جلسه ۴۱

فرمول های مشتق گیری از توابع

$$f(x)=x^n \to \boxed{f'(x)=?\quad nx^{n-1}}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$ یا $$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\cancel{(x-a)}(x^{n-1}+x^{n-2}a+x^{n-3}a^2+\dots+a^{n-1})}{\cancel{(x-a)}}$$

$$=a^{n-1}+a^{n-1}+a^{n-1}+\dots+a^{n-1}=na^{n-1}$$

مثال) $(7x^3)'\to 21x^2$

$$\boxed{y=\sqrt{x}\to y'=?\quad \frac{1}{2\sqrt{x}}}\qquad f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\times\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x}+h-\cancel{x}}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f(x)=\sqrt{ax+b}\Rightarrow f'(x)=?\quad \frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$$

$ax+b>0$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{a(x+h)+b}-\sqrt{ax+b}}{h}\times\frac{\sqrt{a(x+h)+b}+\sqrt{ax+b}}{\sqrt{a(x+h)+b}+\sqrt{ax+b}}$$

$$\cancel{ax}+ah+\cancel{b}-\cancel{ax}-\cancel{b}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{a(x+h)+b-(ax+b)}{h(\sqrt{a(x+h)+b}+\sqrt{ax+b})}=\lim_{h\to 0}\frac{a}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{ax+b}}=\lim_{h\to 0}\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$$

$$f(x)=\sqrt[3]{x}\to \boxed{f'(x)=?\quad \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}\times\frac{\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x(x+h)}+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x(x+h)}+\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x}+\cancel{h}-\cancel{x}}{\cancel{h}(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x(x+h)}+\sqrt[3]{x^2})}=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x^2}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

Subject: ۱۴۷

Year : month : day :

$(k f(x))' = k f'(x)$

مثال) $(3\sqrt{x})' = 3 \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$(k f(x))' = \lim_{h\to 0} \frac{k f(x+h) - k f(x)}{h}$$

$$= k \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = k f'(x)$$

۶) $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$

$$(f+g)'(a) = \lim_{x\to a} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{(f(x)-f(a)) + (g(x)-g(a))}{x-a}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = f'(a) + g'(a)$$

۷) $\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = \frac{-f'(a)}{f^2(a)}$

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = \lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(a)}}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{\frac{f(a)-f(x)}{f(x)\cdot f(a)}}{\frac{x-a}{1}}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{f(a)-f(x)}{f(x)\cdot f(a)(x-a)} = -\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \times \lim_{x\to a} \frac{1}{f(x) f(a)}$$

$$= -f'(a) \times \frac{1}{f(a) f(a)} = -\frac{f'(a)}{f^2(a)}$$

۸) $u^n = n u' u^{n-1}$

مثال) $2x^2+5 \xrightarrow{\text{مشتق}} 4x$

مثال) $(2x^2+5)^9 \xrightarrow{\text{مشتق}} 9(4x)(2x^2+5)^8$

$$(x^3+4x-2)^5 \longrightarrow 5(3x^2+4)(x^3+4x-2)^4$$

PANDA

Subject: ۱۴۸

Year : month : day :

$y = uv \longrightarrow y' = u'v + v'u$

مثال) $y = (2x+1)(x^2+5) = 2x^3 + 10x + x^2 + 5$

$y' = 6x^2 + 10 + 2x$ ok

فرمول $y' = (2)(x^2+5) + (2x)(2x+1)$

مثال) $y = (x^2+1)^4(2x-5)^9$

$y' = [4(2x)(x^2+1)^3](2x-5)^9 + [9(2)(2x-5)^8](x^2+1)^4$

$y = \frac{u}{v} \longrightarrow y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

مثال $y = \frac{3x-5}{4x^2+7} \longrightarrow y' = \frac{(3)(4x^2+7) - (8x)(3x-5)}{(4x^2+7)^2}$

مثال) $y = \frac{(x^2+x)^7}{(x^3-1)^5} \longrightarrow y' = \frac{[7(2x)(x^2+x)^6](x^3-1)^5 - [5(3x^2)(x^3-1)^4](x^2+x)^7}{(x^3-1)^{10}}$

فرم هموگرافیک $y = \frac{ax+b}{cx+d} \longrightarrow y' = \frac{\det}{(cx+d)^2}$

مثال $y = \frac{3x+5}{4x+2} \longrightarrow y' = \frac{-14}{(4x+2)^2}$

$y' = \frac{(3)(4x+2) - (4)(3x+5)}{(4x+2)^2} = \frac{12x+6-12x-20}{(4x+2)^2} = \frac{-14}{(4x+2)^2}$

