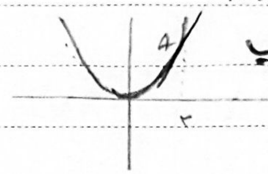
Subject ۱۵✓
Date

مشتق تابع $f(x)=x^2$ را در $x_0=2$ به کمک تعریف مشتق بیابید.

$$f'(2)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}}=2+2=4 \qquad f'(2)=4$$



۴= شیب

معادله خط مماس $A\begin{vmatrix}2\\4\end{vmatrix} \rightarrow y=4x-4$

مشتق تابع $f(x)=x^3+2x$ را در $x_0=1$ به کمک تعریف مشتق بیابید.

$$f'(1)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^3+2x)-3}{x-1}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(1x^2+1x+3)}{(x-1)}$$

1	1	0	2	-3
	1	1	3	0

صفر

$=1+1+3=5$

$f'(1)=5$

$A\begin{vmatrix}1\\3\end{vmatrix}$ $y=5x-2$

مشتق تابع $f(x)=\sqrt{x}+1$ را در $x_0=2$ به کمک تعریف بیابید.

$$f'(4)=\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x}+1)-3}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{\cancel{(\sqrt{x}-2)}}{\cancel{(\sqrt{x}-2)}(\sqrt{x}+2)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x}+2}=\frac{1}{4} \qquad f'(4)=\frac{1}{4}$$

$A\begin{vmatrix}4\\3\end{vmatrix}$ $y=\frac{1}{4}x+2$

Subject ۱۵۸
Date

مشتق تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ را در $x_0=-2$ به کمک تعریف مشتق بیابید.

$$f'(-2)=\lim_{x\to -2}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{2}}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{\frac{2+x}{2x}}{x+2}=$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{1}{2x}=\frac{1}{-4}\qquad f'(-2)=-\frac{1}{4}$$

$A\left|\begin{matrix}-2\\ -\frac{1}{2}\end{matrix}\right.$ $\quad y+\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}(x+2)$ معادله خط مماس

مثال) مشتق تابع $f(x)=x^2+1$ را به کمک تعریف بیابید.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2+1-(x^2+1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x^2}+2xh+h^2+\cancel{1}-\cancel{x^2}-\cancel{1}}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}}=2x+0=2x$$

$$\boxed{(x^n)'=nx^{n-1}}\qquad \boxed{K'=0}$$

مثال) مشتق تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را به کمک تعریف بیابید.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\times\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\boxed{\sqrt{x}\longrightarrow\frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

مثال) مشتق تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ را به کمک تعریف بیابید.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{x(x+h)}=\frac{-1}{x^2}$$

$$\boxed{\frac{1}{x}\longrightarrow\frac{-1}{x^2}}$$

Subject ۱۵۹
Date

مشتق در نقاط مشکل‌دار

قدم اول: در هر نوع بررسی مشتق روی یک نقطه بررسی پیوستگی تابع است.

قدم دوم: بررسی مشتق چپ و راست در نقطه مورد نظر می‌باشد.

مثال) بررسی مشتق تابع $f(x)=x^2|x-1|$ در نقطه‌ی $x_0=1$

بررسی پیوستگی

$$f(x)=\begin{cases} x^2(x-1) & x\geq 1 \\ -x^2(x-1) & x<1 \end{cases}$$

$\lim_{x\to 1^+} 1\times 0 = 0$

$\lim_{x\to 1^-} -1\times 0 = 0$

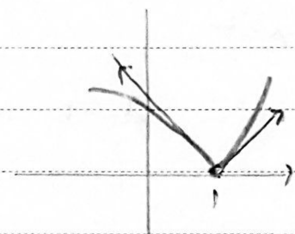
$f(1)=0$ پیوسته است

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2|x-1|-0}{x-1}$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2(x-1)}{x-1}=1^2=1 \Rightarrow f'_+(1)=1$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{-x^2(x-1)}{x-1}=-1=-1 \quad f'_-(1)=-1$$

مشتق‌پذیر نیست



بررسی مشتق تابع $f(x)=\begin{cases} x^3+2 & x>2 \\ x^2+6 & x\leq 2 \end{cases}$ در نقطه‌ی $x_0=2$

