خیلی سبز!

۹۹

خارج از کشور

دفترچه شماره ۲
آزمون اختصاصی

ویژه نظام آموزشی ۳-۳-۶

آزمون سراسری ورودی دانشگاه های کشور - ۱۳۹۹

گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی
آزمون اختصاصی

• نام و نام خانوادگی: • شماره داوطلبی:

• تعداد سؤال: ۱۳۵ • مدت پاسخگویی: ۱۷۵ دقیقه

عنوان مواد امتحانی آزمون، تعداد، شماره سؤالات و مدت پاسخ‌گویی

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخ‌گویی
۱	ریاضیات	۵۵	۱۰۱	۱۵۵	۸۵ دقیقه
۲	فیزیک	۴۵	۱۵۶	۲۰۰	۵۵ دقیقه
۳	شیمی	۳۵	۲۰۱	۲۳۵	۳۵ دقیقه

ریاضیات

۱۰۱- فرض کنید A و B دو مجموعهٔ غیرتهی و جدا از هم، با یک مجموعهٔ مرجع باشند. کدام رابطه نادرست است؟

۱) $A \subset B'$ ۲) $A - B' = \varnothing$ ۳) $A \cap B' = A$ ۴) $(A \cup B)' = \varnothing$

۱۰۲- مجموعهٔ $(A - (A \cap B')) \cup (B \cap (A \cap B)')$ با کدام مجموعه، برابر است؟

۱) A ۲) B ۳) A' ۴) B'

۱۰۳- اگر $A = [1,4)$ و $B = (-1,3]$ باشند، مساحت نمودار $A \times A - B \times B$ در صفحهٔ مختصات، کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۶

۱۰۴- کدام‌یک از گزاره‌های زیر، هم‌ارز منطقی گزارهٔ $(\sim p \Rightarrow \sim q) \wedge (p \vee q)$ است؟

۱) p ۲) q ۳) $p \wedge q$ ۴) $p \Rightarrow q$

۱۰۵- به ازای یک مقدار a، چندجمله‌ای $P(x) = 2x^4 + ax^3 + 2x^2 - 3x$ بر $2x - 1$ بخش‌پذیر است. در این حالت باقی‌ماندهٔ $P(x)$ بر $x + 2$، کدام است؟

۱) -10 ۲) -8 ۳) ۴ ۴) ۶

۱۰۶- نمودارهای دو تابع $y = |x+1| + |x-2|$ و $y = x + 7$، در دو نقطهٔ A و B متقاطع هستند. اندازهٔ پاره‌خط AB، کدام است؟

۱) $8\sqrt{2}$ ۲) ۱۲ ۳) ۱۳ ۴) $10\sqrt{2}$

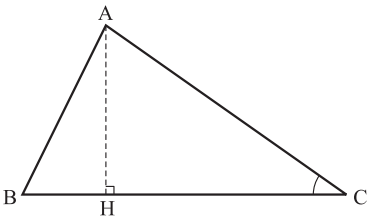
۱۰۷- با فرض $x \geq 2$ ؛ $f(x) = x^2 - 4x + 9$ و $g(x) = \frac{3-x}{2}$، حاصل $(f^{-1}og^{-1})(-9)$، کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۰۸- ابتدا قرینهٔ نمودار تابع $f(x) = (x-1)^2$ را نسبت به مبدأ مختصات رسم کرده، سپس منحنی حاصل را ۴ واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم. طول نقاط تلاقی منحنی اخیر با منحنی اصلی، کدام است؟

۱) ۰٫۲ ۲) $-1,1$ ۳) $-1,2$ ۴) $-2,1$

۱۰۹- در شکل مقابل، $\cot C = \frac{\sqrt{5}}{2}$ و $AC = 96$. اندازهٔ ارتفاع AH، کدام است؟



۱) ۴۸
۲) ۵۶
۳) ۶۴
۴) ۷۲

۱۱۰- اگر انتهای کمان α در ربع اول دایرهٔ مثلثاتی و $\tan\alpha = \frac{1}{7}$ باشد، مقدار $\sin(\frac{13\pi}{4} + \alpha)$، کدام است؟

۱) $-\frac{4}{5}$ ۲) $-\frac{3}{5}$ ۳) $\frac{3}{5}$ ۴) $\frac{4}{5}$

۱۱۱- جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin(x + \frac{\pi}{6}) + \cos(x + \frac{\pi}{3}) = \cos 2x$، کدام است؟

۱) $x = \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ ۲) $x = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ ۳) $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ ۴) $x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

۱۱۲- اعداد طبیعی فرد را طوری دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات هر دسته، برابر شمارهٔ آن دسته باشد، یعنی $\{1\}, \{3,5\}, \{7,9,11\}, \ldots$. در این صورت جملهٔ آخر واقع در دستهٔ شمارهٔ چهل، کدام است؟

۱) ۱۵۶۳ ۲) ۱۵۸۹ ۳) ۱۶۳۹ ۴) ۱۶۵۱

۱۱۳- در ظرفی ۱۰۰ لیتر محلول قرار دارد. هر روز ۴ لیتر از محلول را برداشته و به جای آن آب خالص اضافه می‌کنیم. پس از چند روز غلظت آن $\frac{1}{3}$ غلظت اولیه می‌شود؟ $(\log 3 = 0/48 \, , \log 2 = 0/3)$

۱) ۲۰ ۲) ۲۴ ۳) ۳۰ ۴) ۳۲

۱۱۴- فرض کنید $n \in \mathbb{N}$، حاصل $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3^{2n} - 3^{-2n+1}}{2 \times 3^{2n} + 3^{-2n+1}}$ کدام است؟

۱) $+\infty$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۰ ۴) $-\frac{1}{2}$

۱۱۵- حاصل $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{\sqrt{2+3x} - \sqrt{2-x}}{\sqrt{1-\cos x}}$، کدام است؟

۱) -2 ۲) $-\sqrt{2}$ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) ۲

۱۱۶- تعداد نقاط ناپیوستگی تابع $f(x)=[x]\sin \pi x\ ;\ |x|\le ۲$، کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

۱۱۷- نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{ax^۲+۷x}{۲x^۲+bx+c}$، فقط یک مجانب قائم $x=۲$ دارد. اگر $f(۳)=۶$ باشد، معادلهٔ مجانب افقی آن، کدام است؟

۱) $y=-۱$ ۲) $y=-\frac{۱}{۲}$ ۳) $y=\frac{۱}{۲}$ ۴) $y=\frac{۳}{۲}$

۱۱۸- اگر f یک تابع مشتق‌پذیر، $g(x)=f(\frac{۱-\sin x}{۱+\sin x})$ و $g'(\frac{\pi}{۶})=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ باشند، مقدار $f'(\frac{۱}{۳})$، کدام است؟

۱) $-\frac{۲}{۳}$ ۲) $-\frac{۳}{۴}$ ۳) $-\frac{۴}{۳}$ ۴) $-\frac{۳}{۲}$

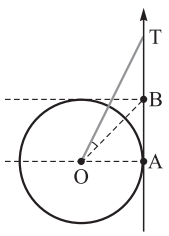
۱۱۹- فرض کنید نمودارهای دو تابع $y=x\sqrt{x}$ و $y=x^۲+ax+b$ در یک نقطهٔ مشترک، بر یک خط مماس باشند. اگر طول نقطهٔ مشترک ۴ باشد، مقدار b کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۱۲۰- در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^۲+۶x} & ۰\le x<۴\\ [\frac{x}{۴}](x^۲-۹x) & ۴\le x<۸\end{cases}$، مقدار $f'(۵)-f'(۲)$، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۱۲۱- با توجه به دایرهٔ مثلثاتی مقابل، اگر $BT=۲$ باشد، مقدار $\tan(\hat{TOB})$، کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۴}$
۲) $\frac{۱}{۳}$
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) $\frac{۲}{۳}$

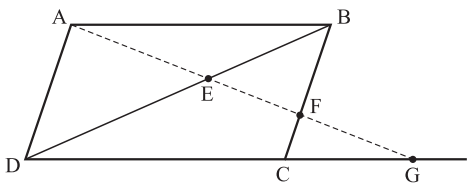
۱۲۲- یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین با طول قاعده‌های $\frac{۹}{۲}$ و ۸ واحد، بر دایره‌ای محیط شده است. فاصلهٔ دورترین نقاط دایره، تا یک رأس قاعدهٔ بزرگ ذوزنقه، کدام است؟

۱) ۹ ۲) $۳+۴\sqrt{۲}$ ۳) ۸ ۴) ۷/۵

۱۲۳- چند نقطهٔ متمایز برای رأس C در مثلث ABC واقع در صفحهٔ مختصات، می‌توان یافت که فاصلهٔ رأس C از نقطهٔ A و پاره‌خط AB، به ترتیب ۷ و ۵ واحد باشد؟

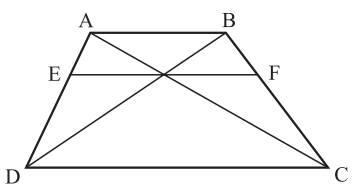
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۲۴- در شکل مقابل، چهارضلعی $ABCD$ متوازی‌الاضلاع است. مقدار $EF\times EG$ کدام است؟



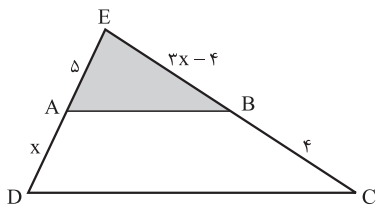
۱) $EA^۲$
۲) $ED^۲$
۳) $EB\times ED$
۴) $FB\times FC$

۱۲۵- در شکل زیر، $AB\ ||\ EF\ ||\ DC$ و اندازهٔ پاره‌خط‌های AB و DC، به ترتیب ۵ و ۹ واحد است. اندازهٔ پاره‌خط EF کدام است؟



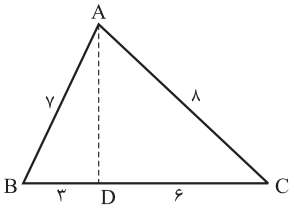
۱) $\frac{۴۵}{۷}$
۲) $\frac{۴۵}{۶}$
۳) $۳\sqrt{۵}$
۴) ۷

۱۲۶- در شکل مقابل، مساحت ذوزنقهٔ $ABCD$ چند برابر مساحت مثلث EAB است؟



۱) $\frac{۹}{۴}$ ۲) $\frac{۱۶}{۹}$ ۳) $\frac{۲۵}{۱۶}$ ۴) $\frac{۳۶}{۲۵}$

۱۲۷- در شکل مقابل اندازهٔ پاره‌خط AD ، کدام است؟



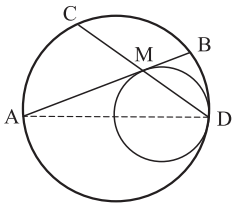
۱) $\sqrt{۳۷}$

۲) ۶

۳) $۲\sqrt{۷}$

۴) $۲\sqrt{۱۰}$

۱۲۸- در شکل زیر، دو دایره در نقطهٔ D مماس داخل و شعاع یکی با قطر دیگری، برابر است. وتر AB از دایرهٔ بزرگ‌تر بر دایرهٔ داخل، در نقطهٔ M، مماس است. نسبت $\frac{MC}{MB}$ ، کدام است؟



۱) $\sqrt{۲}$

۲) $\frac{۳}{۲}$

۳) $\sqrt{۳}$

۴) ۲

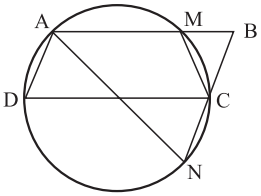
۱۲۹- چهار نقطهٔ A(۱,۳) ، B(۱۵,۹) ، M(a,۰) و N(a + ۵,۰) در صفحهٔ مختصات مفروض‌اند. کم‌ترین اندازهٔ خط شکستهٔ AMNB ، کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۱۹ ۳) ۲۰ ۴) ۲۱

۱۳۰- دو کره به شعاع‌های ۳ و ۴ واحد، که مرکزهای آن‌ها با یکدیگر ۵ واحد فاصله دارند، متقاطع‌اند. مساحت مکان هندسی نقاط مشترک این دو کره، کدام است؟

۱) $۳/۲۴\pi$ ۲) $۴/۴۱\pi$ ۳) $۴/۸\pi$ ۴) $۵/۷۶\pi$

۱۳۱- در شکل زیر، چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع است. تعداد مثلث‌های متساوی‌الساقین، کدام است؟



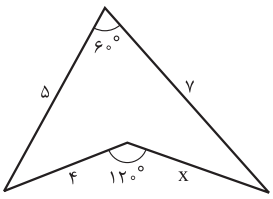
۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

۱۳۲- در شکل مقابل، مقدار (x+۲) کدام است؟



۱) $۳\sqrt{۳}$

۲) $۲\sqrt{۷}$

۳) $۴\sqrt{۲}$

۴) $۳\sqrt{۵}$

۱۳۳- دایره‌ای به مرکز (۱,۳) بر روی خط راست $۵x+۱۲y=۱۵$ ، وتری به طول $۲\sqrt{۲۱}$ ، جدا می‌کند. این دایره بر روی محورxها، وتری با کدام اندازه جدا می‌کند؟

۱) $۲\sqrt{۶}$ ۲) ۶ ۳) $۲\sqrt{۱۵}$ ۴) ۸

۱۳۴- از میان دایره‌های گذرا از نقطهٔ A(۳,۲) و مماس بر خطوط $۳x-۴y=۰$ و $y=۰$ ، کوچک‌ترین شعاع دایره کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۱۳}{۹}$

۱۳۵- یک بیضی به قطرهای $AA'=۱۴$ و $BB'=۴\sqrt{۶}$ و کانون F نزدیک به نقطهٔ A ، مفروض است. خط عمود بر قطر AA' از نقطهٔ F ، دایره به قطر AA' را در نقطهٔ M قطع می‌کند. اندازهٔ پاره‌خط AM ، کدام است؟

۱) ۷ ۲) $۲\sqrt{۷}$ ۳) $۲\sqrt{۶}$ ۴) $۲\sqrt{۳}$

۱۳۶- در سهمی به معادلهٔ $y^۲+ay+bx-۹=۰$ ، معادلهٔ خط هادی، $x=\frac{۱۳}{۴}$ و محور تقارن آن $y=۱$ است. مقدارهای b ، کدام‌اند؟

۱) ۵,۸ ۲) ۵,۷ ۳) ۴,۸ ۴) ۳,۷

۱۳۷- اگر $A=\begin{bmatrix} ۳ & -۳ & ۴ \\ ۲ & -۳ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}$ باشد، درایه‌های سطر اول ماتریس $A^۴$ ، کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

۱۳۸- فرض کنید $A=\begin{bmatrix}\frac{۳}{۴} & \frac{۱}{۲}\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}$ و ماتریس X، جواب معادلهٔ $AX=A^{-۱}$، باشد. ماتریس X، کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}-۳۲ & ۱۴\\ ۴۸ & -۲۵\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}۳۲ & -۱۴\\ -۵۶ & ۲۵\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}۱۶ & -۷\\ -۲۸ & ۲۱\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}۱۶ & -۷\\ -۲۵ & ۱۴\end{bmatrix}$

۱۳۹- جواب‌های معادلهٔ $\begin{vmatrix}۱ & ۲ & ۳\\ -۲ & ۴ & x+۵\\ x-۱ & ۶ & -۱\end{vmatrix}=۰$، کدام است؟

۱) $۴,-۹$ ۲) $۳,-۸$ ۳) $-۴,۹$ ۴) $-۳,۸$

۱۴۰- طول یک مستطیل ۲ واحد کم‌تر از ۱/۵ برابر عرض آن است. اگر مساحت مستطیل ۱۹۲ واحد مربع باشد، محیط آن کدام است؟

۱) ۵۲ ۲) ۵۶ ۳) ۶۰ ۴) ۶۴

۱۴۱- تعداد اعداد چهاررقمی با ارقام غیرتکراری که شامل رقم ۵ باشند، کدام است؟

۱) ۱۸۴۸ ۲) ۱۷۹۲ ۳) ۱۷۴۸ ۴) ۱۶۵۸

۱۴۲- تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x+y+z+t=۱۱$، به شرط آن‌که $x<۵$ باشد، کدام است؟

۱) ۲۱۰ ۲) ۲۲۰ ۳) ۲۷۰ ۴) ۲۸۰

۱۴۳- حداقل چند عدد از مجموعهٔ اعداد طبیعی متوالی $\{۱,۲,۳,\ldots,۳۰\}$ انتخاب شود، تا مطمئن باشیم بین آن‌ها حداقل دو عدد با مقسوم‌علیه مشترک بزرگ‌تر از یک، وجود دارد؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۲ ۳) ۱۱ ۴) ۱۰

۱۴۴- یک تاس سالم را سه بار به طور متوالی پرتاب می‌کنیم، احتمال روشدن حداقل یک بار عدد ۶، کدام است؟

۱) $\frac{۱۳}{۳۶}$ ۲) $\frac{۴۱}{۱۰۸}$ ۳) $\frac{۹۱}{۲۱۶}$ ۴) $\frac{۳۱}{۷۲}$

۱۴۵- تاس همگنی را سه بار پرتاب می‌کنیم. اگر بدانیم مجموع اعداد روشده یک عدد فرد است، احتمال این‌که لااقل یکی از تاس‌های روشده ۳ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱۵}{۳۶}$

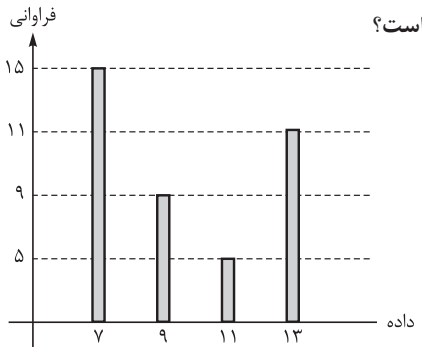
۱۴۶- در جعبهٔ اول ۶ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه و در جعبهٔ دوم ۴ مهرهٔ سفید و ۵ مهرهٔ سیاه قرار دارند. از جعبهٔ اول یک مهره به دلخواه خارج و در جعبهٔ دوم می‌اندازیم. سپس دو مهره از جعبهٔ دوم بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال، لااقل یکی از این دو مهره سفید است؟

۱) $\frac{۲۰}{۲۷}$ ۲) $\frac{۳۴}{۴۵}$ ۳) $\frac{۳۸}{۴۵}$ ۴) $\frac{۲۳}{۲۷}$

۱۴۷- در دو پیشامد مستقل A و B، اگر $P(A\cap B)=۰/۱$، $P(A\cup B)=۰/۶$ و با فرض $P(B)<P(B')$، احتمال وقوع پیشامد B، کدام است؟

۱) ۰/۴ ۲) ۰/۳ ۳) ۰/۲ ۴) ۰/۲۵

۱۴۸- با توجه به نمودار میله‌ای فراوانی داده‌های کمی گسسته، تفاضل میانه از میانگین، کدام است؟



۱) ۰/۳
۲) ۰/۴
۳) ۰/۵
۴) ۰/۶

۱۴۹- فرض کنید خارج قسمت و باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد طبیعی سه‌رقمی m بر n به ترتیب، ۲۹ و ۱۷ باشند. تعداد عددهای طبیعی m بخش‌پذیر بر ۵، کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۵۰- در مجموعهٔ اعداد طبیعی اگر $d=(۳n^۲-۲n+۶\ ,\ ۳n+۵)$ و $d\neq ۱$ باشد، عدد d کدام است؟

۱) ۴۱ ۲) ۴۳ ۳) ۴۷ ۴) ۵۳

۱۵۱- اگر عدد $۲^n-۱$ بر عدد ۱۰۵ بخش‌پذیر باشد، تعداد اعداد دورقمی n، کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

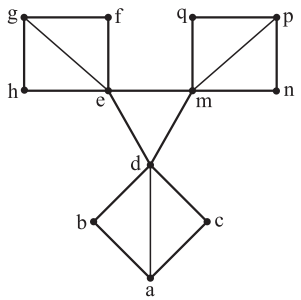
۱۵۲- پنج برابر عدد دورقمی $\overline{aa}$ را در سمت چپ $\overline{aa}$ قرار داده و آن را m می‌نامیم. m همنهشت کدام عدد زیر، به پیمانهٔ ۱۸۳۷ است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۵۳- درجهٔ رأس‌های یک گراف ۵، ۴، ۴، ۳، ۳ و ۱ است. چند دور با طول ۴، موجود است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۱۵۴- در گراف مقابل، تعداد مجموعه‌های متمایز احاطه‌گر مینیمال، کدام است؟



۱) ۸

۲) ۶

۳) ۴

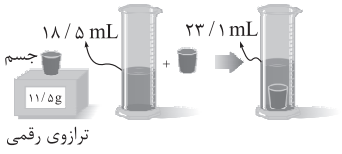
۴) ۳

۱۵۵- در یک گراف ۵ رأسی K ـ منتظم با بیشترین مقدار ممکن K، تعداد دورها با طول ۴، کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

فیزیک

۱۵۶- در یک آزمایش، جرم وحجم یک جسم جامد را مطابق شکل زیر، پیدا می‌کنیم. با توجه به داده‌های روی شکل چگالی جسم در SI چه‌قدر است؟

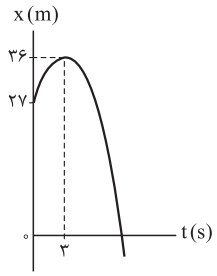


۱) ۲۵۰۰ ۲) ۲۰۵۰
۳) ۲/۵ ۴) ۲/۰۵

۱۵۷- متحرکی روی خط راست با شتاب ثابت حرکت می‌کند و در مدت ۵ s، ۷۵ m جابه‌جا می‌شود و بزرگی سرعتش به ۲۰ $\frac{m}{s}$ می‌رسد. در ۵ ثانیهٔ بعدی سرعت متوسط متحرک چند متر بر ثانیه می‌شود؟

۱) ۱۵ ۲) ۲۵ ۳) ۳۰ ۴) ۳۵

۱۵۸- شکل زیر، نمودار مکان ـ زمان متحرکی است که در مسیر مستقیم با شتاب ثابت حرکت می‌کند. مسافتی که متحرک در بازهٔ زمانی $t_1 = ۰$ تا $t_2 = ۱۰\ s$ طی می‌کند، چند متر است؟

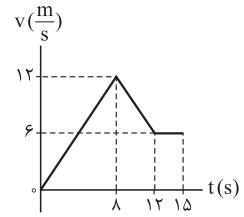


۱) ۴۰
۲) ۴۵
۳) ۵۸
۴) ۸۵

۱۵۹- اتومبیل A در جهت محور x با تندی ثابت ۱۰ $\frac{m}{s}$ در لحظهٔ $t = ۰$ از مبدأ محور عبور می‌کند و پس از ۱۱ s حرکتش با شتاب ثابت ۲ $\frac{m}{s^2}$ کند می‌شود. اتومبیل B نیز در جهت x در لحظهٔ $t = ۰$ با تندی اولیه ۲ $\frac{m}{s}$ از مبدأ محور عبور می‌کند و حرکتش با شتاب ثابت ۲ $\frac{m}{s^2}$ تند می‌شود و پس از ۵ ثانیه با تندی ثابت به حرکت خود ادامه می‌دهد. لحظه‌ای که دو اتومبیل به هم می‌رسند، تندی اتومبیل B چند متر بر ثانیه از تندی اتومبیل A بیشتر است؟

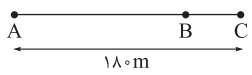
۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۶۰- نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. اگر در لحظهٔ $t_1 = ۲\ s$ مکان متحرک در SI به صورت $\vec{x}_1 = ۶\vec{i}$ باشد، مکان متحرک در لحظهٔ $t_2 = ۱۵\ s$ در SI، کدام است؟



۱) $۹۳\vec{i}$ ۲) $۹۶\vec{i}$
۳) $۱۰۵\vec{i}$ ۴) $۱۱۸\vec{i}$

۱۶۱- دو متحرک هم‌زمان از نقطه‌های A و C با سرعت‌های ثابت به سمت یکدیگر حرکت می‌کنند و در نقطهٔ B از کنار هم می‌گذرند و در ادامه، ۱۶ s طول می‌کشد تا متحرک اول از B به C برسد و ۲۵ s طول می‌کشد تا دومی از B به A برسد. بزرگی سرعت متحرک اول چند متر بر ثانیه است؟



۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۸

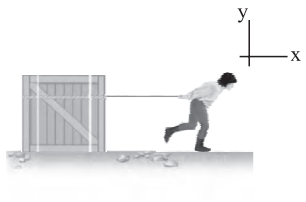
۱۶۲- گلوله‌ای از ارتفاع H رها می‌شود. از لحظهٔ رهاشدن تا مدت‌زمانی که $\frac{۱}{۹}$H را طی می‌کند، سرعت متوسط آن ۴/۹ $\frac{m}{s}$ است. این گلوله با تندی (سرعت) چند متر بر ثانیه به زمین می‌رسد؟ (مقاومت هوا ناچیز و $g = ۹/۸\ \frac{m}{s^2}$ است.)

۱) ۱۴/۷ ۲) ۱۹/۸ ۳) ۲۹/۴ ۴) ۳۹/۲

۱۶۳- معادلهٔ تکانهٔ جسمی برحسب زمان در SI به صورت $p = ۱۵t^2 + ۵t$ می‌باشد. نیروی خالص (برایند) متوسط وارد بر جسم در بازهٔ زمانی $t_1 = ۳\ s$ تا $t_2 = ۶\ s$ چند نیوتون است؟

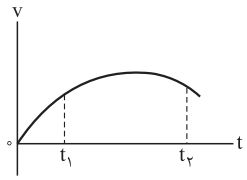
۱) ۷۰ ۲) ۸۵ ۳) ۱۴۰ ۴) ۱۹۰

۱۶۴- مطابق شکل زیر، شخصی جعبهٔ ساکنی به جرم ۵۰ kg را با نیروی ثابت و افقی $\vec{F} = (۲۵۰\ N)\vec{i}$ می‌کشد. اگر ضریب اصطکاک ایستایی و جنبشی بین جعبه و سطح به ترتیب ۰/۳ و ۰/۶ باشد، نیرویی که جسم به سطح وارد می‌کند، در SI کدام است؟ ($g = ۱۰\ \frac{m}{s^2}$)



۱) $(-۵۰۰\ N)\vec{j}$ ۲) $(۵۰۰\ N)\vec{j}$
۳) $(-۲۵۰\ N)\vec{i} + (۵۰۰\ N)\vec{j}$ ۴) $(۲۵۰\ N)\vec{i} + (-۵۰۰\ N)\vec{j}$

۱۶۵- نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که در مسیر مستقیم حرکت می‌کند، به صورت شکل زیر است. بزرگی نیروی خالص وارد بر این متحرک (برایند نیروها) در بازهٔ زمانی بین t_1 تا t_2 چگونه تغییر می‌کند؟



۱) پیوسته ثابت
۲) پیوسته افزایش
۳) ابتدا افزایش، سپس کاهش
۴) ابتدا کاهش، سپس افزایش

۱۶۶- فاصلهٔ ماهواره‌ای تا سطح زمین به اندازهٔ شعاع زمین است. اگر این ماهواره در مداری قرار گیرد که فاصله‌اش تا سطح زمین ۱/۵ برابر شعاع زمین باشد، شتاب مرکزگرای آن چگونه تغییر می‌کند؟

۱) ۲۰ درصد افزایش می‌یابد. ۲) ۲۰ درصد کاهش می‌یابد. ۳) ۳۶ درصد افزایش می‌یابد. ۴) ۳۶ درصد کاهش می‌یابد.