مثال) $y = \frac{7x+1}{3x-4} \longrightarrow y' = \frac{-31}{(3x-4)^2}$

مثال) $y = \frac{4x-2}{x+5} \longrightarrow y' = \frac{22}{(x+5)^2}$

جلسه ۴۲

مشتق شبه هموگرافیک

مثال) $y=\frac{2x^3+5}{4x^3+7} \rightarrow y'=\frac{-6\times 3x^2}{(4x^3+7)^2}$

$$\boxed{y=\frac{au+b}{cu+d} \rightarrow y'=\frac{\det \times u'}{(cu+d)^2}}$$

مثال) $y=\frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+7} \rightarrow y'=\frac{11\times\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}+7)^2}$

قانون ۲۳-۱۳-۱۲ مخصوص درجه ۲ ۱،۱ / درجه ۲ ۱،۲

مثال) $y=\frac{3x^2+2x-5}{x^2+3x+4}$

$$y'=\frac{(6x+2)(x^2+3x+4)-(2x+3)(3x^2+2x-5)}{(x^2+3x+4)^2}$$

$$y'=\frac{\cancel{6x^3}+18x^2+24x+2x^2+6x+8-\cancel{6x^3}-4x^2+10x-9x^2-6x+15}{(x^2+3x+4)^2}$$

$$y'=\frac{7x^2+34x+23}{(x^2+3x+4)^2}$$

۳ ۲ ۵-
۱ ۳ ۴

$$y'=\frac{(7)x^2+(17)2x+(23)1}{(x^2+3x+4)^2}$$

مثال) $y=\frac{x^2+4x-1}{2x^2+5x+3} \rightarrow y'=\frac{(-3)x^2+(5)2x+(17)1}{(2x^2+5x+3)^2}$

مشتق تابع مرکب:

$y=f(g(x))$ $\qquad$ $y=g(f(x))$

$y'=g'(x)\times f'(g(x))$ $\qquad$ $y'=f'(x)\times g'(f(x))$

مثال) اگر $f(2x-3)=x^4-2x^3+5x+3$ مقدار $f'(-1)$ کدام است؟

با مشتق $2f'(\underbrace{2x-3}_{-1})=4x^3-6x^2+5$

$2x-3=-1$

$x=1$

$2f'(-1)\overset{x=1}{=}4-6+5$

$f'(-1)=\frac{3}{2}$

اگر $f(x)=x^3-x+1$ ، $g(x)=2-x^2$ مقدار $(g\circ f)'(1)$ کدام است؟

$f'(x)=3x^2-1$ $\quad g'(x)=-2x$ $\quad x=1$

$y=g(f(x))$

$y'=f'(x)\times g'(f(x))$

$=f'(1)\times g'(f(1))$

$=2\times -2=-4$

اگر $f(x)+f(3x)+f(5x)=3x^2+3x+1$ مقدار $f'(0)$ کدام است؟

$f'(x)+3f'(3x)+5f'(5x)=6x+3$

$f'(0)+3f'(0)+5f'(0)=3$

$9f'(0)=3 \qquad f'(0)=\frac{1}{3}$

اگر $f(x)=\frac{x+k}{x+2}$ ، مشتق تابع $y=f\circ f$ در نقطه به طول صفر برابر ۴ باشد، مقادیر k کدام است؟

$f'(x)=\frac{2-k}{(x+2)^2}$

$y=f(f(x))$

$y'=f'(x)\times f'(f(x))$

$4=f'(0)\times f'(f(0))$

$4=\frac{2-k}{4}\times f'(\frac{k}{2})$

$4=\frac{2-k}{4}\times\frac{2-k}{(\frac{k}{2}+2)^2}$

$16=\frac{(2-k)^2}{(\frac{k}{2}+2)^2} \qquad \frac{(2-k)}{\frac{k}{2}+2}=\pm 4$

$\frac{2-k}{\frac{k}{2}+2}=4$

$2-k=2k+8$

$-3k=6 \qquad k=-2$

$\frac{2-k}{\frac{k}{2}+2}=-4$

$2-k=-2k-8$

$k=-10$

اگر $g(x)=f(x+f(x))$ ، $f(0)=0$ ، $f'(0)=3$ مقدار $g'(0)$ کدام است؟

$g'(x)=(1+f'(x))\,f'(x+f(x))$

$g'(0)=(1+f'(0))\,f'(0+f(0))$

$=(1+3)\,f'(0+0)=$

$=4\times 3=12$

مثال) اگر $f'(x)=2^{-x}$ ، $g(x)=f(-4x)$ حاصل $g'(x)$ کدام است.

