۱) استخراج مطلق تابع $f(x)=x^2-4x+1$ را بیابید $x\in[-1,3]$

$f'(x)=2x-4$

$f'=0 \Rightarrow 2x-4=0$

$x=2 \rightarrow y=4-8+1=-3$ مطلق min

بجای $x=-1 \rightarrow y=1+4+1=6$ مطلق max

$x=3 \rightarrow y=9-12+1=-2$

x	-1	2	3
f'	$+$	0	$+$
f	6 ↗	-3 ↘	-2 ↗

ابتدا

انتها

۲) استخراج مطلق تابع $f(x)=x^3-3x^2+1$ $x\in[-1,3]$ را بیابید.

$f'=3x^2-6x=0 \rightarrow 3x(x-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$

بجای $x=0 \rightarrow y=1$

$x=2 \rightarrow y=-3$ مطلق min

ابتدا $x=-1 \rightarrow y=-3$ مطلق max

انتها $x=3 \rightarrow y=1$

۳) استخراج مطلق تابع $f(x)=x^4-4x^2+1$ $x\in[-2,3]$ را بیابید.

$f'=4x^3-8x=0 \rightarrow 4x(x^2-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\pm\sqrt{2} \end{cases}$

بجای $x=0 \rightarrow y=1$

$x=\sqrt{2} \rightarrow y=4-8+1=-3$ مطلق min

$x=-\sqrt{2} \rightarrow y=-3$

ابتدا $x=-2 \rightarrow y=16-16+1=1$

انتها نزدیک $\lim_{x\to+\infty} x^4-4x^2+1=+\infty$ مطلق max ندارد

۴) استخراج مطلق تابع $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ کدام است؟

$D_f=[-2,2]$ $\Rightarrow 4-x^2\geq 0 \Rightarrow (2-x)(2+x)\geq 0$ داخل $\sqrt{}$ نزدیک

$f'(x)=\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}$ $f'(x)=0 \Rightarrow x=0$ $f'=\infty \Rightarrow 4-x^2=0 \Rightarrow x=\pm 2$

بجای $x=0 \rightarrow y=2$ مطلق max

ابتدا $x=2 \rightarrow y=0$ مطلق min

انتها $x=-2 \rightarrow y=0$

$R_f=[0,2]$ برد

Year. Month. Date. Subject :

۱۸۲

۶) اکسترمم مطلق $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$ وجود دارد؟

$D_f = [-1, 1]$ $\quad 1-x^2 \geq 0 \quad x^2 \leq 1 \quad -1 \leq x \leq 1$

$f' = 1\left(\sqrt{1-x^2}\right) + x\left(\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{1-x^2-x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

$f' = 0 \rightarrow 1-2x^2 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ یا $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$ ماکزیمم مطلق

$x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow y = \frac{-1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}$ مینیمم مطلق

$f' = \infty \rightarrow 1-x^2 = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow y = 0$

$x = -1 \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0$

$R_f = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

۷) اکسترمم مطلق $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ وجود دارد؟

$D_f = (-1, 1)$ $\quad 1-x^2 > 0 \quad x^2 < 1 \quad -1 < x < 1$

$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

$\lim_{x \to (-1)^+} \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{+} = +\infty$ } ندارد ماکزیمم

$f(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$

$f'(x) = -\frac{1}{2}(-2x)(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} = \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$

$f' = 0 \Rightarrow x = 0 \rightarrow y = 1$ مینیمم مطلق

$f' = \infty \rightarrow 1-x^2 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$ غ

$R_f = [1, +\infty)$

۸) اکسترمم مطلق $f(x) = |x-2|\sqrt[3]{x^2}$ وجود دارد؟

$D_f = R$

$f(x) = \pm(x-2)\sqrt[3]{x^2}$ $\quad f' = \pm\left(1\sqrt[3]{x^2} + \frac{2x}{3\sqrt[3]{x}}(x-2)\right)$

