بسم الله الرحمن الرحیم

Subject.

Date.

۱۳۹۹/۶/۲۷

ریاضی سال دهم

رشته ریاضی و فیزیک

فصل اول

مجموعه ها و الگو و دنباله

P4PCO .....

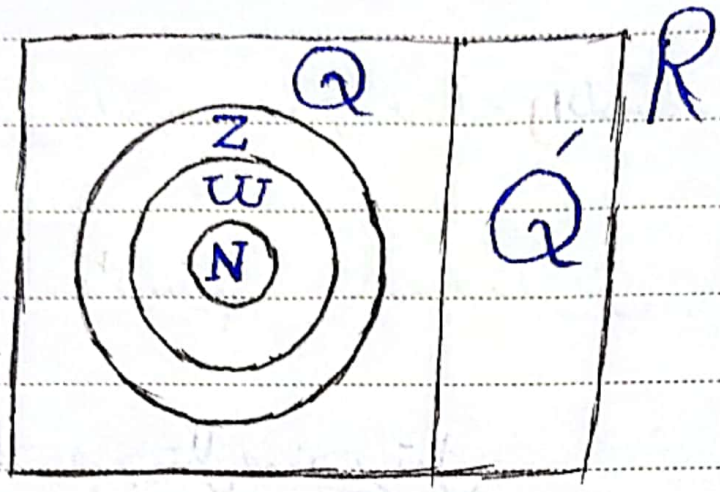
Scanned with CamScanner

Subject. به نام خدا

Date. ۹۹/۶/۲۷

مجموعه ها

انواع مجموعه ها ← اعداد:



اعداد طبیعی = $N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

اعداد حسابی = $W = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

اعداد صحیح = $Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

اعداد گویا = $Q = \{a, b \mid \frac{a}{b} \in Z, b \neq 0\}$

اعداد گنگ / اصم = Q' = اعداد نامتناهی و اعدادی که جزو مجموعه ها بالا نمی شوند

مثال: $Q = \{\pi, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots\}$

اعداد حقیقی = R = همه اعداد

Scanned with CamScanner

Subject.

Date.

نکته: ترتیب اولویت عملیات ها ریاضی:

داخل ترین پرانتز ← جذر و توان (اولویت از چپ به راست)

← ضرب و تقسیم ← جمع و تفریق

نکته: با توجه به شکل صفحه قبل ⇐

$\Rightarrow \mathbb{N} \subset \mathbb{W} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} / \mathbb{Q}' \subset \mathbb{R}$

$\Rightarrow \mathbb{R} - \mathbb{Q} = \mathbb{Q}'$ $\Rightarrow \mathbb{R} - \mathbb{Q}' = \mathbb{Q}$

$\Rightarrow \mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}' = \emptyset$

Scanned with CamScanner

بنام خدا

Subject. موضوع ها

Date.

اعداد گویا:

اعداد گویا ← مختوم
اعداد گویا ← متناوب

روش تشخیص:

مختوم: ساده کردن صورت و مخرج ← تجزیه مخرج به عامل اول

← به غیر ۲ یا ۵ عامل دیگر نداشته باشد.

متناوب: ساده کردن صورت و مخرج ← تجزیه مخرج به عامل اول

← عامل ۲ یا ۵ نداشته باشد ✓ / به غیر از ۲ یا ۵ عامل دیگر ✓

هم داشته باشد ✓

نکته: اعداد رادیکالی که جذر ندارند ← گنگ هستند

اعداد اعشاری که نه مختوم و نه متناوب هستند ← گنگ هستند.

Scanned with CamScanner

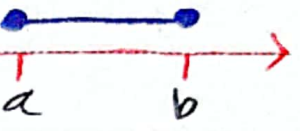
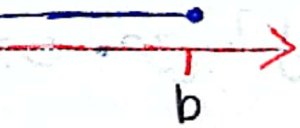
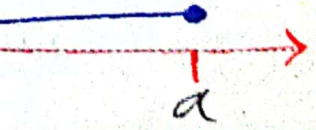
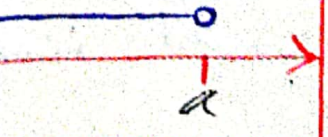
Subject. به نام خدا

Date.

