

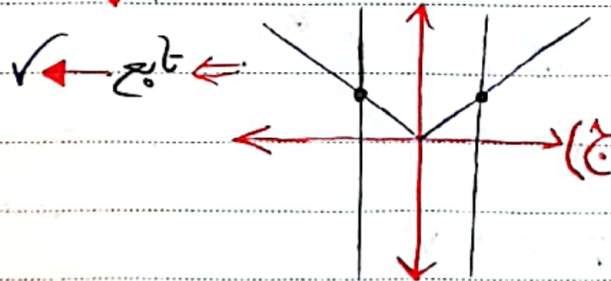
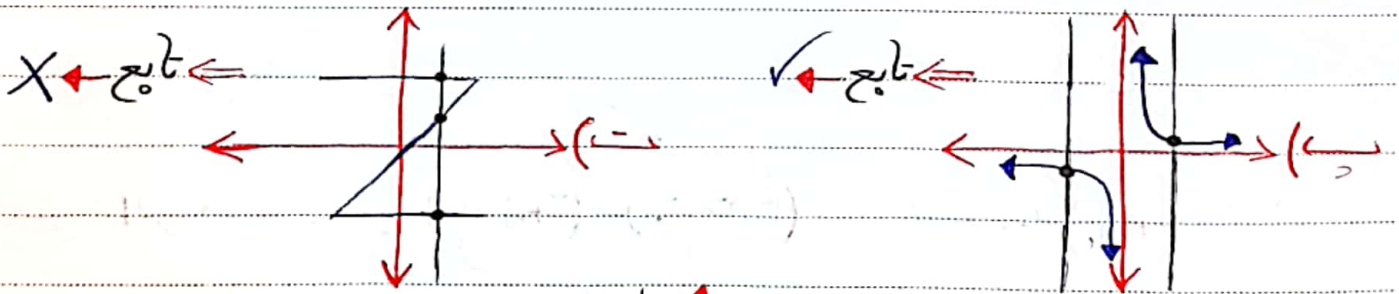
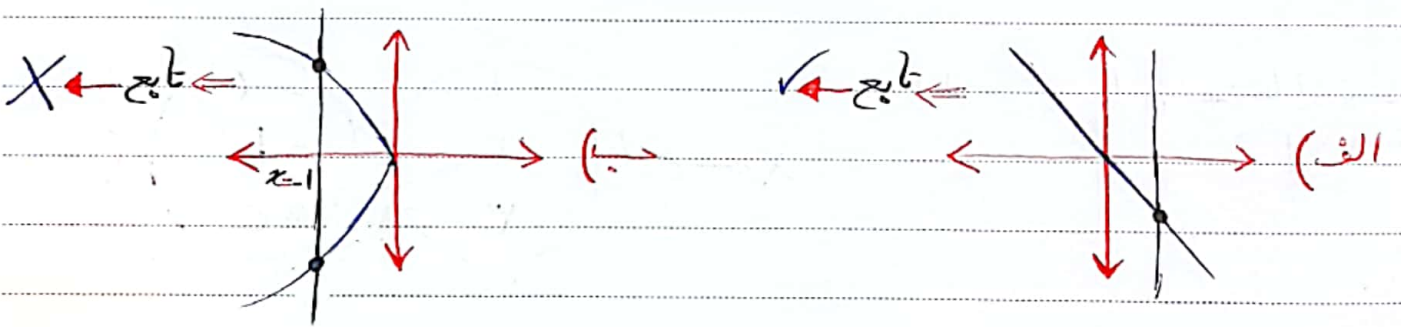
تابع:

متغیر وابسته →
 $y = f(x)$ → تابعیت بر کتداز x
متغیر مستقل ←

فارس: به انار یک دستقرازم ← یه دونه بیستم
تابع: صد اشد و تاشه! → تنها باید صدا → زن بگیر
رایفر: به انار یک دونه x ← یک دونه y وجود داشته باشه

- ۱- نمودار
 - ۲- زوج مرتب
 - ۳- ضابطه
- شناخت تابع

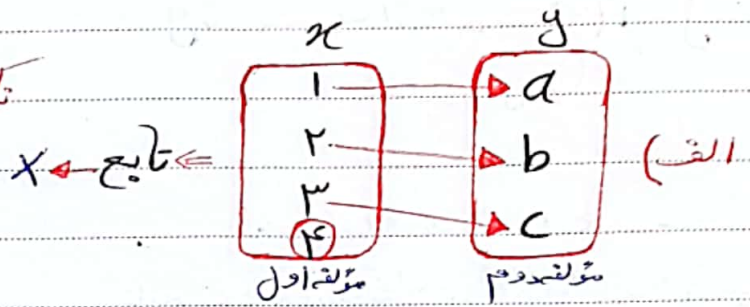
(۱) شناخت تابع از روی نمودار: (نمودار خطی)