$f' = \pm\left(\frac{3x + 2x(x-2)}{3\sqrt[3]{x}}\right)$

$f' = \pm\left(\frac{5x-4}{3\sqrt[3]{x}}\right)$

$f' = 0 \rightarrow 5x-4 = 0 \longrightarrow x = 4/5$

$f' = \infty \rightarrow x = 0$

مجانبها $= \left\{2, 4/5, 0\right\}$

$x = 2 \rightarrow f = 0$ } مینیمم مطلق

$x = 0 \rightarrow f = 0$ }

$x = 4/5 \rightarrow y = 1/5\sqrt[3]{\frac{16}{5}} = \frac{4}{5}\sqrt[3]{\frac{2}{5}}$

$\lim_{x \to +\infty} x\sqrt[3]{x^2} = x^{5/3} = (+\infty)^{5/3} = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} -x\sqrt[3]{x^2} = (-\infty)^{5/3} = +\infty$ ندارد ماکزیمم

SHIRKARI

۸) اکسترمم نسبی مطلق تابع $f(x)=\sqrt[3]{x^2-x^3}$ کدام است؟

$D_f = R$

$\lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{x^{3}} = x = +\infty$ مطلق max ندارد

$\lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{x^{3}} = x = -\infty$ مطلق min ندارد

۹) اکسترمم نسبی مطلق تابع $f(x)=\frac{2x^2+1}{x^2+2}$ کدام است؟

$D_f = R$ $\quad x^2+2\neq 0$ $\quad x^2\neq -2$

$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$ مطلق max

$f' = \frac{4x}{(x^2+2)^2}$ $\quad f'=0 \Rightarrow x=0$ مطلق min $\quad f'=\text{ه.ت.ن} \Rightarrow x^2+2\neq 0$

$R_f = [\frac{1}{2}, 2)$

ریاضی جلد ۴۷

بیشترین مساحت ـ کمترین محیط ـ حداکثر حجم، حداقل زمان و ...

۱) تابع خواسته شده را بنویسید

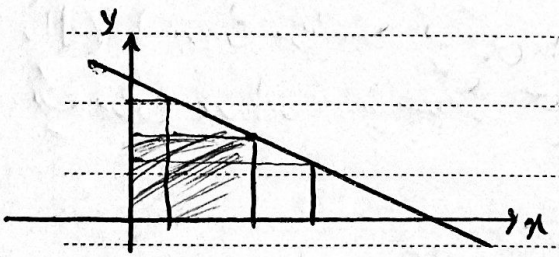
۲) یک متغیر کنید.

۳) مشتق = ۰ بزنید و جواب‌ها را

۴) شکل مسئله را رسم کنید، مستطیل بین محورها،

خط $2x+y=10$ محاط است $y=10-2x$

حداکثر مساحت کدام است؟



عرض × طول = S

$S = x \times y$

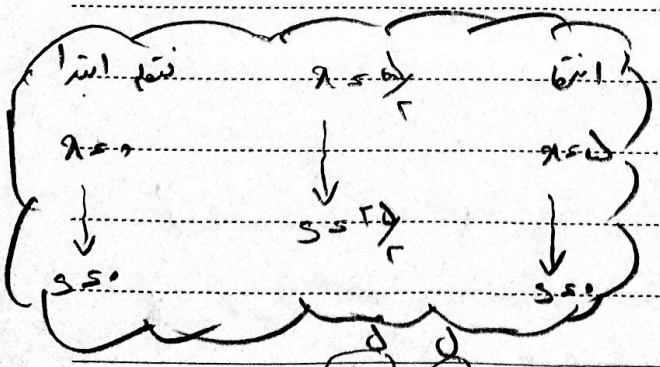
$S = x(10-2x)$

$S = 10x - 2x^2$

$S' = 0 \quad 10-4x=0 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$

$2x+y=10 \xrightarrow{x=\frac{5}{2}} 5+y=10 \Rightarrow y=5$

$S_{max} = \frac{5}{2}\times 5 = \frac{25}{2}$

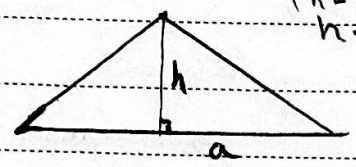


$2x+y=10$

$x \times y = \frac{5}{2}\times 5 = \frac{25}{2}$

SHEKARI

مثال) بین ارتفاع h و قاعده a در مثلثی با محیط ۱۲ برقرار است $3a+2h=12$. حداکثر مساحت مثلث کدام است؟



