frac{S_{\text{ذوزنقه}}}{S_{\text{مربع}}} = \frac{\frac{3}{4}a^2}{a^2} = \frac{3}{4}$$

۱۱ گزینه ۲

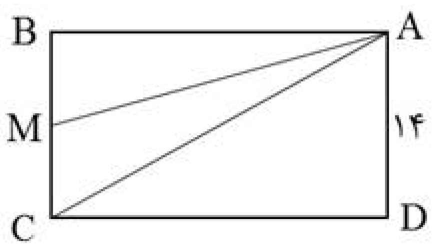
گام اول

الف) عرض مستطیل ۱۴ واحد و قطر آن ۲۵ واحد است.

ب) $\frac{S_{ABM}}{S_{AMCD}} = \frac{۵}{۹}$

ج) $AM = ?$

گام دوم



با استفاده از رابطهٔ فیثاغورس، طول مستطیل را به دست می‌آوریم.

$$AC^۲ = AD^۲ + CD^۲ \xrightarrow[AD=۱۴]{AC=۲۵} ۲۵^۲ = ۱۴^۲ + CD^۲ \Rightarrow$$

$$۶۲۵ = ۱۹۶ + CD^۲ \Rightarrow CD^۲ = ۶۲۵ - ۱۹۶ = ۴۲۹ \Rightarrow AB^۲ = ۴۲۹$$

$$\frac{S_{A\overset{\triangle}{B}M}}{S_{ABCD}} = \frac{S_{A\overset{\triangle}{B}M}}{S_{A\overset{\triangle}{B}M} + S_{AMCD}} = \frac{۵}{۵+۹} = \frac{۵}{۱۴}$$

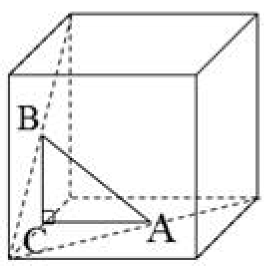
$$\frac{S_{A\overset{\triangle}{B}M}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{۱}{۲} \times AB \times BM}{AB \times AD} = \frac{BM}{۲AD} = \frac{۵}{۱۴} \Rightarrow \frac{BM}{۲۸} = \frac{۵}{۱۴} \Rightarrow BM = ۱۰$$

رابطهٔ فیثاغورس را برای مثلث $A\overset{\triangle}{B}M$ نوشته و اندازهٔ AM را تعیین می‌کنیم:

$$AB^۲ + BM^۲ = AM^۲ \Rightarrow ۴۲۹ + ۱۰۰ = AM^۲ \Rightarrow AM^۲ = ۵۲۹ \Rightarrow AM = \sqrt{۵۲۹} = ۲۳$$

۱۲ گزینه ۳

مکعبی به طول یال $۴\sqrt{۲}$ به‌صورت زیر رسم کرده و وسط دو وجه غیرموازی آن را A و B می‌نامیم. هدف محاسبهٔ اندازهٔ AB است.



اندازهٔ AC و BC نصف یال مکعب است؛ بنابراین:

$$AC = BC = \frac{۱}{۲}(۴\sqrt{۲}) = ۲\sqrt{۲}$$

با استفاده از رابطهٔ فیثاغورس، اندازهٔ AB را تعیین می‌کنیم:

$$BC^۲ + AC^۲ = AB^۲ \Rightarrow ۲(۲\sqrt{۲})^۲ = AB^۲ \Rightarrow AB^۲ = ۲ \times ۸ = ۱۶ \Rightarrow AB = \sqrt{۱۶} = ۴$$

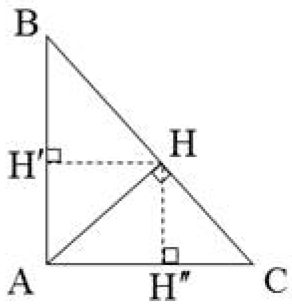
۱۳ **گزینه ۲**

گام اول

الف) مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ قائم‌الزاویه است.

ب) با فرض اینکه $HC < HB$ باشد داریم: $S_{\overset{\triangle}{ABC}} = ۶/۷۶\, S_{\overset{\triangle}{AHC}}$

ج) $HH' = ?$ و $HH'' = ?$



گام دوم

سه مثلث قائم‌الزاویـهٔ $\overset{\triangle}{AHC}$، $\overset{\triangle}{AHB}$ و $\overset{\triangle}{ABC}$ باهم متشابه‌انـد. می‌دانیم در مثلث‌های متشابه نسـبت تشابه برابر جذر نسـبت مساحت‌ها است.

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}{S_{\overset{\triangle}{AHC}}} = ۶/۷۶ \Rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{ABH}} + S_{\overset{\triangle}{AHC}}}{S_{\overset{\triangle}{AHC}}} = ۶/۷۶ \Rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{ABH}}}{S_{\overset{\triangle}{AHC}}} + ۱ = ۶/۷۶ \Rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{ABH}}}{S_{\overset{\triangle}{AHC}}} = ۵/۷۶$$

همچنین می‌دانیم در مثلث‌های متشابه، نسبت تشابه با نسبت ارتفاع‌ها برابر است. چون دو مثلث $\overset{\triangle}{ABH}$ و $\overset{\triangle}{ACH}$ باهم متشابه‌اند، داریم:

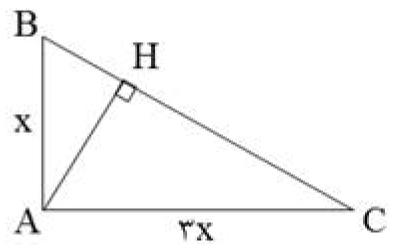
$$\frac{HH'}{HH''} = \sqrt{۵/۷۶} = ۲/۴ \Rightarrow \frac{HH'}{HH''} = \frac{۲۴}{۱۰} = \frac{۱۲}{۵} \Rightarrow \frac{HH''}{HH'} = \frac{۵}{۱۲}$$

۱۴ **گزینه ۳**

گام اول

الف) طول اضلاع قائمهٔ مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ را x و $۳x$ در نظر می‌گیریم.

ب) می‌دانیم: "ارتفاع × قاعده × $\frac{۱}{۲}$ = مساحت مثلث"



گام دوم

با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس اندازهٔ BC را محاسبه می‌کنیم:

$$AB^۲ + AC^۲ = BC^۲ \Rightarrow x^۲ + ۹x^۲ = BC^۲ \Rightarrow BC^۲ = ۱۰x^۲ \Rightarrow BC = \sqrt{۱۰}x$$

با توجه به اینکه مساحت مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ برابر ۶۰ واحد مربع است، مقدار x را تعیین می‌کنیم.

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{۱}{۲}AB \times AC = \frac{۱}{۲}x(۳x) = ۶۰ \Rightarrow x^۲ = ۴۰ \Rightarrow x = \sqrt{۴۰} = ۲\sqrt{۱۰}$$

می‌توان مساحت مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ را با تعریف BC و AH به ترتیب به‌عنوان قاعده و ارتفاع آن چنین نوشت:

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{۱}{۲}AH \times BC = ۶۰$$

بنابراین:

$$\frac{۱}{۲}AH \times \sqrt{۱۰}(۲\sqrt{۱۰}) = ۶۰ \Rightarrow ۱۰AH = ۶۰ \Rightarrow AH = ۶$$

۱۵ **گزینه ۳**

گام اول

الف) وقتی بزرگ‌ترین مکعب را داخل یک کره داشته باشیم، قطرهای مکعب و کره باهم برابر در نظر گرفته می‌شود.

ب) قطر مکعبی با طول یال a برابر $a\sqrt{۳}$ است (با دو بار استفاده از قضیهٔ فیثاغورس به راحتی اثبات می‌شود.)

ج) سطح کل مکعبی با طول یال a برابر $۶a^۲$ است.

گام دوم

با توجه به اینکه قطر کره و درنتیجه قطر مکعب برابر ۶ واحد است مقدار a را محاسبه می‌کنیم.

$$a\sqrt{۳} = ۶ \Rightarrow a = \frac{۶}{\sqrt{۳}}$$

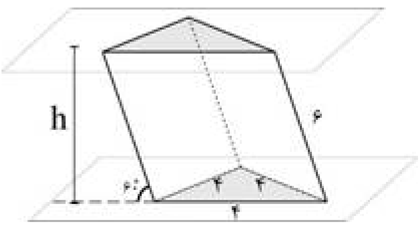
$$S_{\text{مکعب}} = ۶a^۲ = ۶(\frac{۶}{\sqrt{۳}})^۲ = ۶ \times \frac{۳۶}{۳} = ۲ \times ۳۶ = ۷۲$$

۱۶ **گزینه ۴**

گام اول

الف) حجم یک منشور با مساحت قاعدهٔ S و ارتفاع h از رابطهٔ $V = S \times h$ محاسبه می‌شود.

ب) مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$ است.



گام دوم

با توجه به اینکه یال‌ها با صفحهٔ قاعده زاویهٔ ۶۰ درجه می‌سازند و طول یال جانبی منشور ۶ واحد است، ارتفاع منشور را محاسبه می‌کنیم.

$$h = ۶ \times Sin\,۶۰^\circ = ۶ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۳\sqrt{۳}$$

مساحت قاعدهٔ منشور برابر است با:

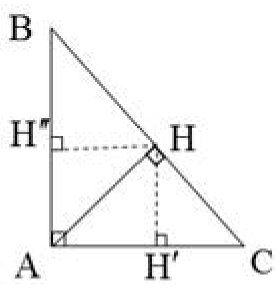
$$S = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲ = \frac{\sqrt{۳}}{۴} \times ۱۶ = ۴\sqrt{۳}$$

با توجه به مقادیر به‌دست‌آمده، حجم منشور برابر است با:

$$V = S \times h = ۴\sqrt{۳} \times ۳\sqrt{۳} = ۱۲ \times ۳ = ۳۶$$

۱۷ **گزینه ۱**

مثلث قائم‌الزاویه $A\hat{B}C$ و ارتفاع AH وارد بر وتر BC را به‌صورت زیر رسم می‌کنیم. HH' ارتفاع وارد بر وتر مثلث $A\hat{H}C$ و HH'' ارتفاع وارد بر وتر مثلث $A\hat{H}B$ است.