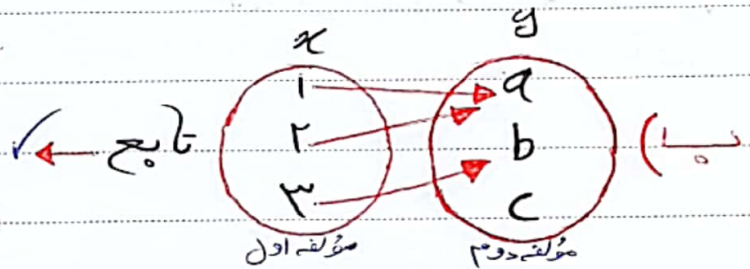
نحوه تشخیص تابع: هر خط موازی محورین ها (عرض ها) نمودار را حد اکثر در یک نقطه قطع کنه.

۱) شناخت تابع از روی نمودار: (نمودار زوج)

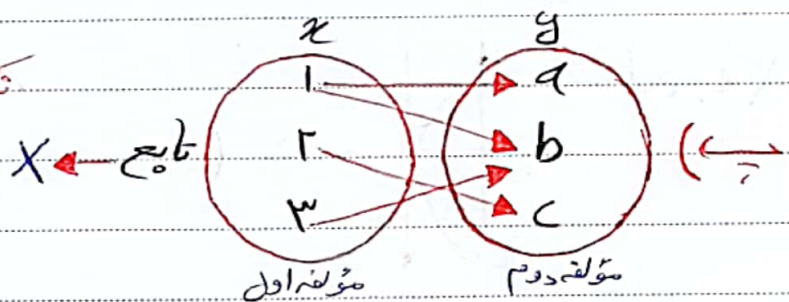
نکته: برای هر مؤلفه اول باید یک مؤلفه دوم باشد



نکته: اگر مؤلفه دوم تکرار باشد اشکال ندارد و نقص در تابع ایجاد نمی شود



نکته: به انبار هر مؤلفه اول تنها باید یک مؤلفه دوم وجود داشته باشد



۲) شناخت تابع از روی زوج مرتب:

مثال: اگر دو زوج مرتب $(x+y, 7)$ و $(3x-2y, 14)$ مساوی باشند، حاصل $2x+g$ کدام است؟

$$\begin{cases} 2x+2y=14 \\ x+y=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3+y=7 \Rightarrow y=4 \\ 5x=15 \Rightarrow x=3 \end{cases}$$

$$2x+y=6+4=10$$

نکته: برای برابر کردن زوج مرتب باید هم مؤلفه اول و هم مؤلفه دوم با هم برابر باشند

$$1) \{(1, 2), (3, 5), (4, 7), (3, 5)\} \Rightarrow \text{تابع} \rightarrow \checkmark$$

$$2) \{(1, 2), (2, 3), (3, 2), (1, 3)\} \Rightarrow \text{تابع} \rightarrow \times$$

$$3) \{(1, 2), (2, 3), (4, 2)\} \Rightarrow \text{تابع} \rightarrow \checkmark$$

$$4) \{(3, 7), (2, 7), (1, 7)\} \Rightarrow \text{تابع} \rightarrow \checkmark$$

1- مؤلفه‌ها اول یک نباشند

نکته: زوج‌ها مرتب در صورت تابع هستند:

2- اگر مؤلفه‌ها اول برابر باشند باید مؤلفه‌ها دوم نیز برابر باشند

3) شناخت تابع از روی ضابطه:

$$1) y = x + 5 \rightarrow \begin{array}{c|c} x & 2 \\ \hline y & 5 \end{array} \Rightarrow \text{تابع} \rightarrow \checkmark$$

$$2) x^2 + y^2 = 25 \rightarrow \begin{array}{c|c} x & 5 \\ \hline y & \pm 5 \end{array} \Rightarrow \text{تابع} \rightarrow \times$$

$$3) y = |x| + 1 \rightarrow \begin{array}{c|c} x & -1 \\ \hline y & 1 \end{array} \Rightarrow \text{تابع} \rightarrow \checkmark$$

$$۴) |y| = \pi \rightarrow \frac{x}{y} \begin{matrix} \delta \\ \pm \delta \end{matrix} \rightarrow \text{تابع} \rightarrow X$$

نکته: در ضابطه ها ساده ← با قرار دادن عدد به جای x و y می توان در سری یا نام در سری تابع را تشخیص داد.