بازه ها

بازه (فاصله): به هر زیر مجموعه‌ی پیوسته از اعداد حقیقی $\mathbb{R}$

انواع و نمایش بازه ها:

نام بازه	نمایش مجموعه‌ای	بازه	نمایش نموداری
کرانداربسته	$\{x\in\mathbb{R} \mid a\leq x\leq b\}$	$[a,b]$	
کراندار باز	$\{x\in\mathbb{R} \mid a< x< b\}$	(a,b)	
کراندار نیمه باز	$\{x\in\mathbb{R} \mid a\leq x< b\}$	$[a,b)$	
کراندار نیمه باز	$\{x\in\mathbb{R} \mid a< x\leq b\}$	$(a,b]$	
بی‌کران بسته	$\{x\in\mathbb{R} \mid x\geq a\}$	$[a,+\infty)$	
بی‌کران باز	$\{x\in\mathbb{R} \mid x> a\}$	$(a,+\infty)$	
بی‌کران بسته	$\{x\in\mathbb{R} \mid x\leq a\}$	$(-\infty,a]$	
بی‌کران باز	$\{x\in\mathbb{R} \mid x< a\}$	$(-\infty,a)$	

نکته: عدد کوچک سمت چپ بازه و عدد بزرگ سمت راست بازه

Scanned with CamScanner

به نام خدا

Subject.

Date.

مجموعه‌ها

نوشتن عضوها و زیرمجموعه‌ها:

نکته: در نوشتن مجموعه، عضوهای متشابه حذف می‌شوند

نکته: برای نشان دادن عضوها و زیرمجموعه‌ها، عضوها را خارج از آکولاد و زیرمجموعه‌ها را داخل آکولاد می‌نویسیم.

تعداد عضوها

نکته: فرمول بدست آوردن تعداد زیرمجموعه: 2^{h}

نکته: مجموعه‌ی تهی زیرمجموعه‌ی تمام مجموعه‌ها است.

Scanned with CamScanner

Subject. بنام خدا

Date. نکات مربوط به اجتماع، اشتراک، تفاضل در بازه ها

۱- خط، نقطه، توپر محسوب می شود.

۲- در اجتماع نقطه توپر آن نقطه خالی را پر می کند.

۳- در اشتراک نقطه توخالی اولویت دارد.

۴- در تفاضل اگر نقطه ای توپر از قسمت توپر کم شد جواب آن قسمت توخالی خواهد بود.

۵- در اجتماع اگر دو نقطه توخالی هم دیگر را پوشش نمی دادند و در وسط بازه بودند جواب به صورت تفاضل نوشته می شود.

۶- اگر عدد منفی در نامعادله ضرب شود جهت نامعادله تغییر خواهد کرد.

Scanned with CamScanner

Subject. بازه ها

Date.

۷- کلمه‌ی «و» در مجموعه‌ها به معنی اشتراک ($\cap$) است.

۸- کلمه‌ی «یا» در مجموعه‌ها به معنی اجتماع ($\cup$) است.

نکات تستی:

۱- نقطه‌ی میانی بازه $[a,b]$ برابر است با $\frac{a+b}{2}$

۲- طول بازه‌ی $[a,b]$ برابر است با $b-a$

Scanned with CamScanner

Subject. متناهی و نامتناهی

Date.

نکته: مجموعه متناهی: مجموعه‌ای که بتوان تعداد اعضای آن را با یک عدد حسابی بیان کرد.

نکته: اگر A دارای یک زیر مجموعه نامتناهی باشد حتماً خود A نیز نامتناهی است.

تفاضل	اشتراک	اجتماع	انواع مجموعه‌ها
متناهی	متناهی	متناهی	دو مجموعه متناهی
نامتناهی = متناهی - نامتناهی	متناهی	نامتناهی	یک مجموعه متناهی و یک مجموعه نامتناهی
نامعلوم	نامعلوم	نامتناهی	دو مجموعه نامتناهی

Scanned with CamScanner

به نام خدا

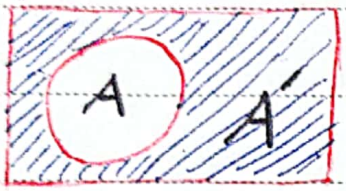
Subject. متمم / اجتماع / اشتراک / تفاضل

Date.

متمم مجموعه: فرض کنید U مجموعه مرجع و $A \subset U$ باشد آنگاه

$U - A$ را متمم A می نامیم و با نماد A' نشان می دهیم.