هر سه مثلث قائم‌الزاویه $A\hat{H}B$، $A\hat{H}C$ و $A\hat{B}C$ باهم متشابه‌اند. می‌دانیم نسبت مساحت‌ها برابر مجذور نسبت تشابه است. با توجه به اینکه $S_{A\hat{H}C} = \frac{۱}{۵}S_{A\hat{B}C}$ است، داریم:

$$\frac{S_{A\hat{B}C}}{S_{A\hat{H}C}} = \frac{S_{A\hat{H}B} + S_{A\hat{H}C}}{S_{A\hat{H}C}} = \frac{S_{A\hat{H}B}}{S_{A\hat{H}C}} + ۱ = ۵ \Rightarrow \frac{S_{A\hat{H}B}}{S_{A\hat{H}C}} = ۴$$

بنابراین نسبت تشابه دو مثلث $A\hat{H}B$ و $A\hat{H}C$ برابر ۲ است. از طرفی می‌دانیم نسبت تشابه دو مثلث برابر نسبت ارتفاع آن‌ها است پس:

$$\frac{HH''}{HH''} = ۲ \Rightarrow \frac{HH'}{HH''} = \frac{۱}{۲}$$

۱۸ **گزینه ۲**

گام اول

الف) دو مثلث قابل‌انطباق نیستند یعنی دو مثلث باهم برابر یا همنهشت نیستند؛ بنابراین حق نداریم کوچک‌ترین ضلع مثلث با اضلاع b و a و ۳ را برابر ۳ در نظر بگیریم (اگر کوچک‌ترین ضلع مثلث اول را ۳ در نظر بگیریم، با توجه به اینکه دو مثلث متشابه‌اند، نسبت تشابه آن‌ها برابر $۱ = \frac{۳}{۳}$ می‌شود و باید مقدار a و b برابر ۴ و ۵ باشد که دراین‌صورت دو مثلث برهم منطبق می‌شوند) پس کوچک‌ترین ضلع این مثلث a یا b است.

ب) می‌دانیم نسبت محیط‌های دو مثلث متشابه برابر نسبت تشابه است.

گام دوم

محیط مثلث دوم برابر است با:

$$۳ + ۴ + ۵ = ۱۲$$

نسبت تشابه دو مثلث می‌تواند $\frac{۳}{۴}$ یا $\frac{۳}{۵}$ باشد. اگر نسبت تشابه برابر $\frac{۳}{۴}$ باشد، محیط مثلث اول برابر است با:

$$\text{محیط مثلث اول} = ۱۲ \times \frac{۳}{۴} = ۳ \times ۳ = ۹$$

و اگر نسبت تشابه برابر $\frac{۳}{۵}$ باشد، داریم:

$$\text{محیط مثلث اول} = ۱۲ \times \frac{۳}{۵} = ۷/۲$$

بنابراین بیش‌ترین محیط مثلث اول برابر ۹ است.

۱۹ گزینه ۳

چهار ضلعی $MNPB$ متوازی‌الاضلاع است؛ بنابراین $MN \parallel PB$ است. با استفاده از قضیهٔ تالس می‌توان نوشت:

$$MN \parallel BP \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{۳}{۱۰} \Rightarrow \frac{NC}{AC} = \frac{۷}{۱۰}$$

همچنین $NO \parallel AM$ است پس دو مثلث $\overset{\triangle}{NOC}$ و $\overset{\triangle}{AMC}$ نیز متشابه می‌شود. می‌دانیم نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه برابر مجذور نسبت تشابه است؛ بنابراین:

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{NOC}}}{S_{\overset{\triangle}{AMC}}} = \frac{۴۹}{۱۰۰} \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{NOC}} = \frac{۴۹}{۱۰۰} S_{\overset{\triangle}{AMC}} \qquad (I)$$

مساحت دو مثلث $\overset{\triangle}{AMC}$ و $\overset{\triangle}{ABC}$ را می‌توان چنین نوشت:

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{۱}{۲} AB \cdot AC \cdot \sin \hat{A}$$
$$S_{\overset{\triangle}{AMC}} = \frac{۱}{۲} AM \cdot AC \cdot \sin \hat{A}$$

بنابراین:

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{AMC}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}} = \frac{AM}{AB} = \frac{۳}{۱۰} \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{AMC}} = \frac{۳}{۱۰} S_{\overset{\triangle}{ABC}} \qquad (II)$$

با استفاده از دو رابطهٔ (I) و (II) داریم:

$$S_{\overset{\triangle}{NOC}} = \frac{۴۹}{۱۰۰} \times \frac{۳}{۱۰} S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{۱۴۷}{۱۰۰۰} S_{\overset{\triangle}{ABC}} \qquad (III)$$

از طرفی چون $MN \parallel BP$ است پس دو مثلث $\overset{\triangle}{AMN}$ و $\overset{\triangle}{ABC}$ متشابه می‌شود و نسبت مساحت آن‌ها برابر مجذور نسبت تشابه است؛ بنابراین:

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{AMN}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}} = \left(\frac{AM}{AB}\right)^۲ = \frac{۹}{۱۰۰} \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{AMN}} = \frac{۹}{۱۰۰} S_{\overset{\triangle}{ABC}} \qquad (IV)$$

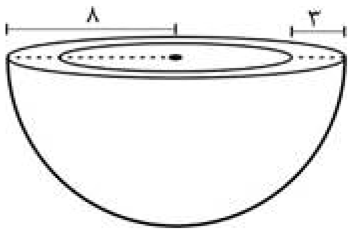
اکنون با استفاده از روابط (II) و (III) و (IV) داریم:

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{OMN}}}{S_{\overset{\triangle}{AMN}}} = \frac{S_{\overset{\triangle}{AMC}} - S_{\overset{\triangle}{AMN}} - S_{\overset{\triangle}{NOC}}}{S_{\overset{\triangle}{AMN}}} = \frac{\left(\frac{۳}{۱۰} - \frac{۹}{۱۰۰} - \frac{۱۴۷}{۱۰۰۰}\right) S_{\overset{\triangle}{ABC}}}{\frac{۹}{۱۰۰} S_{\overset{\triangle}{ABC}}} = \frac{\frac{۶۳}{۱۰۰۰}}{\frac{۹}{۱۰۰}} = \frac{۶۳}{۹۰} = \frac{۷}{۱۰}$$

پس مساحت مثلث $\overset{\triangle}{OMN}$، ۷۰ درصد مساحت مثلث $\overset{\triangle}{AMN}$ است.

۲۰ **گزینه ۴**

طبق توضیحات صورت سؤال، شکل زیر را رسم می‌کنیم:



برای محاسبهٔ سطح کل این ظرف کافی است مساحت نیمکرهٔ درونی، نیمکرهٔ بیرونی و مساحت سطح مقطع ظرف را به دست آوریم؛ دقت کنید که سطح مقطع ظرف به‌صورت دایره‌ای به شعاع ۸ است که دایرهٔ دیگری به شعاع ۵ از آن کسر شده است.

$$S_{\text{نیمکرهٔ بیرونی}} = \frac{۱}{۲}(۴\pi \times ۶۴) = ۲\pi \times ۶۴ = ۱۲۸\pi$$

$$S_{\text{نیمکرهٔ درونی}} = \frac{۱}{۲}(۴\pi \times ۲۵) = ۲\pi \times ۲۵ = ۵۰\pi$$

$$S_{\text{سطح مقطع}} = \pi(۶۴ - ۲۵) = ۳۹\pi$$

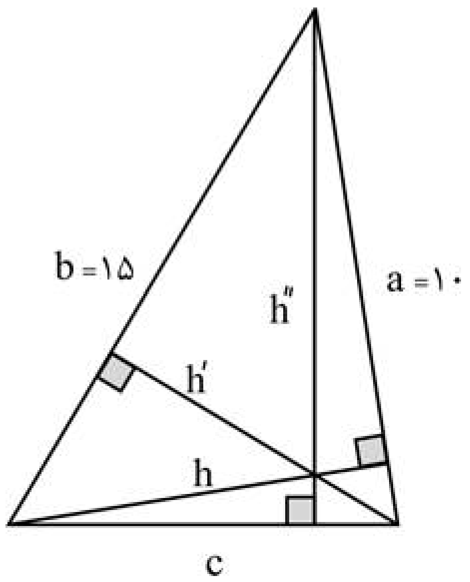
$$S_{\text{کل}} = S_{\text{نیمکرهٔ بیرونی}} + S_{\text{نیمکرهٔ درونی}} + S_{\text{سطح مقطع}} = ۱۲۸\pi + ۵۰\pi + ۳۹\pi = ۲۱۷\pi$$

۲۱ **گزینه ۱**

گام اول

اگر با توجه به توضیحات داده‌شده، مثلثی به شکل زیر رسم کنیم آنگاه داریم:

$$h + h' = h''$$



گام دوم

مساحت هر مثلث با قاعدهٔ a و ارتفاع h از رابطهٔ $S = \frac{۱}{۲}ah$ محاسبه می‌شود پس ارتفاع مثلث برحسب قاعده و مساحت برابر است با:

$$h = \frac{۲s}{a}$$

بنابراین داریم:

$$h + h' = h'' \Rightarrow \frac{۲S}{۱۰} + \frac{۲S}{۱۵} = \frac{۲S}{c} \xrightarrow{\div ۲S} \frac{۱}{۱۰} + \frac{۱}{۱۵} = \frac{۱}{c} \Rightarrow \frac{۱}{c} = \frac{۳۲+۲}{۳۰} \Rightarrow c = \frac{۳۰}{۵} = ۶$$

۲۲ **گزینه ۲**

گام اول

الف) مساحت یک شش ضلعی منتظم به ضلع a از رابطهٔ $S = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}a^{۲}$ به‌دست می‌آید.