نکته: مراحل تشخیص تابع بودن ضابطه ها پیچیده ←

$$\checkmark \text{ تابع} \Rightarrow y = 4 \begin{matrix} \text{برابر شود لفظ اول و دوم} \\ \text{با یکدیگر رسیدیم} \end{matrix} \rightarrow x_1 = x_2 \begin{matrix} \text{اگر برابر شوند لفظ اول} \\ \text{با یکدیگر} \end{matrix} \rightarrow (y_1, x_1) \text{ و } (y_2, x_2) \begin{matrix} \text{ابتداء و زوج مرتب در تکرار لفظ} \end{matrix}$$

نکته: اگر y در قدر مطلق بود و یا توان زوج داشت ← احتمال زیاد ضابطه تابع X

نکته: توان در ریشه ها فرد ← خیلی خطرناک نیستند

$$۵) y^3 = x^3 + 2 \Rightarrow x_1 = x_2 \rightarrow x_1^3 = x_2^3 \rightarrow x_1^3 + 2 = x_2^3 + 2 \rightarrow y_1^3 = y_2^3 \Rightarrow \text{تابع} \rightarrow \checkmark$$

$$۶) y + \sqrt{x^2 + 1} = \delta \Rightarrow x_1 = x_2 \rightarrow x_1^2 = x_2^2 \rightarrow x_1^2 + 1 = x_2^2 + 1 \rightarrow \sqrt{x_1^2 + 1} = \sqrt{x_2^2 + 1} \rightarrow$$

$$\rightarrow -\sqrt{x_1^2 + 1} = -\sqrt{x_2^2 + 1} \rightarrow -\sqrt{x_1^2 + 1} + \delta = -\sqrt{x_2^2 + 1} + \delta \rightarrow y_1 = y_2 \Rightarrow \text{تابع} \rightarrow \checkmark$$

$$\text{نکته: } |0| = a \Rightarrow 0 = \pm a$$

$$۷) |y-1| + \pi = 0 \Rightarrow \frac{x}{y} \begin{matrix} -1 \\ (200) \end{matrix} \rightarrow \text{تابع} \rightarrow X$$

$$۸) y^3 = x^3 - 2\pi \rightarrow y = \sqrt[3]{x^3 - 2\pi} \rightarrow \text{تابع} \rightarrow \checkmark$$

$$9) \pi y^2 - \pi = 1 \rightarrow \frac{x}{y} = \frac{1}{\pm\sqrt{2}} \rightarrow y^2 = 2 \rightarrow y = \pm\sqrt{2} \Rightarrow \text{تابع} \rightarrow X$$

$$10) y^3 + 3y^2 + 3y + x^3 + x = 0$$

$$\boxed{y^3 + 3y^2 + 3y + 1} + x^3 + x - 1 = 0$$

$$(y+1)^3 = -x^3 - x + 1 \rightarrow y = \sqrt[3]{-x^3 - x + 1} - 1$$

دامنه D: تغییرات تابع روی محورهای تصویر نمودار روی محورهای تابع
پیدا IR: تغییرات تابع روی محورهای تصویر نمودار روی محورهای تابع

انواع دامنه:

$$1) \text{تابع چند جمله‌ای} \Rightarrow y = ax^h + bx^{h-1} + \dots + c \rightarrow D: \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$

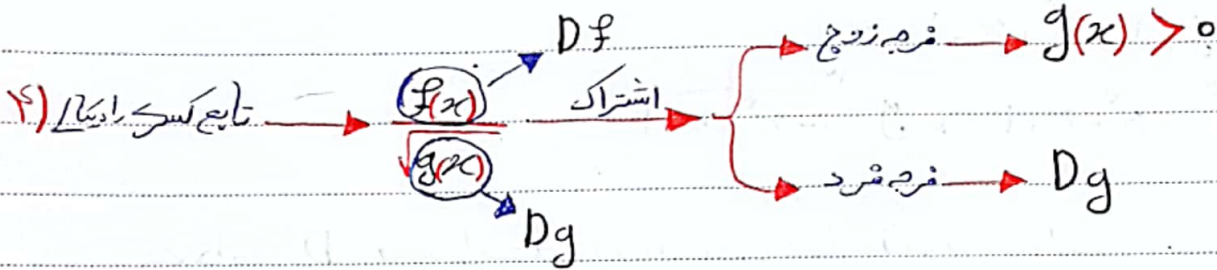
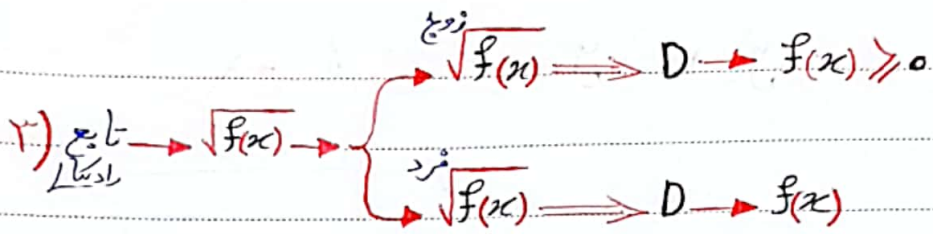
یا منضابطه