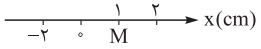
۱۶۷- نوسانگری به جرم ۲۰۰ g روی پاره‌خطی به طول ۴ cm حرکت هماهنگ ساده انجام می‌دهد و در هر دقیقه ۱۵۰ نوسان کامل انجام می‌دهد. در لحظه‌ای که بزرگی سرعت نوسانگر $5\sqrt{2}\pi \frac{cm}{s}$ است، انرژی پتانسیل آن چند میلی‌ژول است؟ $(\pi^2 = 10)$

۱) ۲/۵ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۱۰

۱۶۸- نوسانگری روی سطح افقی بدون اصطکاک نوسان می‌کند، لحظه‌ای که جهت حرکت نوسانگر تغییر می‌کند، بزرگی شتاب آن $0/8\pi^2 \frac{m}{s^2}$ و لحظه‌ای که نیروی وارد بر نوسانگر صفر می‌شود، بزرگی سرعت آن به $0/2\pi \frac{m}{s}$ می‌رسد. بزرگی شتاب نوسانگر در مکان $x = 1\,cm$ چند متر بر مربع ثانیه است؟

۱) $0/16\pi^2$ ۲) $0/36\pi^2$ ۳) 5π ۴) 50π

۱۶۹- نوسانگری به جرم ۲ kg به انتهای فنری به ثابت k متصل است و مطابق شکل زیر روی سطح افقی بدون اصطکاک با دامنهٔ ۲ cm نوسان می‌کند. اگر بزرگی شتاب نوسانگر در نقطهٔ M، $4 \frac{m}{s^2}$ باشد، k چند نیوتون بر متر است؟

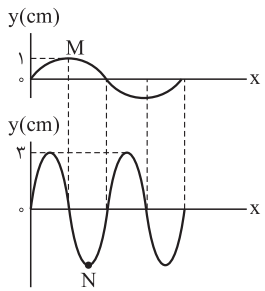


۱) ۸۰۰ ۲) ۴۰۰ ۳) ۸۰ ۴) ۴۰

۱۷۰- توان چشمهٔ صوتی ۴۸ وات است. در فاصلهٔ چند متری این چشمه، تراز شدت صوت ۸۰ دسی‌بل است؟ (از جذب انرژی توسط محیط صرف نظر شود، $\pi = 3$ و $I_0 = 10^{-12} \frac{W}{m^2}$)

۱) ۱۰۰ ۲) ۲۰۰ ۳) ۶۰۰ ۴) ۸۰۰

۱۷۱- در شکل زیر، دو موج عرضی با تندی‌های مساوی در دو طناب منتشر می‌شوند، در مدت‌زمانی که ذرهٔ M، دو نوسان انجام می‌دهد، ذرهٔ N چند نوسان انجام می‌دهد؟

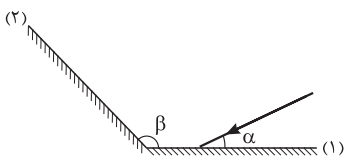


۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۱۷۲- تاری به طول ۵۰ cm بین دو نقطه محکم بسته شده و بسامد هماهنگ سوم آن ۲۱۰ هرتز است. اگر جرم تار ۵ گرم باشد، نیروی کشش آن چند نیوتون است؟

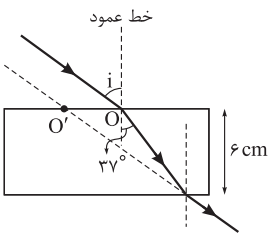
۱) ۴۹ ۲) ۹۸ ۳) ۱۴۷ ۴) ۲۴۱

۱۷۳- مطابق شکل زیر، پرتو نوری تحت زاویهٔ α به آینهٔ (۱) می‌تابد و پس از بازتاب به آینهٔ (۲) می‌تابد. پرتو بازتابیده از آینهٔ (۲) چه زاویه‌ای با سطح آن آینه می‌سازد؟



۱) $\pi - \beta$ ۲) $\beta - \alpha$
۳) $\pi - (\beta - \alpha)$ ۴) $\pi - (\alpha + \beta)$

۱۷۴- پرتو نوری، مطابق شکل زیر از هوا به یک تیغهٔ متوازی‌السطوح می‌تابد و پس از شکست در محیط شفاف، دوباره وارد هوا می‌شود. اگر امتداد پرتو خروجی در O' به تیغه برخورد کند و $OO' = 3/5\,cm$ باشد، ضریب شکست محیط شفاف چه‌قدر است؟ $(\sin 37^\circ = 0/6)$



۱) $\frac{5}{4}$ ۲) $\frac{4}{3}$
۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{5}{3}$

۱۷۵- در آزمایش فوتوالکتریک تابع کار فلز $۲/۸\ eV$ است. نوری با طول موج λ به فلز می‌تابد و سبب گسیل فوتوالکترون‌هایی با بیشینهٔ انرژی جنبشی $۴/۴\ eV$ می‌شود. λ چند میکرومتر است؟ $(h = ۴\times ۱۰^{-۱۵}\ eV.s, c = ۳\times ۱۰^{۸}\ \frac{m}{s})$

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۵۰}{۳}$ ۴) $\frac{۱۰۰۰}{۳}$

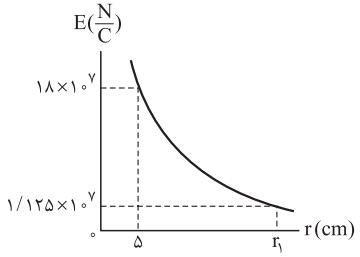
۱۷۶- اختلاف طول موج دومین و سومین خط طیفی اتم هیدروژن در رشتهٔ پاشن $(n' = ۳)$ چند نانومتر است؟ $(R = \frac{۱}{۱۰۰}(nm)^{-۱})$

۱) $\frac{۸۲۵}{۸}$ ۲) ۱۵۰ ۳) $\frac{۸۲۵}{۴}$ ۴) ۳۰۰

۱۷۷- بار الکتریکی کره‌ای فلزی به شعاع $۵\ cm$ برابر $۱۵۷\ nC$ است. بار الکتریکی موجود در هر سانتی‌متر مربع از سطح این کره چند پیکوکولن است؟

۱) ۲ ۲) ۵ ۳) ۲۰۰ ۴) ۵۰۰

۱۷۸- نمودار تغییرات میدان الکتریکی حاصل از بار نقطه‌ای q برحسب فاصله از آن به صورت شکل زیر است، اندازهٔ q چند میکروکولن و $r_۱$ چند سانتی‌متر است؟ $(k = ۹\times ۱۰\ \frac{N.m^۲}{C^۲})$



۱) ۱۰، ۵۰
۲) ۲۰، ۵۰
۳) ۱۰، ۲۵
۴) ۲۰، ۲۵

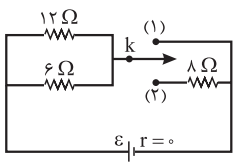
۱۷۹- مطابق شکل زیر، دو ذرهٔ باردار $q_۱ = -۲q$ و $q_۲ = ۶q$ در فاصلهٔ $۳r$ از هم قرار دارند و بزرگی میدان الکتریکی خالص (برایند) ناشی از دو ذره در نقطهٔ O برابر $E_۱$ است. اگر ۵۰ درصد از بار $q_۲$ به $q_۱$ منتقل شود، بزرگی میدان الکتریکی خالص (برایند) در نقطهٔ O برابر $E_۲$ می‌شود. $\frac{E_۲}{E_۱}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۱۴}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۱۸۰- اختلاف پتانسیل بین دو صفحهٔ خازن را $۱/۵$ برابر می‌کنیم در نتیجه $۲۰\ \mu C$ بر بار ذخیره‌شده در آن اضافه می‌شود و انرژی آن نیز $۲۰۰\ \mu J$ افزایش می‌یابد. ظرفیت خازن چند میکروفاراد است؟

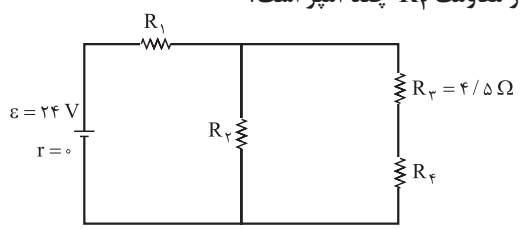
۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) ۱۵ ۴) ۲۰

۱۸۱- در مدار شکل زیر، ابتدا کلید در حالت (۱) قرار دارد و توان خروجی باتری $P_۱$ است. اگر کلید در حالت (۲) قرار گیرد، توان خروجی باتری $P_۲$ می‌شود. $\frac{P_۲}{P_۱}$ چه‌قدر است؟



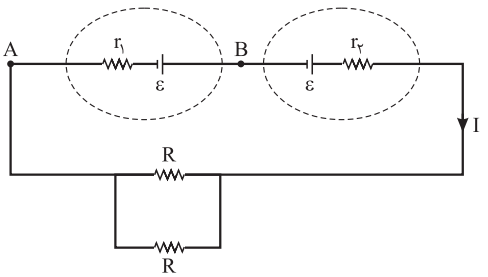
۱) ۲ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۱۸۲- در مدار زیر، توان مصرفی هر یک از مقاومت‌ها یکسان است. جریان عبوری از مقاومت $R_۲$ چند آمپر است؟



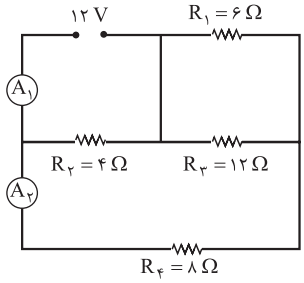
۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۱۸۳- در مدار زیر، اختلاف پتانسیل بین دو نقطهٔ A و B برابر صفر است. کدام مورد درست است؟



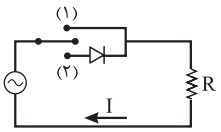
۱) $R = ۲r_۱ = ۲r_۲$
۲) $R = ۲(r_۱ - r_۲)$
۳) $R = r_۱ = r_۲$
۴) $R = r_۱ - r_۲$

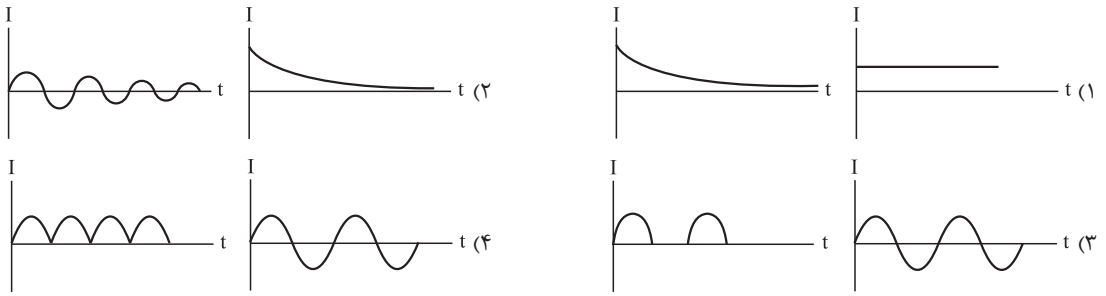
۱۸۴- در مدار زیر، آمپرسنج‌های آرمانی A_1 و A_2 به ترتیب چند آمپر را نشان می‌دهند؟



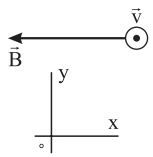
۱) ۳ و ۱
۲) ۳ و ۱/۵
۳) ۴ و ۱
۴) ۴ و ۱/۵

۱۸۵- در شکل زیر، ابتدا کلید در حالت (۱) قرار می‌گیرد و سپس در حالت (۲) قرار می‌گیرد. نمودار جریان الکتریکی به ترتیب به کدام صورت خواهد بود؟



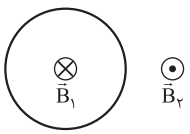


۱۸۶- مطابق شکل زیر، الکترونی با سرعتی به بزرگی $2\times10^5\ m/s$ درون میدان مغناطیسی یکنواختی به بزرگی $40\ G$ و میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E}$ بدون انحراف به حرکت خود ادامه می‌دهد. $\vec{E}$ در SI کدام است؟ (از جرم الکترون صرف نظر کنید.)



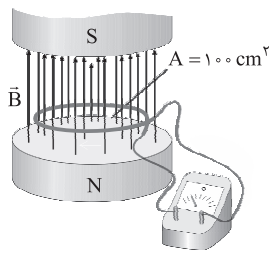
۱) $(-2\times10^5)\vec{j}$
۲) $(2\times10^5)\vec{j}$
۳) $(-8\times10^2)\vec{j}$
۴) $(8\times10^2)\vec{j}$

۱۸۷- شکل زیر، یک حلقهٔ حامل جریان الکتریکی را نشان می‌دهد که $\vec{B}_1$ و $\vec{B}_2$ بردارهای میدان مغناطیسی داخل و بیرون حلقه‌اند. کدام مورد دربارهٔ جریان الکتریکی حلقه و اندازهٔ بردارهای میدان درست است؟



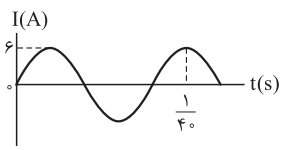
۱) ساعتگرد، $B_1 = B_2$
۲) ساعتگرد، $B_1 > B_2$
۳) پادساعتگرد، $B_1 = B_2$
۴) پادساعتگرد، $B_1 > B_2$

۱۸۸- در شکل زیر، میدان مغناطیسی بین قطب‌های یک آهنربای الکتریکی که بر سطح حلقه عمود است، با زمان تغییر می‌کند و در مدت $0/25\ s$ از $0/1$ تسلا رو به بالا به $0/1$ تسلا رو به پایین می‌رسد. بزرگی نیروی محرکهٔ القایی متوسط در حلقه در این مدت چند میلی‌ولت است؟



۱) صفر
۲) ۲
۳) ۴
۴) ۸

۱۸۹- از یک سیملولهٔ آرمانی، جریان متناوب سینوسی که نمودار تغییرات آن برحسب زمان به صورت شکل زیر است، عبور می‌کند. اگر انرژی ذخیره‌شده در سیملوله در لحظهٔ $\frac{1}{400}$ ثانیه برابر ۷۲ میلی‌ژول باشد، ضریب القاوری (خودالقایی) سیملوله چند میلی‌هانری است؟



۱) ۸
۲) ۶
۳) ۴
۴) ۳

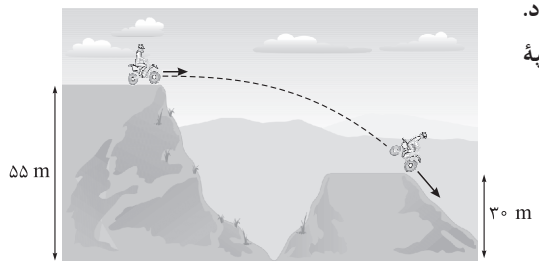
۱۹۰- مرتبهٔ بزرگی تعداد مولکول‌های موجود در یک میکروگرم گاز هیدروژن کدام است؟ (عدد آووگادرو $6/02\times10^{23}$ و جرم مولی گاز هیدروژن ۲ گرم بر مول است.)

۱) 10^{16}
۲) 10^{17}
۳) 10^{18}
۴) 10^{19}

۱۹۱- گلوله‌ای به جرم $40\ g$ با سرعت افقی که بزرگی آن $300\ \frac{m}{s}$ است، به دیواری برخورد می‌کند و پس از طی مسافت $20\ cm$ داخل دیوار، متوقف می‌شود. کار نیرویی که دیوار به گلوله وارد می‌کند، چند ژول است؟

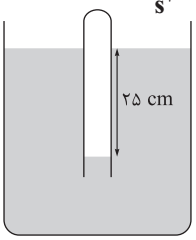
۱) -18
۲) -1800
۳) -6
۴) -600

۱۹۲- در شکل زیر، موتورسوار با سرعتی به بزرگی $۲۰ \frac{m}{s}$ از تپهٔ اول جدا می‌شود. اگر تنها نیروی مؤثر، نیروی وزن باشد، بزرگی سرعت آن در لحظهٔ رسیدن به تپهٔ دوم، چند متر بر ثانیه است؟ $(g = ۱۰ \frac{m}{s^۲})$



۱) ۲۵
۲) ۲۸
۳) ۳۰
۴) ۴۰

۱۹۳- در شکل زیر، اگر چگالی مایع $۲ \frac{g}{cm^۳}$ باشد، فشار گاز محبوس درون لوله چند کیلوپاسکال است؟ $(g = ۱۰ \frac{m}{s^۲}, P_۰ = ۱۰^۵ \text{ Pa})$



۱) ۸۵
۲) ۹۵
۳) ۱۰۵
۴) ۱۲۵

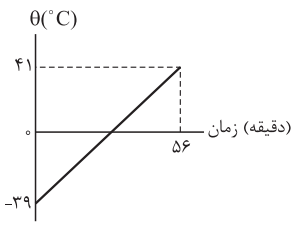
۱۹۴- طول و عرض شیشهٔ پنجره اتاقی ۲/۵ m و ۲ m و ضخامت آن ۵ mm است. در یک روز زمستانی، دمای وجهی از شیشه که در تماس با هوای بیرون است، $-۵^\circ C$ و دمای وجهی از شیشه که در تماس با هوای درون اتاق است، $+۵^\circ C$ است. با استفاده از یک بخاری برقی، گرمای هدر رفته از پنجره را جایگزین می‌کنیم. توان گرمایی این بخاری چند کیلووات است؟ $(k_{\text{شیشه}} = ۰/۶ \frac{W}{m.K})$

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۱۰

۱۹۵- دمای یک کرهٔ فلزی را ۸۰ درجهٔ سلسیوس افزایش می‌دهیم، حجم آن ۰/۰۸ درصد افزایش می‌یابد. اگر دمای این کره را ۶۰ درجهٔ سلسیوس افزایش دهیم، سطح کره چند درصد افزایش می‌یابد؟

۱) ۰/۱۲ ۲) ۰/۰۸ ۳) ۰/۰۶ ۴) ۰/۰۴

۱۹۶- به مایعی به جرم ۵۰۰ گرم در هر دقیقه ۱۰۰ J گرما می‌دهیم. اگر نمودار تغییرات دما برحسب زمان به صورت شکل زیر باشد، گرمای ویژهٔ مایع در SI کدام است؟



۱) ۱۴۰
۲) ۱۶۰
۳) ۲۸۰
۴) ۳۲۰

۱۹۷- در فشار ثابت $۱/۵ \times ۱۰^۵ \text{ Pa}$، دمای ۳ مول گاز آرمانی را چند درجهٔ سلسیوس کاهش دهیم تا حجم آن ۴ لیتر کاهش پیدا کند؟ $(R = ۸ \frac{J}{mol.K})$

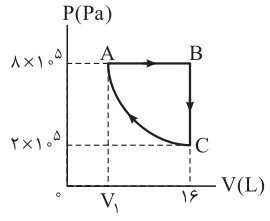
۱) ۵۰ ۲) ۳۰ ۳) ۲۵ ۴) ۱۵

۱۹۸- مقداری گاز دواتمی، در یک فرایند هم‌فشار ۵۰۰ J کار روی محیط انجام می‌دهد. انرژی درونی گاز چگونه تغییر می‌کند؟ $(C_V = \frac{۵}{۲}R)$

۱) ۱۲۵۰ J، کاهش ۲) ۱۲۵۰ J، افزایش ۳) ۱۷۵۰ J، کاهش ۴) ۱۷۵۰ J، افزایش

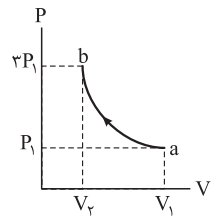
۱۹۹- مقداری گاز اکسیژن، چرخه ABCA را طی کرده است و فرایند CA هم‌دما است. این گاز در مسیر ABC، چند ژول گرما دریافت کرده است؟

$(C_V = \frac{۵}{۲}R, C_P = \frac{۷}{۲}R, R = ۸ \frac{J}{mol.K})$



۱) ۵۷۶۰۰
۲) ۳۳۶۰۰
۳) ۲۴۰۰۰
۴) ۹۶۰۰

۲۰۰- مقداری گاز آرمانی، طی یک فرایند بی‌دررو، از حالت a به حالت b می‌رود. کدام مورد درست است؟



۱) $V_۲ > \frac{۱}{۳}V_۱$ و دمای گاز کاهش می‌یابد.
۲) $V_۲ < \frac{۱}{۳}V_۱$ و دمای گاز کاهش می‌یابد.
۳) $V_۲ > \frac{۱}{۳}V_۱$ و دمای گاز افزایش می‌یابد.
۴) $V_۲ < \frac{۱}{۳}V_۱$ و دمای گاز افزایش می‌یابد.

شیمی

۲۰۱- کدام مطلب، دربارهٔ اتم درست است؟

۱) انرژی لایه‌ها و تفاوت انرژی میان آن‌ها با دورشدن از هستهٔ اتم بیشتر می‌شود.

۲) اتم برانگیخته وضعیت ناپایداری دارد و با از دست دادن انرژی، همواره به حالت پایه برمی‌گردد.

۳) هر عنصر، طیف نشری خطی ویژهٔ خود را دارد که با تفسیر آن می‌توان به انرژی لایه‌های الکترونی اتم آن پی برد.

۴) اگر طول موج بازگشت الکترون از لایهٔ چهارم به لایهٔ سوم برابر ۴۸۶ nm باشد، طول موج بازگشت الکترون از لایهٔ سوم به لایهٔ دوم می‌تواند حدود ۴۳۲ nm باشد.

۲۰۲- چند مورد از مطالب زیر، درست است؟

- **در عنصرهای اصلی، به لایهٔ آخر هر اتم، لایهٔ ظرفیت گفته می‌شود.**
- **انرژی زیرلایهٔ 5d از زیرلایهٔ 6p کم‌تر و از زیرلایهٔ 4f بیشتر است.**
- **عنصری که اتم آن در لایهٔ ظرفیت خود الکترون بیشتری دارد، واکنش‌پذیری بیشتری دارد.**
- **گنجایش الکترونی زیرلایهٔ $l = 4$ یک اتم، با شمار عنصرهای دورهٔ پنجم جدول تناوبی، برابر است.**
- **دو یا چند عنصر که شمار الکترون‌های ظرفیتی آن‌ها برابر باشد، در یک گروه جدول تناوبی جای دارند.**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۰۳- شمار یون‌های موجود در ۸۴ گرم منیزیم سولفید، چند برابر شمار یون‌های مثبت موجود در ۱۶/۶ گرم سدیم نیترید است؟ $(S = ۳۲ , Mg = ۲۴ , Na = ۲۳ , N = ۱۴ : g.mol^{-1})$

۱) ۰/۲۷ ۲) ۲/۵ ۳) ۳/۷۵ ۴) ۵

۲۰۴- در لایهٔ استراتوسفر، به ازای هر کیلومتر ارتفاع، به تقریب پنج درجهٔ سلسیوس افزایش دما رخ می‌دهد. اگر دما در ابتدای این لایه برابر ۲۱۷ کلوین و در انتهای آن، برابر ۷ درجهٔ سلسیوس باشد، ارتفاع تقریبی این لایه چند کیلومتر است؟

۱) ۱۱/۶ ۲) ۱۲/۶ ۳) ۲۳ ۴) ۲۵

۲۰۵- نام ترکیب‌های روبه‌رو به ترتیب از راست به چپ کدام است؟ $N_۲O_۳ ، Cr_۲O_۳ ، Cu_۲O ، NF_۳ ، Mg_۳N_۲$

۱) منیزیم نیترید، نیتروژن تری‌فلوئورید، مس (II) اکسید، دی‌کروم تری‌اکسید، نیتروژن اکسید

۲) تری‌منیزیم دی‌نیترید، نیتروژن فلوئورید، مس (II) اکسید، کروم (III) اکسید، نیتروژن اکسید

۳) منیزیم نیترید، نیتروژن تری‌فلوئورید، مس (I) اکسید، کروم (III) اکسید، دی‌نیتروژن تری‌اکسید

۴) دی‌منیزیم تری‌نیترید، نیتروژن فلوئورید، مس (I) اکسید، دی‌کروم تری‌اکسید، دی‌نیتروژن تری‌اکسید

۲۰۶- شمار جفت الکترون‌های پیوندی در چند گونهٔ زیر، با هم برابر است و در ساختار چند ترکیب، پیوند سه‌گانه وجود دارد؟

- **اتین**
- **گوگرد تری‌اکسید**
- **کربن دی‌سولفید**
- **هیدروژن سیانید**
- **کربن مونوکسید**
- **یون فسفات**

۱) ۳، ۴ ۲) ۴، ۴ ۳) ۳، ۳ ۴) ۴، ۳

۲۰۷- چند مورد از مطالب زیر، درست است؟

- **ساختار فیزیکی هر ماده، تعیین‌کنندهٔ خواص و رفتار آن است.**
- **افزایش مقدار کربن دی‌اکسید در هواکره، سبب افزایش pH آب‌ها می‌شود.**
- **میزان اثرگذاری هر یک از انسان‌ها روی قسمت‌های مختلف کرهٔ زمین را ردپا می‌نامند.**
- **روغن‌های گیاهی مانند پلاستیک‌های سبز، به وسیلهٔ جانداران ذره‌بینی در طبیعت تجزیه می‌شوند.**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۰۸- درصد جرمی پتاسیم نیترات در محلول سیرشدهٔ آن در دمای $۴۰^\circ C$، برابر ۳۷/۵٪ است. اگر ۳۶۰ گرم محلول دارای ۱۶۲ گرم این نمک در دمای $۵۰^\circ C$ را تا $۴۰^\circ C$ سرد کنیم، به تقریب چند گرم از آن در محلول باقی می‌ماند و چند مول از آن رسوب می‌کند؟ (گزینه‌ها را از راست به چپ بخوانید و جرم مولی $KNO_۳$ را به تقریب، برابر ۱۰۰ گرم در نظر بگیرید.)

۱) ۰/۲۷ ، ۱۱۸/۸ ۲) ۰/۲۷ ، ۱۳۵ ۳) ۰/۴۳ ، ۱۳۵ ۴) ۰/۴۳ ، ۱۱۸/۸

۲۰۹- اگر نیروهای بین‌مولکولی در اتانول، آب و بین اتانول و آب را به ترتیب با a، b و c نشان دهیم، چند مورد از مقایسه‌های زیر، درست‌اند؟

- **$b > a$**
- **$c < a$**
- **$c > b - a$**
- **$c > b > a$**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۱۰- کدام موارد از مطالب زیر، درست است؟

آ) KCl در هگزان، کم‌محلول است.

ب) انحلال گازها در آب، با تولید گرما، همراه است.

پ) در یک دمای معین، انحلال‌پذیری گازها با فشار، رابطهٔ عکس دارد.

ت) تأثیر دما بر انحلال‌پذیری پتاسیم نیترات در مقایسه با سدیم نیترات بسیار بیشتر است.

۱) آ، پ ۲) آ، ب ۳) ب، ت ۴) ب، پ

۲۱۱- یک نیروگاه حرارتی در روز، ۱۰ تن از یک نوع سوخت فسیلی را می‌سوزاند. اگر غلظت گوگرد در سوخت مصرفی برابر ۶۴۰۰ ppm باشد، با فرض این‌که همهٔ گوگرد به طور کامل بسوزد، چند کیلوگرم آهک (کلسیم اکسید) برای جذب کامل گاز تولیدشده لازم است و آهک لازم در این فرایند را از تجزیهٔ گرمایی چند کیلوگرم کلسیم کربنات با خلوص ۸۰ درصد می‌توان تهیه کرد؟

($Ca = ۴۰ , S = ۳۲ , O = ۱۶ , C = ۱۲ : g.mol^{-۱}$:گزینه‌ها را از راست به چپ بخوانید،)

$SO_۲(g) + CaO(s) \rightarrow CaSO_۳(s)$

$CaCO_۳(s) \rightarrow CO_۲(g) + CaO(s)$

۱) ۱۶۰، ۱۱۲ ۲) ۲۵۰، ۱۱۲ ۳) ۱۴۳، ۱۱۵ ۴) ۲۵۶، ۱۱۵

۲۱۲- چند مورد از مطالب زیر، دربارهٔ عنصر $_{۳۵}X$ درست است؟

- **با عنصر $_{۱۷}Y$ هم‌گروه و با عنصر $_{۲۰}Z$ هم‌دوره است.**
- **می‌تواند در تشکیل ترکیب‌های یونی و کووالانسی شرکت کند.**
- **بزرگ‌ترین شعاع اتمی را در میان عنصرهای هم‌دورهٔ خود دارد.**
- **حالت فیزیکی متفاوت با عنصرهای هم‌دوره و هم‌گروه خود دارد.**
- **بیشترین واکنش‌پذیری را در میان عنصرهای هم‌دوره و هم‌گروه خود دارد.**

۱) ۵ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۱۳- کدام مطلب دربارهٔ نیکل ($_{۲۸}Ni$) و تیتانیم ($_{۲۲}Ti$)، نادرست است؟

۱) نیکل عنصری واسطه و تیتانیم عنصری اصلی است.

۲) شعاع اتمی نیکل از شعاع اتمی تیتانیم کوچک‌تر است.

۳) نیکل و تیتانیم، هر دو در یک دورهٔ جدول تناوبی جای دارند.

۴) نیکل در گروه ۱۰ و تیتانیم در گروه ۴ جدول تناوبی جای دارند.

۲۱۴- با توجه به واکنش‌های زیر، پس از موازنهٔ معادلهٔ آن‌ها، چند مطلب زیر درست است؟

(معادلهٔ واکنش‌ها موازنه شود.)

I) $Fe(OH)_۲(s) + H_۲O(l) + O_۲(g) \rightarrow Fe(OH)_۳(s)$

II) $Al(OH)_۳(s) + H_۲SO_۴(aq) \rightarrow Al_۲(SO_۴)_۳(aq) + H_۲O(l)$

- **برای تشکیل ۱۰۷۰ گرم رسوب $Fe(OH)_۳$، $۱۲/۰۴ \times ۱۰^{۲۳}$ مولکول آب نیاز است.**
- **واکنش I، از نوع اکسایش ـ کاهش و واکنش II، از نوع خنثی‌شدن اسید و باز است.**
- **از واکنش هر مول سولفوریک اسید با آلومینیم هیدروکسید کافی، ۳۶ گرم آب تشکیل می‌شود.**
- **مجموع ضریب‌های استوکیومتری واکنش‌دهنده‌ها در واکنش I با مجموع ضریب‌های استوکیومتری فراورده‌ها در واکنش II برابر است.**

($Fe = ۵۶ , O = ۱۶ , H = ۱ : g.mol^{-۱}$)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۱۵- با توجه به واکنش زیر، به‌ازای مصرف ۰/۳ مول HF، چند گرم NaF تولید و به تقریب چند گرم $Na_۲SiO_۳$ با خلوص ۸۰ درصد مصرف می‌شود؟

(معادلهٔ واکنش موازنه شود.) $Na_۲SiO_۳(s) + HF(aq) \rightarrow H_۲SiF_۶(aq) + NaF(aq) + H_۲O(l)$

($Si = ۲۸ , Na = ۲۳ , F = ۱۹ , O = ۱۶ : g.mol^{-۱}$:گزینه‌ها را از راست به چپ بخوانید،)

۱) ۵/۷، ۳/۱۵ ۲) ۷/۵، ۳/۱۵ ۳) ۵/۷، ۳/۶۵ ۴) ۷/۵، ۳/۶۵

۲۱۶- از واکنش ۱/۸ کیلوگرم زغال با آهن (III) اکسید، چند کیلوگرم آهن، با بازده ۸۵ درصد می‌توان به دست آورد و این مقدار آهن را از واکنش چند کیلوگرم آلومینیم با آهن (III) اکسید خالص کافی در فرایند ترمیت می‌توان تهیه کرد؟

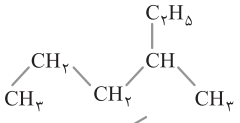
(معادلهٔ واکنش‌ها موازنه شود.)