ب) اندازهٔ قطر کوچک شش ضلعی منتظم به طول a از رابطهٔ $a\sqrt{۳}$ محاسبه می‌شود.

گام دوم

ابتدا طول ضلع شش ضلعی را محاسبه می‌کنیم:

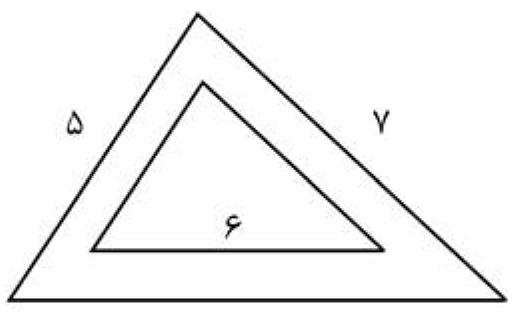
$$۹\sqrt{۳} = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}a^{۲} \Rightarrow a^{۲} = ۶ \Rightarrow a = \sqrt{۶}$$

طول قطر کوچک این شش ضلعی برابر است با:

$$a\sqrt{۳} = \sqrt{۶} \times \sqrt{۳} = \sqrt{۱۸} = ۳\sqrt{۲}$$

۲۳ **گزینه ۳**

طبق توضیحات صورت سؤال، شکلی به‌صورت زیر رسم می‌کنیم:



چون اضـلاع دو مثلث موازی یکدیگرند، پس دو مثلث متشابه هستند. می‌دانیم نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه برابر نسبت تشابه آن‌ها است؛ بنابراین داریم:

$$\frac{\text{مساحت مثلث بزرگ تر}}{\text{مساحت مثلث کوچک تر}} = \frac{S}{S'} = \left(\frac{۹}{۶}\right)^{۲} = \left(\frac{۳}{۲}\right)^{۲} = \frac{۹}{۴}$$

نسبت مساحت محدود به این دو مثلث به مساحت مثلث کوچک‌تر برابر است با:

$$\frac{S-S'}{S'} = \frac{S}{S'} - \frac{S'}{S'} = \frac{S}{S'} - ۱ = \frac{۹}{۴} - ۱ = \frac{۵}{۴} = ۱/۲۵$$

۲۴ **گزینه ۴**

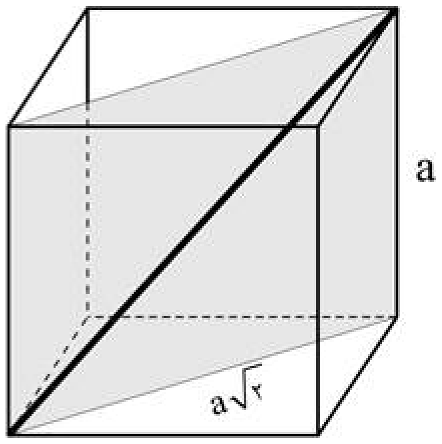
همان‌طوری که در شکل زیر نیز مشخص است، سطح مقطع یک مکعب به طول یال a و صفحهٔ قطری آن، مستطیلی به طول اضلاع a و $a\sqrt{۲}$ است. با توجه به مساحت مستطیل، اندازهٔ a را محاسبه می‌کنیم.

بنابراین می‌توان نوشت:

$$a\left(a\sqrt{۲}\right) = ۹\sqrt{۲} \quad \Rightarrow \quad a^{۲}\sqrt{۲} = ۹\sqrt{۲} \quad \Rightarrow \quad a^{۲} = ۹ \quad \Rightarrow \quad a = ۳$$

قطر مکعب به طول یال a برابر $a\sqrt{۳}$ است (با دو بار استفاده از قضیهٔ فیثاغورس ثابت می‌شود)، پس داریم:

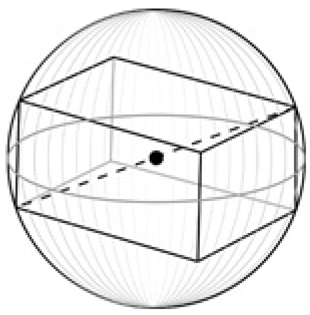
$$a\sqrt{۳} = ۳\sqrt{۳}$$



۲۵ **گزینه ۲**

گام اول

الف) کره از تمام رأس‌های یک مکعب مستطیل گذشته است، بنابراین مکعب مستطیل به شکل زیر، درون کره محاط می‌شود:



ب) قطر کره و قطر مکعب مستطیل محاط در آن، باهم برابر است.

ج) مساحت کره‌ای به شعاع R از رابطهٔ $S = ۴\pi R^{۲}$ محاسبه می‌شود.

گام دوم

با دو بار استفاده از قضیهٔ فیثاغورس، می‌توان قطر مکعب مستطیل را به‌صورت زیر محاسبه کرد:

$$\text{قطر مکعب مستطیل} = ۲R = \sqrt{۵^{۲} + ۶^{۲} + (۲\sqrt{۵})^{۲}} = \sqrt{۲۵ + ۳۶ + ۲۰} = \sqrt{۸۱} = ۹$$

$$\text{قطر کره} = ۲R = ۹ \quad \Rightarrow \quad \text{شعاع کره} = R = \frac{۹}{۲}$$

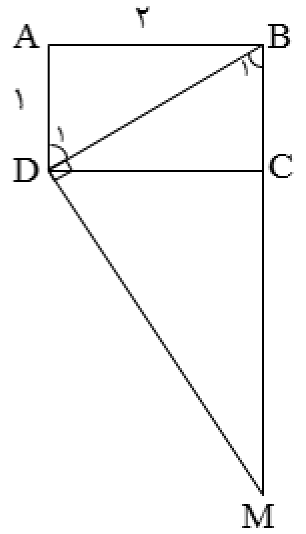
مساحت کره برابر است با:

$$S_{\text{کره}} = ۴\pi R^{۲} = ۴\pi(\frac{۹}{۲})^{۲} = ۴\pi(\frac{۸۱}{۴}) = ۸۱\pi$$

پس سطح کره ۸۱ برابر π است.

۲۶ **گزینه ۳**

با توجه به توضیحات صورت سؤال، شکلی ساده و دقیق رسم می‌کنیم:



هدف محاسبهٔ MB است. BD قطر مستطیل است، با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$BD^۲ = AB^۲ + AD^۲ = ۲^۲ + ۱^۲ = ۴ + ۱ = ۵ \quad \Rightarrow \quad BD = \sqrt{۵}$$

دو مثلث قائم‌الزاویهٔ $B\overset{\triangle}{A}D$ و $B\overset{\triangle}{D}M$ متشابه هستند، زیرا:

$$\left.\begin{array}{l} \hat{A} = B\hat{D}M = ۹۰^\circ \\ \left.\begin{array}{l} AD \| BC \\ \text{مورب}BD \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{D}_۱ = \hat{B}_۱ \end{array}\right\} \Rightarrow B\overset{\triangle}{A}D \sim B\overset{\triangle}{D}M$$

در دو مثلث متشابه، نسبت اضلاع متناظر برابر است بنابراین:

$$\frac{AD}{BD} = \frac{BD}{MB} \quad \Rightarrow \quad \frac{۱}{\sqrt{۵}} = \frac{\sqrt{۵}}{MB} \quad \Rightarrow \quad MB = (\sqrt{۵})^۲ = ۵$$

۲۷ **گزینه ۲**

گام اول

در دو مثلث متشابه، نسبت اضلاع متناظر برابر است.

گام دوم

با توجه به اینکه دو مثلث متشابه‌اند و $\frac{۵}{۹} \neq \frac{۴}{۷}$ و $\frac{۴}{۹} \neq \frac{۵}{۷}$ است، دو ضلع به طول‌های a و b از دو مثلث نمی‌توانند متناظر باشند؛ بنابراین ضلعِ به طول a از مثلث اول یا با ضلعِ به طول ۷ از مثلث دوم متناظر است یا با ضلعِ به طول ۹. هریک از این دو حالت را بررسی و مقدار a را محاسبه می‌کنیم.

حالت اول: ضلعِ به طول a از مثلث اول با ضلعِ به طول ۹ از مثلث دوم متناظر باشد.

$$\frac{a}{۹} = \frac{۴}{b} = \frac{۵}{۷} \Rightarrow \frac{a}{۹} = \frac{۵}{۷} \Rightarrow a = \frac{۴۵}{۷}$$

یا

$$\frac{a}{۹} = \frac{۴}{۷} = \frac{۵}{b} \Rightarrow \frac{a}{۹} = \frac{۴}{۷} \Rightarrow a = \frac{۳۶}{۷}$$

حالت دوم: ضلعِ به طول a از مثلث اول با ضلعِ به طول ۷ از مثلث دوم متناظر باشد.

$$\frac{a}{۷} = \frac{۴}{۹} = \frac{۵}{b} \Rightarrow \frac{a}{۷} = \frac{۴}{۹} \Rightarrow a = \frac{۲۸}{۹}$$

یا

$$\frac{a}{۷} = \frac{۵}{۹} = \frac{۴}{b} \Rightarrow \frac{a}{۷} = \frac{۵}{۹} \Rightarrow a = \frac{۳۵}{۹}$$

از بین مقادیر به‌دست‌آمده، بیش‌ترین مقدار $a = \frac{۴۵}{۷}$ است.

۲۸ گزینه ۱

گام اول

الف) چهار ضلعی $MNPB$ متوازی‌الاضلاع است پس داریم:

$$MN \| BP \Rightarrow MN \| BC \Rightarrow \overset{\triangle}{AMN} \sim \overset{\triangle}{ABC}$$
$$NP \| MB \Rightarrow NP \| AB \Rightarrow \overset{\triangle}{NPC} \sim \overset{\triangle}{ABC}$$

ب) در دو مثلث متشابه، نسبت مساحت‌ها برابر مجذور نسبت تشابه اضلاع است.