$2h = 12 - 3a$

$h = 6 - \frac{3}{2}a$

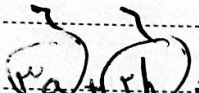
$S_{\Delta} = \frac{1}{2}a \times h = \frac{1}{2}a\left(6 - \frac{3}{2}a\right)$

$= 3a - \frac{3}{4}a^2$

$S' = 0 \Rightarrow 3 = \frac{3}{2}a \Rightarrow a = 2$

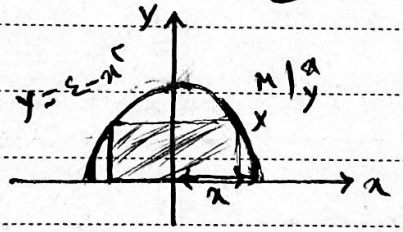
$h = 6 - \frac{3}{2}a \xrightarrow{a=2} h = 3$

$S_{max} = \frac{1}{2}a \times h = \frac{1}{2} \times 2 \times 3 = 3$



$S = \frac{1}{2}a \times h = \frac{1}{2} \times 2 \times 3 = 3$

مثال) حداکثر مساحت مستطیل محصور بین محور xها و تابع $f(x) = 4 - x^2$ کدام است؟



عرض × طول = S

$S = 2x \times y$

$S = 2x(4 - x^2)$

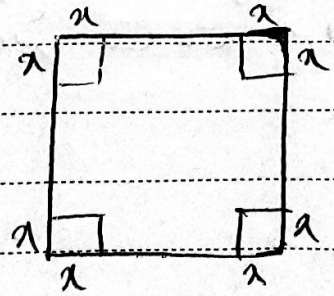
$S = 8x - 2x^3$

$S' = 0 \Rightarrow 8 - 6x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{3}$

$x = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$

$S_{max} = 2\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(4 - \frac{4}{3}\right) = \frac{4}{\sqrt{3}} \times \frac{8}{3} = \frac{32}{3\sqrt{3}}$

مثال) با بریدن مربعات کوچکی به ضلع x از گوشه‌های یک صفحه مقوایی 40×40 سانتی‌متری یک ظرف در باز با حداکثر حجم می‌سازیم. مقدار x کدام است؟



ارتفاع × عرض × طول = V

$V = (40 - 2x)(40 - 2x)x$

$V = (40 - 2x)^2 x$

$x' = 0$

$(1)(40 - 2x)^2 + (x)(2)(-2)(40 - 2x)^1 = 0$

$(40 - 2x)(40 - 6x) = 0$

$x = 20$ (SHEKARI $40 - 2x = 0$)

$x = 10$

۱۸۵

Year. Month. Date. Subject :

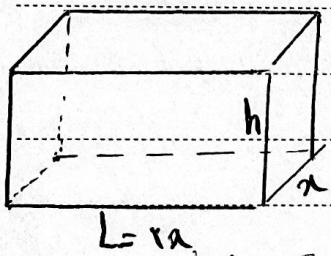
مثال) غلظت یک داروی شیمیایی در خون از رابطه $c(t)=\frac{2t}{t^3+27}$ بدست می‌آید که t زمان (بر حسب ساعت) پس از چند ساعت غلظت دارو بیشترین مقدار خود است؟