نکته: برای مشخص کردن دامنه باید به تابع نگاه کرد.

نکته: اگر ما محدود کننده رادیکال، کسر، لوگاریتم، مثلثات نداشته تابع ساده یا چند جمله‌ای
باشد.

$$2) \text{تابع کسر} \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow D: \mathbb{R} - \{\text{ریشه‌های مخرج}\} / g(x) \neq 0$$

نکته: ریشه‌های مخرج باعث می‌شوند که کسر تعریف نشده شود قبول نداریم.



حل تمرین:

۱) $y = x^5 - 2x^2 \rightarrow D: \mathbb{R}$

۲) $y = \frac{1}{3}x^2 + x \rightarrow D: \mathbb{R}$

۳) $y = \frac{x+1}{x-1} \rightarrow D: \mathbb{R} - \{1\}$
 $x-1=0 \Rightarrow x=1$

تکته: ضرب یک تابع در دامنه ندارد و این خودکام است که بر نوع تابع و دامنه آن تاثیر دارد.

۴) $y = \frac{x-1}{x^2+5x+6} \rightarrow D: \mathbb{R} - \{-2, -3\}$
 $(x+2)(x+3)=0$
 $x=-2, x=-3$

۵) $y = \frac{1}{|x|-1} \rightarrow D: \mathbb{R} - \{\pm 1\}$
 $|x|-1=0 \Rightarrow |x|=1$

تکته: ذات قدر مطلق هم می تواند منفی باشد هم مثبت.

تکته: جواب قدر مطلق نمی تواند منفی باشد. اگر منفی باشد جواب تعریف نشده است.

تکته: اگر مخارج یک تابع ریشه نداشته باشد ریشه مخارج می شود ته $\mathbb{R} - \emptyset \Rightarrow D: \mathbb{R}$

نکته: در توابع رادیکال با ضرب زوج
دامنه برابر است با عدد زیر رادیکال
بزرگتر مساوی صفر

$$6) y = \sqrt{x-1} \rightarrow D: x-1 \geq 0 \Rightarrow D: x \geq 1$$

نکته: در توابع کسری با تعیین علامت

$$7) y = \sqrt{\frac{x-1}{x+2}} \rightarrow D: \frac{x-1}{x+2} \geq 0$$

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
y	$+$	0	$-$	$+$
P	$+$	0	$+$	$+$

$$\Rightarrow D: (-\infty, -2) \cup [1, +\infty)$$

نکته: در توابع رادیکال کسری با تعیین علامت کرده

نکته: توابع رادیکال کسری را با
توابع کسری رادیکال قایل نگنید

$$8) y = \frac{2}{\sqrt{x-2}} \rightarrow D: x-2 \geq 0 \Rightarrow D: x \geq 2$$

نکته: در توابع رادیکال کسری که صورت
فرد هستند
رادیکال خود زود ندارد از بین
ددامنه آن می شود دامنه تابع
زیر رادیکال
برود

$$9) y = \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+2}} \rightarrow y = \frac{x-1}{x+2} \Rightarrow D: \mathbb{R} - \{-2\}$$

$$10) y = \sqrt{3x-4} \rightarrow 3x-4 \geq 0 \rightarrow 3x \geq 4 \stackrel{-3}{\div} \rightarrow x \geq \frac{4}{3}$$

نکته: اگر کل یک تابع رادیکال به توان هر عدد
رسیده باشد با دست آورد دامنه
توان را در نظر نمی گیریم و دامنه را
دست می آوریم

$$11) y = (\sqrt{x-1})^2 \rightarrow D: x-1 \geq 0 \Rightarrow D: x \geq 1$$

$$12) y = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}} \xrightarrow{\text{اشتراک}} D: x \geq 1$$

۱۳) $y = \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x-1}$
 $x > 1 \cap x > 1 \Rightarrow D: x > 1$

نکته: اگر بین دو تابع جمع، ضرب، تقزین یا تقسیم باشد

۱۴) $y = \sqrt{(x-1)^2}$ → $D: |x-1| \Rightarrow D: \mathbb{R}$

بین آنها اشتراک میگیریم.
 فقط باید محاسبه باشد که اگر تقسیم بود
 مخرج نباید صفر شود.