$g'(x) = -4 f'(-4x)$

$= -4 \times 2^{-(-4x)}$

$= -4 \times 2^{4x}$

$= -2^2 \times 2^{4x} = -2^{2+4x}$

مثال) اگر $f(x)=2x^2+3x$

الف) حاصل $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ کدام است؟ $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$f'(1) = 4x+3 = 4+3 = 7$

ب) حاصل $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+3h)-f(1-2h)}{h}$ کدام است.

$\frac{0}{0}$ $\underset{h\to 0}{\text{Hop}}$ $\frac{3f'(1+3h)-(-2)f'(1-2h)}{1} = 3f'(1)+2f'(1)$

$=5f'(1) = 5\times(4x+3) = 5\times(4+3) = 35$

اگر مطمئن هستیم f مشتق‌پذیر است (نقاط مشکل‌دار ندارد)

$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+mh)-f(x+nh)}{h} = (m-n)f'(x)$

$= 5f'(x) = 5\times(4x+3)$

$5\times 7 = 35$

مثال) اگر $f(x)=x^3+2x$ حاصل $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+4h)-f(1+h)}{2h}$ کدام است؟

$= \frac{3f'(1)}{2} = \frac{3}{2}(3x^2+2) = \frac{15}{2}$

Hop $\frac{4f'(1+4h)-1f'(1+h)}{2} = \frac{4f'(1)-f'(1)}{2} = \frac{3f'(1)}{2}$

$\frac{3}{2}(3x^2+2) = \frac{15}{2}$

جلسه ۴۲ ریاضی

آهنگ تغییرات:

* بررسی تغییرات کمیتی نسبت به تغییرات کمیت دیگر!
* به خصوص بررسی تغییرات نسبت به زمان
* آهنگ لحظه‌ای (آنی) ← مشتق
* آهنگ متوسط $\frac{\Delta A}{\Delta t}$ ، $\frac{\Delta V}{\Delta t}$ ، $\frac{\Delta L}{\Delta t}$ .. $\frac{\Delta ..}{\Delta ..}$

مثال) مکان متحرکی از رابطهٔ $d(t)=t^3-4t^2+2$ پیدا می‌شود

الف) آهنگ متوسط تغییرات مکان در $1\le t\le 3$

$$\frac{\Delta d}{\Delta t}=\frac{d(3)-d(1)}{3-1}=\frac{(27-36+2)-(1-4+2)}{2}=\frac{-7+1}{2}=-3$$

ب) آهنگ لحظه‌ای مکان در $t=2$

$$d'(t)=3t^2-8t \xrightarrow{t=2} 12-16=-4$$

مثال) بشکه‌ای پر از آب در نظر بگیرید که در ته آن سوراخی تعبیه شده است. حجم آب باقی‌مانده در بشکه از رابطهٔ $V(t)=40(1-\frac{t}{50})^2$ پیدا می‌شود (بر حسب لیتر)

الف) حجم اولیه بشکه و مدت زمان تخلیه؟

$t=0 \to V(0)=40(1-0)^2=40$ lit

$V=0 \to 1-\frac{t}{50}=0 \to 1=\frac{t}{50} \to t=50\ s$

ب) آهنگ متوسط تخلیه بشکه؟ $\frac{\Delta V}{\Delta t}=\frac{V(50)-V(0)}{50}=\frac{0-40}{50}=-\frac{4}{5}\ \frac{lit}{s}$

ج) آهنگ لحظه‌ای تخلیه در $t=20\ s$

$$V(t)=40(1-\frac{t}{50})^2$$

$$V'(t)=40\times 2\left(-\frac{1}{50}\right)\left(1-\frac{t}{50}\right) \xrightarrow{t=20} 40\times 2\left(-\frac{1}{50}\right)\left(\frac{3}{5}\right)=-\frac{36}{25}\ \frac{lit}{s}$$

د) در چه لحظه‌ای آهنگ لحظه‌ای برابر آهنگ متوسط تخلیه است.