$$c'(t)=\frac{(t^3+27)(2)-(2t)(3t^2)}{(t^3+27)^2}=0$$

$$2t^3+54-6t^3=0 \Rightarrow -4t^3+54=0$$

$$t^3=\frac{54}{4} \Rightarrow t=\sqrt[3]{\frac{27}{2}}$$

مثال) درون جعبه‌ای مکعب مستطیل شکل به حجم $10\,m^3$ و طول کف آن دو برابر عرض کف است. برای ساخت چنین مخزنی قیمت مصالح در کف ۱۰۰ و در دیواره‌ها ۴۰ هزار تومان بر هر متر مربع است. عرض کف چقدر باشد تا هزینه مصالح کمترین مقدار ممکن برسد؟



$$V=x\cdot 2x\cdot h=10 \Rightarrow 2x^2h=10$$

$$h=\frac{5}{x^2}$$

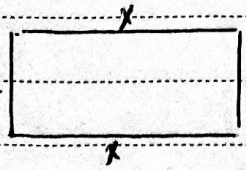
هزینه دیواره‌ها + هزینه کف = هزینه کل

$$(2x\times x)\times 100+2(x\times h)\times 40+2(2x\times h)\times 40$$

$$200x^2+\frac{1800}{x}=C$$

$$C'=0 \Rightarrow 400x-\frac{1800}{x^2}=0 \Rightarrow x^3=\frac{9}{2} \Rightarrow x=\sqrt[3]{\frac{9}{2}}$$

مثال) شاورزی می‌خواهد در مزرعه‌ی مستطیل شکل خود حصاری به مساحت $12000\,m^2$ بکشد. هزینه حصار در دیوارهای شمال و جنوب هر متر ۲ میلیون و در دیوارهای غرب و شرق هر متر ۸ میلیون است. ابعاد مزرعه چه باشد تا هزینه حصار کشی به کمترین مقدار برسد؟



$$xy=12000 \Rightarrow y=\frac{12000}{x}$$

هزینه حصار = هزینه غرب و شرق + هزینه شمال و جنوب

$$C=2y\times 2+2x\times 8=4\left(\frac{12000}{x}\right)+16x$$

$$C'=0 \Rightarrow -\frac{48000}{x^2}+16=0 \Rightarrow x^2=3000 \Rightarrow x=100$$

$$y=\frac{12000}{100}=120$$

$$C=\frac{48000}{100}+16\times 100$$

SHEKARI

۱۸۲

Year. Month. Date.

Subject :

مثال) دو عدد بیابید که تفاضل آن‌ها ۱۰ و حاصل ضربشان حداقل شود؟

$a-b=10$

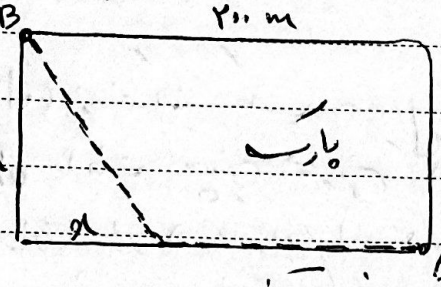
$a>b$

$P=ab=a(a-10)=a^2-10a$

$P'=0 \rightarrow 2a-10=0 \rightarrow a=5$

$b=-5 \quad ab=-25$ و Min

مثال) آرش می‌خواهد از نقطه A به B برسد سرعت وی در بیابان $3\frac{m}{s}$ و سرعت در پارک $5\frac{m}{s}$ است. مقدار x را طوری بیابید تا در کمترین زمان به B برسد.