۱۵) $y = \frac{\sqrt{x+1}}{x\sqrt{x+1}}$ → $D: x > 0$
 مساوی برقرار است

۱۶) $y = \frac{\sqrt{x-x}}{\sqrt{x-x}}$ → $\sqrt{x-x} > 0 \rightarrow \sqrt{x} > x \Rightarrow D: 0 < x < 1$

نکته: اینجا باید ببینیم بزرگتر کدام اعداد هستند که از خودشان بزرگتر باشد ← که اعداد بین ۰ و ۱ میباشند بزرگتر از خود عدد است

۱۷) $y = \frac{\sqrt{x}}{|x|-1}$ → $x > 0$
 تناقض → $D: [0, +\infty) - \{1\}$
 $|x|-1 \neq 0 \rightarrow |x| \neq 1 \rightarrow x \neq \pm 1$

انواع برد:

مثل تمرین: (برد زوج مرتب)

① برد تابع f چند عضو دارد؟

$$f = \left\{ (1, 2)^*, (2m, m+1), (1, m+1)^*, (m+1, 2m) \right\}$$

برد R

$$\text{تابع} \rightarrow m+1=2 \rightarrow m=1 \Rightarrow f = \left\{ (1, 2), (2, 2), (1, 2), (2, 2) \right\}$$

دامنه D

نکته: در زوج مرتب \leftarrow دامنه تابع \leftarrow مؤلفه ها اول
برد تابع \leftarrow مؤلفه ها دوم

مثل تمرین: (برد در ضابطه ها)

② $y = 1 - x^2 \rightarrow ax^2 + bx + c$

$\leftarrow a = -1 \Rightarrow R: \left(-\infty, \frac{-\Delta}{4a}\right) \Rightarrow R: (-\infty, 1]$
 $\leftarrow b = 0$
 $\leftarrow c = 1$

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow 0 - 4(-1)(1) = 4$

نکته: ضابطه ها درجه دو مانند معادلات درجه دو \leftarrow برد این ضابطه ها
هستند و نمودار سهمی هستند

$R: \left[\frac{-\Delta}{4a}, +\infty\right)$ \leftarrow اگر a مثبت باشد (ضروریست)
 $R: \left(-\infty, \frac{-\Delta}{4a}\right]$ \leftarrow اگر a منفی باشد

③ $y = x^2 - 4x + 3$

$\leftarrow a = 1 \Rightarrow R: \left[\frac{-\Delta}{4a}, +\infty\right) \Rightarrow R: \left[\frac{4}{4}, +\infty\right) \Rightarrow R$
 $\leftarrow b = -4$
 $\leftarrow c = 3$

$\Delta \Rightarrow 16 - 4(1)(3) = 4$

④ $y = -x^2 + 4x - 4$ $\begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \\ c = -4 \end{cases}$ \Rightarrow پیرد $\left(-\infty, \frac{-\Delta}{2a}\right] = \left(-\infty, \frac{-12}{-2}\right] \Rightarrow R: (-\infty, 3]$
 $\Delta = 3^2 - 4(-1)(-4) = 12$

⑤ $g = \frac{x^2 + 5}{x^2 + 4} \rightarrow \frac{x^2 + 4 + 1}{x^2 + 4} = 1 + \frac{1}{x^2 + 4}$
 پیرد \Rightarrow پیرد \Rightarrow پیرد

$\Rightarrow x^2 \gg 0 + 4 \rightarrow x^2 + 4 \gg 4$ $\frac{1}{x^2 + 4} < \frac{1}{4}$ $\Rightarrow \frac{1}{x^2 + 4} < \frac{1}{4}$
 مکتوب کردنی علامت عوض می شود
 $+1 \rightarrow 0 + 1 < 1 + \frac{1}{x^2 + 4} < 1 + \frac{1}{4} \Rightarrow 1 < y < \frac{5}{4}$

عمل بهترین: (روشن تابع مکتوب)

⑥ $y = \frac{2x-1}{x+3}$ $\xrightarrow{\text{مکتوب کردنی تابع}} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} yx + 3y = 2x - 1 \rightarrow yx - 2x = -3y - 1$