گام دوم

طبق گام اول، $\overset{\triangle}{AMN} \sim \overset{\triangle}{ABC}$ است. با توجه به اینکه $\frac{MA}{MB} = \frac{۳}{۲}$، نسبت تشابه دو مثلث و سپس نسبت مساحت آن‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{MA}{AB} = \frac{MA}{MA+MB} = \frac{۱}{\frac{MA+MB}{MA}} = \frac{۱}{۱+\frac{MA}{MB}} = \frac{۱}{۱+\frac{۲}{۳}} = \frac{۱}{\frac{۵}{۳}} = \frac{۳}{۵}$$
$$\Rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{AMN}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}} = (\frac{۳}{۵})^۲ = \frac{۹}{۲۵} \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{AMN}} = \frac{۹}{۲۵} S_{\overset{\triangle}{ABC}}$$

چون $MN \| BC$ است، با استفاده از قضیه تالس داریم:

$$\frac{MA}{MB} = \frac{AN}{NC} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow \frac{NC}{AN} = \frac{۲}{۳}$$

$\overset{\triangle}{NPC} \sim \overset{\triangle}{ABC}$ است پس نسبت تشابه آن‌ها برابر است با:

$$\frac{NC}{AC} = \frac{NC}{AN+NC} = \frac{۱}{\frac{AN+NC}{NC}} = \frac{۱}{\frac{NC}{AN}+۱} = \frac{۱}{\frac{۳}{۲}+۱} = \frac{۱}{\frac{۵}{۲}} = \frac{۲}{۵}$$

حال نسبت مساحت‌های این دو مثلث را به‌دست می‌آوریم:

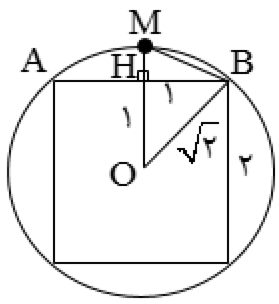
$$\frac{S_{\overset{\triangle}{NPC}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}} = (\frac{۲}{۵})^۲ = \frac{۴}{۲۵} \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{NPC}} = \frac{۴}{۲۵} S_{\overset{\triangle}{ABC}}$$

با توجه به نسبت‌های بالا، مساحت متوازی‌الاضلاع $MNPB$ را برحسب مساحت مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ می‌نویسیم. داریم:

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = S_{\overset{\triangle}{AMN}} + S_{\overset{\triangle}{NPC}} + S_{MNPB}$$
$$\Rightarrow S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{۹}{۲۵} S_{\overset{\triangle}{ABC}} + \frac{۴}{۲۵} S_{\overset{\triangle}{ABC}} + S_{MNPB}$$
$$\Rightarrow S_{MNPB} = \frac{۱۲}{۲۵} S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{۴۸}{۱۰۰} S_{\overset{\triangle}{ABC}}$$

پس مساحت متوازی‌الاضلاع ۴۸ درصد مساحت مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ است.

۲۹ **گزینه ۲**



هدف محاسبهٔ اندازهٔ MB است. در مثلث قائم‌الزاویهٔ $\overset{\triangle}{MHB}$ داریم:

$$HB = 1$$

$$MH = OM - OH$$

برای محاسبهٔ MH، ابتدا لازم است با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس شعاع دایره را به‌دست آوریم:

$$OB = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad OM = OB = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \quad MH = \sqrt{2} - 1$$

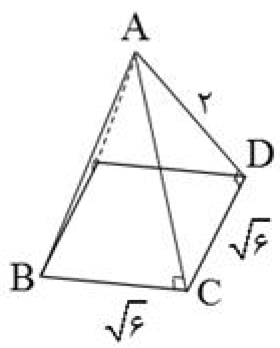
اکنون با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس اندازهٔ MB را محاسبه می‌کنیم:

$$MB^2 = MH^2 + HB^2 \quad \Rightarrow \quad MB^2 = (\sqrt{2} - 1)^2 + 1^2 = 2 - 2\sqrt{2} + 1 + 1 = 4 - 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow MB = \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$$

۳۰ **گزینه ۱**

هرمی با مشخصات گفته‌شده در صورت سؤال، رسم می‌کنیم:



فرض می‌کنیم AD کوتاه‌ترین و AB بلندترین یال این هرم باشد. با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس ابتدا اندازهٔ AC و سپس اندازهٔ AB را محاسبه می‌کنیم.

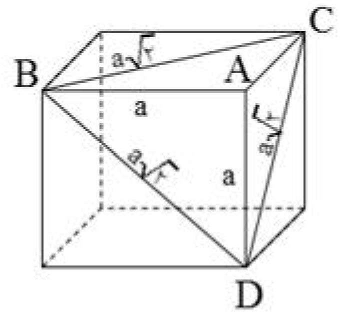
$$AC^2 = AD^2 + CD^2 \quad \Rightarrow AC^2 = 2^2 + (\sqrt{6})^2 = 4 + 6 = 10 \quad \Rightarrow AC = \sqrt{10}$$

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 \quad \Rightarrow AB^2 = (\sqrt{10})^2 + (\sqrt{6})^2 = 10 + 6 = 16 \quad \Rightarrow AB = \sqrt{16} = 4$$

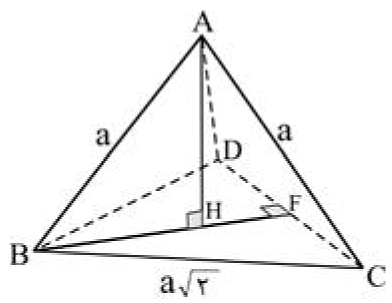
۳۱ **گزینه ۴**

مکعبی به طول یال a رسم می‌کنیم. با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$BD = BC = DC = \sqrt{a^۲ + a^۲} = a\sqrt{۲}$$



هدف محاسبهٔ فاصلهٔ رأس A از صفحه‌ای است که از سه راس B و C و D می‌گذرد؛ به‌عبارت‌دیگر، باید ارتفاع وارد بر قاعدهٔ هرم زیر را محاسبه کنیم.



با دو روش می‌توان اندازهٔ ارتفاع AH را به دست آورد.

روش اول:

$\overset{\triangle}{BCD}$ یک مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع $a\sqrt{۲}$ است. نقطهٔ H مرکز این مثلث و محل برخورد ارتفاع‌ها و میانه‌های آن محسوب می‌شود؛ بنابراین داریم:

$$BF = \frac{a\sqrt{۲}\times\sqrt{۳}}{۲} = \frac{a\sqrt{۶}}{۲} \quad , \quad BH = \frac{۲}{۳}BF \quad \Rightarrow \quad BH = \frac{۲}{۳}\times\frac{a\sqrt{۶}}{۲} = \frac{a\sqrt{۶}}{۳}$$

مثلث $\overset{\triangle}{ABH}$ قائم‌الزاویه است و طبق قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$AH^۲ + BH^۲ = AB^۲ \quad \Rightarrow AH^۲ + \left(\frac{a\sqrt{۶}}{۳}\right)^۲ = a^۲ \quad \Rightarrow AH^۲ = a^۲ - \frac{۶a^۲}{۹} = a^۲ - \frac{۲a^۲}{۳} = \frac{a^۲}{۳}$$

$$\Rightarrow AH = \sqrt{\frac{a^۲}{۳}} = \frac{a}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}a$$

روش دوم:

حجم هرم $ABCD$ را، یک بار با تعریف $\overset{\triangle}{BCD}$ و بار دیگر با تعریف $\overset{\triangle}{ACD}$ به‌عنوان قاعده محاسبه کرده و مساوی قرار می‌دهیم؛ بنابراین:

$$\frac{۱}{۳}\left(\frac{\sqrt{۳}}{۴}\times(a\sqrt{۲})^۲\right)\times AH = \frac{۱}{۳}\left(\frac{۱}{۲}a\times a\right)\times a \quad \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۶}a^۲\times AH = \frac{۱}{۶}a^۳ \quad \Rightarrow h = \frac{a}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}a$$

۳۲ گزینه ۲

گام اول

الف) مثلث $M\overset{\triangle}{\hat{N}}C$ متساوی‌الساقین است، پس $N\hat{M}C = M\hat{N}C$.

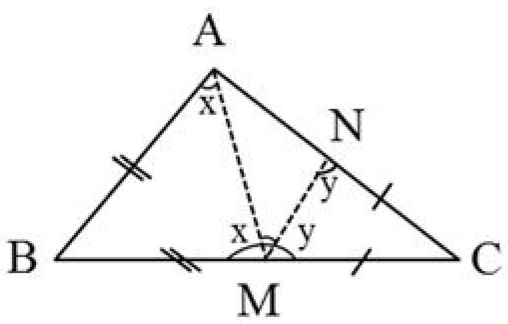
ب) مثلث $A\overset{\triangle}{\hat{B}}M$ متساوی‌الساقین است، پس $A\hat{M}B = B\hat{A}M$.

ج) مجموع زوایای داخلی هر مثلث ۱۸۰° است.