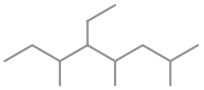
$$\begin{cases} Fe_۲O_۳(s) + C(s) \xrightarrow{\Delta} Fe(l) + CO_۲(g) \\ Al(s) + Fe_۲O_۳(s) \xrightarrow{\Delta} Al_۲O_۳(s) + Fe(l) \end{cases}$$

($Fe = ۵۶ , Al = ۲۷ , O = ۱۶ , C = ۱۲ : g.mol^{-۱}$:گزینه‌ها را از راست به چپ بخوانید،)

۱) ۴/۵۹، ۹/۵۲ ۲) ۶/۱۷، ۹/۵۲ ۳) ۴/۵۹، ۱۵/۸ ۴) ۶/۱۷، ۱۵/۸

۲۱۷- کدام موارد از نام‌گذاری ترکیب‌های زیر، درست است؟

آ) ۲ـ اتیل پنتان : 

ب) ۵ ـ اتیل ـ۲، ۴، ۶ ـ تری‌متیل اوکتان : 

پ) $(CH_3)_2CH-CH_2CH(CH_3)_2$: ۲، ۴ـ دی‌متیل پنتان

ت) $CH_3(CH_2)_2CH(CH_3)CH(CH_3)CH(CH_3)_2$: ۴، ۵، ۶ ـ تری‌متیل هپتان

۱) آ، ت ۲) ب، پ ۳) آ، ب، پ ۴) ب، پ، ت

۲۱۸- ۸/۴ گرم از دومین عضو خانوادهٔ آلکن‌ها در واکنش با کلر کافی، چند گرم ترکیب کلردار تشکیل می‌دهد؟

$(Cl = 35/5 , C = 12 , H = 1 : g.mol^{-1})$

۱) ۲۶/۴ ۲) ۲۲/۶ ۳) ۲۹/۷ ۴) ۲۷/۹

۲۱۹- کدام موارد از مطالب زیر، درست است؟

آ) ظرفیت گرمایی هر نمونه ماده، برعکس ظرفیت گرمایی ویژهٔ آن، به جرم آن وابسته است.

ب) دمای یک نمونه از ماده، معیاری از میزان گرمی (میانگین انرژی جنبشی ذرات سازندهٔ) آن است.

پ) علت دشواربودن انجام واکنش: $C(s, \text{گرافیت}) + 2H_2(g) \rightarrow CH_4(g)$، گرماگیربودن آن است.

ت) تغییر آنتالپی هر واکنش در حجم ثابت، برابر مقدار گرمایی است که سامانهٔ واکنش با محیط دادوستد (مبادله) می‌کند.

۱) آ، ب ۲) آ، ت ۳) ب، پ ۴) پ، ت

۲۲۰- اگر از سوختن کامل ۰/۰۲ مول بنزن، ۶۴ kJ و از سوختن کامل ۰/۱ مول اتانول، ۱۳۸ kJ گرما تولید شود، ارزش سوختی بنزن، به تقریب چند برابر ارزش سوختی اتانول است و از سوختن این مقدار بنزن، چند مول گاز CO_2 تولید می‌شود؟ (گزینه‌ها را از راست به چپ بخوانید، $H = 1 , C = 12 , O = 16 : g.mol^{-1}$)

۱) ۱/۲۵، ۰/۱۲ ۲) ۱/۳۷، ۰/۱۵ ۳) ۱/۲۵، ۰/۱۵ ۴) ۱/۳۷، ۰/۱۲

۲۲۱- اگر آنتالپی پیوندهای $H-H$، $N-H$، $N-N$ و $N\equiv N$ با یکای کیلوژول بر مول، به ترتیب برابر ۴۳۵، ۳۸۹، ۱۵۹ و ۹۴۱ باشد، مطابق واکنش: $N_2(g) + 2H_2(g) \rightarrow H_2N-NH_2(g)$، به‌ازای مصرف $3/01\times10^{25}$ مولکول هیدروژن، چند کیلوژول انرژی جذب می‌شود؟

۱) ۱۲۰۰ ۲) ۲۴۰۰ ۳) ۳۶۰۰ ۴) ۴۸۰۰

۲۲۲- کدام ویژگی‌های یک محلول معین، در خواص آن مؤثرند؟

آ) وزن ب) غلظت پ) حجم ت) ماهیت حلال ث) دما ج) ماهیت حل‌شونده

۱) آ، ب، ت، ث ۲) آ، ث، ج ۳) ب، پ، ت ۴) ب، ت، ث، ج

۲۲۳- از یک واکنش فرضی در دمای معین، داده‌های جدول مقابل به دست آمده است. نسبت ضریب استوکیومتری فراورده(ها) به واکنش‌دهنده(ها) در معادلهٔ موازنه‌شدهٔ واکنش، کدام است؟

زمان (ثانیه)	غلظت ($mol.L^{-1}$)		
	A	E	D
۰	۰/۰۲۰۰	۰	۰
۱۰۰	۰/۰۱۶۹	۰/۰۰۶۳	۰/۰۰۱۶
۲۰۰	۰/۰۱۴۲	۰/۰۱۱۶	۰/۰۰۲۹
۳۰۰	۰/۰۱۲۰	۰/۰۱۶۰	۰/۰۰۴۰
۴۰۰	۰/۰۱۰۱	۰/۰۱۹۹	۰/۰۰۴۹

۱) $\frac{5}{2}$

۲) $\frac{1}{4}$

۳) ۲/۵

۴) ۴

۲۲۴- چند مورد از مطالب زیر، درست است؟

- پلی‌استرها و پلی‌آمیدها به آسانی تجزیه می‌شوند.
- یکی از مصارف عمدهٔ پلی‌لاکتیک اسید، در تهیهٔ ظرف‌های یکبارمصرف است.
- استفاده از نشانه‌های ویژه روی کالاهای پلاستیکی، می‌تواند کار بازیافت مواد را آسان کند.
- برای تهیهٔ صنعتی پلی‌لاکتیک اسید از فراورده‌هایی مانند سیب‌زمینی، نشاسته و شیر ترش‌شده استفاده می‌شود.
- لباس‌های تهیه‌شده از پارچه‌های پلی‌آمیدی، ماندگاری بیشتری نسبت به لباس‌های تهیه‌شده از پلیمرهای حاصل از هیدروکربن‌های سیرنشده دارند.

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۲۲۵- چند مورد از مطالب زیر، درست است؟

- **از دید آرنیوس، جامدهای یونی اکسیژن‌دار، اسید به شمار می‌آیند.**
- **یک ترکیب کم‌محلول در آب، می‌تواند یک الکترولیت قوی باشد.**
- **برخی از ترکیب‌های مولکولی می‌توانند در آب یونیده شوند و رسانای الکتریکی به شمار آیند.**
- **فرایند یونش یک اسید ضعیف تا جایی پیش می‌رود که غلظت مولی یون‌ها با مولکول‌ها برابر شود.**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۲۶- ثابت یونش اسید HA در محلول ۰/۲ مولار آن برابر ۰/۱ است، pH این محلول کدام و با pH محلول چند گرم بر لیتر نیتریک اسید برابر است؟ (گزینه‌ها را از راست به چپ بخوانید، $H=1, N=14, O=16 : g.mol^{-1}$)

۱) ۲، ۳/۶ ۲) ۲، ۳/۶ ۳) ۱، ۳/۶ ۴) ۱، ۳/۶

۲۲۷- ۴/۸ میلی‌لیتر محلول ۵۰٪ جرمی NaOH در دمای اتاق، با آب تا حجم ۷۵۰ میلی‌لیتر رقیق می‌شود. غلظت یون $Na^+(aq)$ با یکای ppm کدام است و اگر برای خنثی‌کردن کامل این محلول، ۷/۳ گرم HCl ناخالص مصرف شده باشد، درصد خلوص اسید کدام است؟ (هر میلی‌لیتر محلول آغازی و رقیق‌شدهٔ NaOH به ترتیب ۱/۵ و ۱ گرم جرم دارد.) $(Cl=35/5, Na=23, O=16, H=1 : g.mol^{-1})$

۱) ۱۸۴۰، ۵۵ ۲) ۱۸۴۰، ۴۵ ۳) ۲۷۶۰، ۴۵ ۴) ۲۷۶۰، ۵۵

۲۲۸- در ۲۵۰ میلی‌لیتر از محلول باز قوی MOH در دمای اتاق، $2/5\times10^{-10}$ مول یون $H_3O^+(aq)$ وجود دارد، محلول این باز، چند مولار است و غلظت یون OH^- در آن با غلظت این یون در محلول چند مولار باریم هیدروکسید برابر است؟

۱) 1×10^{-9}، $2/5\times10^{-10}$ ۲) 1×10^{-9}، 5×10^{-10} ۳) 1×10^{-5}، 2×10^{-6} ۴) 1×10^{-5}، 5×10^{-6}

۲۲۹- عنصر X که عدد اتمی آن ۷ واحد کم‌تر از عدد اتمی دومین عنصر فراوان در پوستهٔ جامد زمین است، به ترتیب با بیشترین و کم‌ترین عدد اکسایش خود، اسید و باز تولید می‌کند. فرمول شیمیایی این اسید و باز کدام است؟

۱) XH_2 ، HXO_2 ۲) XOH ، H_3XO_4 ۳) XH_2OH ، H_2XO_3 ۴) XH_3 ، HXO_2

۲۳۰- اگر آنتالپی فروپاشی شبکهٔ بلور جامد یونی AD از آنتالپی فروپاشی شبکهٔ بلور جامد یونی AX_2 بیشتر باشد، کدام مطالب زیر، می‌تواند درست باشد؟ (عنصرهای مولد یون‌های D و X در یک دوره از جدول تناوبی جای دارند.)

آ) شعاع اتمی D از شعاع اتمی X، بزرگ‌تر است.

ب) شعاع آنیون X از شعاع آنیون D کوچک‌تر است.

پ) بار الکتریکی آنیون D، از بار الکتریکی آنیون X بیشتر است.

ت) D می‌تواند عنصری از گروه ۱۷ و X عنصری از گروه ۱۶ باشد.

۱) آ، ت ۲) ب، پ ۳) آ، ب، پ ۴) ب، پ، ت

۲۳۱- تفاوت مجموع ضرایب استوکیومتری در واکنش‌هایی که از نوع اکسایش ـ کاهش‌اند، کدام است؟

۱) ۳۵ $SO_3(g)+H_2SO_4(aq) \rightarrow H_2S_2O_7(aq)$

۲) ۲۹ $I_2(s)+ClO_3^-(aq)+H_2O(l) \rightarrow IO_3^-(aq)+H^+(aq)+Cl^-(aq)$

۳) ۲۷ $Pb(OH)_3^-(aq)+ClO^-(aq) \rightarrow PbO_2(s)+Cl^-(aq)+OH^-(aq)+H_2O(l)$

۴) ۲۲ $K_2Cr_2O_7(aq)+BaCl_2(aq)+H_2O(l) \rightarrow BaCrO_4(aq)+KCl(aq)+HCl(aq)$

۲۳۲- دربارهٔ سلول گالوانی «سرب ـ پلاتین»، چند مورد از مطالب زیر، درست است؟

$E^\circ[Pb^{2+}(aq)/Pb(s)]=-0/13\ V$, $E^\circ[Pt^{2+}(aq)/Pt(s)]=+1/20\ V$

- **E° سلول برابر ۱/۰۷+ ولت است و در واکنش کلی سلول، سرب نقش کاهنده را دارد.**
- **قدرت اکسندگی Pt^{2+} از Pb^{2+} بیشتر است و سطح تیغه در آند، دارای بار منفی می‌شود.**
- **الکترود سرب، آند است و با انجام واکنش در سلول، غلظت کاتیون در بخش آندی کاهش می‌یابد.**
- **با پیشرفت واکنش سلول به میزان ۲۵٪، $3/01\times10^{23}$ الکترون میان دو الکترود مبادله می‌شود.**
- **الکترون‌ها، با گذر از دیوارهٔ متخلخل بین دو محلول، از قطب منفی به قطب مثبت رفته، سبب کاهش $Pt^{2+}(aq)$ می‌شوند.**

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

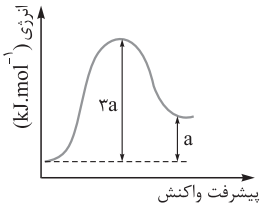
۲۳۳- اگر الکترون‌های آزادشده از اکسایش ۸۰ گرم فلز در نیم‌واکنش آندی:
(معادلهٔ واکنش موازنه شود.) $Fe^{3+}(aq)+Cu(s) \rightarrow Fe^{2+}(aq)+Cu^{2+}(aq)$، در نیم‌واکنش کاتدی سلول سوختی هیدروژن ـ اکسیژن مصرف شود، چند لیتر گاز اکسیژن (در شرایط STP) مصرف و چند گرم آب تولید می‌شود؟
$(Cu=64, Fe=56, O=16, H=1: g.mol^{-1})$

۱) ۱۱/۲۵، ۷ ۲) ۲۲/۵، ۷ ۳) ۱۱/۲۵، ۱۴ ۴) ۲۲/۵، ۱۴

۲۳۴- بهره‌گیری از کاتالیزگر در فرایند تبدیل گازوییل به هیدروکربن‌های سبک‌تر در پالایشگاه، سبب کاهش دمای انجام واکنش از $700\ ^\circ C$ به $500\ ^\circ C$ می‌شود. اگر ظرفیت گرمایی ویژه گازوییل برابر $0/8\ J.g^{-1}.^\circ C^{-1}$ باشد و برای تأمین گرمای لازم از سوختن گاز متان استفاده شود، با کاربرد کاتالیزگر در این فرایند، برای تبدیل یک کیلوگرم گازوییل به فراورده‌های مورد نظر، به تقریب، در مصرف چند لیتر گاز متان (در شرایط STP) صرفه‌جویی و از انتشار چند گرم گاز CO_2 جلوگیری می‌شود؟ (ΔH سوختن گاز متان $-880\ kJ.mol^{-1}$ در نظر گرفته شود، $C=12, O=16: g.mol^{-1}$)

۱) ۸، ۴/۰۷ ۲) ۸/۸، ۴/۰۷ ۳) ۶، ۵/۰۴ ۴) ۶/۸، ۵/۰۴

۲۳۵- با توجه به نمودار تغییر انرژی نسبت به پیشرفت واکنش: $A(g)+X(g) \rightarrow D(g)$، که نشان داده شده است، کدام مطلب، درست است؟

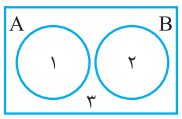


۱) سرعت واکنش کم و $\Delta H - E_a = 2a$ است.
۲) به ازای مصرف ۰/۱ مول گاز A، ۰/۱a kJ انرژی نیاز است.
۳) با افزایش دمای واکنش، سرعت آن افزایش می‌یابد، زیرا $E_a < 3a$ می‌شود.
۴) بیشترین مقدار انرژی لازم برای انجام واکنش، برابر ۳a kJ و کم‌ترین مقدار آن، برابر a kJ است.

سراسری ۹۹ خارج از کشور

ریاضیات

۱۰۱- گزینهٔ ۴ گزینه‌ها را یکی‌یکی بررسی می‌کنیم.
برای سادگی کار، می‌توانیم از نمودار ون زیر هم استفاده کنیم.



چون دو مجموعه جدا از هم‌اند، مجموعهٔ مرجع را به ۳ ناحیهٔ جدا از هم افراز می‌کنند.

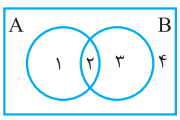
۱) $A \subset B' \Rightarrow ۱ \subset ۱,۳$ درست است.

۲) $A - B' = \varnothing \Rightarrow ۱ - ۱,۳ = \varnothing$ درست است.

۳) $A \cap B' = A \Rightarrow ۱ \cap ۱,۳ = ۱$ درست است.

۴) $(A \cup B)' = \varnothing \Rightarrow (۱,۲)' = ۳ \neq \varnothing$ نادرست است.

۱۰۲- گزینهٔ ۲ مثل سؤال قبل از ناحیه‌های جدا از هم استفاده می‌کنیم و رابطه را ساده می‌کنیم.

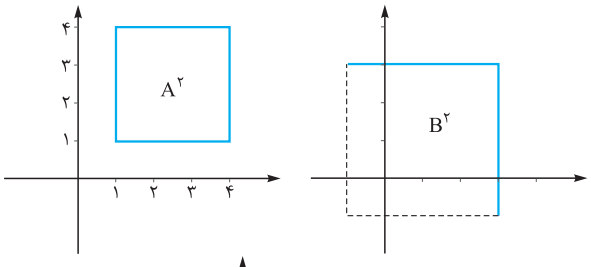


$$(A-(A\cap B'))\cup(B\cap(A\cap B)')$$
$$=(۱,۲-(۱,۲\cap ۱,۴))\cup(۲,۳\cap(۲)')$$
$$=(۱,۲-۱)\cup(۲,۳\cap ۱,۳,۴)=۲\cup ۳=B$$

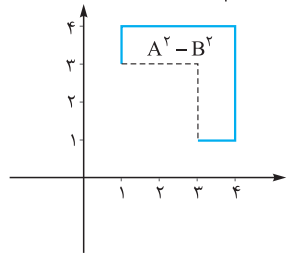
روش ۲ با استفاده از قوانین جبر مجموعه‌ها، رابطهٔ داده‌شده را ساده می‌کنیم.

$$(A-(A\cap B'))\cup(B\cap(A\cap B)')$$
$$=(A\cap(A\cap B')')\cup(B\cap(A'\cup B'))$$
$$=(A\cap(A'\cup B))\cup((B\cap A')\cup(B\cap B'))$$
$$=((A\cap A')\cup(A\cap B))\cup((B\cap A')\cup\varnothing)$$
$$=(\varnothing\cup(A\cap B))\cup(B\cap A')=(A\cap B)\cup(B\cap A')$$
$$=B\cap(A\cup A')=B\cap M=B$$

۱۰۳- گزینهٔ ۲ اول دو مجموعهٔ $A\times A$ و $B\times B$ را مشخص می‌کنیم و سپس $A\times A-B\times B$ را پیدا می‌کنیم.



$\Rightarrow A^۲-B^۲:$



مشاهده می‌شود که مساحت ناحیهٔ $A^۲-B^۲$ برابر ۵ است.

۱۰۴- گزینهٔ ۱ می‌دانیم $\bigcirc \Rightarrow \triangle \equiv \sim\bigcirc \vee \triangle$ بنابراین:

$$\sim p \Rightarrow \sim q \equiv p \vee \sim q$$

حالا گزارهٔ داده‌شده را ساده می‌کنیم:

$$(\sim p \Rightarrow \sim q) \wedge (p \vee q) \equiv (p \vee \sim q) \wedge (p \vee q)$$
$$\equiv p \vee (\sim q \wedge q) \equiv p \vee F \equiv p$$

۱۰۵- گزینهٔ ۱ چندجمله‌ای $p(x)$ بر $۲x-۱$ بخش‌پذیر است، یعنی $p(\frac{۱}{۲})$ باید صفر باشد:

$$p(x)=۲x^۴+ax^۳+۲x^۲-۳x$$
$$\xrightarrow{p(\frac{۱}{۲})=۰} ۲(\tfrac{۱}{۲})^۴+a(\tfrac{۱}{۲})^۳+۲(\tfrac{۱}{۲})^۲-۳(\tfrac{۱}{۲})=۰$$
$$\Rightarrow \frac{۱}{۸}+\frac{a}{۸}+\frac{۱}{۲}-\frac{۳}{۲}=۰ \xrightarrow{\times ۸} ۱+a+۴-۱۲=۰ \Rightarrow a=۷$$

با جای‌گذاری $a=۷$، چندجمله‌ای به صورت زیر درمی‌آید:

$$p(x)=۲x^۴+۷x^۳+۲x^۲-۳x$$

برای محاسبهٔ باقی‌ماندهٔ $p(x)$ بر $x+۲$، کافی است ریشهٔ $x+۲$ یعنی $x=-۲$ را در $p(x)$ قرار دهیم:

$$p(-۲)=۲(-۲)^۴+۷(-۲)^۳+۲(-۲)^۲-۳(-۲)$$
$$=۳۲-۵۶+۸+۶=-۱۰$$

۱۰۶- گزینهٔ ۴ ضابطه‌های دو تابع را با هم برابر قرار می‌دهیم:

$$y_۱=y_۲ \Rightarrow |x-۲|+|x+۱|=x+۷$$

اعداد $x=۲$ و $x=-۱$ ریشه‌های قدرمطلق‌اند. معادله را در سه بازه حل می‌کنیم:

$x>۲: x-۲+x+۱=x+۷ \Rightarrow x=۸$ ✓

$-۱\le x\le ۲: -x+۲+x+۱=x+۷ \Rightarrow x=-۴$ ✗

$x<-۱: -x+۲-x-۱=x+۷ \Rightarrow x=-۲$ ✓

$x=۸$ و $x=-۲$ را در یکی از ضابطه‌ها قرار می‌دهیم تا عرض نقاط تقاطع هم به دست آید:

$$y=x+۷ \xrightarrow{x=۸} A(۸,۱۵)$$
$$y=x+۷ \xrightarrow{x=-۲} B(-۲,۵)$$

فاصلهٔ A تا B برابر است با:

$$AB=\sqrt{(-۲-۸)^۲+(۵-۱۵)^۲}=\sqrt{۲۰۰}=۱۰\sqrt{۲}$$

۱۰۷- گزینهٔ ۴ جای $(f^{-۱}og^{-۱})(-۹)$، می‌نویسیم $f^{-۱}(g^{-۱}(-۹))$.

برای محاسبهٔ $g^{-۱}(-۹)$، کافی است معادلهٔ $g(x)=-۹$ را حل کنیم:

$$\frac{۳-x}{۲}=-۹ \Rightarrow ۳-x=-۱۸ \Rightarrow x=۲۱$$

پس $g^{-۱}(-۹)=۲۱$. ادامه می‌دهیم: $f^{-۱}(\underbrace{g^{-۱}(-۹)}_{۲۱})=f^{-۱}(۲۱)$

آخر سر برای محاسبهٔ $f^{-۱}(۲۱)$، کافی است معادلهٔ $f(x)=۲۱$ را حل کنیم:

$$x^۲-۴x+۹=۲۱ \Rightarrow x^۲-۴x-۱۲=۰$$
$$\Rightarrow (x-۶)(x+۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۶ \checkmark \\ x=-۲ \times \end{cases}$$

با توجه به شرط دامنهٔ f، فقط $x=۶$ قابل قبول است.

۱۰۸- گزینهٔ ۲ برای قرینه‌کردن یک تابع نسبت به مبدأ باید آن را یک بار نسبت به محور xها و یک بار هم نسبت به محور yها قرینه کرد:

۱- قرینه نسبت به محور xها: ضابطه را در منفی ضرب می‌کنیم:

$$y=-(x-1)^2$$

۲- قرینه نسبت به محور yها: جای xها، $-x$ می‌گذاریم:

$$y=-(-x-1)^2=-(x+1)^2$$

آخر سر آن را ۴ واحد به بالا می‌بریم:

۳- چهار واحد به بالا: ۴ واحد به ضابطه اضافه می‌کنیم:

$$y=-(x+1)^2+4$$

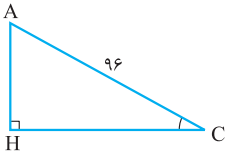
حالا دو منحنی $y_1=(x-1)^2$ و $y_2=-(x+1)^2+4$ را قطع می‌دهیم:

$$y_1=y_2 \Rightarrow (x-1)^2=-(x+1)^2+4$$

$$\Rightarrow x^2-2x+1=-x^2-2x-1+4 \Rightarrow 2x^2=2$$

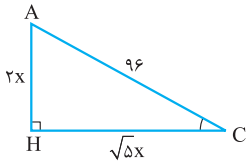
$$\Rightarrow x=\pm 1$$

۱۰۹- گزینهٔ ۳ برای راحتی حل، مثلث ABH را از شکل حذف می‌کنیم.



از تساوی $\cot\hat{C}=\frac{\sqrt{5}}{2}$، دو ضلع دیگر را برحسب x می‌نویسیم:

$$\cot\hat{C}=\frac{\text{مجاور}}{\text{مقابل}} \Rightarrow \frac{\sqrt{5}}{2}=\frac{HC}{HA}$$



پس HC و HA را به ترتیب $\sqrt{5}x$ و $2x$ می‌گیریم:

فیثاغورس می‌نویسیم:

$$(2x)^2+(\sqrt{5}x)^2=96^2 \Rightarrow 9x^2=96^2$$

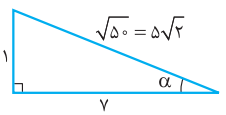
$$\Rightarrow x^2=\frac{96^2}{3^2}=32^2 \Rightarrow x=32$$

پس AH برابر است با:

$$AH=2x=2\times 32=64$$

۱۱۰- گزینهٔ ۱ با داشتن $\tan\alpha=\frac{1}{7}$ و به کمک مثلث قائم‌الزاویه، سینوس و کسینوس α را حساب می‌کنیم.

می‌دانیم $\tan=\frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}$، پس ضلع مقابل و مجاور زاویهٔ α را به ترتیب ۱ و ۷ می‌گیریم و وتر را با فیثاغورس حساب می‌کنیم:



$$\Rightarrow \begin{cases}\sin\alpha=\frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}=\frac{1}{5\sqrt{2}}\\ \cos\alpha=\frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}}=\frac{7}{5\sqrt{2}}\end{cases}$$

چون α در ربع اول بود، همهٔ نسبت‌ها مثبت هستند.

حالا سینوس و کسینوس زاویهٔ $\frac{13\pi}{4}$ را حساب می‌کنیم:

$$\sin\frac{13\pi}{4}=\sin(2\pi+\pi+\frac{\pi}{4})=\sin(\pi+\frac{\pi}{4})=-\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(حذف)

$$\cos\frac{13\pi}{4}=\cos(2\pi+\pi+\frac{\pi}{4})=\cos(\pi+\frac{\pi}{4})=-\cos\frac{\pi}{4}$$

(حذف)

$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

از اتحاد $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$ استفاده می‌کنیم:

$$\sin(\frac{13\pi}{4}+\alpha)=\sin\frac{13\pi}{4}\cos\alpha+\sin\alpha\cos\frac{13\pi}{4}$$

$$=(-\frac{\sqrt{2}}{2})(\frac{7}{5\sqrt{2}})+(\frac{1}{5\sqrt{2}})(-\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{-7}{10}-\frac{1}{10}=\frac{-8}{10}=\frac{-4}{5}$$

۱۱۱- گزینهٔ ۱ سمت چپ تساوی را با اتحادهای زیر:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

باز می‌کنیم.

$$\sin(x+\frac{\pi}{6})+\cos(x+\frac{\pi}{3})=\cos 2x$$

$$\Rightarrow \sin x\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{6}\cos x+\cos x\cos\frac{\pi}{3}-\sin x\sin\frac{\pi}{3}$$

$$=\cos 2x \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$$

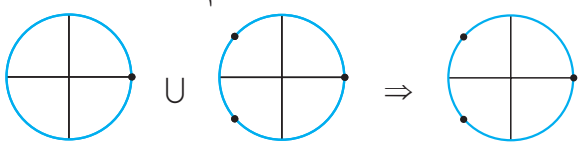
$$=\cos 2x \Rightarrow \cos x=\cos 2x$$

در حالت کلی جواب معادلهٔ $\cos x=\cos A$ به صورت $x=2k\pi\pm A$ است، پس:

$$\cos 2x=\cos x \Rightarrow 2x=2k\pi\pm x$$

$$\Rightarrow \begin{cases}2x=2k\pi+x \Rightarrow x=2k\pi\\ 2x=2k\pi-x \Rightarrow x=\frac{2k\pi}{3}\end{cases}$$

اجتماع دو جواب به دست آمده، می‌شود $x=\frac{2k\pi}{3}$.



$2k\pi$ $\quad$ $\frac{2k\pi}{3}$ $\quad$ $\frac{2k\pi}{3}$

۱۱۲- گزینهٔ ۳ دستهٔ اول، دوم، ... به ترتیب دارای $1,2,\ldots$ جمله هستند. پس تا آخر دستهٔ چهل‌ام، تعداد اعداد برابر است با:

$$1+2+3+\cdots+40=\frac{40\times 41}{2}=820$$

یعنی عدد آخر دستهٔ ۴۰ام، ۸۲۰امین عدد فرد است. جملهٔ عمومی اعداد فرد هم به صورت $a_n=2n-1$ است، پس:

$$a_{820}=2(820)-1=1639$$

۱۱۳- گزینهٔ ۲ اول $\log 5$ را حساب می‌کنیم:

$$\log 5=\log 10-\log 2=1-0/3=0/7$$

اگر هر روز ۴ لیتر از محلول را برداریم و جای آن، آب خالص بریزیم، غلظت آن را $\frac{100-4}{100}=\frac{24}{25}$ برابر کرده‌ایم.