مسیر حرکت آرش

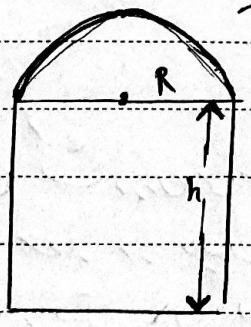
$T=T_1+T_2=\frac{200-x}{3}+\frac{\sqrt{x^2+70^2}}{5}$

$T'=0 \Rightarrow \frac{1}{3}+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+70^2}}=0 \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+70^2}}=\frac{1}{5}$

$\frac{x^2}{x^2+70^2}=\frac{1}{9} \Rightarrow 9x^2=4x^2+4\times 70^2 \Rightarrow 5x^2=4\times 70^2$

$\sqrt{5}x=2\times 70 \Rightarrow x=\frac{2\times 70}{\sqrt{5}}$

مثال) در یک بنای تاریخی پنجره‌ای به شکل روبرو وجود دارد. اگر نیم دایره‌ای به شعاع R متر است و محیط پنجره ۹ متر است، ابعاد آن را طوری بیابید که حداکثر نور وارد شده را داشته باشد.



حداکثر مساحت

محیط $= \pi R + 2h + 2R$

$9 = \pi R + 2h + 2R \rightarrow 9 = 2h + (\pi+2)R$

$\frac{9}{2} - (\pi+2)R = 2h \rightarrow h = \frac{9}{4} - (\frac{\pi}{2}+1)R$

مساحت نیم دایره $+$ مساحت مستطیل $= S \rightarrow S = \frac{1}{2}\pi R^2 + 2R \times h$

$S = \frac{\pi}{2}R^2 + 2R(\frac{9}{4} - (\frac{\pi}{2}+1)R) =$

$= \frac{\pi}{2}R^2 + \frac{9}{2}R - (\pi+2)R^2$ SHEKARI $= (-\frac{\pi}{2}-2)R^2 + \frac{9}{2}R$

$S'=0 \rightarrow (-\pi-4)R + \frac{9}{2} = 0 \Rightarrow \frac{9}{2} = (\pi+4)R \rightarrow R = \frac{9}{2(\pi+4)} \rightarrow h = \dots$

مثال) هزینه سوخت قطار با سرعت v برابر v^2 و ۳۲ است (در هر ساعت) و سایر هزینه‌ها بدون هر ساعت (بدون در نظر گرفتن سرعت) برابر ۸۰۰۰۰ تومان است. قطار با چه سرعتی حرکت کند تا هزینه آن در هر کیلومتر، حداقل شود؟

هزینه سایر + هزینه سوخت = هزینه

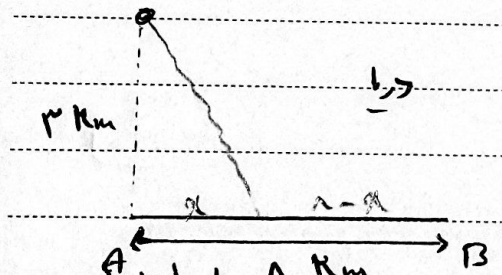
$$c = 32v^2 \times t + 80000 \times t$$

$$c = 32v^2 \times \left(\frac{1}{v}\right) + 80000 \left(\frac{1}{v}\right)$$

$$c = 32v^2 \times \frac{1}{v} + \frac{800000}{v} = 32v + \frac{800000}{v}$$

$$c' = 32 + \frac{-800000}{v^2} = 0 \qquad 32 = \frac{800000}{v^2} \Rightarrow v^2 = \frac{100000}{4} \qquad v = 50 \ \text{km/h}$$

مثال) آرمان در داخل قایق (P) قرار دارد و می‌خواهد خود را به B در ساحل برساند. سرعت وی با قایق ۴ km/h و با پای پیاده در ساحل برابر ۵ km/h است. برای آن که در کوتاه‌ترین زمان ممکن به B برسد در چه نقطه‌ای از ساحل باید پیاده شود؟ (۲۰۰۸)