گام دوم

با توجه به گام اول، شکل را تکمیل می‌کنیم:

می‌دانیم $\hat{M}$ یک زاویهٔ نیم‌صفحه است، داریم:



$$A\hat{M}B + A\hat{M}N + N\hat{M}C = x + ۴۳^\circ + y = ۱۸۰^\circ \Rightarrow x + y = ۱۸۰^\circ - ۴۳^\circ$$
$$= ۱۳۷^\circ \quad (I)$$

ازطرفی:

$$\left.\begin{array}{ll} \overset{\triangle}{ABM}: & \hat{B} + ۲x = ۱۸۰^\circ \\ \overset{\triangle}{CNM}: & \hat{C} + ۲y = ۱۸۰^\circ \end{array}\right\} \xrightarrow{+} \hat{B} + ۲x + \hat{C} + ۲y = \hat{B} + \hat{C} + ۲(x+y)$$
$$= ۳۶۰^\circ$$

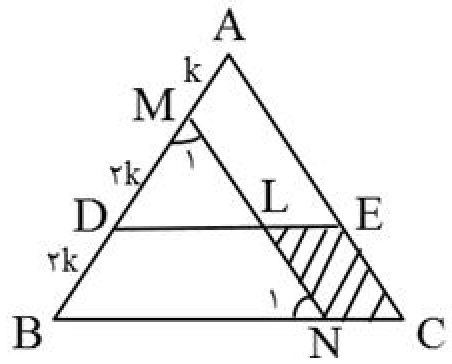
$$\xrightarrow{(I)} \hat{B} + \hat{C} + ۲۷۴^\circ = ۳۶۰^\circ \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = ۳۶۰^\circ - ۲۷۴^\circ = ۸۶^\circ$$

همچنین در مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ داریم:

$$\hat{B} + \hat{C} + B\hat{A}C = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۸۶^\circ + B\hat{A}C = ۱۸۰^\circ \Rightarrow B\hat{A}C = ۱۸۰^\circ - ۸۶^\circ$$
$$= ۹۴^\circ$$

۳۳ گزینه ۱

شکل را به‌صورت زیر نام‌گذاری می‌کنیم:



مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ متساوی‌الاضلاع است؛ بنابراین:

$$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = ۶۰^\circ$$

چون $NLEC$ متوازی‌الاضلاع است، داریم:

$$MN \| AC \Rightarrow \hat{M}_۱ = \hat{A} = ۶۰^\circ \,,\ \hat{N}_۱ = \hat{C} = ۶۰^\circ \Rightarrow \overset{\triangle}{MBN} \text{ متساوی الاضلاع است}$$

$$\Rightarrow BN = ۴k$$

هردو مثلث $\overset{\triangle}{MBN}$ و $\overset{\triangle}{ABC}$ متساوی‌الاضلاع هستند درنتیجه باهم متشابه‌اند. می‌دانیم نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه برابر مجذور نسبت تشابه آن دو مثلث است؛ بنابراین:

$$\overset{\triangle}{MBN} \sim \overset{\triangle}{ABC} \Rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{MBN}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}} = \left(\frac{۴k}{۵k}\right)^۲ = \left(\frac{۴}{۵}\right)^۲ = \frac{۱۶}{۲۵} \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{MBN}} = \frac{۱۶}{۲۵} S_{\overset{\triangle}{ABC}}$$

همچنین

$$DL \| BN \Rightarrow \hat{D} = \hat{B} = ۶۰^\circ \,,\ \hat{L} = \hat{N}_۱ = ۶۰^\circ \Rightarrow \overset{\triangle}{MDL} \text{ متساوی الاضلاع است} \Rightarrow ML = ۲k$$

به طریق مشابه ثابت می‌شود که $\overset{\triangle}{ADE}$ نیز متساوی‌الاضلاع و $AE = ۳k$ است؛ بنابراین دو مثلث $\overset{\triangle}{MDL}$ و $\overset{\triangle}{MBN}$ و دو مثلث $\overset{\triangle}{MDL}$ و $\overset{\triangle}{ADE}$ باهم متشابه‌اند و داریم:

$$\overset{\triangle}{MDL} \sim \overset{\triangle}{MBN} \Rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{MDL}}}{S_{\overset{\triangle}{MBN}}} = \left(\frac{۲k}{۴k}\right)^۲ = \frac{۱}{۴} \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{MDL}} = \frac{۱}{۴} S_{\overset{\triangle}{MBN}} = \frac{۴}{۲۵} S_{\overset{\triangle}{ABC}}$$

$$\overset{\triangle}{MDL} \sim \overset{\triangle}{ADE} \Rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{MDL}}}{S_{\overset{\triangle}{ADE}}} = \left(\frac{۲k}{۳k}\right)^۲ = \frac{۴}{۹} \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{ADE}} = \frac{۹}{۴} S_{\overset{\triangle}{MDL}} = \frac{۹}{۲۵} S_{\overset{\triangle}{ABC}}$$

با استفاده از نسبت‌های بالا، نسبت خواسته‌شده را محاسبه می‌کنیم:

$$S_{AMLE} = S_{\overset{\triangle}{ADE}} - S_{\overset{\triangle}{MDL}} = \frac{۹}{۲۵} S_{\overset{\triangle}{ABC}} - \frac{۴}{۲۵} S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{۵}{۲۵} S_{\overset{\triangle}{ABC}}$$

$$S_{LECN} = S_{\overset{\triangle}{ABC}} - (S_{\overset{\triangle}{BMN}} + S_{AMLE}) = S_{\overset{\triangle}{ABC}} - \left(\frac{۱۶}{۲۵} S_{\overset{\triangle}{ABC}} + \frac{۵}{۲۵} S_{\overset{\triangle}{ABC}}\right) = \frac{۴}{۲۵} S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \%۱۶ S_{\overset{\triangle}{ABC}}$$

بنابراین مساحت متوازی‌الاضلاع هاشورزده ۱۶ درصد مساحت مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ است.

۳۴ گزینه ۴

گام اول

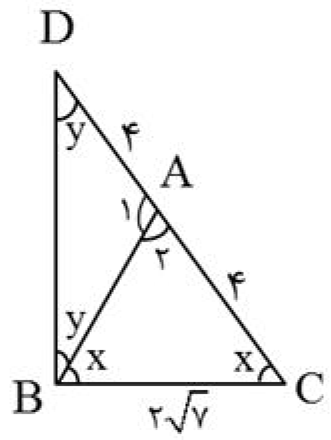
فاصلهٔ دو رأس غیرواقع در یک وجه، همان اندازهٔ قطر مکعب مستطیل است.

گام دوم

$$\text{قطر مکعب مستطیل} = \sqrt{۵^۲ + ۶^۲ + (۲\sqrt{۵})^۲} = \sqrt{۲۵ + ۳۶ + ۲۰} = \sqrt{۸۱} = ۹$$

۳۵ **گزینه ۳**

ابتدا بر اساس توضیحات صورت سؤال، یک شکل دقیق رسم می‌کنیم:



مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ و $\overset{\triangle}{ABD}$ متساوی‌الساقین هستند پس:

$$A\hat{B}C = A\hat{C}B = x \quad , \quad A\hat{B}D = A\hat{D}B = y$$

زاویهٔ $\hat{A}_1$ زاویهٔ خارجی مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ است و اندازهٔ آن برابر مجموع دو زاویهٔ داخلی غیرمجاورش می‌شود؛ یعنی:

$$\hat{A}_1 = x + x = ۲x$$

با توجه به اینکه مجموع زوایای داخلی هر مثلث برابر ۱۸۰° است، داریم:

$$\hat{A}_1 + y + y = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۲x + ۲y = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۲(x+y) = ۱۸۰^\circ \Rightarrow x + y = \frac{۱۸۰^\circ}{۲} = ۹۰^\circ$$

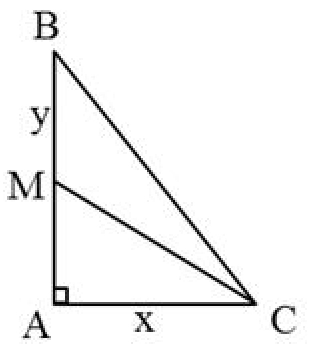
بنابراین مثلث $\overset{\triangle}{DBC}$ در رأس B قائمه است و می‌توان اندازهٔ ضلع BD را با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس محاسبه کرد.

$$CD = AD + AC = ۴ + ۴ = ۸ \quad , \quad BC = ۲\sqrt{۷}$$

$$CD^۲ = BD^۲ + BC^۲ \quad \Rightarrow ۸^۲ = BD^۲ + (۲\sqrt{۷})^۲ \quad \Rightarrow ۶۴ = BD^۲ + ۲۸$$
$$\Rightarrow BD^۲ = ۶۴ - ۲۸ = ۳۶ \quad \Rightarrow BD = \sqrt{۳۶} = ۶$$

۳۶ **گزینه ۱**

مثلث قائم‌الزاویه $\overset{\triangle}{ABC}$ را با فرض اینکه طول اضلاع قائمه‌اش x و y $(x < y)$ باشد، رسم می‌کنیم. AB ضلع متوسط این مثلث و CM میانهٔ وارد بر آن است. هدف محاسبهٔ نسبت $\frac{CM}{AB}$ است.



مساحت مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ برابر مساحت مربعی به طول ضلع x است؛ بنابراین:

$$\frac{xy}{۲} = x^۲ \Rightarrow xy = ۲x^۲ \xrightarrow{x,y>۰} y = ۲x \Rightarrow AB = ۲x$$

$$AM = \frac{۱}{۲}AB = \frac{۱}{۲}(۲x) = x$$

اکنون با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث $\overset{\triangle}{AMC}$، اندازهٔ CM را به دست می‌آوریم:

$$CM^۲ = AM^۲ + AC^۲ \Rightarrow CM^۲ = x^۲ + x^۲ = ۲x^۲ \Rightarrow CM = \sqrt{۲}x$$

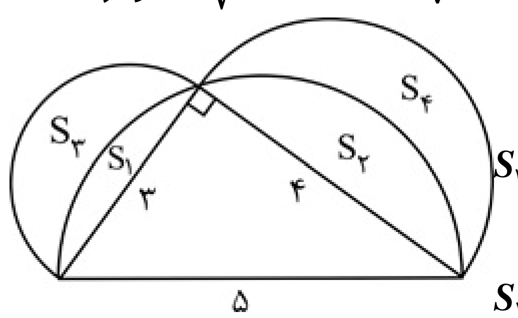
پس نسبت $\frac{CM}{AB}$ برابر است با:

$$\frac{CM}{AB} = \frac{\sqrt{۲}x}{۲x} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow CM = \frac{\sqrt{۲}}{۲}AB$$

۳۷ **گزینه ۲**

مساحت قسمت‌های مختلف شکل را به‌صورت زیر نام‌گذاری می‌کنیم. هدف ما محاسبهٔ $S_۳ + S_۴$ است. با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس طول وتر مثلث برابر است با:

$$\text{وتر مثلث} = \sqrt{۳^۲ + ۴^۲} = \sqrt{۲۵} = ۵$$



داریم:

$S_۱ + S_۲ =$ مساحت نیم‌دایره به قطر ۵ $-$ مساحت مثلث قائم‌الزاویه

$S_۳ + S_۴ =$ (مساحت نیم‌دایره به قطر ۳ $+$ مساحت نیم‌دایره به قطر ۴) $- (S_۱ + S_۲)$

بنابراین:

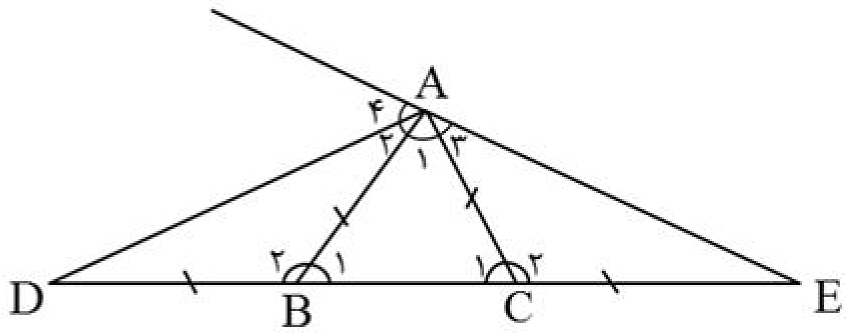
$$S_۱ + S_۲ = \frac{۱}{۲} \times \pi \times (\frac{۵}{۲})^۲ - \frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۴ = \frac{\pi}{۲}(\frac{۲۵}{۴}) - ۶ = \frac{۲۵\pi}{۸} - ۶$$

$$S_۳ + S_۴ = \frac{۱}{۲} \times \pi(\frac{۳}{۲})^۲ + \frac{۱}{۲} \times \pi(\frac{۴}{۲})^۲ - (\frac{۲۵\pi}{۸} - ۶) = \frac{\pi}{۲}(\frac{۹}{۴}) + \frac{\pi}{۲}(۴) - \frac{۲۵\pi}{۸} + ۶ = \frac{۲۵\pi}{۸} - \frac{۲۵\pi}{۸} + ۶ = ۶$$

۳۸ **گزینه ۳**

گام اول

الف) مثلث $\overset{\triangle}{ADE}$ را بر اساس توضیحات صورت سؤال رسم می‌کنیم:



ب) $AB = AC = CE = BD$

ج) کوچک‌ترین زاویهٔ خارجی در هر مثلث، مکمل بزرگ‌ترین زاویهٔ داخلی است.

گام دوم

مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ متساوی‌الساقین است؛ بنابراین $\hat{B}_1 = \hat{C}_1$، درنتیجه مکمل آن‌ها نیز برابر است؛ یعنی $\hat{B}_2 = \hat{C}_2$ است. ازطرفی طبق قسمت (ب) از گام اول، $CE = BD$ و $AB = AC$ است؛ بنابراین دو مثلث $\overset{\triangle}{ABD}$ و $\overset{\triangle}{ACE}$ به حالت (ض‌زض) هم‌نهشت هستند.

$$\left.\begin{array}{l} CE = BD \\ \hat{B}_2 = \hat{C}_2 \\ AB = AC \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\triangle}{ABD} \cong \overset{\triangle}{ACE}$$

درنتیجه زوایای $\hat{D}$ و $\hat{E}$ باهم برابر و هردو زوایای کوچک داخلی مثلث $\overset{\triangle}{ADE}$ محسوب می‌شوند.

$$\overset{\triangle}{ABD}\text{متساوی الساقین} \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{D} = \alpha \xrightarrow{\hat{D}=\hat{E}} \hat{D} = \hat{E} = \alpha$$

$\hat{A}_4$ کوچک‌ترین زاویهٔ خارجی مثلث $\overset{\triangle}{ADE}$ است پس اندازهٔ آن با مجموع دو زاویهٔ داخلی غیرمجاورش برابر می‌شود:

$$\hat{A}_4 = \hat{D} + \hat{E} = \alpha + \alpha = 2\alpha$$

بنابراین کوچک‌ترین زاویهٔ خارجی مثلث، ۲ برابر کوچک‌ترین زاویهٔ داخلی آن است.

۳۹ **گزینه ۱**

گام اول

الف) اگر وتر مثلث قائم‌الزاویه را c بنامیم آنگاه:

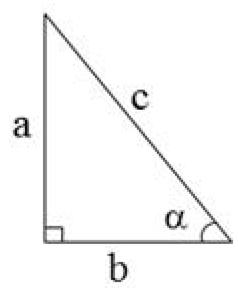
$$S = \frac{1}{8}c^2$$

ب) مساحت مثلث قائم‌الزاویه برابر است با:

$$S = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}}{2}$$

گام دوم

یک مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع قائمهٔ a و b و وتر c رسم می‌کنیم:



پس داریم:

$$S = \frac{1}{8}c^2 \Rightarrow \frac{ab}{2} = \frac{c^2}{8} \Rightarrow ab = \frac{c^2}{4} \qquad (I)$$

کوچک‌ترین زاویهٔ این مثلث را α می‌نامیم، داریم:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \Rightarrow a = c\sin\alpha \quad , \quad \cos\alpha = \frac{b}{c} \Rightarrow b = c\cos\alpha$$

حالا با جایگذاری در رابطهٔ (I)، مقدار α را محاسبه می‌کنیم:

$$ab = \frac{c^2}{4} \Rightarrow (c\sin\alpha)(c\cos\alpha) = \frac{c^2}{4} \Rightarrow c^2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{c^2}{4} \Rightarrow \sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{4}$$

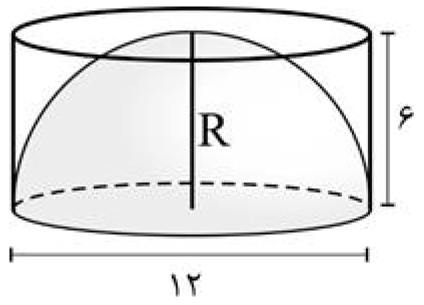
$$\xrightarrow{\times 2} 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{1}{2} = \sin 30^\circ \Rightarrow 2\alpha = 30^\circ \Rightarrow \alpha = 15^\circ$$

۴۰ گزینه ۴

گام اول

الف) نیم‌کره درون استوانه محاط شده است، پس آن را به‌صورت زیر درنظر می‌گیریم:

۶ = ارتفاع استوانه = شعاع سطح مقطع استوانه = شعاع نیم‌کره



ب) ?= حجم نیم‌کره − حجم استوانه = حجم محدود به نیم‌کره و استوانه

گام دوم

ابتدا حجم استوانه و حجم نیم‌کره را محاسبه می‌کنیم:

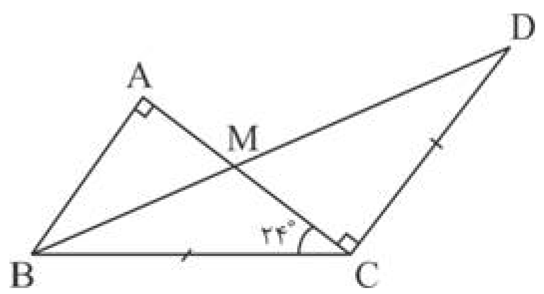
$$V_{\text{استوانه}} = \pi R^۲ h = \pi (۶)^۲ (۶) = \pi \times ۳۶ \times ۶ = ۲۱۶\pi$$

$$V_{\text{نیم کره}} = \frac{۱}{۲} \times \frac{۴}{۳}\pi R^۳ = \frac{۱}{۲} \times \frac{۴}{۳} \times \pi (۶)^۳ = \frac{۴ \times ۲۱۶}{۶}\pi = ۱۴۴\pi$$

حجم محدود بین نیم‌کره و استوانه برابر است با:

$$V_{\text{استوانه}} - V_{\text{نیم کره}} = ۲۱۶\pi - ۱۴۴\pi = ۷۲\pi$$

۴۱ گزینه ۱



باتوجه‌به شکل مسئله، کاملاً مشخص است که $DC \parallel AB$ است. چون DB خط مورب و قاطع این دو خط موازی است، بنابراین:

$$\hat{D} = M\hat{B}A \quad (*)$$

ازطرفی چون $CD = BC$، پس در مثلث $\overset{\Delta}{BCD}$ داریم:

$$\hat{D} = D\hat{B}C \xrightarrow{(*)} D\hat{B}A = D\hat{B}C = \frac{\hat{B}}{۲}$$

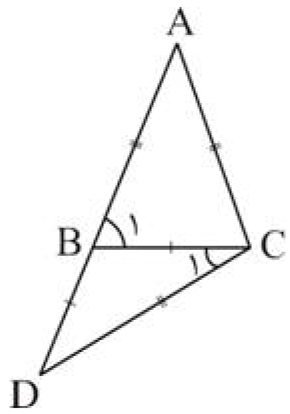
پس باید زاویهٔ B را بیابیم. در مثلث ABC زاویهٔ B برابر است با:

$$\hat{B} = ۱۸۰^\circ - ۹۰^\circ - ۲۴^\circ = ۶۶^\circ \Rightarrow D\hat{B}C = \frac{\hat{B}}{۲} = ۳۳^\circ$$

۴۲ **گزینه ۴**

باتوجه‌به داده‌های مسئله، شکل مسئله به‌صورت زیر خواهد بود.