بعداز n روز، غلظت آن $(\frac{۲۴}{۲۵})^n$ برابر می‌شود که باید با $\frac{۱}{۳}$ برابر قرار دهیم:

$$(\frac{۲۴}{۲۵})^n=\frac{۱}{۳} \Rightarrow (\frac{۲۵}{۲۴})^n=۳$$

$$\xrightarrow{\text{از طرفین لگاریتم می‌گیریم}} \log(\frac{۲۵}{۲۴})^n=\log ۳ \Rightarrow n\log\frac{۲۵}{۲۴}=\log ۳$$

$$\Rightarrow n(\log ۲۵-\log ۲۴)=\log ۳$$

$$\Rightarrow n(\log ۵^۲-\log(۲^۳\times ۳))=\log ۳$$

$$\Rightarrow n(۲\log ۵-(۳\log ۲+\log ۳))=\log ۳$$

$$\Rightarrow n(۲\times ۰/۷-(۳\times ۰/۳+۰/۴۸))=۰/۴۸$$

$$\Rightarrow n(۱/۴-۱/۳۸)=۰/۴۸ \Rightarrow ۰/۰۲n=۰/۴۸ \Rightarrow n=۲۴$$

۱۱۴- گزینهٔ ۲ اول توان اعداد را باید به n تبدیل کنیم:

$$\frac{۳^{۲n}-۳^{-۲n+۱}}{۲\times ۳^{۲n}+۳^{-۲n+۱}}=\frac{۹^n-۳\times(\frac{۱}{۹})^n}{۲\times ۹^n+۳\times(\frac{۱}{۹})^n}$$

برای محاسبهٔ حد در $+\infty$، در صورت و مخرج، عبارت‌هایی را نگه می‌داریم که پایهٔ بزرگ‌تری دارند:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\overbrace{۹^n}^{\text{قابل حذف}}-۳\times(\frac{۱}{۹})^n}{۲\times ۹^n+\underbrace{۳\times(\frac{۱}{۹})^n}_{\text{قابل حذف}}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\cancel{۹^n}}{۲\times \cancel{۹^n}}=\frac{۱}{۲}$$

۱۱۵- گزینهٔ ۱ اگر $x\to ۰$، می‌توانیم جای $\cos x$ از $۱-\frac{x^۲}{۲}$ استفاده کنیم:

$$\lim_{x\to ۰^-}\frac{\sqrt{۲+۳x}-\sqrt{۲-x}}{\sqrt{۱-\cos x}}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{\sqrt{۲+۳x}-\sqrt{۲-x}}{\sqrt{۱-(۱-\frac{x^۲}{۲})}}$$

$$=\lim_{x\to ۰^-}\frac{\sqrt{۲+۳x}-\sqrt{۲-x}}{\sqrt{\frac{x^۲}{۲}}}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{\sqrt{۲+۳x}-\sqrt{۲-x}}{\frac{|x|}{\sqrt{۲}}}$$

$$=\lim_{x\to ۰^-}\frac{\sqrt{۴+۶x}-\sqrt{۴-۲x}}{-x}$$

عبارت به دست آمده را در مزدوج صورت، ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{۴+۶x}-\sqrt{۴-۲x}}{-x}\times\frac{\sqrt{۴+۶x}+\sqrt{۴-۲x}}{\sqrt{۴+۶x}+\sqrt{۴-۲x}}$$

$$=\lim_{x\to ۰^-}\frac{(۴+۶x)-(۴-۲x)}{-x(\sqrt{۴+۶x}+\sqrt{۴-۲x})}$$

$$=\lim_{x\to ۰^-}\frac{۸x}{-x(۲+۲)}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{۸x}{-۴x}=-۲$$

۱۱۶- گزینهٔ ۴ عبارت $[x]$ در اعداد صحیح ناپیوسته است. از طرفی $\sin \pi x$ در همین نقاط، صفر می‌شود، پس ناپیوستگی $[x]$ را رفع می‌کند و تابع پیوسته می‌شود. در نتیجه این تابع همه جا پیوسته است.

۱۱۷- گزینهٔ ۲ نمودار فقط یک مجانب قائم $x=۲$ دارد. پس مخرج ضریبی از $(x-۲)^۲$ است. چون ضریب $x^۲$ در مخرج، ۲ است، پس مخرج باید به صورت $۲(x-۲)^۲$ باشد:

$$\text{مخرج}=۲(x-۲)^۲=۲x^۲\underbrace{-۸}_{b}x+\underbrace{۸}_{c}$$

پس تا این‌جا ضابطهٔ تابع به صورت $f(x)=\frac{ax^۲+۷x}{۲(x-۲)^۲}$ است. از $f(۳)=۶$، نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{۹a+۲۱}{۲}=۶ \Rightarrow ۹a+۲۱=۱۲ \Rightarrow a=-۱$$

حالا حد تابع f وقتی $x\to\infty$ را حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^۲+۷x}{۲x^۲-۸x+۸}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^۲}{۲x^۲}=\frac{-۱}{۲}$$

پس معادله مجانب افقی به صورت $y=\frac{-۱}{۲}$ است.

۱۱۸- گزینهٔ ۲ می‌دانیم مشتق $f(u)$ به صورت $u'.f'(u)$ است، پس:

$$g(x)=f(\frac{۱-\sin x}{۱+\sin x}) \Rightarrow g'(x)=f'(\frac{۱-\sin x}{۱+\sin x}).(\frac{۱-\sin x}{۱+\sin x})'$$

مشتق $\frac{۱-\sin x}{۱+\sin x}$ را به کمک مشتق تابع هموگرافیک حساب می‌کنیم:

$$(\frac{au+b}{cu+d})'=\frac{ad-bc}{(cu+d)^۲}\times u'$$

$$\xrightarrow{u=\sin x}(\frac{-\sin x+۱}{\sin x+۱})'=\frac{-۱-۱}{(\sin x+۱)^۲}\times(\sin x)'$$

$$=\frac{-۲\cos x}{(\sin x+۱)^۲}$$

ادامه می‌دهیم:

$$g'(x)=f'(\frac{۱-\sin x}{۱+\sin x}).(\frac{۱-\sin x}{۱+\sin x})'$$

$$\Rightarrow g'(x)=f'(\frac{۱-\sin x}{۱+\sin x})\times\frac{-۲\cos x}{(\sin x+۱)^۲}$$

جای x، $\frac{\pi}{۶}$ قرار می‌دهیم:

$$g'(\frac{\pi}{۶})=f'(\frac{۱-\frac{۱}{۲}}{۱+\frac{۱}{۲}})\times\frac{-۲\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{(\frac{۱}{۲}+۱)^۲}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۳}=f'(\frac{۱}{۳})\times\frac{-\sqrt{۳}}{\frac{۹}{۴}} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۳}=f'(\frac{۱}{۳})\times\frac{-۴\sqrt{۳}}{۹}$$

$$\Rightarrow f'(\frac{۱}{۳})=\frac{\sqrt{۳}}{۳}\times\frac{-۹}{۴\sqrt{۳}}=\frac{-۳}{۴}$$

۱۱۹- گزینهٔ ۴ برای آن‌که دو تابع f و g در $x=۴$، بر یک خط مماس باشند، باید دو شرط زیر را داشته باشند:

۱) مقدار دو تابع در $x=۴$ برابر باشد:

$$\left.\begin{matrix}y=x\sqrt{x}\\ y=x^۲+ax+b\end{matrix}\right\}\xrightarrow{x=۴}۱۶+۴a+b=۸ \Rightarrow ۴a+b=-۸$$

۲) مشتق دو تابع در $x=۴$ یکسان باشد:

$$\left.\begin{array}{l} y=x^{\frac{۳}{۲}} \Rightarrow y'=\frac{۳}{۲}x^{\frac{۱}{۲}} \\ y=x^۲+ax+b \Rightarrow y'=۲x+a \end{array}\right\} \xrightarrow{x=۴} ۳=۸+a \Rightarrow a=-۵$$

با جای‌گذاری $a=-۵$ در $۴a+b=-۸$، داریم:

$$-۲۰+b=-۸ \Rightarrow b=۱۲$$

۱۲۰- گزینهٔ ۱ عدد $x=۲$ در محدودهٔ $۰ \le x < ۴$ است. برای محاسبهٔ $f'(۲)$ از ضابطه مشتق می‌گیریم:

$$f(x)=\sqrt{x^۲+۶x} \Rightarrow f'(x)=\frac{۲x+۶}{۲\sqrt{x^۲+۶x}}$$

$$\Rightarrow f'(۲)=\frac{۱۰}{۲\sqrt{۱۶}}=\frac{۵}{۴}$$

عدد $x=۵$ در محدودهٔ $۴ \le x < ۸$ است. برای محاسبهٔ $f'(۵)$ از ضابطهٔ پایین مشتق می‌گیریم. اول تابع را در $x=۵$، بدون براکت می‌نویسیم، بعد مشتق می‌گیریم:

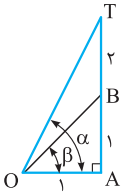
$$f(x)=[\frac{x}{۴}](x^۲-۹x) \xrightarrow{[\frac{۵}{۴}]=۱} f(x)=x^۲-۹x$$

$$\Rightarrow f'(x)=۲x-۹ \Rightarrow f'(۵)=۱۰-۹=۱$$

پس:

$$f'(۲)-f'(۵)=\frac{۵}{۴}-۱=\frac{۱}{۴}$$

۱۲۱- گزینهٔ ۳ در مثلث OTA،



اندازهٔ پاره‌خط‌هایی که داریم را می‌نویسیم:

زاویهٔ $T\hat{O}B$ همان $\alpha-\beta$ است.

اول تانژانت α و β را حساب می‌کنیم:

$$\tan\beta=\frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}=\frac{۱}{۱}=۱ \qquad \tan\alpha=\frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}=\frac{۳}{۱}=۳$$

حالا تانژانت زاویهٔ TOB را به دست می‌آوریم:

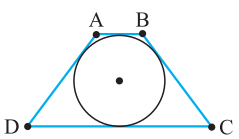
$$\tan(T\hat{O}B)=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{۱+\tan\alpha\tan\beta}$$

$$=\frac{۳-۱}{۱+۳\times۱}=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}$$

۱۲۲- گزینهٔ ۳

چندنکته

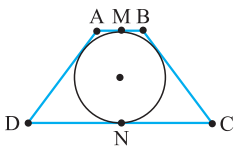
۱) در یک ذوزنقهٔ محیطی و متساوی‌الساقین، قطر دایرهٔ محاطی، واسطهٔ هندسی بین دو قاعده است:



یعنی در شکل داریم:

$$AB\times CD=(۲R)^۲$$

۲) اگر ذوزنقه‌ای متساوی‌الساقین و محیطی باشد، نقاط تماس دایرهٔ محاطی آن با دو قاعده، وسط هر یک از قاعده‌هاست.

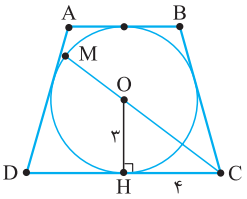


یعنی در شکل داریم:

$$AM=MB \qquad CN=ND$$

اگر نقطهٔ تماس دایرهٔ محاطی با قاعدهٔ بزرگ‌تر ذوزنقه، H باشد، آن‌گاه H وسط CD است و $HC=\frac{۸}{۲}=۴$.

چون شعاع وارد بر نقطهٔ تماس بر خط مماس عمود است، پس مثلث OCH در رأس H قائمه است.



از طرفی اگر شعاع دایرهٔ محاطی ذوزنقه، R باشد، بنا بر نکتهٔ (۱) داریم:

$$AB\times CD=(۲R)^۲ \Rightarrow \frac{۹}{۲}\times۸=۴R^۲ \Rightarrow R=۳$$

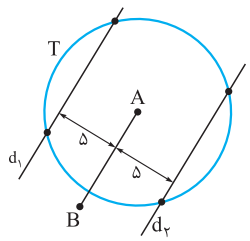
در مثلث قائم‌الزاویهٔ OCH داریم:

$$OC^۲=OH^۲+HC^۲=۳^۲+۴^۲=۲۵ \Rightarrow OC=۵$$

اگر امتداد OC دایرهٔ محاطی ذوزنقه را در M قطع کند، دورترین نقطهٔ دایره تا رأس C، نقطهٔ M است و داریم:

$$MC=OC+OM=۵+۳=۸$$

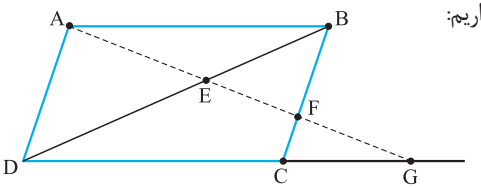
۱۲۳- گزینهٔ ۴ مجموعهٔ نقاطی که از رأس A به فاصلهٔ ۷ هستند، روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۷ قرار دارند (دایرهٔ T).



مجموعهٔ نقاطی که از پاره‌خط AB به فاصلهٔ ۵ باشند، دو خط $d_۱$ و $d_۲$ است که با AB موازی هستند.

نقطهٔ برخورد دایرهٔ T با دو خط $d_۱$ و $d_۲$ نقطهٔ C را پدید می‌آورد. چون فاصلهٔ مرکز دایره از دو خط $d_۱$ و $d_۲$ کم‌تر از شعاع دایره است، پس دایره هر دو خط را قطع می‌کند و تعداد نقاط برخورد دایره با این دو خط ۴ است و مسئله دارای ۴ جواب می‌باشد.

۱۲۴- گزینهٔ ۱ چون $AD \parallel BF$، پس دو مثلث ADE و EFB متشابه‌اند و داریم:



$$\frac{EF}{AE}=\frac{BE}{DE} \quad (۱)$$

و چون $AB \parallel DG$، پس دو مثلث AEB و DEG متشابه‌اند و داریم:

$$\frac{AE}{EG}=\frac{BE}{DE} \quad (۲)$$

از روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

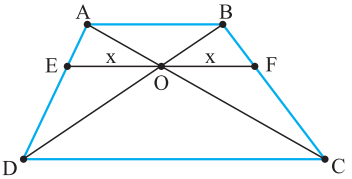
$$\frac{EF}{AE}=\frac{AE}{EG} \Rightarrow EF\times EG=AE^۲$$

۱۲۵- گزینهٔ ۱

نکته

اگر از نقطهٔ برخورد قطرهای ذوزنقه، پاره‌خطی موازی با دو قاعده رسم کنیم تا دو ساق را قطع کند، آن‌گاه نقطهٔ برخورد قطرها، وسط آن پاره‌خط است.

اگر نقطهٔ برخورد قطرهای ذوزنقه را O بنامیم، بنا بر نکتهٔ قبل داریم:
$OE = OF = x$



$$\overset{\Delta}{ACD}: OE \parallel CD \Rightarrow \frac{OE}{CD} = \frac{AO}{AC} \Rightarrow \frac{x}{9} = \frac{AO}{AC} \quad (1)$$

$$\overset{\Delta}{ABC}: OF \parallel AB \Rightarrow \frac{OF}{AB} = \frac{OC}{AC} \Rightarrow \frac{x}{5} = \frac{OC}{AC} \quad (2)$$

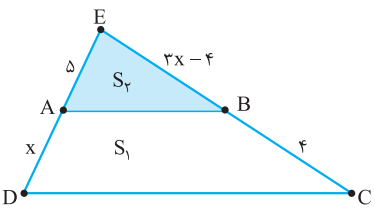
اگر طرفین رابطه‌های (۱) و (۲) را با هم جمع کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{x}{9} + \frac{x}{5} = \frac{AO + OC}{AC} \Rightarrow \frac{5x + 9x}{45} = \frac{AC}{AC}$$

$$\Rightarrow \frac{14x}{45} = 1 \Rightarrow x = \frac{45}{14}$$

در نتیجه: $EF = 2x = 2 \times \frac{45}{14} = \frac{45}{7}$

۱۲۶- گزینهٔ ۲



$$AB \parallel CD \Rightarrow \frac{AE}{AD} = \frac{EB}{BC} \Rightarrow \frac{5}{x} = \frac{3x-4}{4}$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 4x = 20 \Rightarrow 3x^2 - 4x - 20 = 0$$

ریشه‌های این معادله $x = \frac{10}{3}$ و $x = -2$ هستند و واضح است که جواب منفی قابل قبول نیست. اگر $x = \frac{10}{3}$، آن‌گاه $EB = 3x - 4 = 6$.

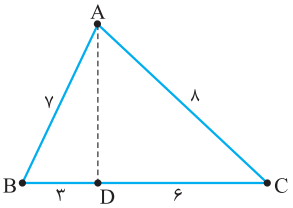
چون $AB \parallel CD$، پس دو مثلث EAB و ECD متشابه‌اند و نسبت تشابه آن‌ها $k = \frac{EC}{EB} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$ است.

اگر مساحت ذوزنقه، S_1 و مساحت مثلث را S_2 بگیریم، چون نسبت مساحت دو مثلث متشابه برابر با مربع نسبت تشابه است، داریم:

$$\frac{S_{ECD}}{S_{EAB}} = k^2 \Rightarrow \frac{S_1 + S_2}{S_2} = \frac{25}{9} \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} + \frac{S_2}{S_2} = \frac{25}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{16}{9}$$

۱۲۷- گزینهٔ ۲ با استفاده از رابطهٔ استوارت در مثلث ABC داریم:



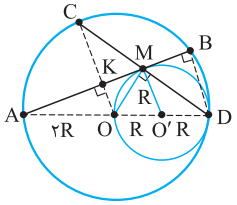
$$AB^2 \times CD + AC^2 \times BD = AD^2 \times BC + BD \times CD \times BC$$

$$\Rightarrow 7^2 \times 6 + 8^2 \times 3 = AD^2 \times 9 + 3 \times 6 \times 9$$

$$\Rightarrow 294 + 192 = 9AD^2 + 162 \Rightarrow 9AD^2 = 324$$

$$\Rightarrow AD^2 = 36 \Rightarrow AD = 6$$

۱۲۸- گزینهٔ ۳ مرکز دایره‌ها را O و O'، شعاع آن‌ها را R و $2R$ می‌گیریم. بنا بر قضیهٔ مماس و قاطع در دایرهٔ داخلی داریم:



$$AM^2 = AO \times AD$$
$$= 2R \times 4R = 8R^2$$
$$\Rightarrow AM = 2\sqrt{2}R$$

در دایرهٔ داخلی، OM شعاع وارد بر نقطهٔ تماس است، پس بر خط مماس عمود است؛ یعنی $OM \perp AB$.

در مثلث OCD، پاره‌خط $O'M$ میان‌خط است، پس با OC موازی است و در نتیجه OC بر AM عمود است، پس وتر AB را نصف می‌کند و در نتیجه $AK = KB$. بنا بر قضیهٔ تالس در مثلث AMO داریم:

$$\frac{AM}{AK} = \frac{AO'}{AO} \Rightarrow \frac{2\sqrt{2}R}{AK} = \frac{3R}{2R}$$

$$\Rightarrow AK = BK = \frac{4\sqrt{2}R}{3}$$

دو مثلث CKM و MBD همنهشت هستند و در نتیجه:

$$MB = KM = AM - AK = 2\sqrt{2}R - \frac{4\sqrt{2}R}{3} = \frac{2\sqrt{2}R}{3}$$

اگر فرض کنیم $CM = MD = x$، آن‌گاه در دایرهٔ بزرگ‌تر بنا بر قضیهٔ وترهای متقاطع داریم:

$$AM \times MB = CM \times MD \Rightarrow 2\sqrt{2}R \times \frac{2\sqrt{2}R}{3} = x \times x$$

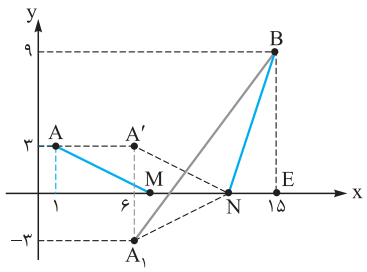
$$\Rightarrow \frac{8R^2}{3} = x^2 \Rightarrow x = CM = \frac{2\sqrt{2}R}{\sqrt{3}}$$

اکنون داریم: $\frac{MC}{MB} = \frac{\frac{2\sqrt{2}R}{\sqrt{3}}}{\frac{2\sqrt{2}R}{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

تذکر

لازم بود در صورت مسئله قید می‌شد که AD قطر دایرهٔ بزرگ‌تر است.

۱۲۹- گزینهٔ ۳ نقطهٔ A را به اندازهٔ بردار $\overrightarrow{MN}$ که طول آن ۵ است انتقال می‌دهیم تا نقطهٔ A' به دست آید. پس $A'(6,3)$. اگر بازتاب A' نسبت به محور xها را A_1 بنامیم، آن‌گاه $A_1 = (6,-3)$ و $A_1N = A'N$ (۱).



چهارضلعی $AMNA'$ متوازی‌الاضلاع است، پس طول مسیر $AMNB$ با طول مسیر $AA'NB$ برابر است و داریم:

طول مسیر $AMNB$ = طول مسیر $AA'NB$

$$= AA' + A'N + NB \overset{\text{بنا بر (۱)}}{=\!=} AA' + A_1N + NB \quad (۲)$$

در مثلث A_1NB بنا بر نامساوی مثلثی داریم:

$$A_1N + NB \geq A_1B \quad (۳)$$

از روابط (۲) و (۳) نتیجه می‌شود طول مسیر، زمانی کم‌ترین مقدار ممکن است که مثلث A_1NB به یک پاره‌خط راست تبدیل شود؛ به بیان دیگر N روی پاره‌خط A_1B قرار گیرد.

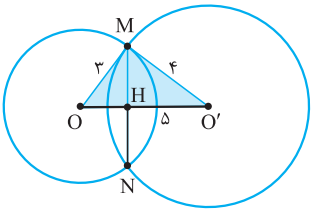
در این صورت، طول کوچک‌ترین مسیر برابر است با $AA' + A_1B$

و از آن‌جا که $A_1B = \sqrt{(۶-۱۵)^۲ + (-۳-۹)^۲} = \sqrt{۲۲۵} = ۱۵$ خواهیم داشت:

کم‌ترین اندازهٔ خط شکستهٔ $AMNB$ $= AA' + A_1B$

$= ۵ + ۱۵ = ۲۰$

۱۳۰- گزینهٔ ۴ مقطع دو کرهٔ متقاطع یک دایره است.



با توجه به اندازهٔ اضلاع مثلث OMO' نتیجه می‌شود این مثلث در رأس M قائم‌الزاویه است و MH ارتفاع نظیر وتر، همان شعاع دایرهٔ مقطع دو کره است. در این مثلث داریم:

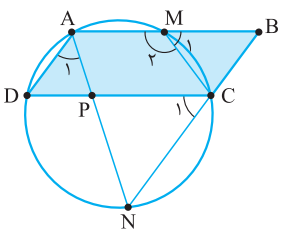
$$S_{OMO'} = \frac{۱}{۲}OO' \times MH = \frac{۱}{۲}OM \times O'M$$

$$\Rightarrow ۵ \times MH = ۳ \times ۴ \Rightarrow MH = r = \frac{۱۲}{۵} = ۲/۴$$

$$\text{مساحت مقطع} = \pi r^۲ = \pi \times ۲/۴^۲ = ۵/۷۶\pi$$

۱۳۱- گزینهٔ ۴

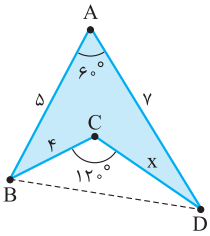
چون $ABCD$ متوازی‌الاضلاع است، پس $\hat{B} = \hat{D}$. از طرفی زاویه‌های $\hat{N}$ و $\hat{D}$ محاطی و مقابل به کمان AC هستند، پس $\hat{N} = \hat{D}$. در نتیجه $\hat{B} = \hat{N}$ و مثلث ABN در رأس A متساوی‌الساقین است.



$$\left.\begin{array}{l} AD \parallel BN \xrightarrow{\text{مورب } AN} \hat{N} = \hat{A}_1 \\ \hat{N} = \hat{D} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{D}$$

پس مثلث ADP نیز متساوی‌الساقین است، به دلیل مشابه $N = C_1$ و مثلث PCN نیز متساوی‌الساقین است. چهارضلعی $AMCD$ محاطی است، پس $\hat{D} + \hat{M}_۲ = ۱۸۰^\circ$. از طرفی $\hat{M}_۱ + \hat{M}_۲ = ۱۸۰^\circ$، در نتیجه $\hat{M}_۱ = \hat{D}$ و چون $\hat{D} = \hat{B}$، پس $\hat{M}_۱ = \hat{B}$، در نتیجه مثلث MCB در رأس C نیز متساوی‌الساقین است. در مجموع شکل دارای ۴ مثلث متساوی‌الساقین است.

۱۳۲- گزینهٔ ۱ در مثلث ABD با استفاده از رابطهٔ کسینوس‌ها داریم:



$$BD^۲ = AB^۲ + AD^۲ - ۲AB \times AD \times \cos ۶۰^\circ$$

$$= ۵^۲ + ۷^۲ - ۲ \times ۵ \times ۷ \times \frac{۱}{۲} = ۳۹$$

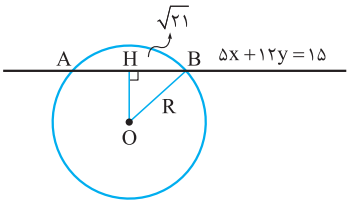
اکنون در مثلث BCD با استفاده از رابطهٔ کسینوس‌ها داریم:

$$BD^۲ = BC^۲ + CD^۲ - ۲BC \times CD \times \cos ۱۲۰^\circ$$

$$۳۹ = ۴^۲ + x^۲ - ۲ \times ۴x \times \frac{-۱}{۲} \Rightarrow x^۲ + ۴x - ۲۳ = ۰$$

$$\Rightarrow (x+۲)^۲ - ۴ - ۲۳ = ۰ \Rightarrow (x+۲)^۲ = ۲۷ \Rightarrow x + ۲ = ۳\sqrt{۳}$$

۱۳۳- گزینهٔ ۴ اول باید فاصلهٔ مرکز دایره از خط را پیدا کنیم تا بتوانیم با یک فیثاغورس ساده شعاع دایره را مشخص کنیم.



$$OH = \frac{|۵ \times ۱ + ۱۲ \times ۳ - ۱۵|}{\sqrt{۵^۲ + ۱۲^۲}} = \frac{۲۶}{۱۳} = ۲$$

$$\overset{\Delta}{BOH}: OH^۲ + HB^۲ = R^۲ \Rightarrow ۴ + ۲۱ = R^۲ \Rightarrow R = ۵$$

با داشتن مرکز و شعاع دایره، معادلهٔ دایره را می‌نویسیم.

$$\begin{cases} O(۱,۳) \\ R = ۵ \end{cases} \Rightarrow \text{معادلهٔ دایره: } (x-۱)^۲ + (y-۳)^۲ = ۲۵$$

حالا باید معادلهٔ دایره را با محور xها $(y = ۰)$ تلاقی دهیم.

$$(x-۱)^۲ + (y-۳)^۲ = ۲۵ \xrightarrow{y=۰} (x-۱)^۲ = ۱۶$$

$$\Rightarrow x - ۱ = \pm ۴ \Rightarrow \begin{cases} x_۱ = ۵ \\ x_۲ = -۳ \end{cases}$$

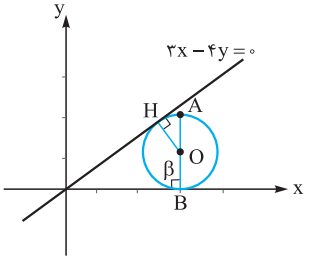
بنابراین طول وتر جداشده روی محور xها برابر است با: $۵ - (-۳) = ۸$

۱۳۴- گزینهٔ ۱ فرض می‌کنیم مرکز دایره، نقطهٔ $O(\alpha, \beta)$ باشد، داریم:

$$OH = OA = OB$$

بنابراین:

$$OH = OB = R = \beta$$



$$\frac{|۳\alpha - ۴\beta|}{\sqrt{۳^۲ + (-۴)^۲}} = \beta \Rightarrow |۳\alpha - ۴\beta| = ۵\beta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۳\alpha - ۴\beta = ۵\beta \Rightarrow ۳\alpha = ۹\beta \Rightarrow \alpha = ۳\beta \checkmark \\ ۳\alpha - ۴\beta = -۵\beta \Rightarrow ۳\alpha = -\beta \times \end{cases}$$

از آن‌جا که مرکز دایره در ربع اول واقع است، پس $\alpha > 0$ و $\beta > 0$ است، یعنی $\alpha = 3\beta$ قابل قبول است.

با توجه به روابط $\alpha = 3\beta$ و $OA = OB$ داریم:

$$\beta = \sqrt{(\alpha-3)^2 + (\beta-2)^2}$$

$$\xrightarrow{\alpha=3\beta} \beta = \sqrt{(3\beta-3)^2 + (\beta-2)^2}$$

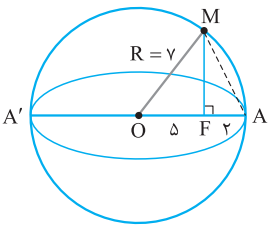
$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} \beta^2 = 9\beta^2 - 18\beta + 9 + \beta^2 - 4\beta + 4$$

$$\Rightarrow 9\beta^2 - 22\beta + 13 = 0 \Rightarrow (9\beta-13)(\beta-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \beta = \frac{13}{9} \\ \beta = 1 \end{cases}$$

کوچک‌ترین شعاع دایره برابر $OB = \beta = 1$ است.

۱۳۵- گزینهٔ ۲

طول قطرهای بیضی را داریم، با توجه به رابطهٔ $c^2 = a^2 - b^2$، c به دست می‌آید.



$$\begin{cases} AA' = 2a = 14 \Rightarrow a = 7 \\ BB' = 2b = 4\sqrt{6} \Rightarrow b = 2\sqrt{6} \end{cases}$$

$$a^2 - b^2 = c^2 \Rightarrow 49 - 24 = c^2 \Rightarrow c = 5$$

دقت کنید! OM شعاع دایره است و طول آن برابر با نصف طول قطر بزرگ بیضی است.

$$\overset{\Delta}{MOF} \xrightarrow{\text{فیثاغورس}} 7^2 = 5^2 + MF^2 \Rightarrow MF^2 = 24$$

بانوشتن فیثاغورس در مثلث AMF، طول پاره‌خط AM به‌دست می‌آید.

$$MF^2 + AF^2 = AM^2 \Rightarrow 24 + 4 = AM^2$$

$$\Rightarrow AM = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$

۱۳۶- گزینهٔ ۱

می‌دانیم محور تقارن سهمی $y = -\frac{a}{2}$ ، $y^2 + ay + bx + c = 0$ و پارامتر سهمی $\frac{-b}{4}$ است. بنابراین:

$$\frac{-a}{2} = 1 \Rightarrow a = -2$$

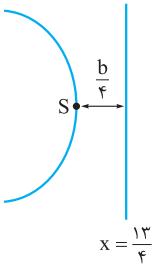
چون رأس سهمی روی محور تقارن قرار دارد پس $S(\alpha, 1)$ است. از طرفی مختصات رأس سهمی در معادلهٔ سهمی صدق می‌کند، بنابراین:

$$1^2 - (2\times 1) + b\alpha - 9 = 0 \Rightarrow b\alpha = 10 \Rightarrow x_{\text{رأس}} = \alpha = \frac{10}{b}$$

شکل سهمی را ببینید!