در آب: t_1 — در ساحل: t_2 — $t = t_1 + t_2$

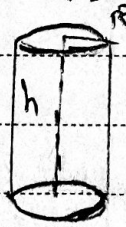
$$t = \frac{\sqrt{3^2 + x^2}}{4} + \frac{8-x}{5}$$

$$t' = \frac{1}{4} \times \frac{x}{\sqrt{9+x^2}} + \frac{-1}{5} = 0$$

$$\frac{x}{4\sqrt{9+x^2}} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{x^2}{9+x^2} = \frac{16}{25} \Rightarrow 25x^2 = 16(9+x^2)$$

$$9x^2 = 144 \Rightarrow x = \sqrt{16} = 4$$

مثال) می‌خواهیم یک قوطی استوانه‌ای در بار با حجم ۱۱ لیتر را با کمترین فلز ساخته شده بسازیم. ابعاد قوطی کدام است؟ (نسبت قطر به ارتفاع استوانه کدام است؟)



حجم استوانه = مساحت قاعده × ارتفاع $\quad \pi R^2 \times h = \pi \quad R^2 h = 1 \Rightarrow h = \frac{1}{R^2}$

مساحت کل = مساحت جانبی + مساحت قاعده $= \pi R^2 + 2\pi R \cdot h$

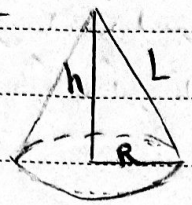
$$S = \pi R^2 + 2\pi R \times \frac{1}{R^2} \qquad S' = 0$$

$$2\pi R - \frac{2\pi}{R^2} = 0 \qquad 2\pi R = \frac{2\pi}{R^2} \Rightarrow R^3 = 1 \Rightarrow R = 1 \xrightarrow{h = \frac{1}{R^2}} h = \frac{1}{1} = 1$$

$$\frac{2R}{h} = \frac{2}{1} = 2$$

Year. Month. Date. Subject :

مثال) فرض کنید حجم مخروطی برابر π است (تنها) بر ساخت آن با کمترین مصالح ممکن مقدار شعاع قاعده را بیابید.



$\frac{1}{3}\pi R^2 h = \pi \quad \frac{1}{3}R^2 h = 1 \Rightarrow h = \frac{3}{R^2}$

$S =$ مساحت جانبی مخروط $= \pi R L$

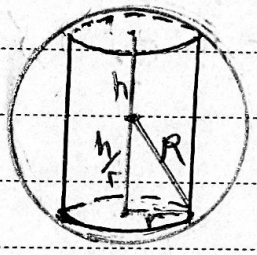
$L = \sqrt{R^2 + h^2} = \sqrt{R^2 + \frac{9}{R^4}}$

$S = \pi R \sqrt{R^2 + \frac{9}{R^4}} = \pi \sqrt{R^4 + \frac{9}{R^2}}$

$S' = 0 \rightarrow \pi \times \frac{4R^3 + \frac{-2}{R^3} \times 9}{2\sqrt{\quad}} = 0 \quad 4R^3 - \frac{18}{R^3} = 0$

$4R^5 = 18 \Rightarrow R^4 = \frac{9}{2} \Rightarrow R = \sqrt[4]{\frac{9}{2}}$

مثال) درون کره‌ای به شعاع R استوانه‌ای محاط کرده‌ایم. اگر حجم استوانه حداکثر باشد، ابعاد استوانه کدام است؟ (بر حسب R)

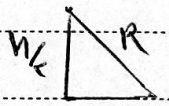


$V = \pi r^2 h$

$V = \pi\left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right)h \Rightarrow V = \pi\left(R^2 h - \frac{h^3}{4}\right)$

$V' = 0 \quad V' = \pi\left(R^2 - \frac{3h^2}{4}\right) = 0$

$R^2 - \frac{3}{4}h^2 = 0 \Rightarrow h^2 = \frac{4R^2}{3} \Rightarrow h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$

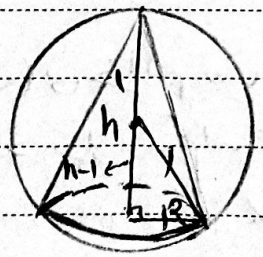


$\frac{h^2}{4} + r^2 = R^2$

$r^2 = R^2 - \frac{h^2}{4}$

$r^2 = R^2 - \frac{4R^2}{12} = \frac{2R^2}{3} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{2}{3}}R$