سؤال، زاویۀ A را می‌خواهد پس:



در مثلث متساوی‌الساقین ABC : $\hat{B}_۱ = \hat{C} = \frac{۱۸۰^\circ - \hat{A}}{۲} \quad (*)$

در مثلث متساوی‌الساقین BDC، زاویه‌های $C_۱$ و D برابرند؛ ازطرفی $B_۱$ زاویۀ خارجی است درنتیجه:

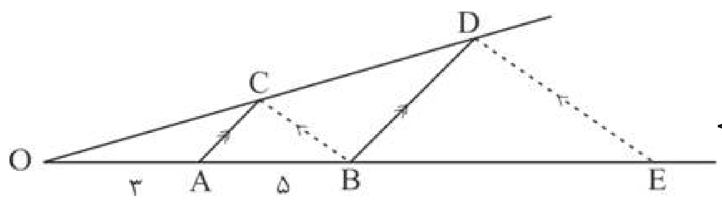
$$\hat{B}_۱ = \hat{D} + \hat{C}_۱ \xrightarrow{\hat{D}=\hat{C}_۱} \hat{B}_۱ = ۲\hat{D} \Rightarrow \hat{D} = \frac{\hat{B}_۱}{۲} \overset{(*)}{=} \frac{۱۸۰^\circ - \hat{A}}{۴}$$

همچنین در مثلث متساوی‌الساقین ADC، زاویه‌های A و D برابرند، پس:

$$\hat{A} = \frac{۱۸۰^\circ - \hat{A}}{۴} \Rightarrow ۴\hat{A} = ۱۸۰^\circ - \hat{A} \Rightarrow ۵\hat{A} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{A} = ۳۶^\circ$$

۴۳ **گزینه ۱**

باتوجه‌به شکل و با کمک قضیۀ تالس داریم:



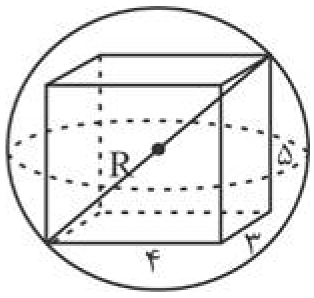
$$\begin{cases} AC \parallel BD \Rightarrow \dfrac{OA}{AB} = \dfrac{OC}{CD} \\ BC \parallel DE \Rightarrow \dfrac{OB}{BE} = \dfrac{OC}{CD} \end{cases}$$

طرف راست تساوی‌ها باهم برابر است پس طرف چپ آن نیز باهم برابر است.

$$\Rightarrow \frac{OA}{AB} = \frac{OB}{BE} \Rightarrow \frac{۳}{۵} = \frac{۸}{BE} \Rightarrow BE = \frac{۴۰}{۳} = ۱۳\frac{۱}{۳}$$

۴۴ گزینه ۴

قطر کوچک‌ترین کرهٔ ممکن برابر قطر مکعب مستطیل است پس:

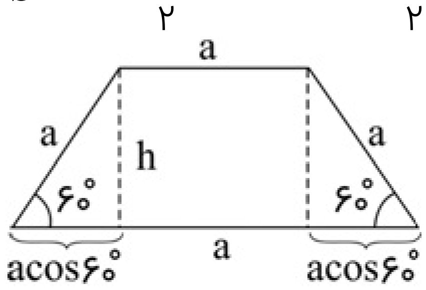


$$\sqrt{a^۲+b^۲+c^۲}=۲R \Rightarrow \sqrt{۲۵+۱۶+۹}=۲R$$
$$\Rightarrow \sqrt{۵۰}=۲R \Rightarrow R=\frac{\sqrt{۵۰}}{۲}$$
$$\Rightarrow \text{مساحت سطح کره}=۴\pi R^۲=۴\pi\left(\frac{۵۰}{۴}\right)=۵۰\pi$$

۴۵ گزینه ۲

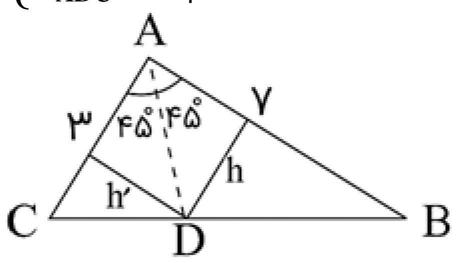
$$(\text{محیط})P=۳a+۲a\cos۶۰^\circ+a \Rightarrow ۳۰=۵a \Rightarrow a=۶$$

$$S=\frac{(a+۲a)h}{۲}=\frac{۳a\times a\sin۶۰^\circ}{۲}\xrightarrow{a=۶}S=\frac{۳\sqrt{۳}\times۶^۲}{۴}=۲۷\sqrt{۳}$$



۴۶ گزینه ۴

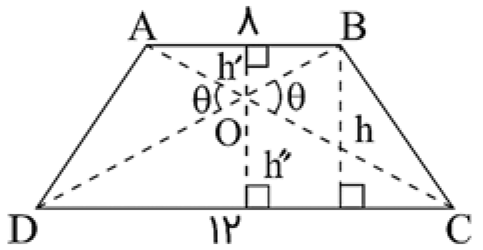
$$\begin{cases} S_{\overset{\Delta}{ABD}}=\frac{۱}{۲}AD\times AB\times\sin۴۵^\circ \\ S_{\overset{\Delta}{ADC}}=\frac{۱}{۲}AC\times AD\times\sin۴۵^\circ \end{cases}\Rightarrow \frac{S_{\overset{\Delta}{ABD}}}{S_{\overset{\Delta}{ADC}}}=\frac{AB}{AC}=\frac{۷}{۳}$$



$$S_{\overset{\Delta}{ABD}}+S_{\overset{\Delta}{ADC}}=S_{\overset{\Delta}{ABC}}\Rightarrow\frac{۷}{۳}S_{\overset{\Delta}{ADC}}+S_{\overset{\Delta}{ADC}}=\frac{۳\times۷}{۲}\Rightarrow\frac{۱۰}{۳}S_{\overset{\Delta}{ADC}}=\frac{۲۱}{۲}$$
$$\Rightarrow S_{\overset{\Delta}{ADC}}=\frac{۶۳}{۲۰}$$
$$\xrightarrow{S_{\overset{\Delta}{ADC}}=\frac{۱}{۲}h'\times۳}h'=\frac{۲\times۶۳}{۳\times۲۰}=۲/۱\xrightarrow{AD=\sqrt{۲}h'}AD=۲/۱\sqrt{۲}$$

۴۷ گزینه ۳

دو مثلث $\overset{\Delta}{OAB}$و $\overset{\Delta}{OCD}$ باهم متشابه‌اند.



$$\frac{h'}{h''} = \frac{AB}{CD} \Rightarrow \frac{h'}{h''} = \frac{۸}{۱۲} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow h'' = \frac{۳}{۲}h'$$

$$h' + h'' = ۱۰ \Rightarrow h' + \frac{۳}{۲}h' = ۱۰ \Rightarrow h' = ۴ \Rightarrow h'' = ۶$$

$$\overset{\Delta}{OAB} \sim \overset{\Delta}{OCD} \Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} \Rightarrow OB \times OC = OA \times OD \ (*)$$

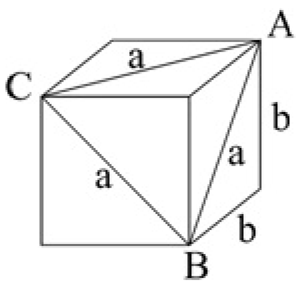
مساحت دو مثلث $\overset{\Delta}{OBC}$ و $\overset{\Delta}{OAD}$ باهم برابرند زیرا:

$$\begin{cases} S_{\overset{\Delta}{OBC}} = \frac{۱}{۲}OB \times OC \times \sin\theta \\ S_{\overset{\Delta}{OAD}} = \frac{۱}{۲}OA \times OD \times \sin\theta \end{cases} \xrightarrow{(*)} S_{\overset{\Delta}{OBC}} = S_{\overset{\Delta}{OAD}}$$

$$S_{\overset{\Delta}{ABCD}} = S_{\overset{\Delta}{ODC}} + S_{\overset{\Delta}{OBC}} + S_{\overset{\Delta}{OAB}} + S_{\overset{\Delta}{OAD}} \Rightarrow \frac{(۸ + ۱۲) \times ۱۰}{۲} = \frac{۶ \times ۱۲}{۲} + \frac{۴ \times ۸}{۲} + ۲S_{\overset{\Delta}{OBC}}$$

$$\Rightarrow ۱۰۰ = ۳۶ + ۱۶ + ۲S_{\overset{\Delta}{OBC}} \Rightarrow S_{\overset{\Delta}{OBC}} = \frac{۴۸}{۲} = ۲۴$$

۴۸ گزینه ۴



صفحهٔ ABC یک مثلث متساوی‌الاضلاع است که هریک از اضلاع آن قطر یکی از سه وجه مکعب است؛ بنابراین طول ضلع مثلث برابر است با:

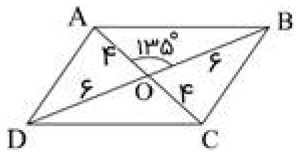
$$a = b\sqrt{۲} = ۴\sqrt{۲}$$

مساحت یک مثلث متساوی‌الاضلاع به طول a برابر است با:

$$S = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲ = \frac{\sqrt{۳}}{۴}(۴\sqrt{۲})^۲ = ۸\sqrt{۳}$$

۴۹ **گزینه ۲**

در هر متوازی‌الاضلاع قطرها همدیگر را نصف می‌کنند، پس با رسم دو قطر هر متوازی‌الاضلاع، چهار مثلث هم‌مساحت به دست می‌آید؛ بنابراین باتوجه‌به شکل زیر می‌توان نوشت:



$$S(ABCD) = ۴S(\overset{\Delta}{AOB}) \quad (*)$$

ازطرفی می‌دانیم که مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل‌ضرب طول دو ضلع در سینوس زاویهٔ بین آن دو ضلع، پس:

$$\xrightarrow{(*)} S(ABCD) = ۴(\tfrac{۱}{۲}OA.OB.\sin(A\hat{O}B)) = ۴ \times \tfrac{۱}{۲} \times ۴ \times ۶ \times \tfrac{\sqrt{۲}}{۲} = ۲۴\sqrt{۲}$$

۵۰ گزینه ۱

گام اول

مجموع زوایای داخلی یک چهارضلعی محدب برابر $۳۶۰°$ است.