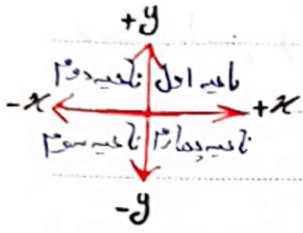
$x(y-2) = -3y-1 \xrightarrow{\text{تفکیک کردنی}} x = \frac{-3y-1}{y-2} \Rightarrow D: R - \{2\} = R$ تابع اصل تابع مکتوب

پیرد تابع اصل = دامنه تابع: نکته مکتوب

⑦ $y = \frac{3x^2-1}{x^2+1}$ $\xrightarrow{\text{مکتوب کردنی تابع}} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} yx^2 + y = 3x^2 - 1 \rightarrow yx^2 - 3x^2 = -y - 1$

$x^2(y-3) = -y-1 \rightarrow x^2 = \frac{-y-1}{y-3} \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{-y-1}{y-3}}$

$\frac{-y-1}{y-3} \geq 0$ تعیین علامت $\frac{x}{y}$ $\Rightarrow D: \text{تابع مکتوب} [-1, 3) \Rightarrow R$ تابع اصل
 دامنه تابع مکتوب $y=3$ $y=-1$

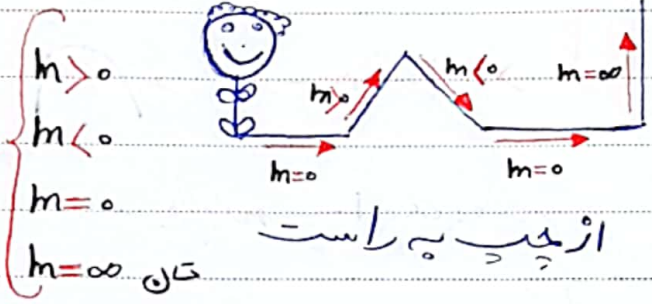


$y = ax + b \rightarrow$ استاندارد استناد

رسم توابع: (تابع خط)

$y = mx + h \rightarrow$ رسم

شیب خط = تندی خط $\Rightarrow m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$



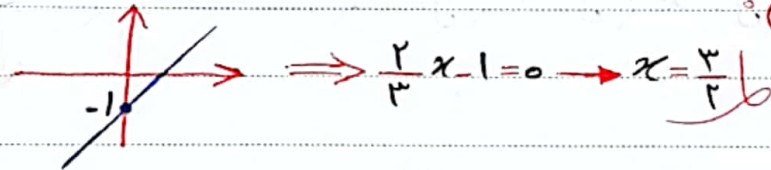
- $m > 0$
- $m < 0$
- $m = 0$
- $m = \infty$ تان

از چپ به راست

در محور y ها $h =$ عرض از مبدأ = ارتفاع خط

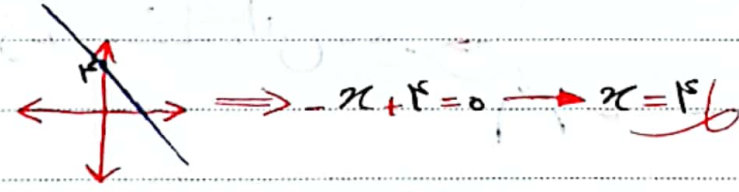
حل تمرین:

① $y = \frac{2}{3}x - 1$
 $m > 0$

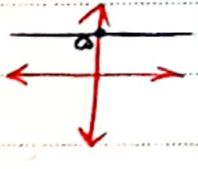


نکته: برای رسم تابع خطی \leftarrow ابتدا عدد تنها را بر روی محور y ها \leftarrow طبق علامت ضریب x که شیب خط است مشخص می کنیم \leftarrow یک خط راست که از نقطه مشخص شده گذر کند رسم می کنیم

② $y = -x + 4$
 $m < 0$



③ $y = 5$
 $m = 0$

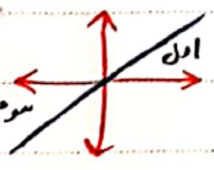


نوازه اول و سوم $\leftarrow y = x$ \leftarrow نمودار ④

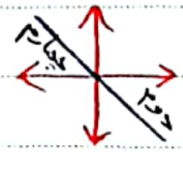
نوازه دوم و چهارم $\leftarrow y = -x$ \leftarrow نمودار ⑤