U



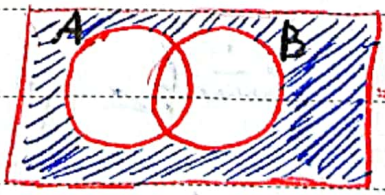
A' شامل عضوهایی از U است که در A نیست

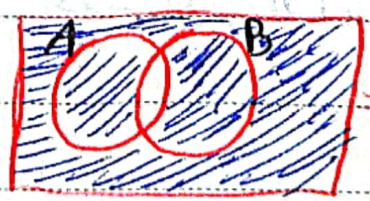
قوانین مربوط به متمم:

۱) $(A')' = A$ ۲) $\emptyset' = U$ ۳) $U' = \emptyset$

۴) $A \cup A' = U$ ۵) $A \cap A' = \emptyset$

قوانین دمورگان:

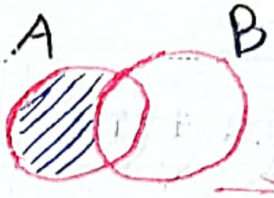
۱) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ $\Rightarrow$  $\Rightarrow$ هیچ کدام رخ ندهد

۲) $(A \cap B)' = A' \cup B'$ $\Rightarrow$  $\Rightarrow$ فقط یکی رخ دهد

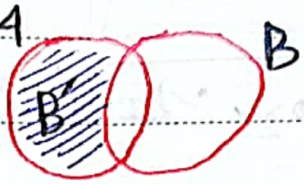
Scanned with CamScanner

Subject.

Date.

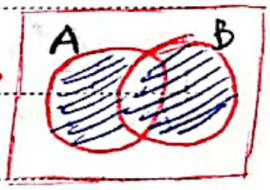
۳) $A-B=A-(A\cap B)\Rightarrow$ 

$\Rightarrow$ فقط A رخ دهد

۴) $A-B=A\cap B'\Rightarrow$ 

۵) $A\subseteq B\Rightarrow B'\subseteq A'$

قوانین تعداد عضوها اجتماع و اشتراک و تفاضل:

۱) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)\Rightarrow$ 

$A\cup B\Rightarrow$ حداقل یکی رخ دهد

نکته: مشخصه‌ها اجتماع در سوال، کلمات:

یا ـ حداقل (لااقل ـ دست‌کم) می‌باشند.

نکته: مشخصه‌ها اشتراک در سوال، کلمات:

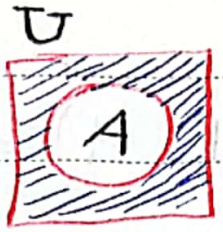
و ـ هردو می‌باشند.

Scanned with CamScanner

Subject.

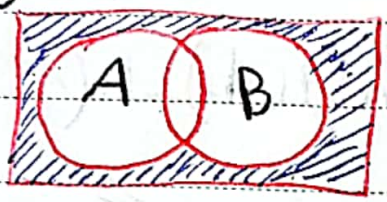
Date.

۲) $n(A') = n(U) - n(A)$ ⟹



۳) $n(A' \cap B') = n(A \cup B)' \overset{\text{طبق قانون دمورگان}}{=} n(U) - n(A \cup B)$ ← طبق قانون متمم

⟹



→ هیچ کدام رخ ندهد

نکته: مشخص های متمم در سوال کلمات منفی: نه، هیچکدام

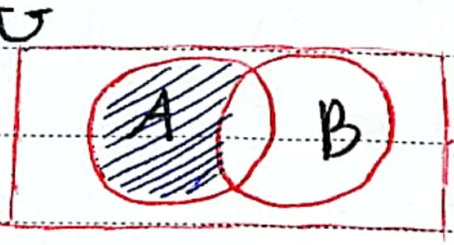
می باشند.

نکته: برای حل سوالات مربوط به متمم آنها را به اجتماع یا تقاطع

تبدیل می کنیم.

۴) $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = n(A \cap B')$

⟹



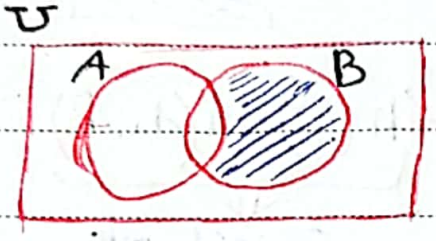
→ فقط A رخ دهد

Scanned with CamScanner

Subject.