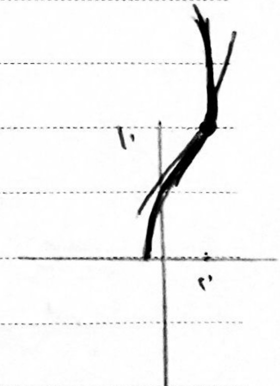
بررسی پیوستگی

$\lim_{x\to 2^+} x^3+2 = 8+2=10$

$\lim_{x\to 2^-} x^2+6 = 4+6=10$

$f(2)=x^2+6=4+6=10$

پیوستگی دارد



$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-10}{x-2}$$

$$f'_-(2)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+6-10}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=2+2=4$$

$$f'_+(2)=\lim_{x\to 2^+}\frac{x^3+2-10}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}=4+4+4=12$$

مثال: برای مشتق تابع $f(x)=(x^2-1)[x]$ در نقطه $x_0=-1$

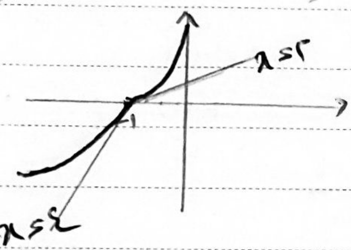
$\lim_{x\to -1^+}(x^2-1)[x] = (1-1)\times -1 = 0$

$\lim_{x\to -1^-}(x^2-1)[x] = (1-1)\times -2 = 0$ پیوسته است

$f(-1) = (1-1)\times -1 = 0$

$f'(-1) = \lim_{x\to(-1)} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \lim_{x\to -1}\frac{(x^2-1)[x]-0}{x+1}$, $(x+1)(x-1)$

$\lim_{x\to -1}\frac{(x-1)[x]}{1}$ → $f'_-(-1) = (-1-1)\times -2 = +4$, $f'_+(-1) = (-1-1)\times -1 = 2$ مشتق پذیر نیست



بنابراین $f'_+(-1) = (-x^2+1)' = -2x = 2$

$f'_-(-1) = (-2x^2+2)' = -4x = 4$

مثال: برای مشتق تابع $f(x)=\begin{cases}x^2+2 & x\le 1\\ 3x^2 & x>1\end{cases}$ در $x_0=1$

برای پیوستگی $\lim_{x\to 1^+} 3x^2 = 3$

$\lim_{x\to 1^-} x^2+2 = 3$

$f(1) = 1+2 = 3$

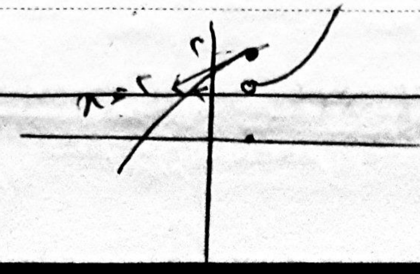
مشتق پذیر نیست ← پیوسته نیست

فقط پیوستگی چپ دارد

حالا نقطه مشتق چپ را بررسی می‌کنیم $f'_-(1) = \lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$= \lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+2-3}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}$

$\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = 1+1 = 2$



بررسی مشتق $f(x)=(x^2-1)[\sqrt{x}]$ در $x_0=4$

$$\lim_{x\to 4^+} (16-1)\times 2 = 30$$

$$\lim_{x\to 4^-} (16-1)\times 1 = 15$$

پیوسته نیست فقط پیوستگی راست دارد

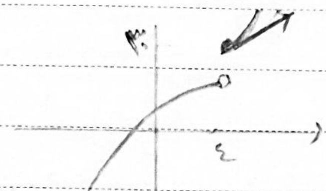
$$f(4) = (16-1)\times 2 = 30$$

فقط مشتق راست را بررسی میکنیم

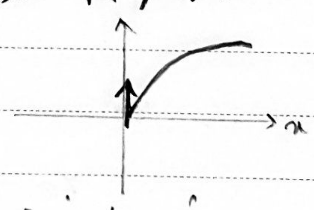
$$f'_+(4) = \lim \frac{f(x)-f(4)}{x-4}$$

$$\lim_{x\to 4^+} \frac{(x^2-1)2-30}{x-4} = \lim_{x\to 4^+} \frac{2x^2-32}{x-4} = \lim_{x\to 4^+} \frac{2(x^2-16)}{x-4} = \lim_{x\to 4^+} \frac{2\cancel{(x-4)}(x+4)}{\cancel{x-4}}$$

$$= \frac{2(4+4)}{1} = 16$$



بررسی مشتق تابع $f(x)=\sqrt{x}$ در $x_0=0$
نقطه ابتدا



$$D_f=[0,+\infty)$$

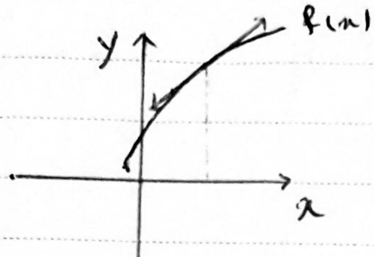
$$\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0$$