مثال) درون کره‌ای به شعاع ۱، مخروطی با حداکثر حجم محاط کرده‌ایم، ارتفاع مخروط کدام است؟



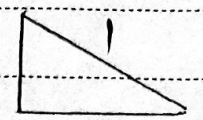
$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$

$V = \frac{\pi}{3}(2h - h^2)h$

$V' = \frac{\pi}{3}(2h^2 - h^3) = 0$

$4h - 3h^2 = 0$

$h(4 - 3h) = 0 \Rightarrow h = 0 \quad h = \frac{4}{3}$ ✓



$(h-1)^2 + R^2 = 1$

$h^2 - 2h + 1 + R^2 = 1$

$R^2 = 2h - h^2$

مثال) هزینه‌ی تولید x کالا از رابطه‌ی $C(x) = 200 + 100x + 10x^2$ بدست می‌آید. اگر قیمت فروش هر واحد کالا، صورت $300 - x$ باشد، چه تعداد کالا تولید شود تا سود حداکثر پیدا شود؟

$$\text{کل درآمد} = \text{تعداد کالا} \times \text{قیمت} = x(300 - x)$$

$$\text{سود} = \text{درآمد} - \text{هزینه} = 300x - x^2 - 200 - 100x - 10x^2$$

$$P = -11x^2 + 200x - 200$$

$$P' = -22x + 200 = 0 \Rightarrow x = \frac{200}{22} = \frac{100}{11} = 9$$

جلسه ۴۹

مشتق مرتبه بالاتر:

تابع f:

$f'(x)$ مرتبه اول

$f''(x)$ " دوم

$f'''(x)$ " سوم

$\vdots$

$f^{(10)}(x)$ " دهم

$f^{(n)}(x)$ " نام

مرتبه اول: $f'(x)$ ① $f(x)$ پیوسته باشد و شرط چپ و راست یکسان باشد

② $f'(x)$ " " " " " + شرط ①

③ $f''(x)$ " " " " " + شرط ② و ①

اول: پیوستگی برقرار باشد

دوم: $f'(a) = f'(a)$ (+ و −)

سوم: $f''(a) = f''(a)$ (+ و −)

مثال) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x + 5$

$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 4$

$f''(x) = 12x - 24$

$f'''(x) = 24$

$f^{(4)}(x) = 0$

$f(x) = \sqrt[5]{x^2 + 3}$

$f(x) = (x^2 + 3)^{\frac{1}{5}}$

$f'(x) = \frac{1}{5}(x^2 + 3)^{-\frac{4}{5}}(2x)$

$f''(x) = \frac{2}{5}(x^2 + 3)^{-\frac{9}{5}}(2x)$

Year. Month. Date. Subject :

مثال) مشتق مرتبه سوم تابع $f(x)=\sqrt[3]{2x+5}$ در $x_0=-1$ برابر کدام است؟

$f(x)=(2x+5)^{\frac{1}{3}}$

$f'(x)=\frac{1}{3}\times 2\times(2x+5)^{-\frac{2}{3}}$

$f''(x)=-\frac{2}{9}\times 2\times(2x+5)^{-\frac{5}{3}}$

$f'''(x)=+\frac{10}{27}\times 2\times(2x+5)^{-\frac{8}{3}}$

$f'''(-1)=+\frac{10}{27}(-1)^{-\frac{8}{3}}=\frac{10}{27}\times 1=\frac{10}{27}$

مثال) تابع $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+c & x\geq 1 \\ x^3 & x<1 \end{cases}$ در $x_0=1$ مشتق دوم دارد. کدام است؟ a ، b ، c

شرط پیوستگی: $\begin{cases} L^+=a+b+c \\ L^-=1 \\ f(1)=a+b+c \end{cases} \Rightarrow a+b+c=1$