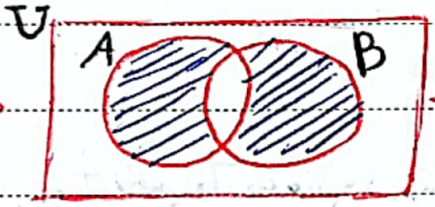
Date.

۵) $h(B-A)=h(B)-h(A\cap B)=h(B\cap A')$



فقط B رخ دهد

۶) $h[(A-B)\cup(B-A)]=h(A\cup B)-h(A\cap B)$



فقط دقیقاً یکی رخ دهد

نکته: مشخصه‌های تفاضل در سوال کلمات فقط - دقیقاً

می‌باشند.

Scanned with CamScanner

Subject. به نام خدا

Date. الگو و دنباله

الگوی خطی: الگویی که در آن اختلاف هر دو جمله متوالی عددی ثابت است.

فرمول الگوی خطی ⟸

$t_n = an + b \Longrightarrow$ a و b اعداد حقیقی دلخواه و ثابت

$a =$ میزان تغییر جملات متوالی / اختلاف هر دو جمله متوالی

$b = t_1 - a$ (جمله اول، ضریب n)

الگوهای غیر خطی:

نکته: الگوهای خطی جمله عمومی یکسانی ندارند.

Scanned with CamScanner

Subject.

Date.

مهمترین الگوهای غیرخطی:

۱) الگوی مربع: الگویی است که هر جمله را با مربع شماره همان جمله نسبت می‌دهد. فرمول $\Rightarrow t_n = n^2$

۲) الگوی مثلثی: الگویی است که هر جمله را با مجموع اعداد از یک تا شماره‌ی آن عدد نسبت دهد. فرمول $\Rightarrow \frac{n(n+1)}{2}$

۳) الگوی درجه ۲: الگوهایی که جملات آن به صورت $t_n = an^2 + bn + c$ باشند.

نکته: در این الگوها اختلاف جملات متوالی، خود تشکیل الگوی خطی می‌دهند که اختلاف جملات آن‌ها برابر ضریب n^2 می‌باشد.

P4PCO

Scanned with CamScanner

Subject.

Date.

مثال: جمله‌ی عمومی ⇐ $t_h = h^2 + h$

	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6
جملات دنباله:	۲	۶	۱۲	۲۰	۳۰	۴۲
اختلاف جملات متوالی:	۴	۶	۸	۱۰	۱۲	
فاصله اختلاف جملات متوالی:	۲	۲	۲	۲		

فرمول کلی ⇒ $t_h = ah^2 + bh + c$

$a =$ فاصله اختلاف جملات متوالی

b و $c =$ با جایگذاری دو جمله در فرمول کلی و حل دستگاه معادلاتی بدست می‌آید.

Scanned with CamScanner

Subject. دنباله ها

Date.

دنباله : به یک رشته از یک سری از اعداد که پشت سر هم نوشته می شوند.

۴) دنباله های بازگشتی : دنباله هایی که در آن هر جمله با جمله یا جملات قبل رابطه ای مشخص دارد.

دنباله ی فیبوناتچی : در آن دو جمله اول دنباله یک هستند و از جمله ی سوم به بعد هر جمله از مجموع دو جمله قبل به دست می آید.

نمایش ریاضی ⟸

$$\begin{cases} t_2 = t_1 = 1 \\ t_{h+2} = t_{h+1} + t_h \end{cases}$$

Scanned with CamScanner

Subject. به نام خدا

Date. دنباله حسابی

دنباله حسابی: تفاضل جملات عدد ثابت است.

نکته: آن عدد ثابت، قدر نسبت دنباله گویند و آن را با d نشان می‌دهند.

نکته: روش به دست آوردن قدر نسبت ⟸

$d = t_n - t_{n-1}$ ⟶ (تفاضل دو جمله متوالی)

نکته: روش پیدا کردن نوع دنباله حسابی ⟸

$d > 0$ ⟶ صعودی (افزایشی)

$d = 0$ ⟶ دنباله ثابت

$d < 0$ ⟶ نزولی (کاهشی)

نکته: ساختار کلی یا جمله عمومی دنباله حسابی ⟸

$t_n = a_1 + (n-1)d$

نکته: به جای حرف t می‌توان از حروف دیگر استفاده کرد.