مشتق پذیر نیست ولی پیوسته است

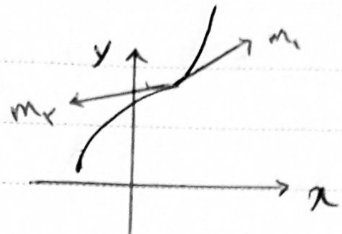
$$f(0)=0$$

چرا مشتق چپ اصلا وجود ندارد
راست ندارد

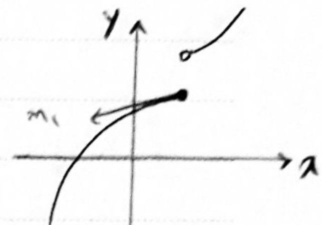
$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}-0}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$



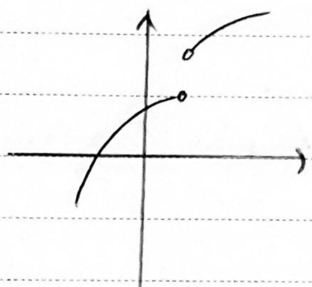
پیوسته، مشتق پذیر
است



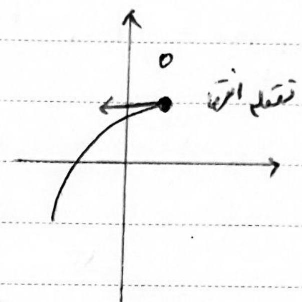
پیوسته، مشتق پذیر
نیست



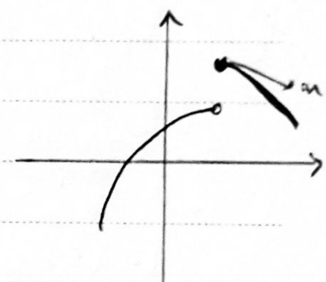
ناپیوسته، مشتق ناپذیر
فقط مشتق چپ دارد



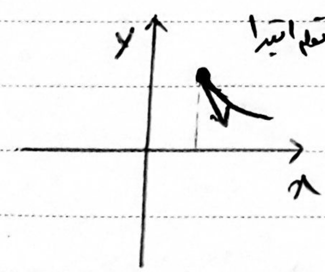
ناپیوسته، مشتق ناپذیر
نه مشتق چپ نه مشتق راست دارد



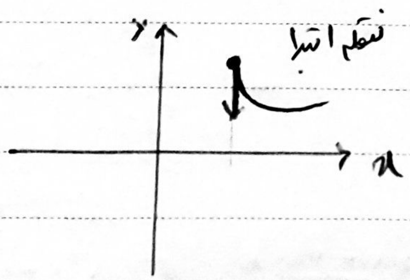
پیوسته، مشتق ناپذیر
مشتق چپ دارد



ناپیوسته، مشتق ناپذیر
فقط مشتق راست دارد



پیوسته، مشتق ناپذیر
فقط مشتق راست دارد



پیوسته، مشتق ناپذیر
نه مشتق راست نه مشتق چپ

مثال) تابع $f(x) = \begin{cases} x^2+2x+a & x<1 \\ x^3+bx & x\geq 1 \end{cases}$ در $x=1$ مشتق‌پذیر است

پیوسته است

عدد مشتق راست = عدد مشتق چپ

مقادیر a و b کدامند؟

$\lim\limits_{x\to1^+} x^3+bx = 1+b$

$\lim\limits_{x\to1^-} x^2+2x+a = 1+2+a = 3+a$

$f(1) = 1+b$

$1+b = 3+a$

$\boxed{b = a+2}$

$f'(1) = \lim\limits_{x\to1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^+} \frac{x^3+bx-(1+b)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^+} \frac{(x^3-1)+b(x-1)}{x-1}$