خط هادی به اندازهٔ پارامتر سهمی از رأس فاصله دارد.

بنابراین اگر به طول رأس به اندازهٔ $\frac{b}{4}$ اضافه شود، خط هادی به دست می‌آید.



$$\frac{10}{b} + \frac{b}{4} = \frac{13}{4} \Rightarrow \frac{40 + b^2}{4b} = \frac{13}{4} \Rightarrow b^2 + 40 = 13b$$

$$\Rightarrow b^2 - 13b + 40 = 0 \Rightarrow (b-8)(b-5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = 8 \\ b = 5 \end{cases}$$

۱۳۷- گزینهٔ ۲ ابتدا A^2 را به دست می‌آوریم.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

کافی است سطر اول A^2 را در A^2 ضرب کنیم تا سطر اول A^4 مشخص شود.

$$A^4 = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

۱۳۸- گزینهٔ ۲ ماتریس X را می‌خواهیم؛ یعنی A مزاحم است. با ضرب طرفین رابطهٔ $AX = A^{-1}$ در A^{-1} از سمت چپ، X تنها می‌شود!

$$AX = A^{-1} \xrightarrow{A^{-1}\times} X = (A^{-1})^2$$

همه چیز روشن است! باید وارون A را به توان ۲ برسانیم و به عنوان جواب تحویل دهیم.

$$A^{-1} = \frac{1}{-\frac{1}{4}}\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -2 & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 8 & -3 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 8 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 8 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 & -14 \\ -56 & 25 \end{bmatrix}$$

۱۳۹- گزینهٔ ۳ نسبت به سطر اول دترمینان می‌گیریم.

$$1(-4-6x-30) - 2(2-(x^2+4x-5)) + 3(-12-4x+4) = 0$$

$$\Rightarrow -6x - 34 + 2x^2 + 8x - 14 - 24 - 12x = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 10x - 72 = 0 \Rightarrow x^2 - 5x - 36 = 0$$

$$\Rightarrow (x-9)(x+4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 9 \\ x = -4 \end{cases}$$

۱۴۰- گزینهٔ ۲ طول را x و عرض را y می‌گیریم.

طول، ۲ واحد کم‌تر از ۱/۵ برابر عرض آن است: $x = 1/5y - 2$

مساحت مستطیل ۱۹۲ است، پس:

$$xy = 192 \Rightarrow (\frac{3}{2}y - 2)(y) = 192 \Rightarrow \frac{3}{2}y^2 - 2y - 192 = 0$$

$$\Delta = 4 + 4(\frac{3}{2})(192) = 4 + 1152 = 1156 = 34^2$$

$$y = \frac{2 \pm 34}{3} \Rightarrow \begin{cases} y = 12 & \checkmark \\ y = \frac{-32}{3} & \times \end{cases}$$

با جای‌گذاری $y = 12$ داریم: $x = 1/5y - 2 = 1/5(12) - 2 = 16$

محیط برابر است با: $\text{محیط} = 2(x+y) = 2(16+12) = 56$

۱۴۱- گزینهٔ ۱ ابتدا کل عددهای چهاررقمی را پیدا کرده، بعد تعداد عددهای چهاررقمی که رقم ۵ ندارند را پیدا کرده و از هم کم می‌کنیم:

کل عددهای چهاررقمی با ارقام غیرتکراری: $۹\times۹\times۸\times۷=۴۵۳۶$ (رقم هزارگان نمی‌تواند صفر باشد)

تعداد عددهای چهاررقمی با ارقام غیرتکراری که رقم ۵ را ندارند:

$$۸\times۸\times۷\times۶=۲۶۸۸$$

$$۴۵۳۶-۲۶۸۸=۱۸۴۸ \xrightarrow{(-)}$$

۱۴۲- گزینهٔ ۴ ابتدا کل جواب‌های صحیح نامنفی $x+y+z+t=۱۱$ را پیدا می‌کنیم. سپس تعداد جواب‌هایی را که در آن $x\geq ۵$ است پیدا کرده، از کل جواب‌ها کم می‌کنیم. می‌دانیم تعداد جواب‌های صحیح نامنفی معادلهٔ $x_۱+x_۲+\cdots+x_k=n$ برابر است با: $\binom{n+k-۱}{k-۱}$

داریم: $x+y+z+t=۱۱$

تعداد کل جواب‌ها: $\begin{matrix}k=۴\\ n=۱۱\end{matrix} \Rightarrow \binom{n+k-۱}{k-۱}=\binom{۱۴}{۳}=۳۶۴$

تعداد جواب‌ها با فرض $x\geq ۵$: برای این‌که $x\geq ۵$ باشد از تغییر متغیر $x=x'+۵$ استفاده می‌کنیم. در این صورت اگر حتی $x'=۰$ باشد $x=۵$ خواهد شد.

$$\Rightarrow x'+۵+y+z+t=۱۱ \Rightarrow x'+y+z+t=۶$$

$$\begin{matrix}k=۴\\ n=۶\end{matrix} \Rightarrow \binom{n+k-۱}{k-۱}=\binom{۹}{۳}=۸۴$$

حالا با کم‌کردن عددهای بالا از هم، تعداد جواب‌ها را با فرض $x<۵$ پیدا می‌کنیم: $۳۶۴-۸۴=۲۸۰$

۱۴۳- گزینهٔ ۲ بدترین حالت این است که زیرمجموعه‌ای داشته باشیم که در آن مقسوم‌علیه مشترک هیچ دو عضوی بیشتر از ۱ نشود. برای این کار همهٔ عددهای اول و ۱ را در یک مجموعه قرار می‌دهیم. به این مجموعه نگاه کنید:

$$\{۱,۲,۳,۵,۷,۱۱,۱۳,۱۷,۱۹,۲۳,۲۹\}$$

همان‌طور که می‌بینید این مجموعه، یک مجموعهٔ ۱۱عضوی است که ب.م.م هیچ دو عضو آن بزرگ‌تر از ۱ نیست و همهٔ عضوهای آن نسبت به هم اول‌اند. اما با انتخاب عدد دوازدهم حتماً دو عضو این مجموعه عامل مشترک بزرگ‌تر از ۱ خواهند داشت.

۱۴۴- گزینهٔ ۳ تعداد کل حالت‌ها برابر است با:

$$n(S)=۶\times۶\times۶=۲۱۶$$

از پیشامد متمم استفاده می‌کنیم. تعداد حالت‌ها زمانی که هیچ تاسی ۶ نیامده برابر است با:

$$n(A)=۵\times۵\times۵=۱۲۵ \Rightarrow P(A)=\frac{۱۲۵}{۲۱۶}$$

$$\Rightarrow P(A')=۱-\frac{۱۲۵}{۲۱۶}=\frac{۹۱}{۲۱۶}$$

۱۴۵- گزینهٔ ۴ همان‌طور که در پاسخ سؤال ۱۴۵ داخل کشور هم گفتیم وقتی سه تاس پرتاب می‌کنیم در نصف حالت‌ها مجموع سه عدد روشده زوج و در نصف دیگر حالت‌ها مجموع دو عدد روشده فرد است. بنابراین تعداد حالت‌هایی که در آن مجموع اعداد روشده فرد باشد برابر است با:

$$n(S)=\frac{۶\times۶\times۶}{۲}=۱۰۸$$

حالا اگر بخواهیم یکی از تاس‌ها ۳ و مجموع سه تاس فرد باشد، همهٔ حالت‌ها را با تفکیک روی مجموع سه عدد روشده پیدا می‌کنیم:

مجموع سه عدد روشده برابر ۳ باشد
$\Rightarrow$ حالتی وجود ندارد چون اگر یکی از تاس‌ها سه باشد دو تاس دیگر باید صفر بیایند!

مجموع سه عدد روشده ۵ باشد $\Rightarrow$ ۳,۱,۱ $\Rightarrow$ سه‌حالت

مجموع سه عدد روشده ۷ باشد $\Rightarrow$
- ۳,۲,۲ $\Rightarrow$ سه‌حالت
- ۳,۱,۳ $\Rightarrow$ سه‌حالت

مجموع سه عدد روشده ۹ باشد $\Rightarrow$
- ۳,۳,۳ $\Rightarrow$ یک‌حالت
- ۳,۲,۴ $\Rightarrow$ شش‌حالت
- ۳,۱,۵ $\Rightarrow$ شش‌حالت

مجموع سه عدد روشده ۱۱ باشد $\Rightarrow$
- ۳,۲,۶ $\Rightarrow$ شش‌حالت
- ۳,۴,۴ $\Rightarrow$ سه‌حالت
- ۳,۳,۵ $\Rightarrow$ سه‌حالت

مجموع سه عدد روشده ۱۳ باشد $\Rightarrow$
- ۳,۵,۵ $\Rightarrow$ سه‌حالت
- ۳,۴,۶ $\Rightarrow$ شش‌حالت

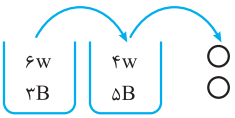
مجموع سه عدد روشده ۱۵ باشد $\Rightarrow$ ۳,۶,۶ $\Rightarrow$ سه‌حالت

مجموع سه عدد روشده ۱۷ باشد $\Rightarrow$ امکان‌پذیر نیست زیرا باید مجموع دو عدد روشده دیگر ۱۴ شود!

$$\text{تعداد کل حالت‌ها}=۴۶ \Rightarrow P(A)=\frac{۴۶}{۱۰۸}=\frac{۲۳}{۵۴} \xrightarrow{(+)}$$

جواب در بین گزینه‌ها نیست!

۱۴۶- گزینهٔ ۱



مهرهٔ اول خارج‌شده یا سفید است و یا سیاه. هر دو حالت را بررسی می‌کنیم.

الف) مهرهٔ خارج‌شده از جعبهٔ اول سیاه باشد.

وضعیت جعبهٔ دوم بعد از اضافه‌شدن یک مهرهٔ سیاه

حالت‌هایی که هر دو مهرهٔ خارج‌شده سیاه باشند

$$\frac{۳}{۹}\times\frac{\binom{۱۰}{۲}-\binom{۶}{۲}}{\binom{۱۰}{۲}}=\frac{۱}{۳}\times\frac{۳۰}{۴۵}=\frac{۲}{۹}$$

احتمال سیاه‌بودن مهرهٔ خارج‌شده از جعبهٔ اول

ب) مهرهٔ خارج‌شده از جعبهٔ اول سفید باشد.

۵w
۵B

وضعیت جعبهٔ دوم بعد از اضافه‌شدن یک مهرهٔ سفید

$$\frac{۶}{۹}\times\frac{\binom{۱۰}{۲}-\binom{۵}{۲}}{\binom{۱۰}{۲}}=\frac{۲}{۳}\times\frac{۳۵}{۴۵}=\frac{۱۴}{۲۷}$$

حالا دو حالت را با هم جمع می‌کنیم: $\Rightarrow \frac{۲}{۹}+\frac{۱۴}{۲۷}=\frac{۲۰}{۲۷}$

۱۴۷- گزینهٔ ۳ می‌دانیم اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند داریم: $P(A\cap B)=P(A)P(B)$

بنابراین: $P(A\cap B)=۰/۱ \Rightarrow P(A)P(B)=\frac{۱}{۱۰}$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{۱}{۱۰P(B)}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$۰/۶=\frac{۱}{۱۰P(B)}+P(B)-۰/۱ \Rightarrow \frac{۷}{۱۰}=\frac{۱+۱۰P(B)^۲}{۱۰P(B)}$$

$$\Rightarrow ۷P(B)=۱+۱۰P(B)^۲ \Rightarrow ۱۰P(B)^۲-۷P(B)+۱=۰$$

$$(۵P(B)-۱)(۲P(B)-۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} P(B)=\frac{۱}{۵}=۰/۲ \\ P(B)=\frac{۱}{۲} \text{ غ‌ق‌ق} \end{cases}$$

چون گفته $P(B')>P(B)$ است، پس جواب $P(B)=\frac{۱}{۲}$ غیر قابل قبول است.

۱۴۸- گزینهٔ ۴ تعداد داده‌ها برابر است با مجموع فراوانی‌ها یعنی $۱۱+۵+۹+۱۵=۴۰$، بنابراین میانه، میانگین داده‌های ۲۰اُم و ۲۱اُم است. ۱۵ داده برابر ۷ و ۹ داده برابر ۹ هستند پس داده‌های ۲۰اُم و ۲۱اُم، برابر ۹ هستند و در نتیجه میانه ۹ است. حالا میانگین را پیدا می‌کنیم:

$$\bar{x}=\frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i}=\frac{۷\times۱۵+۹\times۹+۱۱\times۵+۱۳\times۱۱}{۳۷}$$

$$=\frac{۱۰۵+۸۱+۵۵+۱۴۳}{۴۰}=\frac{۳۸۴}{۴۰}=۹/۶$$

$\Rightarrow$ تفاضل میانه از میانگین $=۰/۶$

۱۴۹- گزینهٔ ۱ با توجه به رابطهٔ داده‌شده داریم:

$$\begin{array}{c|c} m & n \\ \hline ۱۷ & ۲۹ \end{array} \Rightarrow m=۲۹n+۱۷, n>۱۷$$

حالا اگر بخواهیم عدد مضرب ۵ باشد، داریم:

$$۲۹n+۱۷\overset{۵}{\equiv}۰ \Rightarrow -n+۲\overset{۵}{\equiv}۰ \Rightarrow n\overset{۵}{\equiv}۲$$

$$\Rightarrow n=۵q+۲>۱۷ \Rightarrow q>۳ \quad (I)$$

$$\Rightarrow m=۲۹(۵q+۲)+۱۷=۱۴۵q+۷۵<۱۰۰۰$$

$$\Rightarrow ۲۹q+۱۵<۲۰۰ \Rightarrow q<\frac{۱۸۵}{۲۹}\simeq ۶/۳۷$$

$\Rightarrow q$ مقادیر قابل قبول برای $=۴,۵,۶$

پس اعداد سه‌رقمی m برابر ۳تاست.

۱۵۰- گزینهٔ ۴ می‌دانیم که d هر دو عدد را می‌شمارد. داریم:

$$\left.\begin{array}{l} d\mid ۳n+۵ \xrightarrow{\times n} d\mid ۳n^۲+۵n \\ d\mid ۳n^۲-۲n+۶ \end{array}\right\} \xrightarrow{(-)} d\mid ۷n-۶$$

$$\left.\begin{array}{l} d\mid ۷n-۶ \xrightarrow{\times ۳} d\mid ۲۱n-۱۸ \\ d\mid ۳n+۵ \xrightarrow{\times ۷} d\mid ۲۱n+۳۵ \end{array}\right\} \xrightarrow{(-)} d\mid ۵۳$$

$\Rightarrow d=۵۳$ (چون گفته $d\neq ۱$)

برای مثال به ازای $n=۱۶$ داریم: $(۵۳,۷۴۲)=۵۳$

روش تستی کافی است ریشهٔ $۳n+۵$ را در $۳n^۲-۲n+۶$ قرار دهیم و صورت کسر حاصل را در نظر بگیریم:

$$۳n+۵=۰ \Rightarrow n=-\frac{۵}{۳} \Rightarrow ۳n^۲-۲n+۶$$

$$=۳\times(-\frac{۵}{۳})^۲-۲(-\frac{۵}{۳})+۶=\frac{۵۳}{۳} \Rightarrow d\mid ۵۳ \Rightarrow d=۵۳$$

۱۵۱- گزینهٔ ۳ می‌دانیم $۱۵\times۷=۱۰۵$، از طرفی داریم:

$$\left.\begin{array}{l} ۲^۳\overset{۷}{\equiv}۱ \xrightarrow{\text{به‌توان }۴} ۲^{۱۲}\overset{۷}{\equiv}۱ \\ ۲^۴\overset{۱۵}{\equiv}۱ \xrightarrow{\text{به‌توان }۳} ۲^{۱۲}\overset{۱۵}{\equiv}۱ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ک.م.م}} ۲^{۱۲}\overset{۱۰۵}{\equiv}۱ \Rightarrow ۲^{۱۲k}\overset{۱۰۵}{\equiv}۱$$

پس n باید به صورت $۱۲k$ باشد. n دورقمی است، بنابراین:

$$۱۰\le n\le ۹۹ \Rightarrow ۱۰\le ۱۲k\le ۹۹ \Rightarrow \frac{۱۰}{۱۲}\le k\le \frac{۹۹}{۱۲}=۸/۲۵$$

$$\Rightarrow k=۱,۲,\ldots,۸$$

به ازای ۸ عدد دورقمی رابطه برقرار است.

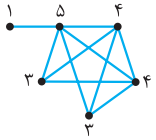
۱۵۲- گزینهٔ ۱ عدد m به صورت $\overline{۵aa}\,\overline{aa}$ است که یک عدد چهار یا پنج رقمی است. اگر عدد را باز کنیم داریم:

$$\overline{۵aa}=۵(۱۰a+a)=۵۵a \Rightarrow m=\overline{۵۵a}\,\overline{aa}$$

$$=۵۵a\times۱۰۰+۱۱a=۵۵۱۱a=۳\times۱۸۳۷\times a\overset{۱۸۳۷}{\equiv}۰$$

روش تستی کافی است $a=۱$ باشد در این صورت عدد ۵۵۱۱ می‌شود که بر ۱۸۳۷ بخش‌پذیر است.

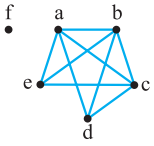
۱۵۳- گزینهٔ ۴ ابتدا گراف را رسم می‌کنیم:



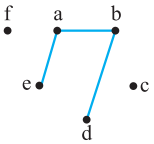
همان‌طور که از شکل گراف پیداست انگار می‌خواهیم دورهای به طول ۴ یک گراف کامل مرتبهٔ ۵ را پیدا کنیم که یک یال کم‌تر دارد.

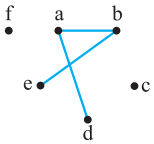
تعداد کل دورهای به طول ۴ در گراف کامل مرتبهٔ ۵ $=\frac{۵\times۴\times۳\times۲}{۴\times۲}=۱۵$

حالا با حذف یک یال چندتا از این دورها کم می‌شود. هر دو رأس از سه رأس دیگر گراف (که درجه‌های آن ۴ و ۴ و ۵ است.) را در نظر می‌گیریم، دو رأس درجه ۳ دو نوع دور به طول ۴ ایجاد می‌کند که الان حذف شده‌اند. برای درک بهتر رأس‌ها را نام‌گذاری می‌کنیم.



دو رأس از سه رأس c، b و a را در نظر بگیرید. مثلاً b و a، حالا نگاه کنید. این دوتا قبلاً دور به طول ۴ بوده‌اند و الان نیستند.



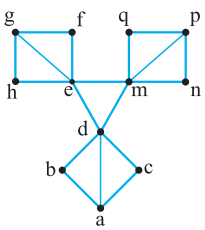


بنابراین تعداد دورهای حذف‌شده برابر است با: $\binom{۳}{۲}\times ۲ = ۶$

و تعداد دورهای به طول ۴ باقی‌مانده برابر است با: $۱۵ - ۶ = ۹$

۱۵۴- گزینهٔ ؟ عدد احاطه‌گری در گراف زیر برابر ۳ است.

برای داشتن مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمم و مینیمال ۳عضوی کافی است از هر کدام از مربع‌ها یکی از رأس‌های درجهٔ ۳ را برداریم یعنی یکی از $\{a,d\}$ یکی از $\{m,p\}$ و یکی از $\{e,g\}$. بنابراین تعداد مجموعه‌های احاطه‌گر ۳عضوی یا ۳ـ مجموعه‌ها برابر است با:



$۲\times ۲\times ۲ = ۸$

اما دقت کنید در هر کدام از مربع‌ها به جای برداشتن یکی از رأس‌های درجهٔ ۳ می‌توان هر دو رأس درجهٔ ۲ را برداشت. برای مثال $\{h,f,q,n,c,b\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال است چون همهٔ رأس‌ها پوشش داده شده‌اند و هر کدام از رأس‌ها را حذف کنیم خود آن رأس پوشش داده نمی‌شود. (برای مثال اگر n را حذف کنیم، خود n احاطه نمی‌شود.)

پس برای احاطه‌شدن همهٔ رأس‌های چهارضلعی ما سه انتخاب داریم: یکی از دو رأس درجهٔ ۳ را انتخاب کنیم یا هر دو رأس درجهٔ ۲ را انتخاب کنیم. پس تعداد کل مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمال برابر است با:

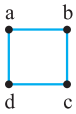
از مربع پایینی		از مربع بالایی سمت راست		از چهارضلعی بالایی سمت چپ
a یا d یا (b,c)		m یا p یا (q,n)		e یا g یا (h,f)
۳	×	۳	×	۳

$= ۲۷$

که در گزینه‌ها نیست.

۱۵۵- گزینهٔ ۴ برای داشتن یک دور به طول ۴ به ۴ رأس احتیاج داریم. اما دقت کنید هر دور به طول ۴ را می‌توان به ۸ مدل نام‌گذاری کرد. این طور که از هر کدام از رأس‌ها شروع کرد و در جهت عقربه‌های ساعت یا در خلاف جهت عقربه‌های ساعت حرکت کرد.

برای مثال دور روبه‌رو دارای ۸ اسم است.



اما دقت کنید همهٔ این‌ها یک دور را نشان می‌دهند. ⇒

- abcda: از a شروع کنیم در جهت عقربه‌های ساعت
- bcdab: از b شروع کنیم در جهت عقربه‌های ساعت
- cdabc: از c شروع کنیم در جهت عقربه‌های ساعت
- dabcd: از d شروع کنیم در جهت عقربه‌های ساعت
- adcba: از a شروع کنیم در خلاف جهت عقربه‌های ساعت
- badcb: از b شروع کنیم در خلاف جهت عقربه‌های ساعت
- cbadc: از c شروع کنیم در خلاف جهت عقربه‌های ساعت
- dcbad: از d شروع کنیم در خلاف جهت عقربه‌های ساعت

پس هر دور به طول ۴ را داریم ۸ بار حساب می‌کنیم. بنابراین تعداد دورهای به طول ۴ برابر است با:

$$\frac{۵\times ۴\times ۳\times ۲}{۸} = ۱۵$$

رأس اول هر کدام از رأس‌ها می‌تواند باشد رأس دوم یکی از ۴ رأس بعدی و به همین ترتیب.

فیزیک

۱۵۶- گزینهٔ ۱ ترازو جرم جسم را ۱۱/۵ g اندازه‌گیری کرده است. هم‌چنین با قراردادن جسم درون مایع حجم کل مایع و جسم برابر ۲۳/۱ mL شده است بنابراین:

$$V_{\text{مایع}} + V_{\text{جسم}} = ۲۳/۱ \text{ mL}$$

$$\xrightarrow{V_{\text{مایع}}=۱۸/۵ \text{ mL}} V_{\text{جسم}} = ۲۳/۱ - ۱۸/۵ = ۴/۶ \text{ mL}$$

و چگالی جسم برابر است با:

$$\rho_{\text{جسم}} = \frac{m_{\text{جسم}}}{V_{\text{جسم}}}$$

$$\xrightarrow[V_{\text{جسم}}=۴/۶ \text{ mL}=۴/۶\times ۱۰^{-۶} \text{ m}^۳]{m_{\text{جسم}}=۱۱/۵ \text{ g}=۱۱/۵\times ۱۰^{-۳} \text{ kg}} \rho_{\text{جسم}} = \frac{۱۱/۵\times ۱۰^{-۳}}{۴/۶\times ۱۰^{-۶}}$$

$$= ۲۵۰۰ \text{ kg/m}^۳$$

۱۵۷- گزینهٔ ۲ گام اول: ۵ ثانیهٔ ابتدایی را بررسی کرده و شتاب حرکت را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\Delta x = \frac{v_۱ + v_۰}{۲}\Delta t \Rightarrow ۷۵ = \frac{۲۰ + v_۰}{۲}\times ۵ \Rightarrow v_۰ = ۱۰ \text{ m/s}$$

$$v_۱ = at + v_۰ \Rightarrow ۲۰ = a\times ۵ + ۱۰ \Rightarrow a = ۲ \text{ m/s}^۲$$

گام دوم: حالا ۵ ثانیهٔ بعدی حرکت را بررسی کرده و سرعت متحرک در انتهای این مدت را به دست می‌آوریم:

$$v_۲ = at + v_۱ \Rightarrow v_۲ = ۲\times ۵ + ۲۰ = ۳۰ \text{ m/s}$$

سرعت متوسط در این ۵ s برابر است با:

$$v_{av} = \frac{v_۲ + v_۱}{۲} = \frac{۳۰ + ۲۰}{۲} = ۲۵ \text{ m/s}$$

۱۵۸- گزینهٔ ۳ گام اول: با توجه به نمودار $x-t$، متحرک در لحظهٔ $t = ۰$ در مکان $x_۰ = ۲۷ \text{ m}$ و در لحظهٔ $t_۱ = ۳ \text{ s}$ در مکان $x_۱ = ۳۶ \text{ m}$ قرار دارد و سرعتش برابر صفر است (لحظهٔ تغییر جهت). با نوشتن معادلهٔ سرعت متوسط بین این دو نقطه داریم:

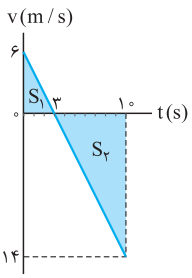
$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \frac{v_{(۳\text{ s})} + v_۰}{۲} = \frac{۳۶ - ۲۷}{۳ - ۰}$$

$$\xrightarrow{v_{(۳\text{ s})}=۰} \frac{۰ + v_۰}{۲} = ۳ \Rightarrow v_۰ = ۶ \text{ m/s}$$

و شتاب متحرک برابر است با:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_{(۳\text{ s})} - v_۰}{۳ - ۰} = \frac{۰ - ۶}{۳} = -۲ \text{ m/s}^۲$$

گام دوم: معادلهٔ سرعت ـ زمان متحرک را می‌نویسیم و با استفاده از سطح زیر نمودار سرعت ـ زمان مسافت طی‌شده توسط متحرک را به دست می‌آوریم.

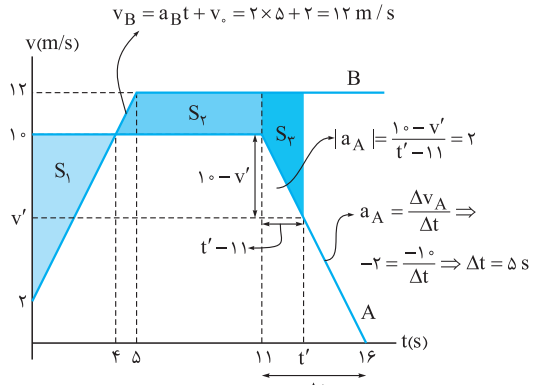


$$v = at + v_۰ = -۲t + ۶$$

$$v_{(۱۰\text{ s})} = -۲\times ۱۰ + ۶ = -۱۴ \text{ m/s}$$

$$\ell_{(۰,۱۰\text{ s})} = S_۱ + S_۲ = \frac{۳\times ۶}{۲} + \frac{۷\times ۱۴}{۲} = ۹ + ۴۹ = ۵۸ \text{ m}$$

۱۵۹- گزینهٔ ۳ گام اول: با توجه به اطلاعات تست، نمودار سرعت ـ زمان دو متحرک A و B را رسم می‌کنیم.



دو اتومبیل از یک نقطه شروع به حرکت کردند، بنابراین در لحظه‌ای که به هم می‌رسند، جابه‌جایی آن‌ها با هم برابر است. اگر فرض کنیم این دو متحرک در لحظهٔ t' به هم می‌رسند، سطح زیر نمودار $v-t$ دو متحرک در بازهٔ $(۰, t')$ باید با هم برابر باشد. با توجه به نمودار بالا و حذف سطح زیر نمودار که برای دو نمودار مشترک است، می‌توان گفت:

$$S_۱ = S_۲ + S_۳$$

$$\Rightarrow \frac{۴\times (۱۰-۲)}{۲} = \frac{(۷+۶)}{۲}\times ۲ + \frac{(۲+۱۲-v')}{۲}\times (t'-۱۱)$$

$$\Rightarrow ۱۶ = ۱۳ + \frac{(۴+۱۰-v')}{۲}(t'-۱۱)$$

$$\xrightarrow{۱۰-v'=۲(t'-۱۱)} \frac{۴+۲(t'-۱۱)}{۲}(t'-۱۱) = ۳$$

$$\Rightarrow [۲ + (t'-۱۱)](t'-۱۱) = ۳$$

$$\Rightarrow (t'-۱۱)^۲ + ۲(t'-۱۱) = ۳$$

$$\Rightarrow t'-۱۱ = ۱ \Rightarrow t' = ۱۲ \text{ s}$$

توجه کنید که از حل معادلهٔ بالا $t' = ۸ \text{ s}$ هم به عنوان جواب به دست می‌آید. ولی همان‌طور که از روی نمودار مشخص است این جواب نمی‌تواند قابل قبول باشد.

گام سوم: در لحظهٔ $t' = ۱۲ \text{ s}$ تندی اتومبیل B برابر ۱۲ m/s و تندی اتومبیل A برابر v' است به طوری که:

$$۱۰ - v' = ۲(t'-۱۱) \xrightarrow{t'=۱۲ \text{ s}} v' = ۸ \text{ m/s}$$

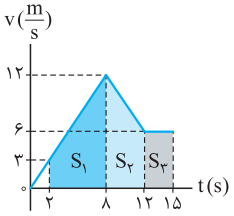
بنابراین تندی اتومبیل B، $۱۲ - ۸ = ۴ \text{ m/s}$ بیشتر از تندی اتومبیل A است.