Scanned with CamScanner

Subject.

Date.

نکته: شکل دیگر جمله عمومی دنباله حسابی اگر h جمله اول باشد $\Leftarrow$ $a_h = dh + (a_1 - d)$

توان ۱

نکته: در این ساختار ضریب h برابر قدرنسبت است.

نکته: اگر جمله m ام و h ام یک دنباله حسابی را داشته باشیم: قدرنسبت دنباله از مرحول زیر بدست می‌آید $\Leftarrow$

$$d = \frac{t_m - t_n}{m - h} \quad (m > h)$$

نکته: هرگاه a, b, c سه جمله متوالی از یک دنباله حسابی باشند $\Leftarrow$

$a, b, c \xrightarrow{a+c=2b} \boxed{b} = \frac{a+c}{2}$

$\boxed{b}$ واسطه حسابی

Scanned with CamScanner

Subject.

Date.

نکته: اگر بخواهیم بین دو عدد a و b، m عدد قرار دهیم

(واسطه حسابی) تا هم این اعداد تشکیل دنباله حسابی

بدهند، با این عملیات درج m واسطه حسابی بین

a و b گویند و قدر نسبت آن از رابطه زیر بدست می‌آید ⇐

$$\Rightarrow d = \frac{b-a}{m+1} \quad (b>a)$$

نکته: به دست آوردن تعداد ضارب یک عدد در یک محدوده

خاص به روش زیر بدست می‌آید ⇐

۱) نوشتن چند جمله اول دنباله (بدون توجه به

محدوده داده شده) و بدست آوردن جمله عمومی

۲) قرار دادن جمله عمومی در محدوده خواسته شده

و حل آن تا جایی که n تنها شود

Scanned with CamScanner

Subject.

Date.

۳) محاسبه تعداد اعداد ⟸

⟹ $a \leq x \leq b \xrightarrow{a,b \in Z}$ تعداد اعداد $= (b-a)+1$

نکته: مراحل پیدا کردن جملات مشترک دو دنباله حسابی ⟸

۱) چند جمله اول هر دنباله را می نویسیم و اولین جملات مشترک را پیدا می کنیم.

۲) جملات مشترک خود تشکیل دنباله حسابی تشکیل می دهند

نکته: قدرت نسبت دنباله جملات مشترک ⟸

⟹ ک م م (d_A, d_B)

قدر نسبت دنباله دوم ، قدر نسبت دنباله اول

Scanned with CamScanner

Subject.

Date.

۳) با جایگذاری مقادیر a و d در فرمول کلی دنباله‌ی حسابی، جمله‌ی عمومی دنباله‌ی مشترک را پیدا می‌کنیم.

نکته: بهتر است که ۵ جمله‌ی متوالی دنباله‌ی حسابی را به صورت زیر نشان دهیم ⟸

$$a-2d \;/\; a-d \;/\; a \;/\; a+d \;/\; a+2d$$

نکته: در هر دنباله‌ی حسابی، مجموع جملات متساوی‌الفاصله از طرفین با هم برابر هستند.

نکته: اگر تعداد جملات فرد باشد، این مجموع‌ها دو برابر جمله‌ی وسطی با هستند.

Scanned with CamScanner

Subject.

Date.

نکته: در دنباله‌ی حسابی، اگر مجموع اندیس‌های دو جمله با مجموع اندیس‌های دو جمله دیگر برابر باشند، مجموع زوج جمله‌ها با هم برابر می‌گردند. ⇐

شرط ⇐ $m+n=p+q$ ⇐ $t_m+t_n=t_p+t_q$

نکته: اگر مجموع اندیس‌های $m+n$ یا $p+q$ دو برابر اندیس k باشد ⇐ $t_m+t_n=2t_k$

نکته: اگر به جملات یک دنباله‌ی حسابی مقدار ثابت k واحد اضافه کنیم ⇐ دنباله‌ی حسابی جدید با همان قدر نسبت و جمله‌ی اول t_1+k تشکیل می‌گردد.

نکته: اگر جملات یک دنباله‌ی حسابی در مقدار ثابت k $(k\neq 0)$ ضرب شوند ⇐ دنباله‌ی حسابی جدید با قدر نسبت kd و جمله‌ی اول kq تشکیل می‌شود.