$= \lim \frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)+b\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = 1+1+1+b = 3+b$

$f'(1) = \lim\limits_{x\to1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^-} \frac{x^2+2x+a-(1+b)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^-} \frac{x^2+2x+\overbrace{a-b}^{-2}-1}{x-1}$

$\lim\limits_{x\to1^-} \frac{x^2+2x-3}{x-1} = \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)} = 1+3 = 4$

$3+b = 4 \Rightarrow \boxed{b=1}$

$b = a+2 \qquad 1 = a+2 \Rightarrow \boxed{a=-1}$

$2x+2 = 3x+b$

$4 = 3+b \Rightarrow b=1$

$a=-1$

Subject ۱۷۴
Date

مثال: تابع $f(x)=\begin{cases} 2x^2+ax+3 & x<-1 \\ x^3+bx^2 & x\geq -1 \end{cases}$ در $x_0=-1$ مشتق‌پذیر است

a,b کدامند؟

پ: $2-a+3=-1+b \Rightarrow 6=a+b$

م پ: $4x+a=3x^2+2bx$

$-4+a=3-2b \Rightarrow \begin{cases} a+2b=7 \\ a+b=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} b=1 \\ a=5 \end{matrix}$

مثال: تابع $f(x)=(x^2+ax+b)[x]$ در $x_0=1$ مشتق‌پذیر است

a,b کدامند؟

پیوستگی:

$\lim_{x\to 1^+}(1+a+b)\times 1 = 1+a+b$

$\lim_{x\to 1^-}(1+a+b)\times 0 = 0$

$f(1)=(1+a+b)\times 1 = 1+a+b$

$1+a+b=0$

$a+b=-1$

$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2+ax+b)[x]-0}{x-1}$

$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x^2+ax-a-1)\times 1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x^2-1)+a(x-1)}{x-1}=x+1+a=2+a$

$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x^2+ax+b)\times 0}{x-1}=0$

$2+a=0 \Rightarrow a=-2$

$-2+b=-1 \quad b=1$

تست برات: $(x-1)^2=0$

$x^2-2x+1=0 \quad a=-2$

$x^2+ax+b \quad b=1$

Subject: ۱۴۵
Year : month : day :

مثال) تابع $f(x)=(2x^2+kx+m)[\sqrt{x}]$ در $x_0=4$ مشتق‌پذیر است. k, m کدامند؟

پیوسته است) $=2(x-4)^2$

$=2(x^2-8x+16)$

$\underbrace{2x^2-16x}_{k}+\underbrace{32}_{m} \Rightarrow k=-16,\ m=32$

مثال) شیب‌های مماس راست و چپ در تابع $f(x)=(x^2-2)[x]$ در نقطه $x_0=2$ به ترتیب کدامند؟

پیوستگی $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^+}(4-2)\times 2=4 \\ \lim\limits_{x\to 2^-}(4-2)\times 1=2 \\ f(2)=4-2\times 2=4 \end{cases}$

پیوسته نیست فقط پیوستگی راست دارد
پس فقط مشتق راست دارد

چون مشتق چپ ندارد
پس هم مماس چپ ندارد

مشتق راست

$f'_+(2)=\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{(x^2-2)\times 2-4}{x-2}=\frac{2x^2-8}{x-2}$

$=\frac{2(x^2-4)}{x-2}=\frac{2(x-2)(x+2)}{(x-2)}=8$

$((x^2-2)2)'=(2x^2-4)'=4x$
$=4\times 2=8$

مثال) مشتق تابع $f(x)=\sqrt[3]{(x-1)^2}$ را در $x_0=1$ بررسی کنید.
نمودار تابع اطراف $x_0=1$ چگونه است؟

$\lim\limits_{\substack{x\to 1^+\\ x\to 1^-}}\sqrt[3]{(x-1)^2}=\sqrt[3]{0}=0$

$f(1)=\sqrt[3]{1-1}=0$

پیوسته است

$f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}-0}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\sqrt[3]{\frac{(x-1)^2}{(x-1)^3}}$

$f'_+(1)=\sqrt[3]{\frac{1}{0^+}}=+\infty$

$f'_-(1)=\sqrt[3]{\frac{1}{0^-}}=-\infty$