۱۶۰- گزینهٔ ۱ گام اول: متحرک در ۸ ثانیهٔ ابتدایی با شتاب ثابت حرکت می‌کند. با توجه به این موضوع و تشکیل معادلهٔ سرعت ـ زمان، سرعت متحرک در لحظهٔ $t_۱ = ۲ \text{ s}$ را تعیین می‌کنیم:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{۱۲ - ۰}{۸ - ۰} = \frac{۳}{۲} \text{ m/s}^۲$$

$$v = at + v_۰ = \frac{۳}{۲}t + ۰ \xrightarrow{t_۱=۲ \text{ s}} v_۱ = \frac{۳}{۲}\times ۲ = ۳ \text{ m/s}$$

گام دوم: حالا با توجه به نمودار روبه‌رو و با استفاده از سطح زیر نمودار، جابه‌جایی متحرک در بازهٔ زمانی $t_1 = 2\,s$ تا $t_2 = 15\,s$ را به دست می‌آوریم.



$$\Delta x_{(2s,15s)} = S_1 + S_2 + S_3$$

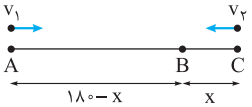
$$= \frac{(3+12)}{2}\times(8-2) + \frac{(6+12)}{2}\times(12-8) + 6\times(15-12)$$

$$= 45 + 36 + 18 = 99\,m$$

بنابراین مکان متحرک در لحظهٔ $t_2 = 15\,s$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\Delta x_{(2s,15s)} = x_2 - x_1 \Rightarrow 99\vec{i} = \vec{x}_2 - (-6\vec{i}) \Rightarrow \vec{x}_2 = 93\vec{i}$$

۱۶۱- گزینهٔ ۲ گام اول: با توجه به اطلاعات تست و مطابق شکل زیر مدت‌زمان حرکت متحرک (۱) از A به B با مدت‌زمان حرکت متحرک (۲) از C به B برابر است، بنابراین:



$$t_1 = t_2 \Rightarrow \frac{x_1}{v_1} = \frac{x_2}{v_2} \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{x}{180-x} \quad (I)$$

گام دوم: از طرفی متحرک (۱) مسافت x را در مدت $16\,s$ و متحرک (۲) مسافت $180-x$ را در مدت $25\,s$ طی می‌کند، پس می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} x = v_1 \times 16 \\ 180 - x = v_2 \times 25 \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{180-x} = \frac{v_1}{v_2}\times\frac{16}{25} \quad (II)$$

با توجه به روابط (I) و (II) می‌توان نوشت:

$$(I),(II) \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{v_1}{v_2}\times\frac{16}{25} \Rightarrow \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 = \frac{16}{25} \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{4}{5}$$

گام سوم: نسبت به دست آمده برای سرعت‌ها را در رابطهٔ (I) قرار می‌دهیم تا x به دست بیاید.

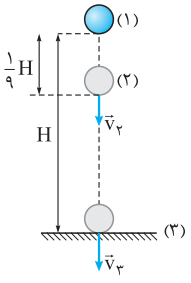
$$\frac{x}{180-x} = \frac{4}{5} \Rightarrow 5x = 4\times180 - 4x \Rightarrow 9x = 4\times180$$

$$\Rightarrow x = 4\times20 = 80\,m$$

حالا با توجه به این‌که $x = 16v_1$، سرعت متحرک (۱) را به دست می‌آوریم:

$$80 = 16\times v_1 \Rightarrow v_1 = 5\,m/s$$

۱۶۲- گزینهٔ ۳ گام اول: با توجه به شکل زیر سرعت گلوله در نقطهٔ (۲) را به دست می‌آوریم:



$$v_{av} = \frac{v_2 + v_1}{2}$$

$$\xrightarrow[v_1 = 0]{v_{av} = 4/9\,m/s} 4/9 = \frac{v_2 + 0}{2}$$

$$\Rightarrow v_2 = 9/8\,m/s$$

گام دوم: حالا رابطهٔ $v^2 - v_0^2 = -2g\Delta y$ را یک بار برای نقاط (۱) و (۲)، و بار دیگر برای نقاط (۱) و (۳) می‌نویسیم:

$$(1)\text{ و }(2): v_2^2 - v_1^2 = -2g\Delta y_{1,2}$$

$$\xrightarrow{v_1 = 0} (9/8)^2 = -2\times9/8\times\left(-\frac{1}{9}H\right)$$

$$(1)\text{ و }(3): v_3^2 - v_1^2 = -2g\Delta y_{1,3} \Rightarrow v_3^2 = -2\times9/8\times(-H)$$

با تقسیم دو رابطهٔ بالا، v_3 را به دست می‌آوریم:

$$\frac{v_3^2}{(9/8)^2} = \frac{H}{\frac{1}{9}H} = 9 \Rightarrow \frac{v_3}{9/8} = 3 \Rightarrow v_3 = 29/4\,m/s$$

۱۶۳- گزینهٔ ۳ گام اول: تکانهٔ جسم در لحظات $t_1 = 3\,s$ و $t_2 = 6\,s$ را به دست می‌آوریم:

$$t_1 = 3\,s \Rightarrow p_1 = 15(3)^2 + 5(3) = 15(9+1) = 150\,\frac{kg.m}{s}$$

$$t_2 = 6\,s \Rightarrow p_2 = 15(6)^2 + 5(6) = 570\,\frac{kg.m}{s}$$

گام دوم: نیروی خالص متوسط وارد بر جسم در این مدت برابر است با:

$$F_{av} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{p_2 - p_1}{t_2 - t_1} = \frac{570-150}{6-3} = \frac{420}{3} = 140\,N$$

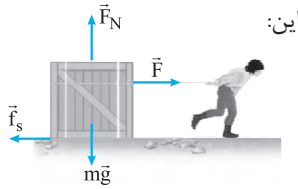
۱۶۴- گزینهٔ ۴ گام اول: ابتدا نیروی اصطکاک ایستایی بیشینه را به دست می‌آوریم تا ببینیم که جعبه حرکت می‌کند یا نه!

$$f_{s,max} = \mu_s F_N = \mu_s mg = 0/6\times50\times10 = 300\,N$$

چون نیروی افقی $F = 250\,N$ قادر به حرکت جعبه نیست، جعبه ساکن می‌ماند و نیروی اصطکاک ایستایی وارد بر آن با F برابر است.

$$f_s = F = 250\,N$$

گام دوم: نیرویی که سطح به جعبه وارد می‌کند برایند دو نیروی عمود بر هم $\vec{F}_N$ و $\vec{f}_s$ است، بنابراین:



$$\vec{F}_N : F_N = 500\ \text{در جهت محور } y$$

$$\vec{f}_s : f_s = -250\vec{i}\ \text{در خلاف جهت محور } x$$

$$\vec{R} = \vec{f}_s + \vec{F}_N = (-250\,N)\vec{i} + (500\,N)\vec{j}$$

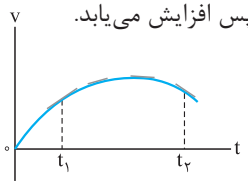
عجله نکنید! تست نیرویی که جسم (جعبه) به سطح وارد می‌کند را می‌خواهد که واکنش نیروی $\vec{R}$ است، بنابراین:

$$\vec{R}' = -\vec{R} = (250\,N)\vec{i} + (-500\,N)\vec{j}$$

تکنیک: می‌دانیم بین جعبه و سطح حتماً نیروی اصطکاک وجود دارد. با توجه به این‌که نیروی اصطکاک در راستای محور x است، پس نیرویی که جسم به سطح وارد می‌کند حتماً دارای مؤلفهٔ $\vec{i}$ است (رد گزینه‌های ۱ و ۲).

از طرفی جسم نیرویی عمودی در خلاف جهت محور y به سطح وارد می‌کند، بنابراین جواب تست حتماً باید دارای مؤلفهٔ $-\vec{j}$ باشد. (رد ۳)

۱۶۵- گزینهٔ ۴ مطابق شکل زیر، اگر مماس بر نمودار $v-t$ را در چند لحظهٔ مختلف در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 رسم کنیم، مشاهده می‌کنیم که اندازهٔ شیب این مماس‌ها ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد. بنابراین بزرگی شتاب متحرک ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد. با توجه به رابطهٔ $F=ma$، تغییرات بزرگی نیرو هم مانند بزرگی شتاب بوده و ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد.



۱۶۶- گزینهٔ ۴ گام اول: شتاب مرکزگرای ناشی از چرخش ماهواره، همان شتاب گرانش در محل ماهواره است، بنابراین رابطهٔ $g=G\frac{M_e}{r^2}$ را به صورت نسبتی می‌نویسیم:

$$\frac{a_{c(2)}}{a_{c(1)}}=\frac{g_2}{g_1}=(\frac{r_1}{r_2})^2=(\frac{R_e+h_1}{R_e+h_2})^2$$

$$\xrightarrow[h_2=1/5R_e]{h_1=R_e}\frac{a_{c(2)}}{a_{c(1)}}=(\frac{R_e+R_e}{R_e+1/5R_e})^2=(\frac{2}{\frac{5}{2}})^2=\frac{16}{25}$$

گام دوم: درصد تغییرات شتاب مرکزگرا به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{a_{c(2)}-a_{c(1)}}{a_{c(1)}}\times 100\%=\frac{\frac{16}{25}a_{c(1)}-a_{c(1)}}{a_{c(1)}}\times 100\%$$

$$=\frac{-9}{25}\times 100\%=-36\%$$

یعنی شتاب مرکزگرا ۳۶ درصد کاهش می‌یابد.

۱۶۷- گزینهٔ ۲ گام اول: بسامد و دامنهٔ حرکت نوسانگر را به دست می‌آوریم.

$$f=\frac{n}{t}\xrightarrow[t=60\,s]{n=150}f=\frac{150}{60}=2/5\,Hz$$

$$A=\frac{4\,cm}{2}=2\,cm=0/02\,m$$

گام دوم: انرژی مکانیکی (انرژی کل) نوسانگر را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$E=2\pi^2mA^2f^2=2\times 10\times 0/2\times(0/02)^2\times(2/5)^2$$

$$=4(0/02\times 2/5)^2\Rightarrow E=4(0/05)^2=0/01\,J=10\,mJ$$

گام سوم: انرژی جنبشی نوسانگر برابر است با:

$$K=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}\times 0/2\times(5\sqrt{2}\pi\times 10^{-2})^2$$

$$=0/1\times(25\times 2\times 10\times 10^{-4})\Rightarrow K=0/005\,J=5\,mJ$$

گام چهارم: انرژی پتانسیل نوسانگر در لحظهٔ بیان‌شده را به دست می‌آوریم: $E=K+U\Rightarrow U=E-K=10-5=5\,mJ$

۱۶۸- گزینهٔ ۱ گام اول: هنگامی که جهت حرکت نوسانگر تغییر می‌کند، شتاب بیشینه و لحظه‌ای که نیروی وارد بر نوسانگر صفر است، سرعت بیشینه است! با این حساب:

$$\begin{cases}a_{max}=A\omega^2\\ v_{max}=A\omega\end{cases}\Rightarrow\frac{a_{max}}{v_{max}}=\omega\Rightarrow\omega=\frac{0/8\pi^2}{0/2\pi}=4\pi\,rad/s$$

گام دوم: حالا برای محاسبهٔ بزرگی شتاب در $x=1\,cm$، از رابطهٔ $a=\omega^2x$ استفاده می‌کنیم:

$$a=16\pi^2\times 10^{-2}=0/16\pi^2\,m/s^2$$

۱۶۹- گزینهٔ ۱ گام اول: ابتدا با نوشتن رابطهٔ $a=\omega^2x$ در نقطهٔ M، اندازهٔ بسامد زاویه‌ای را حساب می‌کنیم:

$$\omega^2=\frac{a}{x}=\frac{4}{10^{-2}}=400\Rightarrow\omega=20\,rad/s$$

گام دوم: حالا هم بسامد زاویه‌ای را داریم، هم جرم را! پس به سراغ رابطهٔ $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$ می‌رویم تا مقدار k مشخص شود:

$$k=m\omega^2=2\times 400=800\,N/m$$

۱۷۰- گزینهٔ ۲ گام اول: در ابتدا باید دید شدت صوت این چشمهٔ صوتی در این فاصله چه‌قدر است؛ برای این کار از رابطهٔ $\beta=(10\,dB)\log\frac{I}{I_0}$ استفاده می‌کنیم:

$$80=10\log\frac{I}{10^{-12}}\Rightarrow 10^8=\frac{I}{10^{-12}}\Rightarrow I=10^{-4}\,W/m^2$$

گام دوم: حالا که I را داریم، به سراغ رابطهٔ $I=\frac{P}{4\pi r^2}$ می‌رویم تا فاصلهٔ این نقطه از چشمه (r) به دست آید:

$$r^2=\frac{P}{4\pi I}=\frac{\cancel{48}^{4}}{\cancel{4}\times\cancel{3}\times 10^{-4}}=4\times 10^4\Rightarrow r=200\,m$$

۱۷۱- گزینهٔ ۴ مطابق شکل، طول موج طنابِ ذرهٔ M، ۲ برابر طول موج طنابِ ذرهٔ N است؛ با این حساب با توجه به یکسان‌بودن تندی انتشار موج در دو طناب و رابطهٔ $\lambda=\frac{v}{f}$، تعداد نوسان‌های طنابِ ذرهٔ N در یک بازهٔ زمانی معین، ۲ برابر طنابِ ذرهٔ M است؛ یعنی ۴ نوسان! (۲×۲) در واقع:

$$\frac{f_N}{f_M}=\frac{\lambda_M}{\lambda_N}\Rightarrow\frac{f_N}{f_M}=2\xrightarrow[n_M=2]{f=\frac{n}{t}}\frac{n_N}{2}=2\Rightarrow n_N=4$$

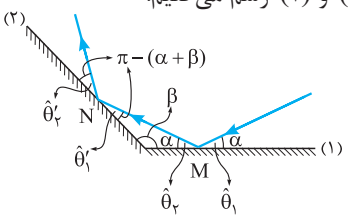
۱۷۲- گزینهٔ ۱ گام اول: از رابطهٔ $f_n=\frac{nv}{2L}$، تندی انتشار موج در تار را حساب می‌کنیم:

$$210=\frac{3v}{2\times 0/5}\Rightarrow v=70\,m/s$$

گام دوم: حالا که v را داریم، به سراغ رابطهٔ $v=\sqrt{\frac{FL}{m}}$ می‌رویم تا نیروی کشش تار به دست آید:

$$v^2=\frac{FL}{m}\Rightarrow F=\frac{mv^2}{L}=\frac{\cancel{5}^{10}\times 10^{-3}\times 70\times 70}{\cancel{0/5}_{1}}=49\,N$$

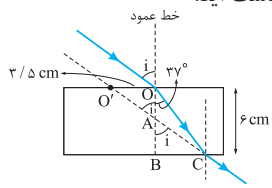
۱۷۳- گزینهٔ ۴ گام اول: ابتدا مطابق شکل ادامهٔ مسیر پرتو را پس از بازتاب از آینه‌های (۱) و (۲) رسم می‌کنیم.



گام دوم: با توجه به یکسان‌بودن زاویهٔ تابش و بازتابش و این‌که مجموع زوایای داخلی مثلث برابر ۱۸۰° است، زاویهٔ پرتو بازتابیده از آینهٔ (۲) با سطح این آینه برابر است با:

$$\begin{cases}\hat{\theta}_۱=\hat{\theta}_۲=\alpha\\ \hat{\theta}'_۱=\hat{\theta}'_۲\\ \alpha+\beta+\hat{\theta}'_۱=\pi\end{cases}\Rightarrow \hat{\theta}'_۲=\pi-(\alpha+\beta)$$

۱۷۴- گزینهٔ ۲ گام اول: برای آن‌که بفهمیم ضریب شکست محیط شفاف چه‌قدر است، باید مقدار زاویهٔ $\hat{i}$ را بدانیم؛ برای همین باید یک گذری به هندسه بزنیم! ابتدا به سراغ مثلث $\overset{\Delta}{OBC}$ می‌رویم تا به کمک روابط مثلثاتی، مقدار $\overline{BC}$ و $\overline{OC}$ به دست آید:



$$\cos ۳۷^\circ=\frac{\overline{OB}}{\overline{OC}}\Rightarrow\frac{۸}{۱۰}=\frac{۶}{\overline{OC}}\Rightarrow\overline{OC}=۷/۵\text{ cm}$$

$$\Rightarrow\sin ۳۷^\circ=\frac{\overline{BC}}{\overline{OC}}\Rightarrow\frac{۶}{۱۰}=\frac{\overline{BC}}{۷/۵}\Rightarrow\overline{BC}=۴/۵\text{ cm}$$

گام دوم: اگر خوب به دو مثلث $\overset{\Delta}{OAO'}$ و $\overset{\Delta}{ABC}$ نگاه کنید؛ متوجه می‌شوید که با هم متشابه‌اند؛ بنابراین اضلاع نظیر آن‌ها با هم متناسب‌اند؛ یعنی به زبان ریاضی:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{OO'}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AO}}\Rightarrow\frac{۴/۵}{۳/۵}=\frac{\overline{AB}}{۶-\overline{AB}}\Rightarrow ۵۴-۹\overline{AB}=۷\overline{AB}$$

$$\Rightarrow ۱۶\overline{AB}=۵۴\Rightarrow\overline{AB}=\frac{۵۴}{۱۶}=\frac{۲۷}{۸}\text{ cm}$$

گام سوم: حالا هم مقدار $\overline{BC}$ را می‌دانیم، هم $\overline{AB}$ را! پس می‌توانیم زاویهٔ $\hat{A}$ (که در واقع همان $\hat{i}$ است) را به کمک رابطهٔ تانژانت حساب کنیم (زاویهٔ $\hat{A}$ به خاطر قضیهٔ خطوط موازی و مورب برابر $\hat{i}$ می‌شود):

$$\tan\hat{i}=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{۴/۵}{\frac{۲۷}{۸}}\Rightarrow\tan\hat{i}=\frac{۸}{۶}\Rightarrow\hat{i}=۵۳^\circ$$

گام چهارم: با نوشتن رابطهٔ شکست اسنل، ضریب شکست به دست می‌آید:

$$n_۱\sin\theta_۱=n_۲\sin\theta_۲\Rightarrow ۱\times\sin ۵۳^\circ=n\times\sin ۳۷^\circ$$

$$\Rightarrow ۰/۸=n\times ۰/۶\Rightarrow n=\frac{۴}{۳}$$

۱۷۵- گزینهٔ ۱ برای به دست آوردن λ، از رابطهٔ فوتوالکتریک $K_{max}=h\frac{c}{\lambda}-W_۰$ استفاده می‌کنیم، دارا! یعنی λ

$$\frac{hc}{\lambda}=K_{max}+W_۰$$

$$\Rightarrow\lambda=\frac{hc}{K_{max}+W_۰}=\frac{۴\times۱۰^{-۱۵}\times۳\times۱۰^{۸}}{\underbrace{۴/۴+۲/۸}_{۷/۲}}\times۱۰^{۶}\ \mu m$$

$$=\frac{۱/۲}{۷/۲}=\frac{۱}{۶}\ \mu m$$

۱۷۶- گزینهٔ ۳ گام اول: دومین خط رشتهٔ پاشن به ازای $n=۵$ و سومین خط آن به ازای $n=۶$ است. با توجه به این موضوع، به سراغ رابطهٔ ریدبرگ می‌رویم و طول موج خط دوم و سوم را حساب می‌کنیم:

$$۱)\ \frac{۱}{\lambda_۲}=R(\frac{۱}{۳^۲}-\frac{۱}{۵^۲})=۱۰^{-۲}(\frac{۲۵-۹}{۲۵\times۹})$$

$$\Rightarrow\lambda_۲=\frac{۱۰^{۴}}{\cancel{۲۵}}\times\frac{۲۵\times۹}{\cancel{۱۶}_{۴}}=\frac{۵۶۲۵}{۴}\text{ nm}$$

$$۲)\ \frac{۱}{\lambda_۳}=R(\frac{۱}{۳^۲}-\frac{۱}{۶^۲})=۱۰^{-۲}(\frac{۳۶-۹}{۳۶\times۹})$$

$$\Rightarrow\lambda_۳=۱۰^{۲}\times\frac{\cancel{۳۶}^{۱۲}\times\cancel{۹}^{۱}}{\cancel{۲۷}_{۳}}=۱۲۰۰\text{ nm}$$

گام دوم: حالا اختلاف این دو طول موج را پیدا می‌کنیم:

$$\Delta\lambda=\lambda_۲-\lambda_۳=\frac{۵۶۲۵}{۴}-\frac{۴۸۰۰}{۴}=\frac{۸۲۵}{۴}\text{ nm}$$

۱۷۷- گزینهٔ ۴ بار الکتریکی موجود در هر سانتی‌متر مربع از سطح کره برحسب پیکوکولن یعنی چگالی سطحی بار آن برحسب $\frac{pC}{cm^۲}$؛ بنابراین به سراغ رابطهٔ $\sigma=\frac{Q}{A}$ می‌رویم:

$$\sigma=\frac{Q}{۴\pi\times r^۲}=\frac{\cancel{۱۵۷}^{\cancel{۱۰}}\times۱۰^{۳}\ pC}{۴\times\cancel{۳/۱۴}_{۱}\times\cancel{۵}^{۱}\times۵\ cm^۲}=۵۰۰\frac{pC}{cm^۲}$$

یعنی در هر سانتی‌متر مربع از سطح این کره، ۵۰۰ پیکوکولن بار الکتریکی وجود دارد.

۱۷۸- گزینهٔ ۲ گام اول: با توجه به داشتن اندازهٔ میدان الکتریکی در فاصلهٔ ۵ سانتی‌متری از بار q، اندازهٔ بار q را از رابطهٔ $E=k\frac{|q|}{r^۲}$ می‌توان حساب کرد:

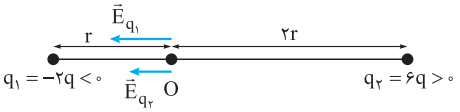
$$|q|=\frac{Er^۲}{k}=\frac{\cancel{۱۸}^{۲}\times۱۰^{۷}\times۲۵\times۱۰^{-۴}}{\cancel{۹}_{۱}\times۱۰^{۹}}\times۱۰^{۶}\ \mu C=۵۰\ \mu C$$

گام دوم: حالا که اندازهٔ بار q را می‌دانیم، می‌توانیم r_1 را هم به دست آوریم:

$$r_1^2 = k\frac{|q|}{E_1} = 9\times10^9 \times \frac{50\times10^{-6}}{1/125\times10^7} = 4\times10^{-2}$$

$$\Rightarrow r_1 = 0/2\,m = 20\,cm$$

۱۷۹- گزینهٔ ۱ گام اول: با فرض $(q>0)$، جهت و اندازهٔ میدان الکتریکی هر یک از بارها را در نقطهٔ O قبل از انتقال بار به دست می‌آوریم.



$$E = k\frac{|q|}{r^2} \Rightarrow \begin{cases} E_{q_1} = \dfrac{k|-2q|}{r^2} = \dfrac{2k|q|}{r^2} \\ E_{q_2} = \dfrac{k|6q|}{(2r)^2} = \dfrac{3}{2}\dfrac{k|q|}{r^2} \end{cases}$$

گام دوم: با توجه به جهت میدان‌های الکتریکی دو بار در نقطهٔ O، بزرگی میدان خالص الکتریکی در نقطهٔ O قبل از تغییر بارها (E_1) برابر است با:

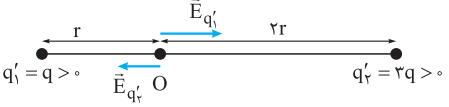
$$E_1 = E_{q_1} + E_{q_2} = 2\frac{k|q|}{r^2} + \frac{3}{2}k\frac{|q|}{r^2} = \frac{7}{2}\frac{k|q|}{r^2}$$

گام سوم: با انتقال ۵۰ درصد از بار q_2 به بار q_1، هر یک از بارها برابر خواهند شد با:

$$q_1' = q_1 + \frac{50}{100}q_2 = -2q + \frac{1}{2}(6q) = q$$

$$q_2' = q_2 - \frac{50}{100}q_2 = \frac{1}{2}q_2 = \frac{1}{2}(6q) = 3q$$

گام چهارم: حالا در حالت جدید، جهت و اندازهٔ میدان‌های الکتریکی در نقطهٔ O و بزرگی میدان الکتریکی خالص در این نقطه را به دست می‌آوریم:



$$E = k\frac{|q|}{r^2} \Rightarrow \begin{cases} E_{q_1'} = k\dfrac{|q_1'|}{r^2} = k\dfrac{q}{r^2} \\ E_{q_2'} = k\dfrac{|q_2'|}{(2r)^2} = k\dfrac{3q}{(2r)^2} = \dfrac{3}{4}\dfrac{k|q|}{r^2} \end{cases}$$

$$E_2 = E_{q_1'} - E_{q_2'} = k\frac{|q|}{r^2} - \frac{3}{4}k\frac{|q|}{r^2} = \frac{1}{4}k\frac{|q|}{r^2}$$

گام پنجم: حالا کافی است، نسبت خواسته‌شده را به دست بیاوریم:

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{\frac{1}{4}k\frac{|q|}{r^2}}{\frac{7}{2}k\frac{|q|}{r^2}} = \frac{1}{14}$$

۱۸۰- گزینهٔ ۱ گام اول: طبق رابطهٔ $U=\frac{1}{2}CV^2$، نسبت انرژی خازن بعد از تغییرات به انرژی آن قبل از تغییرات را به دست می‌آوریم. سپس با استفاده از تغییر انرژی خازن، انرژی اولیهٔ خازن را به دست می‌آوریم. (توجه کنید که با تغییر ولتاژ خازن، ظرفیت خازن تغییر نمی‌کند.)

$$\frac{U_2}{U_1} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2 = \left(\frac{1/5V_1}{V_1}\right)^2 \Rightarrow \frac{U_2}{U_1} = \frac{9}{4}$$

$$\xrightarrow{U_2=U_1+200\,\mu J} \frac{U_1+200}{U_1} = \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow 4U_1 + 800 = 9U_1 \Rightarrow U_1 = 160\,\mu J$$

گام دوم: طبق رابطهٔ $Q=CV$، نسبت بار خازن پس از تغییر به بار آن قبل از تغییر را به دست می‌آوریم. سپس با استفاده از تغییر بار خازن، بار اولیهٔ خازن را به دست می‌آوریم:

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{V_2}{V_1} = 1/5 \xrightarrow{Q_2=Q_1+20\,\mu C} \frac{Q_1+20}{Q_1} = 1/5$$

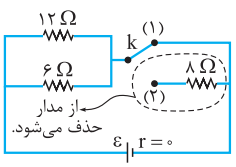
$$\Rightarrow Q_1 + 20 = 1/5Q_1 \Rightarrow Q_1 = 40\,\mu C$$

گام سوم: حالا با استفاده از رابطهٔ $U=\frac{Q^2}{2C}$، ظرفیت خازن را به دست می‌آوریم:

$$U_1 = \frac{Q_1^2}{2C} \Rightarrow 160 = \frac{(40)^2}{2C} \Rightarrow C = 5\,\mu F$$

توجه کنید: در رابطهٔ $U=\frac{Q^2}{2C}$، با جای‌گذاری بار برحسب میکروکولن و انرژی برحسب میکروژول، ظرفیت برحسب میکروفاراد به دست می‌آید.