$$-\frac{4}{5}=V'(t) \quad t=?$$

$$-\frac{\cancel{4}}{\cancel{5}}=\cancel{40}\times 2\times -\frac{1}{\cancel{50}}\times\left(1-\frac{t}{50}\right)$$

$$1=2-\frac{t}{25} \to \frac{t}{25}=1 \to t=25\ s$$

مثال) جرم یک توده باکتری پس از t ساعت بر حسب گرم $m(t)=\sqrt{t}+2t^3$ پیدا می‌شود. اختلاف آهنگ تغییرات جرم در $1\le t\le 4$ با آهنگ تغییرات در $t=4$ چقدر است؟

$$\frac{m(4)-m(1)}{4-1}=\frac{(2+128)-(1+2)}{3}=\frac{127}{3}$$

$$m'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}}+6t^2 \xrightarrow{t=4} \frac{1}{4}+96=\frac{1+384}{4}=\frac{385}{4}$$

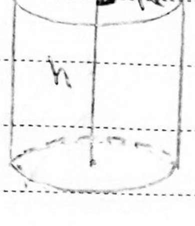
اختلاف $=\left|\frac{385}{4}-\frac{127}{3}\right|$

مثال) اگر مقدار بار الکتریکی در یک هادی از رابطه $Q = \frac{2}{3}t^3 + t + 4\sqrt{t}$
برحسب کولن پیدا شود، شدت جریان در $t=4$ کدام است؟

$I_{(t)} = Q' = 2t^2 + 1 + 4\frac{1}{2\sqrt{t}}$ آهنگ تغییرات بار

$I_{(4)} = 32 + 1 + 1 = 34 \ A$

مثال) در استوانه‌ای به شکل روبرو در اثر حرارت ارتفاع و شعاع آن طبق رابطه



$R = 2t + 1$

$h = 3t + 1$ تغییر می‌کند

آهنگ تغییرات حجم استوانه در $t=1$ کدام است؟

$V_{(t)} = \pi R^2 h = \pi(2t+1)^2(3t+1)$

$V'_{(t)} = \pi\left[(2\times2(2t+1))(3t+1) + (3)(2t+1)^2\right]$

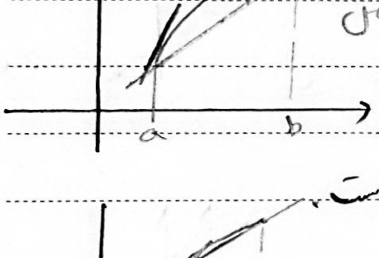
$V'_{(1)} = \pi\left[48 + 27\right] = 75\pi$

مثال) درستی یا نادرستی جملات زیر را بررسی کنید.

الف) آهنگ تغییرات متوسط تابعی در بازه خاص از آهنگ لحظه‌ای آن تابع در نقطه کمتر است. ← شیب خط واصل

شیب مماس

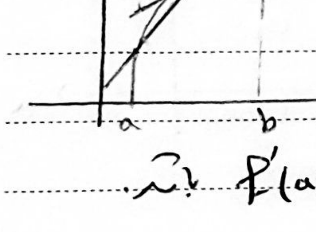
نادرست است.



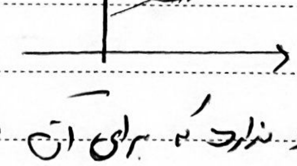
ب) اگر تابع صعودی باشد، آهنگ تغییر متوسط، صعودی است. (زیاد می‌شود)

نادرست

مثال نقض

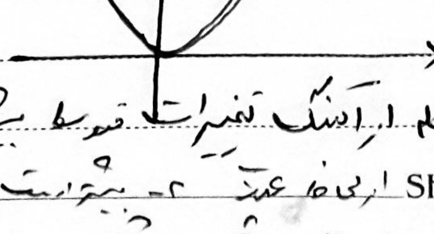


آهنگ تغییر متوسط نزولی است.



آهنگ تغییر متوسط صعودی است

ج) تابعی وجود ندارد که برای آن هم $f(a)=0$ و هم $f'(a)=0$ باشد.



$f(0)=0$ نادرست است

$f'(0)=0$ مثال نقض

د) در توابع نزولی همیشه شیب نمودار در هر نقطه از آهنگ تغییرات متوسط بیشتر است. نادرست است

از لحاظ عددی -2 بیشتر است

از لحاظ مقدار -6 بیشتر می‌باشد.