شرط مشتق: $f'(x)=\begin{cases} 2ax+b & x\geq 1 \to f'(1)=2a+b \\ 3x^2 & x<1 \to f'(1)=3 \end{cases} \Rightarrow 2a+b=3$

مشتق دوم: $f''(x)=\begin{cases} 2a & x\geq 1 \to f''(1)=2a \\ 6x & x<1 \to f''(1)=6 \end{cases} \Rightarrow 2a=6 \Rightarrow a=3$

$b=-3$ ، $c=1$

مثال) اگر f مشتق‌پذیر مرتبه دوم و $g(x)=f(1-4x^2)$ ، $f'(1)=1$ مقدار $g''(0)$ کدام است؟

$g'(x)=-8x\,f'(1-4x^2)$ (صفر شدن)

$g'(0)=0\times f'(1)$

$g'(0)=0\times 1=0$

$g''(x)=-8\times f'(1-4x^2)$

$g''(0)=-8\times f'(1)=-8\times 1=-8$

مثال) اگر $f(x)=\sqrt{x+3}$ حاصل $\lim_{h\to 0}\frac{f'(1+h)-f'(1)}{h}$ کدام است؟

$(f'(1))'=f''(1)=\left(\frac{1}{2}(x+3)^{-\frac{1}{2}}\right)'$

$=-\frac{1}{4}(x+3)^{-\frac{3}{2}}$

$=-\frac{1}{4}(4)^{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{4}\times\frac{1}{8}=\frac{-1}{32}$

SHEKARI

مثال) مشتق مرتبه n ام تابع $f(x)=\frac{3}{x+2}$ در $x_0=-1$ کدام است؟

$f(x)=3(x+2)^{-1}$

$f'(x)=-3(x+2)^{-2}$

$f''(x)=6(x+2)^{-3}$

$f'''(x)=-18(x+2)^{-4}$

$f^{(4)}(x)=72(x+2)^{-5}$

$f^{(n)}(x)=(-1)^n 3\,n!\,(x+2)^{-(n+1)}$

$f^{(n)}(-1)=(-1)^n 3\,n!$

مثال) مشتق مرتبه n ام تابع $f(x)=\frac{2x+1}{x+1}$ در $x_0=0$ کدام است؟

$f(x)=\frac{2x+1}{x+1}=2+\frac{-1}{x+1}=2+(-1)(x+1)^{-1}$

$f'(x)=(-1)(-1)(x+1)^{-2}$

$f''(x)=-2(x+1)^{-3}$

$f'''(x)=6(x+1)^{-4}$

$f^{(4)}(x)=-24(x+1)^{-5}$

$f^{(n)}(x)=(-1)^n n!\,(x+1)^{-(n+1)}$

$f^{(n)}(0)=(-1)^n n!$

مثال) تابع $f(x)=\frac{4x^3+12x^2+x-2}{x+1}$ مقدار مشتق سوم تابع در $x_0=-2$ کدام است؟

$f(x)=4x^2+8x-7+\frac{5}{x+1}$

$f'(x)=8x+8-5(x+1)^{-2}$

$f''(x)=8+10(x+1)^{-3}$

$f'''(x)=-30(x+1)^{-4}$

$f'''(-2)=-30$

	4	12	1	-2
-1		4	8	-7

مثال) اگر $f(x)=4x^2-3x+2$ آنگاه مقدار $f''(f'(x))$ کدام است؟

$f'(x)=8x-3$

$f''(x)=8$

$f''(f'(x))=8$

مثال) اگر $f(x)=ax^2+bx+c$ و $f'(1)=1$ و $f'(2)=9$ و $f(0)=-1$ و $f(1)=-7$ آنگاه $f(x)$ کدام است؟

$f'=2ax+b$

$f'(1)=2a+b=1$

$f(1)=a+b+c=-7$

$f(0)=c=-1$

$a+b=-6$

$f'(2)=4a+b=9$

$3a=15 \Rightarrow a=5$

$b=-11$

$f(x)=5x^2-11x-1$