نکته: تابع نیمه ساز

④ $y = x$
 $m > 0$

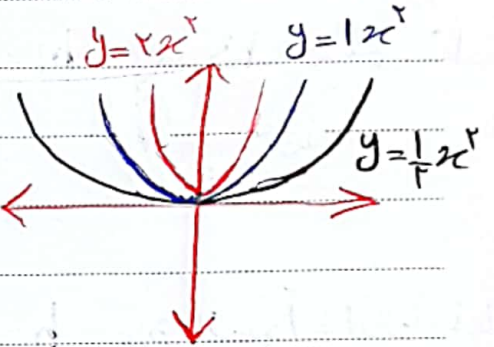
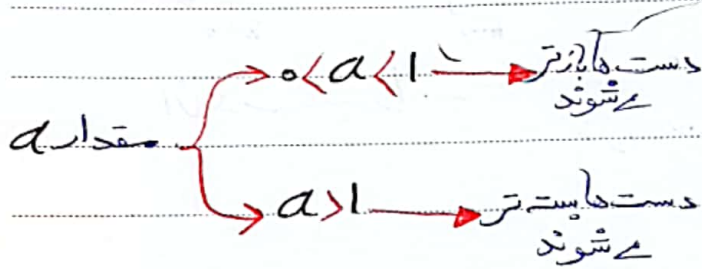
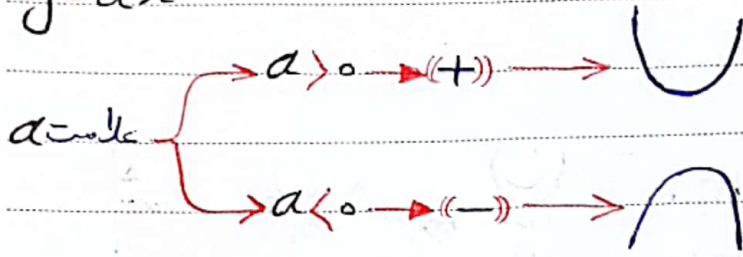


⑤ $y = -x$
 $m < 0$



رسم توابع: (تابع توانی زوج)

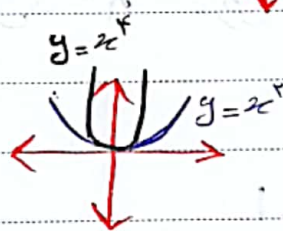
$$y = ax^{2n}$$



سرعت بالافتن دست‌ها
سرعت رشد \Rightarrow

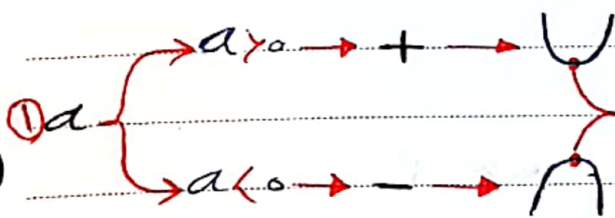
$$y = x^2 < y = x^4 < y = x^6 < \dots$$

مثال



$$y = ax^2 + bx + c$$

رسم توابع: (تابع درجه دو)



نقطه رأس سهم

$$x = \frac{-b}{2a}$$

$$y = \frac{-\Delta}{4a}$$

② b

- روشن‌ترین $x = \frac{-b}{2a}^{**}$

طبق شیب حرکت علامت b تعیین می‌کنیم
از چپ به راست به نقطه c نزدیک می‌شویم
روشن‌تر می‌شود

③ c روی محور y ها

تست ① در یک تابع خط داریم: $f(x) + f(-x) = -12$ و $f(1) = -2f(1)$ و $f(x) = -2f(1)$ و $f(1) = -2f(1)$ است؟

خط: $y = ax + b$ $\xrightarrow{b=-6}$ $f(x) = ax - 6$ $\xrightarrow{a=3}$ $f(x) = 3x - 6$

$f(1) = 24$ $24(17)$ $11(3)$

$f(x) + f(-x) = -12$ $f(1) = -2f(1)$

$ax + b - ax + b = -12$ $4a - 6 = -2(a - 6)$

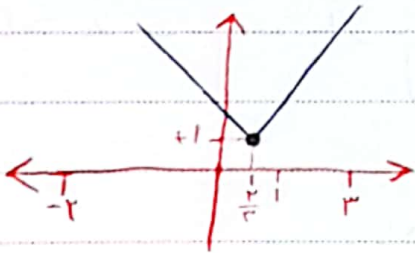
$2b = -12$ $4a - 6 = -2a + 12$

$b = -6$ $6a = 18$

$a = 3$

توجه: اگر تابع x بود تنها ax تغییر می‌کند و منفی می‌شوند و b تغییر نمی‌کند

تست ② اگر دامنه تابع $f(x) = \left| \frac{3}{2}x - 1 \right| + 1$ باشد بازه $[-2, 3]$ باشد برد این تابع کدام است؟