گام دوم

$$\frac{\hat{A}}{۳} = \frac{\hat{B}}{۴} = \frac{\hat{C}}{۵} = \frac{۵\hat{D}}{۱۲} = \alpha \Rightarrow \begin{cases} \hat{A} = ۳\alpha \\ \hat{B} = ۴\alpha \\ \hat{C} = ۵\alpha \\ \hat{D} = \frac{۱۲}{۵}\alpha \end{cases}$$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = ۳۶۰° \Rightarrow ۳\alpha + ۴\alpha + ۵\alpha + \frac{۱۲}{۵}\alpha = ۳۶۰°$$

$$\Rightarrow ۱۲\alpha + \frac{۱۲}{۵}\alpha = ۳۶۰° \xrightarrow{\div ۱۲} \alpha + \frac{۱}{۵}\alpha = ۳۰° \Rightarrow \frac{۶}{۵}\alpha = ۳۰° \Rightarrow \alpha = ۲۵°$$

$$\hat{A} = ۳\alpha = ۳ \times ۲۵° = ۷۵° \quad , \quad \hat{B} = ۴\alpha = ۴ \times ۲۵° = ۱۰۰°$$

$$\hat{C} = ۵\alpha = ۵ \times ۲۵° = ۱۲۵° \quad , \quad \hat{D} = \frac{۱۲}{۵}\alpha = \frac{۱۲}{۵} \times ۲۵ = ۶۰°$$

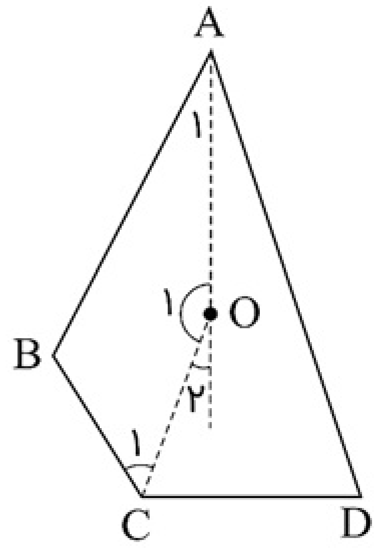
باتوجه‌به توضیحات و اندازهٔ زوایای به‌دست‌آمده چهار ضلعی $ABCD$ را رسم کرده و با نیمساز داخلی زوایای A و C یک چهار ضلعی دیگر تشکیل می‌دهیم:

$$\hat{O}_۱ + \hat{A}_۱ + \hat{B} + \hat{C}_۱ = ۳۶۰°$$

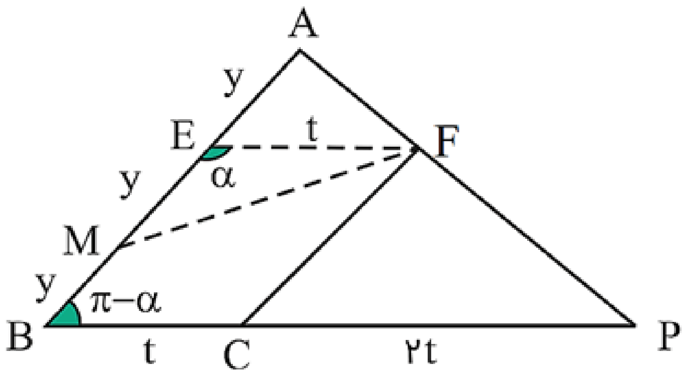
$$\Rightarrow \hat{O}_۱ + (\frac{۷۵}{۲}) + ۱۰۰° + (\frac{۱۲۵}{۲}) = ۳۶۰°$$

$$\Rightarrow \hat{O}_۱ + ۱۰۰° + ۱۰۰° = ۳۶۰°$$

$$\Rightarrow \hat{O}_۱ = ۱۶۰° \Rightarrow \hat{O}_۲ = ۱۸۰° - ۱۶۰° = ۲۰°$$



۵۱ **گزینه ۲**



$$PC=\frac{۲}{۳}PB \Rightarrow \frac{PC}{PB}=\frac{۲}{۳}=\frac{۲t}{۳t} \Rightarrow \begin{cases} PC=۲t \\ BC=t \end{cases}$$

$$EF \parallel BP \Rightarrow \frac{AE}{AB}=\frac{EF}{BP}=\frac{t}{۳t}=\frac{۱}{۳} \Rightarrow \frac{AE}{AB}=\frac{y}{۳y}=\frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} AE=y \\ AB=۳y \end{cases} \Rightarrow EB=۲y \Rightarrow EM=MB=y$$

باتوجه‌به قضیهٔ کسینوس‌ها نسبت مساحت دو مثلث را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{S_{EFM}}{S_{ABP}}=\frac{\frac{۱}{۲}\times EF\times EM\times \sin\alpha}{\frac{۱}{۲}\times AB\times BP\times \sin(\pi-\alpha)}=\frac{EF\times EM}{AB\times BP}=\frac{t\times y}{۳t\times ۳y}=\frac{۱}{۹}$$

۵۲ **گزینه ۴**

گام اول

حجم جدید پس از اضافه شدن گوی کروی از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

حجم جدید پس از اضافه شدن گوی کروی = حجم گوی + حجم مایع اولیه در استوانه

گام دوم

$$\pi r^۲ h_۲=\frac{۴}{۳}\pi R^۳+\pi r^۲ h_۱$$

$$\xrightarrow{\div\pi} ۴^۲\times(۱۰+\frac{۲}{۳})=\frac{۴}{۳}R^۳+۴^۲\times ۱۰ \Rightarrow ۱۶\times\frac{۳۲}{۳}=\frac{۴}{۳}R^۳+۱۶۰$$

$$\xrightarrow{\times\frac{۳}{۴}} ۴\times ۳۲=R^۳+۱۲۰ \Rightarrow ۱۲۸=R^۳+۱۲۰ \Rightarrow R^۳=۸ \Rightarrow R=۲$$

کره $S=۴\pi R^۲=۴\pi(۲)^۲=۱۶\pi$

۵۳ **گزینه ۳**

$$\hat{A}=\frac{۴}{۳}\hat{B}\ ,\ \hat{C}+\hat{D}=\frac{۱۱}{۳}\hat{B}\ ,\ \hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}=۳۶۰^\circ$$

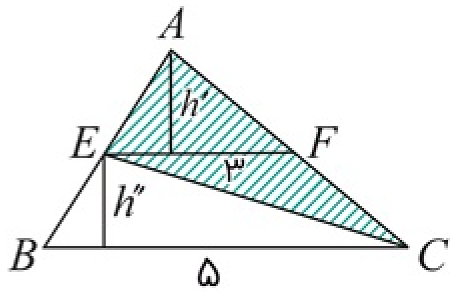
$$\Rightarrow \frac{۴}{۳}\hat{B}+\hat{B}+\frac{۱۱}{۳}\hat{B}=۳۶۰^\circ \Rightarrow ۶\hat{B}=۳۶۰^\circ \Rightarrow \hat{B}=۶۰^\circ \Rightarrow \hat{A}=۸۰^\circ$$

اگر M زاویهٔ بین نیمسازهای دو زاویهٔ A و B باشد، داریم:

$$\hat{M}=۱۸۰-\frac{\hat{A}}{۲}-\frac{\hat{B}}{۲} \Rightarrow \hat{M}=۱۸۰-۳۰-۴۰=۱۱۰$$

$\Rightarrow$ زاویهٔ حاده $=۱۸۰^\circ-۱۱۰^\circ=۷۰^\circ$

۵۴ گزینه ۴



$$\frac{EF}{BC}=\frac{۳}{۵}$$

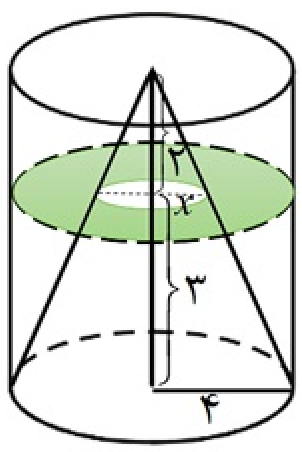
$$\frac{S_{\overset{\triangle}{BEC}}}{S_{BCFE}}=\frac{\frac{۱}{۲}\times ۵\times h''}{\frac{۱}{۲}\times (۳+۵)\times h''}=\frac{۵}{۸}\Rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{EFC}}}{S_{BCFE}}=۱-\frac{۵}{۸}=\frac{۳}{۸}$$

نسبت تشابه : $\frac{S_{\overset{\triangle}{AEF}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}=(\frac{۳}{۵})^۲=\frac{۹}{۲۵}\Rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{AEF}}}{S_{BCFE}}=\frac{S_{\overset{\triangle}{AEF}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}-S_{\overset{\triangle}{AEF}}}$

$$=\frac{S_{\overset{\triangle}{AEF}}}{\frac{۲۵}{۹}S_{\overset{\triangle}{AEF}}-S_{\overset{\triangle}{AEF}}}=\frac{۱}{\frac{۲۵}{۹}-۱}=\frac{۱}{\frac{۱۶}{۹}}=\frac{۹}{۱۶}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{AEC}}}{S_{\overset{\triangle}{BCFE}}}=\frac{S_{\overset{\triangle}{EFC}}}{S_{\overset{\triangle}{BCFE}}}+\frac{S_{\overset{\triangle}{AEF}}}{S_{\overset{\triangle}{BCFE}}}=\frac{۳}{۸}+\frac{۹}{۱۶}=\frac{۱۵}{۱۶}$$

۵۵ گزینه ۴



نسبت تشابه : $\frac{x}{۴}=\frac{۲}{۵}\Rightarrow x=\frac{۸}{۵}$

$$S=\pi(۴)^۲-\pi(\frac{۸}{۵})^۲=۱۶\pi-\frac{۶۴}{۲۵}\pi=\frac{۳۳۶}{۲۵}\pi=۱۳/۴۴\pi$$