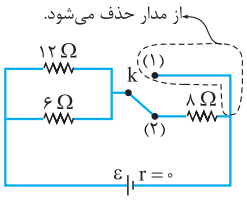
۱۸۱- گزینهٔ ۴ گام اول: در حالتی که کلید در حالت (۱) قرار دارد شکل مدار به صورت زیر است. در این حالت مقاومت معادل مدار و توان خروجی باتری (P_1) که همان توان مصرفی مقاومت معادل مدار است، برابر است با:



$$R_{eq_{(1)}} = \frac{12\times6}{12+6} = \frac{12}{2+1} = 4\,\Omega$$

$$P_1 = \frac{V^2}{R_{eq_{(1)}}} = \frac{\varepsilon^2}{4}$$

گام دوم: با وصل کلید به حالت (۲)، مقاومت معادل و توان خروجی باتری (P_2) برابر است با:



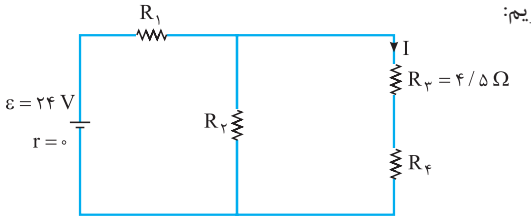
$$R_{eq_{(2)}} = \frac{12\times6}{12+6} + 8 = 12\,\Omega$$

$$P_2 = \frac{V^2}{R_{eq_{(2)}}} = \frac{\varepsilon^2}{12}$$

گام سوم: حالا کافی است نسبت خواسته‌شد را به دست بیاوریم:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\frac{\varepsilon^2}{12}}{\frac{\varepsilon^2}{4}} = \frac{1}{3}$$

۱۸۲- گزینهٔ ۱ گام اول: توان مصرفی در مقاومت برابر $P=RI^2$ است. با توجه به این‌که توان دو مقاومت R_3 و R_4 با هم برابر و این دو مقاومت سری‌اند، مقاومت R_4 را به دست می‌آوریم:

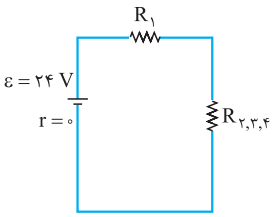


$$P_3=P_4 \Rightarrow R_3I_3^2=R_4I_4^2 \xrightarrow{I_3=I_4=I} R_3=R_4$$
$$\Rightarrow R_4=4/5\,\Omega$$

گام دوم: مقاومت معادل دو مقاومت R_3 و R_4 برابر $R_{3,4}=R_3+R_4=9\,\Omega$ و توان آن $P_{3,4}=P_3+P_4=2P$ است. مقاومت $R_{3,4}$ با مقاومت R_2 موازی است. در مقاومت‌های موازی، نسبت توان‌ها به نسبت عکس مقاومت‌ها است، بنابراین R_2 برابر است با:

$$\frac{P_2}{P_{3,4}}=\frac{R_{3,4}}{R_2} \Rightarrow \frac{P}{2P}=\frac{9}{R_2} \Rightarrow R_2=18\,\Omega$$

گام سوم: مدار را ساده می‌کنیم و با استفاده از نسبت توان‌ها، مقدار مقاومت R_1 را به دست می‌آوریم. در مقاومت‌های سری نسبت توان‌ها با نسبت مقاومت‌ها برابر است. بنابراین:

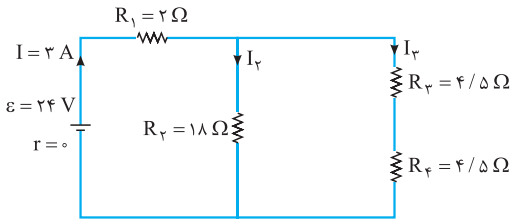


$$R_{2,3,4}=\frac{R_2\times R_{3,4}}{R_2+R_{3,4}}=\frac{18\times 9}{18+9}=6\,\Omega$$
$$P_{2,3,4}=P+2P=3P$$
$$\frac{P_{2,3,4}}{P_1}=\frac{R_{2,3,4}}{R_1} \Rightarrow \frac{3P}{P}=\frac{6}{R_1} \Rightarrow R_1=2\,\Omega$$

گام چهارم: حالا مقاومت معادل مدار و جریان عبوری از باتری را به‌دست می‌آوریم:

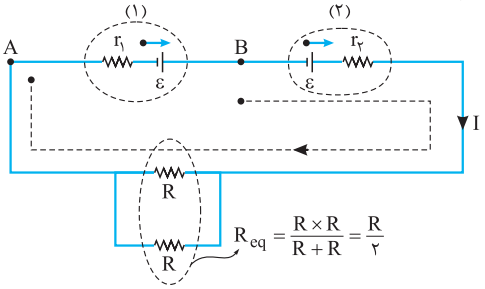
$$R_{eq}=R_1+R_{2,3,4}=2+6=8\,\Omega$$
$$I=\frac{\varepsilon}{R_{eq}+r}=\frac{24}{8+0}=3\,A$$

گام پنجم: با توجه به شکل مدار و با استفاده از تقسیم جریان، جریان عبوری از R_2 برابر است با:



$$\begin{cases}\frac{I_2}{I_3}=\frac{R_{3,4}}{R_2} \Rightarrow \frac{I_2}{I_3}=\frac{9}{18}=\frac{1}{2} \Rightarrow I_2=1\,A\\ I_2+I_3=3A\end{cases}$$

۱۸۳- گزینهٔ ۲ گام اول: ابتدا مقاومت معادل و جریان مدار را به دست می‌آوریم:

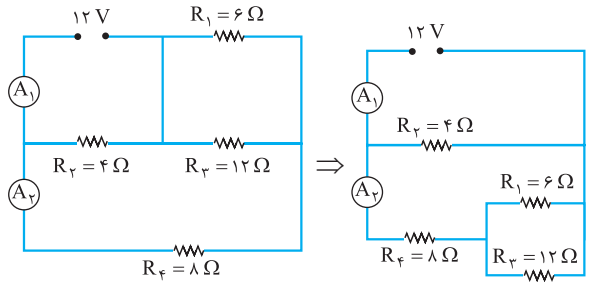


$$I=\frac{\varepsilon+\varepsilon}{\frac{R}{2}+r_1+r_2}=\frac{4\varepsilon}{R+2r_1+2r_2}$$

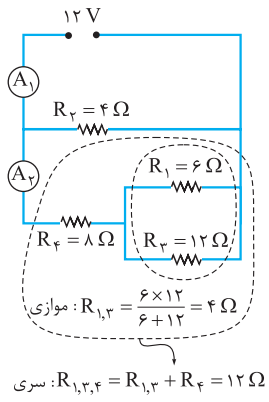
گام دوم: با حرکت در مسیر خط‌چین از B به A می‌رسیم و اختلاف پتانسیل این دو نقطه را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$V_B+\varepsilon-r_2I-\frac{R}{2}I=V_A$$
$$V_B-V_A=(r_2+\frac{R}{2})I-\varepsilon=0$$
$$\Rightarrow (r_2+\frac{R}{2})I=\varepsilon$$
$$\Rightarrow (r_2+\frac{R}{2})\frac{4\cancel{\varepsilon}}{R+2r_1+2r_2}=\cancel{\varepsilon}$$
$$4r_2+2R=R+2r_1+2r_2 \Rightarrow R=2r_1-2r_2$$
$$\Rightarrow R=2(r_1-r_2)$$

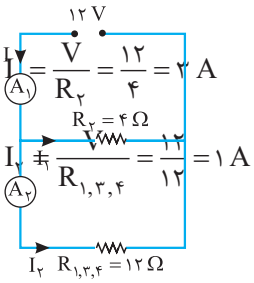
۱۸۴- گزینهٔ ۳ گام اول: ابتدا شکل مدار را کمی ساده می‌کنیم:



گام دوم: مقاومت شاخهٔ پایینی برابر است با:



گام سوم: با توجه به شکل ساده‌شدهٔ مدار، جریان عبوری از هر یک از آمپرسنج‌ها برابر است با:

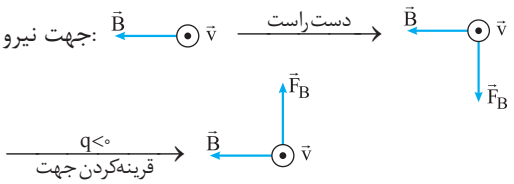


بنابراین عدد آمپرسنج (۲) برابر $I_2 = 1\ A$ و عدد آمپرسنج (۱) برابر $I = I_1 + I_2 = 4\ A$ است.

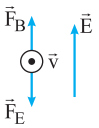
۱۸۵- گزینهٔ ۳ نماد ⊖ مربوط به یک مولد جریان متناوب است که اختلاف پتانسیل آن به صورت سینوسی است.

هنگامی که کلید در حالت (۱) قرار دارد، همواره جریان سینوسی از مقاومت R عبور می‌کند و نمودار جریان عبوری از R به صورت یک نمودار سینوسی کامل است. با وصل کلید در حالت (۲) دیود تنها اجازهٔ عبور جریان در یک سو را می‌دهد. بنابراین جریان عبوری از مدار در هر دورهٔ تناوب مولد، به مدت نصف دوره مخالف صفر خواهد بود. بنابراین ۳ پاسخ صحیح است.

۱۸۶- گزینهٔ ۴ گام اول: ابتدا با استفاده از قاعدهٔ دست راست جهت نیروی مغناطیسی وارد بر الکترون را تعیین می‌کنیم:



گام دوم: با توجه به جهت نیروی مغناطیسی و این‌که ذره بدون انحراف به حرکت خود ادامه داده است، نیروی الکتریکی باید نیروی مغناطیسی را خنثی کند، پس جهت نیروی الکتریکی به سمت پایین است. چون جهت نیروی الکتریکی وارد بر ذرهٔ باردار با بار منفی خلاف جهت میدان الکتریکی است، پس میدان الکتریکی به سمت بالا یعنی در جهت محور y است. (رد گزینه‌های ۱ و ۳). اندازهٔ میدان الکتریکی برابر است با:

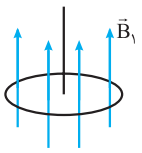


$$F_E = F_B \Rightarrow E|q| = |q| \times 2\times10^{5} \times 40\times10^{-4} \times 1$$
$$\Rightarrow E = 8\times10^{2}\ \frac{N}{C}$$
$$\Rightarrow \vec{E} = (+8\times10^{2})\vec{j}$$

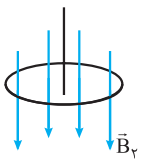
۱۸۷- گزینهٔ ۲ گام اول: با استفاده از قاعدهٔ دست راست، جهت جریان حلقه به صورت ساعتگرد است.

گام دوم: تراکم خطوط میدان درون حلقه بیشتر از نقاط بیرون حلقه است، پس بزرگی میدان مغناطیسی درون حلقه (B_1) بیشتر از بزرگی میدان خارج حلقه (B_2) است.

۱۸۸- گزینهٔ ۴ گام اول: ابتدا جهت بالا را برای نیم‌خط عمود بر حلقه فرض می‌کنیم و شار عبوری از آن را در هر دو حالت به دست می‌آوریم.



$$\theta_1 = 0^\circ$$
$$\Phi_1 = B_1 A\cos\theta_1$$
$$= 0/1\times(100\times10^{-4})\times\cos0^\circ$$
$$= 10^{-3}\ Wb$$



$$\theta_2 = 180^\circ$$
$$\Phi_2 = B_2 A\cos\theta_2$$
$$= 0/1\times(100\times10^{-4})\times\cos180^\circ$$
$$= -10^{-3}\ Wb$$

گام دوم: با استفاده از رابطهٔ $|\bar{\varepsilon}| = |-N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}|$، بزرگی نیروی محرکهٔ القایی را به دست می‌آوریم:

$$|\bar{\varepsilon}| = |-N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}| = |-1\times\frac{-10^{-3}-10^{-3}}{0/25}| = 8\times10^{-3}\ V$$
$$= 8\ mV$$

۱۸۹- گزینهٔ ۱ گام اول: ابتدا معادلهٔ جریان را با استفاده از اطلاعات نمودار می‌نویسیم:

$$\frac{5}{4}T = \frac{1}{40} \Rightarrow T = \frac{1}{50}s, I_m = 6\ A$$

$$I = I_m\sin(\frac{2\pi}{T}t) = 6\sin(\frac{2\pi}{\frac{1}{50}}t) = 6\sin(100\pi t)$$

گام دوم: جریان در لحظهٔ $t = \frac{1}{400}s$ برابر است با:

$$I = 6\sin(100\pi t) = 6\sin(100\pi\times\frac{1}{400}) = 6\sin(\frac{\pi}{4})$$
$$= 3\sqrt{2}\ A$$

گام سوم: از رابطهٔ $U = \frac{1}{2}LI^2$، ضریب القاوری سیملوله را به دست می‌آوریم:

$$U = \frac{1}{2}LI^2 \Rightarrow 72\times10^{-3} = \frac{1}{2}\times L\times(3\sqrt{2})^2$$
$$\Rightarrow L = 8\times10^{-3}H \Rightarrow L = 8\ mH$$

۱۹۰- گزینهٔ ۲ گام اول: ابتدا تعداد مول‌های معادل با $1\ \mu g$ هیدروژن را حساب می‌کنیم:

$$n = \frac{m}{M} = \frac{1\times10^{-6}\ g}{2\ g/mol} = 5\times10^{-7}\ mol$$

گام دوم: حالا به سراغ محاسبهٔ تعداد مولکول‌ها می‌رویم:

$$n = \frac{N}{N_A} \Rightarrow 5\times10^{-7} = \frac{N}{6/022\times10^{23}}$$
$$\Rightarrow N = (5\times10^{-7})\times(6/022\times10^{23}) = 30/11\times10^{16}$$
$$= 3/011\times10^{17} \sim 10^{17}$$

۱۹۱- گزینهٔ ۲ تنها نیرویی که روی گلوله کار انجام می‌دهد، نیرویی است که دیوار به آن وارد می‌کند. دقت کنید که نیروی وزن بر مسیر حرکت گلوله عمود است و کاری انجام نمی‌دهد. بنابراین به کمک قضیهٔ کار ـ انرژی جنبشی داریم:

$$\Delta K = W_t \xrightarrow{W_t = W_{\text{دیوار}}} \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = W_{\text{دیوار}}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}\times(40\times10^{-3})\times(0-9\times10^{4}) = W_{\text{دیوار}}$$
$$\Rightarrow W_{\text{دیوار}} = -1800\ \text{J}$$

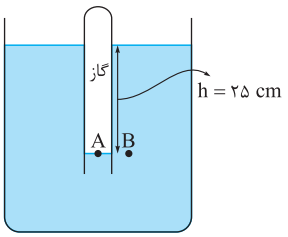
۱۹۲- گزینهٔ ۳ روش اول: از آن‌جایی که تنها نیروی مؤثر بر حرکت موتورسوار نیروی وزن است و خبری از نیروهای تلف‌کننده نیست، انرژی مکانیکی موتورسوار پایسته می‌ماند. با توجه به اصل پایستگی انرژی مکانیکی داریم: $E = \text{ثابت} \Rightarrow \Delta E = 0 \Rightarrow \Delta U + \Delta K = 0$

$$\Rightarrow mg\Delta h + \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = 0$$
$$\Rightarrow g\Delta h + \frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) = 0$$
$$\Rightarrow 10\times(30-55) + \frac{1}{2}\times(v_2^2 - 400) = 0$$
$$\Rightarrow -250 + \frac{1}{2}(v_2^2 - 400) = 0 \Rightarrow v_2^2 - 400 = 500$$
$$\Rightarrow v_2^2 = 900 \Rightarrow v_2 = 30\ \text{m/s}$$

روش دوم: به سراغ قضیهٔ کار ـ انرژی جنبشی می‌رویم. تنها نیروی مؤثر بر موتورسوار، نیروی وزن است. پس کار انجام‌شده توسط این نیرو برابر با تغییرات انرژی جنبشی موتورسوار است. یعنی:

$$\Delta K = W_t \xrightarrow{W_t = W_{mg}} \Delta K = W_{mg}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = -mg\Delta h$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) = -g\Delta h$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}\times(v_2^2 - 400) = -10\times(-25) \Rightarrow v_2^2 = 900$$
$$\Rightarrow v_2 = 30\ \text{m/s}$$

۱۹۳- گزینهٔ ۳ با توجه به اصل هم‌فشاربودن نقاط هم‌تراز از یک مایع ساکن، در شکل زیر فشار در دو نقطهٔ A و B برابر است. فشار در نقطهٔ A تنها ناشی از گاز محبوس در لوله و فشار در نقطهٔ B ناشی از هوا و مایع بالاسر آن است. بنابراین داریم:



$$P_A = P_B \Rightarrow P_{\text{گاز}} = P_0 + \rho gh$$
$$\Rightarrow P_{\text{گاز}} = 10^5 + (2000\times10\times\frac{1}{4})$$
$$\Rightarrow P_{\text{گاز}} = 105000\ \text{Pa} = 105\ \text{kPa}$$

۱۹۴- گزینهٔ ۳ در مدت‌زمان t گرمای حاصل از بخاری برقی با توان معین از رابطهٔ مقابل به دست می‌آید:

$$P = \frac{Q}{t} \Rightarrow Q = Pt$$

این مقدار گرما باید بتواند گرمای هدررفته از طریق پنجره را جبران کند. بنابراین داریم:

$$Q = \frac{kAt\Delta\theta}{L} \xrightarrow{Q=Pt} Pt = \frac{kAt\Delta\theta}{L}$$
$$\Rightarrow P = \frac{kA\Delta\theta}{L} = \frac{0/6\times(2\times2/5)\times(5-(-5))}{5\times10^{-3}}$$
$$= \frac{0/6\times5\times10}{5\times10^{-3}} = 6\times10^3\ \text{W} = 6\ \text{kW}$$

هواستون باشه! می‌توانستیم بگوییم آهنگ رسانش گرما در پنجره با توان گرمایی بخاری باید برابر باشد!

۱۹۵- گزینهٔ ۴ درصد افزایش حجم و مساحت در اثر افزایش دما، از رابطه‌های زیر به دست می‌آید:

$$\text{درصد افزایش حجم} = \frac{\Delta V}{V_1}\times100 = \frac{V_1 3\alpha\Delta\theta}{V_1}\times100$$
$$= 3\alpha\Delta\theta\times100$$
$$\text{درصد افزایش مساحت} = \frac{\Delta A}{A_1}\times100 = \frac{A_1 2\alpha\Delta\theta}{A_1}\times100$$
$$= 2\alpha\Delta\theta\times100$$

حالا با توجه به رابطه‌های بالا داریم:

$$0/08 = 3\times\alpha\times80\times100 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{3}\times10^{-5}\ \frac{1}{^\circ\text{C}}$$

بنابراین درصد افزایش سطح کره به ازای افزایش دمای ۶۰ درجهٔ سلسیوس برابر است با:

$$\text{درصد افزایش مساحت} = 2\times\frac{1}{3}\times10^{-5}\times60\times100 = \%0/04$$

۱۹۶- گزینهٔ ۱ گرمای داده‌شده به مایع در هر دقیقه ۱۰۰ J است. بنابراین گرمای دریافتی مایع در ۵۶ دقیقه برابر است با: $56\times100 = 5600\ \text{J}$. حالا داریم: $Q = mc\Delta\theta$

$$\xrightarrow{\Delta\theta = 41-(-39) = 80\ ^\circ\text{C}} 5600 = \frac{1}{2}\times c\times80$$
$$\Rightarrow c = 140\ \frac{\text{J}}{\text{kg.K}}$$

۱۹۷- گزینهٔ ۳ از آن‌جایی که فشار گاز ثابت است، می‌توانیم بنویسیم: $PV = nRT \Rightarrow P\times\Delta V = nR\Delta T$

با جای‌گذاری داده‌های مسئله در رابطهٔ بالا داریم:

$$(1/5\times10^5)\times(-4\times10^{-3}) = 3\times8\times\Delta T$$
$$\Rightarrow \Delta T = -25\text{K} = -25\ ^\circ\text{C}$$

۱۹۸- گزینهٔ ۲ گام اول: کار انجام‌شده توسط گاز روی محیط $W' = 500\ \text{J}$ است. بنابراین کار انجام‌شده توسط محیط روی گاز (W) برابر است با: $W = -W' = -500\ \text{J}$

گام دوم: در فرایند هم‌فشار، با توجه به دو رابطهٔ $W=-nR\Delta T$ و $\Delta U=nC_V\Delta T$ داریم:

$$\frac{\Delta U}{W}=\frac{nC_V\Delta T}{-nR\Delta T}\Rightarrow\frac{\Delta U}{W}=\frac{C_V}{-R}$$

$$\xrightarrow{C_V=\frac{5}{2}R}\frac{\Delta U}{-500}=-\frac{5}{2}\Rightarrow\Delta U=1250\,J$$

$\Delta U>0$ است. بنابراین انرژی درونی گاز $1250\,J$ افزایش می‌یابد.

۱۹۹- گزینهٔ ۴ گام اول: ابتدا تغییر انرژی درونی گاز را در مسیر ABC محاسبه می‌کنیم. از آن‌جایی که فرایند CA هم‌دما است، داریم:

$$\Delta U_{CA}+\Delta U_{ABC}=0\xrightarrow{\Delta U_{CA}=0}\Delta U_{ABC}=0$$

گام دوم: حالا در نمودار داده‌شده V_1 را حساب می‌کنیم:

$$\text{هم‌دما }AC\Rightarrow P_AV_A=P_CV_C$$

$$\Rightarrow(8\times10^5)\times V_1=(2\times10^5)\times16\Rightarrow V_1=4\,L$$

گام سوم: در این مرحله کار انجام‌شده روی گاز را در مسیر ABC حساب می‌کنیم:

$$W_{ABC}=W_{AB}+W_{BC}$$

$$\xrightarrow[\text{BC:هم‌حجم}]{\text{AB:هم‌فشار}}W_{ABC}=(-P_{AB}\,\Delta V_{AB})+0$$

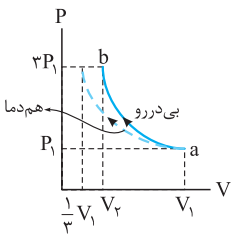
$$=-(8\times10^5)\times(16-4)\times10^{-3}=-9600\,J$$

گام چهارم: با توجه به قانون اول ترمودینامیک، در مسیر ABC داریم:

$$\Delta U_{ABC}=Q_{ABC}+W_{ABC}\Rightarrow0=Q_{ABC}+(-9600)$$

$$\Rightarrow Q_{ABC}=9600\,J$$

۲۰۰- گزینهٔ ۳ گام اول: در شکل زیر منحنی هم‌دمای عبوری از نقطهٔ (V_1,P_1) را رسم کرده‌ایم (منحنی خط‌چین). از آن‌جایی که شیب نمودار بی‌دررو از شیب نمودار هم‌دما همواره بیشتر است، منحنی خط‌چین باید زیر نمودار فرایند بی‌دررو قرار گیرد. در منحنی هم‌دما با ۳ برابر شدن فشار، حجم گاز $\frac{1}{3}$ برابر می‌شود. بنابراین واضح است که $V_2>\frac{1}{3}V_1$.



گام دوم: فرایند ab، یک تراکم بی‌دررو است. بنابراین در این فرایند $Q=0$ و $W>0$ خواهد بود.

در نتیجه داریم:

$$\Delta U=Q+W\xrightarrow{Q=0}\Delta U=W\xrightarrow{W>0}\Delta U>0$$

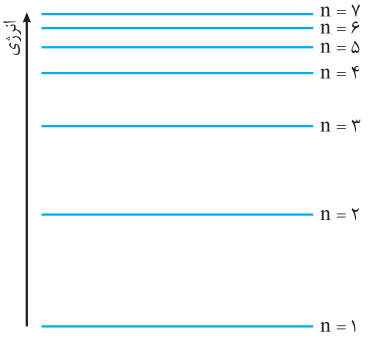
انرژی درونی گاز افزایش یافته است، بنابراین دمای آن هم حتماً افزایش می‌یابد.

شیمی

۲۰۱- گزینهٔ ۳ با توجه به این‌که ۳ *جملهٔ کتابه*، مجبوریم این گزینه را انتخاب کنیم!

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱ تفاوت انرژی میان لایه‌ها با دورشدن از هسته کاهش می‌یابد.



۲ اتم برانگیخته لزوماً به حالت پایه برنمی‌گردد، به طور مثال الکترون برانگیختهٔ اتم هیدروژن در لایهٔ ۵ می‌تواند به جای حالت پایه $(n=1)$، به لایهٔ دوم برگردد.

۴ تفاوت انرژی میان لایه‌های دوم و سوم بیشتر از لایه‌های سوم و چهارم است و از آن‌جا که طول موج با انرژی رابطهٔ وارونه دارد، طول موج انتقال $n=2 \rightarrow n=3$ کوتاه‌تر از انتقال $n=3 \rightarrow n=4$ است. *همان‌طور که دیدین، این گزینه هم می‌تونه درست باشه! اما انگار طراح این‌جا منظورش اتم هیدروژن بوده!* در اتم هیدروژن، طول موج پرتو مربوط به انتقال $n=3 \rightarrow n=4$ در گسترهٔ مرئی قرار نمی‌گیرد. در ضمن در طیف هیدروژن، انتقال $n=3 \rightarrow n=2$ مربوط به نور قرمز است که دارای بلندترین طول موج $(656\ nm)$ است.

۲۰۲- گزینهٔ ۳ عبارت‌های اول، دوم و چهارم درست‌اند.

در عنصرهای اصلی (دستهٔ s و دستهٔ p)، لایهٔ ظرفیت همان لایهٔ آخر اتم‌ها است. الکترون‌های ظرفیت در عنصرهای دستهٔ s، در زیرلایهٔ ns و در عنصرهای دستهٔ p در زیرلایه‌های nsnp هستند که n شمارهٔ لایهٔ آخر است.

حاصل $(n+l)$ برای هر سه زیرلایه برابر با ۷ است. در این حالت، زیرلایه‌ای که n کم‌تری دارد، انرژی آن کم‌تر است.

انرژی: $4f < 5d < 6p$

نه چه ربطی داره؟! به طور مثال گاز نجیب نئون ۸ الکترون ظرفیت و فلوئور ۷ الکترون ظرفیت دارد اما فلوئور واکنش‌پذیرتر است.

گنجایش الکترون یک زیرلایه از رابطهٔ $4l+2$ پیروی می‌کند.

$l=4 \Rightarrow 4(4)+2=18$

در دورهٔ پنجم جدول تناوبی هم، ۱۸ عنصر قرار دارد.

نه این‌جور نیست! مثلاً همهٔ عنصرهای گروه‌های ۴ و ۱۴، ۴ الکترون ظرفیت دارند اما *خب! شمارهٔ گروهشون فرق داره!*

۲۰۳- گزینهٔ ۴ فرمول شیمیایی منیزیم سولفید و سدیم نیترید به ترتیب به صورت MgS و Na_3N است. *حواستون باشه که* برای MgS باید شمار کل یون‌ها را حساب کنیم اما برای Na_3N فقط کاتیون‌ها! در ضمن چون نسبت از ما خواسته شده، می‌توانیم شمار مول یون‌ها را حساب کنیم، زیرا N_A از محاسبات حذف می‌شود.

$$\frac{\text{شمار یون‌ها در } MgS}{\text{شمار کاتیون‌ها در } Na_3N} = \frac{84\ g \times \frac{1\ mol}{56\ g} \times \frac{2\ mol\,cation}{1\ mol}}{16/6\ g \times \frac{1\ mol}{83\ g} \times \frac{3\ mol\,cation}{1\ mol}} = \frac{3}{0/6} = 5$$

۲۰۴- گزینهٔ ۲ دمای ابتدای لایهٔ استراتوسفر، ۲۱۷ کلوین و در انتهای آن ۲۸۰ کلوین $(280 = 273 + 7)$ است؛ یعنی دما در این لایه، $280 - 217 = 63$ کلوین تغییر کرده است: $\Delta\theta = 63K = 63\ ^\circ C$

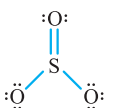
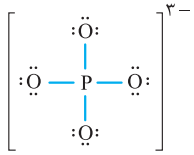
$$63\ ^\circ C \times \frac{1\ km}{5\ ^\circ C} = 12/6\ km$$

۲۰۵- گزینهٔ ۳ Mg_3N_2 ، Cu_2O و Cr_2O_3 جزء ترکیب‌های یونی و NF_3 و N_2O_3 جزء ترکیب‌های مولکولی هستند.

نام ترکیب‌های یونی: نام کاتیون (بار کاتیون با اعداد رومی در صورت لزوم) + نام آنیون

نام ترکیب‌های مولکولی: پیشوند یونانی (در صورت لزوم) + نام نافلز سمت چپ + پیشوند یونانی + نام‌نافلز سمت راست (یا ریشهٔ آن) + ید

۲۰۶- گزینهٔ ۱ ساختار همهٔ گونه‌ها را ببینید:

اتین:	$H-C\equiv C-H$	۵ پیوند
گوگرد تری‌اکسید:		۴ پیوند
کربن دی‌سولفید:	$\ddot{S}=C=\ddot{S}$	۴ پیوند
هیدروژن سیانید:	$H-C\equiv N:$	۴ پیوند
کربن مونوکسید:	$:C\equiv O:$	۳ پیوند
فسفات:		۴ پیوند

۲۰۷- گزینهٔ ۲ عبارت‌های سوم و چهارم درست‌اند.

بررسی عبارت‌های نادرست:

عبارت اول: ساختار شیمیایی هر ماده، تعیین‌کنندهٔ خواص و رفتار آن است، مثلاً اکسیژن و اوزون به دلیل تفاوت در ساختار شیمیایی، خواص متفاوتی دارند.

عبارت دوم: کربن دی‌اکسید یک اکسید نافلزی و اسیدی است و با حل‌شدن در آب، سبب کاهش pH آب می‌شود.

۲۰۸- گزینهٔ ۴ ابتدا باید انحلال‌پذیری پتاسیم نیترات را در دمای $40\,^{\circ}C$ به دست آوریم:

$$\text{درصد جرمی} = \frac{\text{جرم حل‌شونده}}{\text{جرم محلول}} \times 100$$

$$\Rightarrow 37/5 = \frac{S}{S+100} \times 100 \Rightarrow 62/5\,S = 3750$$

$$\Rightarrow S = 60 \quad (\text{انحلال‌پذیری در دمای } 40\,^{\circ}C)$$

در ۳۶۰ گرم محلول در دمای $50\,^{\circ}C$، ۱۶۲ گرم نمک و ۱۹۸ گرم آب $(360-162=198)$ وجود دارد. حالا ببینیم در دمای $40\,^{\circ}C$، چند گرم پتاسیم نیترات در ۱۹۸ گرم آب حل می‌شود:

$$198\,g \times \frac{60\,g\,KNO_3}{100\,g\,\text{آب}} = 118/8\,g\,KNO_3$$

بنابراین از ۱۶۲ گرم پتاسیم نیتراتی که در دمای $50\,^{\circ}C$ داریم، ۱۱۸/۸ گرم آن در محلول باقی می‌ماند و ۴۳/۲ گرم از آن $(162-118/8=43/2)$ رسوب می‌کند.

$$43/2\,g\,KNO_3 \times \frac{1\,mol\,KNO_3}{100\,g\,KNO_3} \simeq 0/43\,mol\,KNO_3$$

۲۰۹- گزینهٔ ۳ موارد اول، سوم و چهارم درست‌اند.

جاذبهٔ بین مولکول‌های آب و اتانول از نوع هیدروژنی است. موقع انحلال اتانول در آب، پیوند هیدروژنی اتانول ـ اتانول و آب ـ آب شکسته می‌شود و پیوند هیدروژنی قوی‌تری بین مولکول‌های آب و اتانول برقرار می‌شود:

اتانول ـ اتانول < آب ـ آب < آب ـ اتانول :قدرت پیوند هیدروژنی

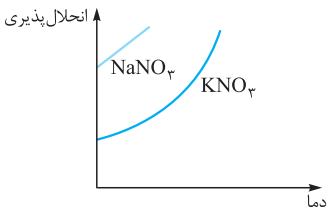
۲۱۰- گزینهٔ ۳ عبارت‌های (ب) و (ت) درست‌اند.

(آ): KCl در هگزان نامحلول است. ترکیب‌های یونی در آب حل می‌شوند.

(ب): انحلال گازها در آب گرماده است.

(پ): طبق قانون هنری، انحلال‌پذیری گازها با فشار رابطهٔ مستقیم دارد.

(ت): *درسته!* زیرا شیب نمودار انحلال‌پذیری پتاسیم نیترات بیشتر از سدیم نیترات است.