$\Rightarrow R: [1, 5]$

$(1, 5)$ (✓) $[1, 5)$ (✓)

$(0, 5)$ (✓) $[0, 5]$ (✓)

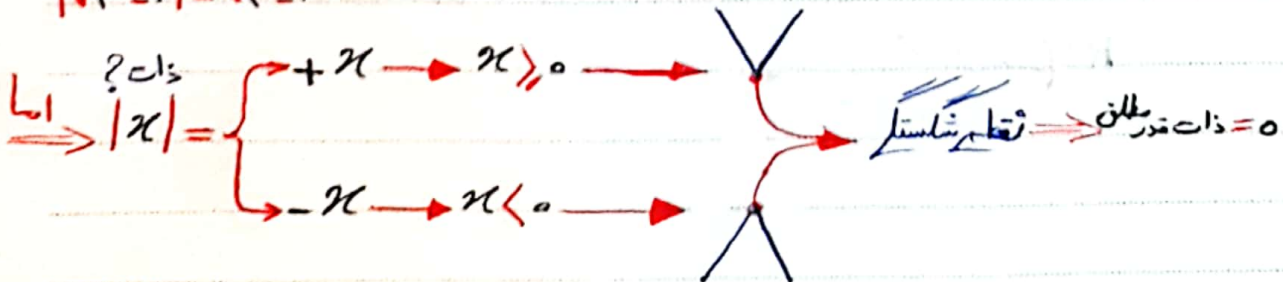
قدر مطلق: دستگیر است مثبت ساز

ذات: $|3| = 3$

ذات: $|-2| = -(-2) = 2$

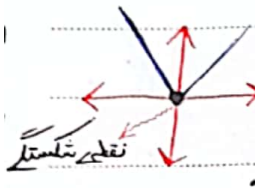
ذات: $|3 - x| = -(x - 3) = 3 - x$

ذات: $|\sqrt{2} - 1| = \sqrt{2} - 1$

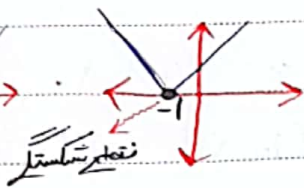


رسم نمودار قدر مطلق

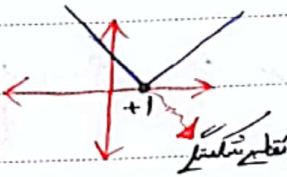
$$y = |x|$$



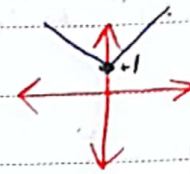
$$y = |x+1|$$



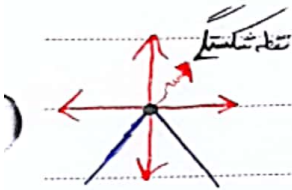
$$y = |x-1|$$



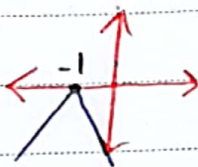
$$y = |x| + 1$$



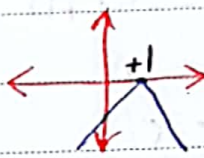
$$y = -|x|$$



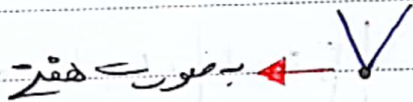
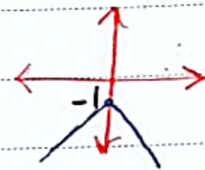
$$y = -|x+1|$$



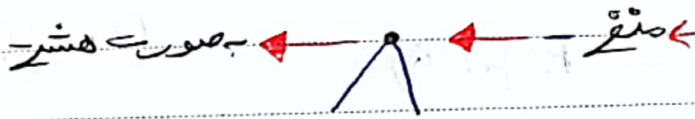
$$y = -|x-1|$$



$$y = -|x| - 1$$



نکته: علامت مثبت قدر مطلق



نکته: علامت منفی قدر مطلق

داخل قدر مطلق حرکت بر روی محورها اینها را عوض هستند

مثلا اگر + بود به سمت مثبت حرکت کنیم
و برعکس

خارج قدر مطلق حرکت بر روی محورها

نکته: اگر تغییرات

نکته: در توابع قدر مطلق اگر تابع بسته نباشد دامنه آن برابر است $D: (-\infty, +\infty)$

مثبت + $R: [نقطه شکست, +\infty)$

منفی - $R: (-\infty, نقطه شکست]$

نکته: بردار توابع قدر مطلق