Scanned with CamScanner

به نام خدا

Subject. دنباله هندسی

Date.

دنباله‌ی هندسی: دنباله‌ای که در آن هر جمله (به جز جمله اول) از ضرب جمله قبل از خودش در عددی ثابت به دست می‌آید.

نکته: نسبت تقسیم هر دو جمله‌ی متوالی آن برابر عدد ثابت است. این عدد ثابت (غیر صفر) را قدر نسبت دنباله می‌نامیم و آن را با r نشان می‌دهیم.

نکته: قدر نسبت دنباله‌ی هندسی ← $r = \frac{t_n}{t_{n-1}}$ ← (نسبت دو جمله‌ی متوالی)

نکته: اگر $r > 0$ باشد، دنباله افزایشی یا کاهشی (یکنوا) است.

نکته: اگر $r < 0$ باشد، دنباله نه افزایشی و نه کاهشی (غیر یکنوا) است.

Scanned with CamScanner

Subject.

Date.

نکته: اگر $r \geq 2$ دنباله صعودی خواهد بود.

نکته: اگر $0 < r < 1$ باشد دنباله نزولی خواهد بود.

نکته: ساختار کلی یا جمله عمومی دنباله‌ی هندسی ⇐

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

نکته: اگر t_n و t_m دو جمله دلخواه از یک دنباله‌ی هندسی باشد ⇐

$$t_m = t_n r^{(m-n)}$$

نکته: اگر جمله‌ی m ام و n ام یک دنباله‌ی هندسی را داشته باشیم قدر نسبت دنباله را می‌توان از فرمول زیر نیز یافت ⇐

$$r^{m-n} = \frac{t_m}{t_n} \quad (m > n)$$

P4PCO .....

Scanned with CamScanner

Subject.

Date.

نکته: نوشتن واسطه‌ی هندسی به نام b میان دو عدد a، c

به شکل زیر است ⟸

$$a، b، c \xrightarrow{a \times c = b^2} b = \pm\sqrt{a \times c}$$

نکته: درج m واسطه‌ی هندسی بین a، b که همه‌ی اعداد با هم

تشکیل دنباله‌ی هندسی دهند ⟸

$$r^{m+1} = \frac{b}{a}$$

نکته: حاصل ضرب n جمله‌ی اول دنباله‌ی هندسی از

فرمول زیر بدست می‌آید ⟸

$$\Rightarrow (t_1 t_n)^{\frac{n}{2}}$$

Scanned with CamScanner

Subject.

Date.

نکته: در هر واسطه هندسی حاصل ضرب جملات متساوی الفاصله از طرفین با هم برابر هستند.

نکته: اگر تعداد جملات فرد باشد، این حاصل ضرب ها برابر با مربع جمله وسطی می باشند.

نکته: در دنباله هندسی اگر مجموع اندیس های دو جمله با مجموع دو اندیس های دو جمله دیگر برابر باشد، حاصل ضرب نوع جمله ها با هم برابر می گردند.

شرط $\Leftarrow m+h=p+q \Leftarrow t_m \cdot t_h = t_p \cdot t_q$

نکته: اگر مجموع اندیس ها $m+h$ یا $p+q$ دو برابر اندیس K باشد $\Leftarrow t_m \cdot t_h = (t_k)^2$

P4PCO .....

Scanned with CamScanner

Subject.

Date.

نکته: اگر سه جمله غیر متوالی یک دنباله حسابی را به صورت سه جمله متوالی از دنباله هندسی قرار دهیم، قدر نسبت دنباله هندسی برابر است با

$\Rightarrow$ دنباله حسابی: $(\dots, t_m, \dots, t_h, \dots, t_k)$

دنباله هندسی: (t_m, t_h, t_k)

$$r = \frac{k-h}{h-m}$$

نکته: اگر جملات یک دنباله هندسی در مقدار ثابت k $(k \neq 0)$ ضرب شوند، دنباله هندسی جدید با قدر نسبت r و جمله اول kt_1 تشکیل می‌شود.

نکته: اگر جملات یک دنباله هندسی را به توان k برسانیم دنباله هندسی جدید با قدر نسبت r^k و جمله اول t_1^k تشکیل می‌شود

Scanned with CamScanner