۲۱۱- گزینهٔ ۲ از سوختن گوگرد، SO_2 تولید می‌شود. با توجه به غلظت گوگرد در سوخت می‌توان گفت که در 10^6 گرم سوخت، ۶۴۰۰ گرم گوگرد وجود دارد؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$10\times10^6\,g\,\text{سوخت} \times \frac{6400\,g\,S}{10^6\,g\,\text{سوخت}} \times \frac{1\,mol\,S}{32\,g\,S} \times \frac{1\,mol\,SO_2}{1\,mol\,S}$$

$$\times \frac{1\,mol\,CaO}{1\,mol\,SO_2} \times \frac{56\,g\,CaO}{1\,mol\,CaO} \times \frac{1\,kg\,CaO}{1000\,g\,CaO}$$

$$= 112\,kg\,CaO$$

حالا ببینیم برای تولید ۱۱۲ کیلوگرم کلسیم اکسید (آهک) چند کیلوگرم کلسیم کربنات با خلوص ۸۰٪ نیاز است:

$$112\,kg\,CaO \times \frac{1\,mol\,CaO}{56\,g\,CaO} \times \frac{1\,mol\,CaCO_3}{1\,mol\,CaO}$$

$$\times \frac{100\,g\,CaCO_3\,\text{خالص}}{1\,mol\,CaCO_3} \times \frac{100\,g\,CaCO_3\,\text{ناخالص}}{80\,g\,CaCO_3\,\text{خالص}}$$

$$= 250\,kg\,CaCO_3\,\text{ناخالص}$$

۲۱۲- گزینهٔ ۳ عبارت‌های اول، دوم و چهارم درست‌اند.

$_{35}X$ همان نافلز برم $(_{35}Br)$ است.

برم مانند $_{17}Y$ (کلر) در گروه ۱۷ و مانند $_{20}Z$ (کلسیم) در دورهٔ چهارم قرار دارد.

برم نافلز است و در واکنش با فلزها، می‌تواند ترکیب یونی تشکیل دهد و در ترکیب با نافلزها، با اشتراک الکترون، ترکیب مولکولی تشکیل می‌دهد.

در یک دوره از چپ به راست، شعاع اتمی کاهش می‌یابد؛ بنابراین بزرگ‌ترین شعاع اتمی در دورهٔ چهارم متعلق به $_{19}K$ است نه $_{35}Br$!

برم در دمای اتاق، مایع است اما هیچ‌کدام از عنصرهای دورهٔ چهارم و یا گروه ۱۷، به حالت مایع نیستند.

در گروه ۱۷، فلوئور بیشترین واکنش‌پذیری را دارد.

۲۱۳- گزینهٔ ۱ هر دو عنصر نیکل و تیتانیم جزء عنصرهای واسطهٔ دورهٔ چهارم هستند. نیکل در گروه ۱۰ و تیتانیم در گروه ۴ قرار دارد. $_{22}Ti:[_{18}Ar]\,3d^2 4s^2$ و $_{28}Ni:[_{18}Ar]\,3d^8 4s^2$

۲۱۴- گزینهٔ ۳ به‌جز عبارت اول، بقیهٔ عبارت‌ها درست‌اند.

$$I)\ 4Fe(OH)_2 + 2H_2O + O_2 \rightarrow 4Fe(OH)_3$$

$$II)\ 2Al(OH)_3 + 3H_2SO_4 \rightarrow Al_2(SO_4)_3 + 6H_2O$$

$$1070\,g\,Fe(OH)_3 \times \frac{1\,mol\,Fe(OH)_3}{107\,g\,Fe(OH)_3} \times \frac{2\,mol\,H_2O}{4\,mol\,Fe(OH)_3}$$

$$\times \frac{6/02\times10^{23}\ H_2O\,\text{مولکول}}{1\,mol\,H_2O} = 3/01\times10^{24}\ H_2O\,\text{مولکول}$$

در واکنش (I)، عدد اکسایش آهن و اکسیژن تغییر کرده است؛ بنابراین از نوع اکسایش ـ کاهش است. در واکنش (II)، $Al(OH)_3$ باز و H_2SO_4 اسید است.

$$1\,mol\,H_2SO_4 \times \frac{6\,mol\,H_2O}{3\,mol\,H_2SO_4} \times \frac{18\,g\,H_2O}{1\,mol\,H_2O} = 36\,g\,H_2O$$

مجموع ضریب‌های استوکیومتری واکنش‌دهنده‌ها در واکنش (I) با مجموع ضریب‌های استوکیومتری فراورده‌ها در واکنش (II) یکسان و برابر با ۷ است.

۲۱۵- گزینهٔ ۱ معادلهٔ موازنه‌شدهٔ واکنش *این‌طوریاست*؛

$$Na_2SiO_3 + 8HF \rightarrow H_2SiF_6 + 2NaF + 3H_2O$$

$$0/3\,mol\,HF \times \frac{2\,mol\,NaF}{8\,mol\,HF} \times \frac{42\,g\,NaF}{1\,mol\,NaF} = 3/15\,g\,NaF$$

$$۰/۳\,mol\,HF \times \frac{۱\,mol\,Na_۲SiO_۳}{۸\,mol\,HF} \times \frac{۱۲۲\,g\,Na_۲SiO_۳\,\text{خالص}}{۱\,mol\,Na_۲SiO_۳} \times \frac{۱۰۰\,g\,Na_۲SiO_۳\,\text{ناخالص}}{۸۰\,g\,Na_۲SiO_۳\,\text{خالص}}$$

$$\simeq ۵/۷\,g\,Na_۲SiO_۳\,\text{ناخالص}$$

۲۱۶- گزینهٔ ۱ با توجه به این‌که مقدار آهن را برای هر دو واکنش نیاز داریم، بهتر است اول مول آهن را به دست آوریم.

$$۲Fe_۲O_۳ + ۳C \rightarrow ۴Fe + ۳CO_۲$$

$$۱/۸\times۱۰^{۳}\,g\,C \times \frac{۱\,mol\,C}{۱۲\,g\,C} \times \frac{۴\,mol\,Fe}{۳\,mol\,C} \times \frac{۸۵\,mol\,Fe\,\text{عملی}}{۱۰۰\,mol\,Fe\,\text{نظری}} \simeq ۱۷۰\,mol\,Fe$$

$$۱۷۰\,mol\,Fe \times \frac{۵۶\,g\,Fe}{۱\,mol\,Fe} \times \frac{۱\,kg\,Fe}{۱۰۰۰\,g\,Fe} = ۹/۵۲\,kg\,Fe$$

حالا باید ببینیم طبق فرایند ترمیت، برای تولید ۱۷۰ مول آهن، چند کیلوگرم آلومینیم نیاز است: $۲Al + Fe_۲O_۳ \rightarrow Al_۲O_۳ + ۲Fe$

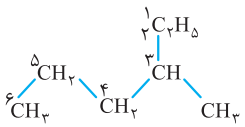
$$۱۷۰\,mol\,Fe \times \frac{۲\,mol\,Al}{۲\,mol\,Fe} \times \frac{۲۷\,g\,Al}{۱\,mol\,Al} \times \frac{۱\,kg\,Al}{۱۰۰۰\,g\,Al}$$

$$= ۴/۵۹\,kg\,Al$$

۲۱۷- گزینهٔ ۲ موارد (ب) و (پ) درست‌اند.

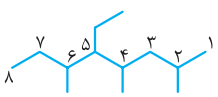
(آ): زنجیر اصلی ۶ اتم کربن دارد و نام درست ترکیب، ۳ – متیل هگزان است.

۳– متیل هگزان



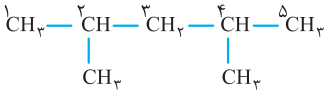
(ب): *کاملاً درسته!*

۵ – اتیل – ۲، ۴، ۶ – تری‌متیل اوکتان



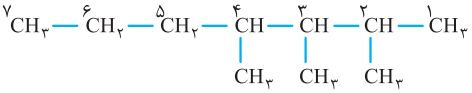
(پ): ببینید: ۲، ۴ – دی‌متیل پنتان

$$(CH_۳)_۲CHCH_۲CH(CH_۳)_۲ \longrightarrow$$



(ت): ۲، ۳، ۴ – تری‌متیل هپتان

$$CH_۳(CH_۲)_۲CH(CH_۳)CH(CH_۳)CH(CH_۳)_۲ \longrightarrow$$



۲۱۸- گزینهٔ ۲ دومین عضو خانوادهٔ آلکن‌ها، پروپن با فرمول $C_۳H_۶$ است.

روش ۱

استفاده از کسر تبدیل: $C_۳H_۶ + Cl_۲ \rightarrow C_۳H_۶Cl_۲$

$$۸/۴\,g\,C_۳H_۶ \times \frac{۱\,mol\,C_۳H_۶}{۴۲\,g\,C_۳H_۶} \times \frac{۱\,mol\,C_۳H_۶Cl_۲}{۱\,mol\,C_۳H_۶} \times \frac{۱۱۳\,g\,C_۳H_۶Cl_۲}{۱\,mol\,C_۳H_۶Cl_۲} = ۲۲/۶\,g\,C_۳H_۶Cl_۲$$

روش ۲

استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{C_۳H_۶}} = \frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{C_۳H_۶Cl_۲}}$$

$$\Rightarrow \frac{۸/۴}{۱\times۴۲} = \frac{x}{۱\times۱۱۳} \Rightarrow x = \frac{۱۱۳\times\cancel{۸۴}^{۲}}{\cancel{۴۲}\times۱۰}$$

$$= ۲۲/۶\,g\,C_۳H_۶Cl_۲$$

۲۱۹- گزینهٔ ۱ عبارت‌های (آ) و (ب) درست‌اند.

بررسی عبارت‌های نادرست:

(پ): تأمین شرایط بهینه برای انجام این واکنش بسیار دشوار و پرهزینه است. اتفاقاً این واکنش، گرماده است.

(ت): فشار ثابت درست است و نه حجم ثابت!

۲۲۰- گزینهٔ ۴ ارزش سوختی یعنی گرمای آزادشده به ازای یک گرم ماده!

بنزن: $۱\,g\,C_۶H_۶ \times \frac{۱\,mol\,C_۶H_۶}{۷۸\,g\,C_۶H_۶} \times \frac{۶۴\,kJ}{۰/۰۲\,mol\,C_۶H_۶}$

$$= \frac{۳۲۰۰}{۷۸} = \frac{۱۶۰۰}{۳۹} \simeq ۴۱\,kJ$$

اتانول: $۱\,g\,C_۲H_۶O \times \frac{۱\,mol\,C_۲H_۶O}{۴۶\,g\,C_۲H_۶O} \times \frac{۱۳۸\,kJ}{۰/۱\,mol\,C_۲H_۶O}$

$$= \frac{۱۳۸۰}{۴۶} = ۳۰\,kJ$$

$$\frac{\text{ارزش سوختی بنزن}}{\text{ارزش سوختی اتانول}} = \frac{۴۱}{۳۰} \simeq ۱/۳۷$$

از سوختن هر مول بنزن $(C_۶H_۶)$، ۶ مول $CO_۲$ تولید می‌شود:

$$۰/۰۲\,mol\,C_۶H_۶ \times \frac{۶\,mol\,CO_۲}{۱\,mol\,C_۶H_۶} = ۰/۱۲\,mol\,CO_۲$$

۲۲۱- گزینهٔ ۲ $N_۲ + ۲H_۲ \rightarrow H_۲N-NH_۲$

$$\Delta H(\text{واکنش}) = [\Delta H(N\equiv N) + ۲\Delta H(H-H)]$$

$$-[\Delta H(N-N) + ۴\Delta H(N-H)] = [۹۴۱ + ۲(۴۳۵)]$$

$$-[۱۵۹ + ۴(۳۸۹)] = ۹۶\,kJ$$

$$۳/۰۱\times۱۰^{۲۵}\,\text{مولکول}\,H_۲ \times \frac{۱\,mol\,H_۲}{۶/۰۲\times۱۰^{۲۳}\,\text{مولکول}\,H_۲} \times \frac{۹۶\,kJ}{۲\,mol\,H_۲}$$

$$= ۲۴۰۰\,kJ$$

۲۲۲- گزینهٔ ۴ غلظت محلول، ماهیت حلال و حل‌شونده و دما بر خواص یک محلول تأثیرگذارند. به طور مثال هر چه غلظت محلول سدیم کلرید بیشتر باشد، رسانایی الکتریکی آن بیشتر است؛ هم‌چنین در محلول اسیدهای ضعیف مانند HF، با تغییر دما، ثابت یونش اسید و در نتیجه غلظت یون‌ها در محلول تغییر می‌کند.

۲۲۳- گزینهٔ ۳ با گذشت زمان، غلظت A کاهش و غلظت E و D افزایش یافته است؛ بنابراین A واکنش‌دهنده و E و D فراورده هستند. می‌دانیم نسبت تغییرات غلظت مواد در یک بازهٔ زمانی معین، با نسبت ضرایب استوکیومتری آن‌ها برابر است. به طور دلخواه، تغییرات غلظت مواد در بازهٔ زمانی صفر تا ۳۰۰ ثانیه که محاسبات راحتی *داره رو* به دست می‌آوریم:

$$|\Delta[A]| = |۰/۰۱۲ - ۰/۰۲۰| = ۰/۰۰۸$$

$$\Delta[E] = ۰/۰۱۶ - ۰ = ۰/۰۱۶$$

$$\Delta[D] = ۰/۰۰۴ - ۰ = ۰/۰۰۴$$

$$\xrightarrow[\text{کوچک‌ترین عدد تقسیم می‌کنیم}]{\text{اعداد به‌دست‌آمده را بر}} ۲A \rightarrow ۴E + D$$

$$\frac{\text{مجموع ضرایب فراورده‌ها}}{\text{مجموع ضرایب واکنش‌دهنده‌ها}} = \frac{۵}{۲} = ۲/۵$$

۲۲۴- گزینهٔ ۱ عبارت‌های دوم و سوم درست‌اند.

بررسی عبارت‌های نادرست:

عبارت اول: پلی‌استرها و پلی‌آمیدها به کندی تجزیه می‌شوند.

عبارت چهارم: پلی‌لاکتیک اسید را از فراورده‌های کشاورزی مانند سیب‌زمینی، ذرت و نیشکر تهیه می‌کنند. شیر ترش‌شده دارای لاکتیک‌اسید است اما برای تهیه‌اش *که به کار نمی‌ره!*

عبارت پنجم: پلیمرهای حاصل از هیدروکربن‌های سیرنشده، ماندگارند و نسبت به پارچه‌های پلی‌آمیدی بیشتر در طبیعت باقی می‌مانند.

۲۲۵- گزینهٔ ۲ عبارت‌های دوم و سوم درست‌اند. بیایید همهٔ عبارت‌ها را *دونه‌دونه* بررسی کنیم:

- جامد یونی اکسیژن‌دار مثلاً $Na_۲O$! این اکسید فلزی، باز آرنیوس است و نه اسید!
- *بله! درسته!* به طور مثال کلسیم سولفات یک ترکیب کم‌محلول است اما همان مقدار که در آب حل می‌شود به طور کامل به یون‌های سازنده‌اش تفکیک می‌شود! به همین دلیل الکترولیت قوی محسوب می‌شود.
- به طور مثال HCl یک ترکیب مولکولی است اما در آب یونیده می‌شود و محلول آن رسانای قوی جریان برق است.
- در لحظهٔ تعادل یونش اسید ضعیف، لزوماً غلظت مولی یون‌ها با غلظت مولکول‌های یونیده‌نشدهٔ اسید برابر نیست.

	HA	$\rightleftharpoons$	H^+	$+$	A^-
اولیه:	M		صفر		صفر
تعادل:	$M-x$		x		x

الزاماً: $M - x \neq x$

۲۲۶- گزینهٔ ۴

	HA	$\rightleftharpoons$	H^+	$+$	A^-
غلظت تعادلی:	$۰/۲ - x$		x		x

$$K_a = \frac{x^۲}{۰/۲-x} \Rightarrow ۰/۱ = \frac{x^۲}{۰/۲-x} \Rightarrow x^۲ + ۰/۱x - ۰/۰۲ = ۰$$

$$\Delta = b^۲ - ۴ac = (۰/۱)^۲ - ۴(۱)(-۰/۰۲) = ۰/۰۹$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{۲a} \Rightarrow x = \frac{-۰/۱ \pm ۰/۳}{۲}$$

$$x_۱ = -۰/۲ \text{ غ ق ق}, \; x_۲ = ۰/۱ \Rightarrow [H^+] = ۰/۱$$

$$pH = -\log[H^+] = -\log ۱۰^{-۱} = ۱$$

نیتریک اسید یک اسید قوی است و در محلول آن غلظت اسید با غلظت یون هیدرونیوم برابر است:

$$\text{جرم مولی } HNO_۳ = ۱ + ۱۴ + ۳(۱۶) = ۶۳ \text{ g.mol}^{-۱}$$

$$[HNO_۳] = [H^+] = ۰/۱ \frac{\text{mol}}{\text{L}} \times \frac{۶۳ \text{ g}}{۱ \text{ mol}} = ۶/۳ \text{ g.L}^{-۱}$$

۲۲۷- گزینهٔ ۳ برای محاسبهٔ غلظت Na^+ در محلول نهایی (رقیق) به جرم Na^+ و جرم محلول نیاز داریم. حجم و چگالی محلول مشخص است؛ بنابراین جرم محلول رقیق برابر است با:

$$\text{چگالی محلول} = \frac{\text{جرم محلول}}{\text{حجم محلول}}$$

$$\Rightarrow \text{جرم محلول} = ۱ \text{ g.mL}^{-۱} \times ۷۵۰ \text{ mL} = ۷۵۰ \text{ g}$$

جرم NaOH در محلول اولیه و رقیق برابر است. چگالی محلول اولیه $۱/۵ \text{ g.mL}^{-۱}$ است؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$۴/۸ \text{ mL محلول} \times \frac{۱/۵ \text{ g محلول}}{۱ \text{ mL محلول}} \times \underbrace{\frac{۵۰ \text{ g NaOH}}{۱۰۰ \text{ g محلول}}}_{\text{درصد جرمی محلول}} \times \frac{۱ \text{ mol NaOH}}{۴۰ \text{ g NaOH}} = ۰/۰۹ \text{ mol NaOH}$$

حالا مول NaOH را به جرم Na^+ تبدیل می‌کنیم:

$$۰/۰۹ \text{ mol NaOH} \times \frac{۱ \text{ mol } Na^+}{۱ \text{ mol NaOH}} \times \frac{۲۳ \text{ g } Na^+}{۱ \text{ mol } Na^+}$$

$$= ۲/۰۷ \text{ g } Na^+$$

$$ppm = \frac{\text{جرم } Na^+}{\text{جرم محلول}} \times ۱۰^۶ = \frac{۲/۰۷}{۷۵۰} \times ۱۰^۶ = ۲۷۶۰$$

برای قسمت دوم سؤال باید ببینیم ۰/۰۹ مول NaOH با چند گرم HCl خالص واکنش می‌دهد. می‌دانیم هر مول NaOH با ۱ مول HCl به طور کامل واکنش می‌دهد:

$$۰/۰۹ \text{ mol NaOH} \times \frac{۱ \text{ mol HCl}}{۱ \text{ mol NaOH}} \times \frac{۳۶/۵ \text{ g HCl}}{۱ \text{ mol HCl}}$$

$$= ۰/۰۹ \times ۳۶/۵ \text{ g HCl خالص}$$

$$\text{درصد خلوص} = \frac{\text{جرم HCl خالص}}{\text{جرم HCl ناخالص}} \times ۱۰۰$$

$$= \frac{۰/۰۹ \times \overset{۵}{\cancel{۳۶/۵}}}{\underset{۱}{\cancel{۷/۳}}} \times ۱۰۰ = ٪۴۵$$

۲۲۸- گزینهٔ ۴ ابتدا غلظت مولی H^+ را در محلول به دست می‌آوریم:

$$[H^+]=\frac{۲/۵\times۱۰^{-۱۰}\ mol}{۰/۲۵\ L}=۱۰^{-۹}\ mol.L^{-۱}$$

$$[H^+][OH^-]=۱۰^{-۱۴}\Rightarrow[OH^-]=\frac{۱۰^{-۱۴}}{۱۰^{-۹}}=۱۰^{-۵}\ mol.L^{-۱}$$

با توجه به این‌که MOH یک باز قوی است، غلظت مولی باز با غلظت یون هیدروکسید برابر است.

در محلول باز قوی باریم هیدروکسید، غلظت یون هیدروکسید دو برابر غلظت محلول است:

$$[OH^-]=۲[Ba(OH)_۲]\Rightarrow[Ba(OH)_۲]=\frac{۱۰^{-۵}}{۲}$$

$$=۵\times۱۰^{-۶}\ mol.L^{-۱}$$

۲۲۹- گزینهٔ ۴ دومین عنصر فراوان در پوستهٔ جامد زمین، سیلیسیم با عدد اتمی ۱۴ است؛ بنابراین عدد اتمی X، $۱۴-۷=۷$ است؛ یعنی X همان عنصر نیتروژن می‌باشد که در گروه ۱۵ قرار دارد. بیشترین و کم‌ترین عدد اکسایش این عنصر ۵+ و ۳− است. در $HNO_۳$ عدد اکسایش نیتروژن ۵+ و در $NH_۳$، ۳− است.

$$HNO_۳: +۱+N+۳(-۲)=۰\Rightarrow N=+۵$$

$$NH_۳: N+۳(+۱)=۰\Rightarrow N=-۳$$

۲۳۰- گزینهٔ ۳ عبارت‌های (آ)، (ب) و (پ) درست‌اند با توجه به این‌که آنتالپی فروپاشی AD از $AX_۲$ بیشتر است، باید مجموع بار یک کاتیون و آنیون در AD بیشتر باشد.

$$AD\rightarrow A^{۲+}D^{۲-}\quad ,\quad AX_۲\Rightarrow A^{۲+}X^-$$

بریم سراغ عبارت‌ها:

(آ): با توجه به این‌که D و X در یک دورهٔ جدول تناوبی قرار دارند، شعاع اتمی D (از گروه ۱۶) بزرگ‌تر از شعاع اتمی X (از گروه ۱۷) است؛ زیرا در یک دوره از چپ به راست، شعاع اتمی کاهش می‌یابد.

(ب): شعاع X^- از $D^{۲-}$ کوچک‌تر است. (در یون‌های یک دوره، هر چه مقدار بار آنیون بیشتر باشد، شعاع آن بزرگ‌تر است.)

(پ) و (ت): *اینا رو هم که گفتیم!*

۲۳۱- گزینهٔ ۴ در واکنش‌های اول و چهارم عدد اکسایش هیچ عنصری تغییر نکرده است، پس از نوع اکسایش ـ کاهش نیستند.

برای موازنهٔ دو واکنش دیگر از روش اکسایش ـ کاهش استفاده می‌کنیم، به این صورت که تغییر عدد اکسایش کاهنده را ضریب اکسنده و تغییر عدد اکسایش اکسنده را ضریب کاهنده قرار می‌دهیم.

عدد اکسایش ید از صفر در $I_۲$ به ۵+ در $IO_۳^-$ رسیده است؛ با توجه به این‌که در سمت چپ معادله، دو اتم ید داریم، تغییر عدد اکسایش آن را در ۲ ضرب می‌کنیم *می‌شه* ۱۰. عدد اکسایش Cl از ۵+ در $ClO_۳^-$ به ۱− در Cl^- رسیده، یعنی ۶ واحد تغییر کرده است. اعداد ۶ و ۱۰ *رو اگه* ساده کنیم، می‌رسیم به ۳ و ۵! ۵ را ضریب $ClO_۳^-$ و ۳ را ضریب $I_۲$ قرار می‌دهیم:

$$\frac{۳}{-}I_۲+\frac{۵}{-}ClO_۳^-+-H_۲O\rightarrow-IO_۳^-+-H^++-Cl^-$$

به‌این ترتیب باید ضریب $IO_۳^-$ برابر ۶ و ضریب Cl^- برابر با ۵ باشد. برای موازنهٔ بار هم ضریب H^+ باید ۶ و در نتیجه ضریب $H_۲O$ باید ۳ باشد:

$$۳I_۲+۵ClO_۳^-+۳H_۲O\rightarrow۶IO_۳^-+۶H^++۵Cl^-$$

مجموع ضرایب گونه‌ها در این واکنش برابر با ۲۸ است.

اگر همین مراحل را برای واکنش سوم انجام بدین، متوجه خواهید شد که ضرایب همهٔ گونه‌ها در معادلهٔ موازنه‌شده این واکنش برابر با یک است.

$$Pb(OH)_۳^-+ClO^-\rightarrow PbO_۲+Cl^-+OH^-+H_۲O$$

یعنی مجموع ضرایب همهٔ گونه‌ها در آن برابر با ۶ است:

$$۲۸-۶=۲۲$$

۲۳۲- گزینهٔ ۱ عبارت‌های دوم و چهارم درست‌اند. در این سلول، سرب که E° کم‌تری دارد، نقش آند و پلاتین با E° بزرگ‌تر نقش کاتد را ایفا می‌کند.

$$E^\circ(\text{سلول})=E^\circ(\text{کاتد})-E^\circ(\text{آند})$$

$$=E^\circ(\text{بزرگ‌تر})-E^\circ(\text{کوچک‌تر})$$

$$\Rightarrow E^\circ(\text{سلول})=۱/۲-(-۰/۱۳)=۱/۳۳\ V$$

هر چه E° یک نیم‌واکنش بیشتر باشد، گونهٔ سمت چپ آن، اکسندهٔ قوی‌تری است. در ضمن در سلول‌های گالوانی، با اکسایش فلز در آند و تولید الکترون، سطح تیغه دارای بار منفی می‌شود.

با انجام نیم‌واکنش آندی، غلظت کاتیون در بخش آندی افزایش می‌یابد:

$$Pb\rightarrow Pb^{۲+}+۲e^-$$

با انجام کامل واکنش، دو مول الکترون مبادله می‌شود:

$$\begin{cases}Pb\rightarrow Pb^{۲+}+۲e^-\\ Pt^{۲+}+۲e^-\rightarrow Pt\end{cases}$$

بنابراین با پیشرفت واکنش به میزان ۲۵٪، $\frac{۲۵}{۱۰۰}\times۲=۰/۵$ مول الکترون مبادله می‌شود:

$$۰/۵\times۶/۰۲\times۱۰^{۲۳}=۳/۰۱\times۱۰^{۲۳}$$

الکترون‌ها توسط مدار بیرونی (سیم) جابه‌جا می‌شوند. از دیوارهٔ متخلخل که عبور نمی‌کنند!

۲۳۳- گزینهٔ ۴ با اکسایش هر مول مس و تبدیل آن به $Cu^{۲+}$، ۲ مول الکترون آزاد می‌شود، حالا ببینیم از اکسایش ۸۰ گرم مس چند مول الکترون آزاد می‌شود:

$$۸۰\ g\ Cu\times\frac{۱\ mol\ Cu}{۶۴\ g\ Cu}\times\frac{۲\ mol\ e^-}{۱\ mol\ Cu}=۲/۵\ mol\ e^-$$

نیم‌واکنش کاتدی سلول سوختی هیدروژن به صورت زیر است:

$$O_۲+۴H^++۴e^-\rightarrow۲H_۲O$$

$$۲/۵\ mol\ e^-\times\frac{۱\ mol\ O_۲}{۴\ mol\ e^-}\times\frac{۲۲/۴\ L\ O_۲}{۱\ mol\ O_۲}=۱۴\ L\ O_۲$$

$$۲/۵\ mol\ e^-\times\frac{۲\ mol\ H_۲O}{۴\ mol\ e^-}\times\frac{۱۸\ g\ H_۲O}{۱\ mol\ H_۲O}$$

$$=۲۲/۵\ g\ H_۲O$$

۲۳۴- گزینهٔ ۱ ابتدا ببینیم با استفاده از این کاتالیزگر، چه مقدار در مصرف گرما صرفه‌جویی می‌شود:

$$Q = mc\Delta\theta = ۱۰۰۰ \times ۰/۸ \times (۷۰۰ - ۵۰۰)$$
$$= ۱۶۰ \times ۱۰^{۳}\ g = ۱۶۰\ kJ$$

حالا حساب می‌کنیم این مقدار گرما معادل سوختن چند مول گاز متان است:

$$۱۶۰\ kJ \times \frac{۱\ mol\ CH_۴}{۸۸۰\ kJ} = \frac{۲}{۱۱}\ mol\ CH_۴$$

و در آخر، مول متان را به حجم متان در شرایط STP تبدیل می‌کنیم و حساب می‌کنیم که از سوختن این مقدار متان، چند گرم $CO_۲$ تولید می‌شود:

$$\frac{۲}{۱۱}\ mol\ CH_۴ \times \frac{۲۲/۴\ L\ CH_۴}{۱\ mol\ CH_۴} = \frac{۴۴/۸}{۱۱} \simeq ۴/۰۷\ L\ CH_۴$$

$$\frac{۲}{۱۱}\ mol\ CH_۴ \times \frac{۱\ mol\ CO_۲}{۱\ mol\ CH_۴} \times \frac{۴۴\ g\ CO_۲}{۱\ mol\ CO_۲} = ۸\ g\ CO_۲$$

۲۳۵- گزینهٔ ۲ با توجه به نمودار، *واضح و مبرهن است* که واکنش گرماگیر و ΔH آن، $a\ kJ$ است. با توجه به معادلهٔ واکنش، به ازای مصرف ۱ مول A، a کیلوژول گرما نیاز است، بنابراین به ازای مصرف ۰/۱ مول A، $۰/۱a$ کیلوژول گرما نیاز خواهد بود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) $\Delta H - E_a = a - ۳a = -۲a$

۳) دما انرژی فعال‌سازی را تغییر نمی‌دهد.

۴) انرژی فعال‌سازی واکنش $۳a$ است که کم‌ترین انرژی لازم برای انجام واکنش است.