۱-حاصل $\lim\limits_{x\to ۴} \dfrac{۱-\cos \pi x}{x-۴\sqrt{x}+۴}$ کدام است؟

① ۰ ② ۴π ③ $۴\pi^۲$ ④ $۸\pi^۲$

۲-حاصل $\lim\limits_{x\to ۱} \dfrac{۱+\cos \pi x}{x^۳-x^۲-x+۱}$ کدام است؟

① $\frac{\pi}{۴}$ ② $\frac{\pi}{۲}$ ③ $\frac{\pi^۲}{۴}$ ④ $\frac{\pi^۲}{۲}$

۳-حاصل $\lim\limits_{x\to \frac{۱}{۴}} \dfrac{۱-\tan \pi x}{۲x-\sqrt{x}}$ کدام است؟

① -۲π ② $-\pi$ ③ π ④ ۲π

۴-حاصل $\lim\limits_{x\to -۱} \dfrac{۲x}{۲-۱}$ ، کدام است؟

① ۸ ② ۱ ③ ۱ ④ ۲

۵-حد عبارت $\dfrac{x^۲+۱۰x+۱}{۱۲+۶\sqrt[۳]{x}}$ ، وقتی x، کدام است؟

① ۲ ② ۸ ③ ۱۲ ④ ۶

۶-حاصل $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{\cos^۲ x-\cos x}{x^۲}$، کدام است؟

① $\frac{۳}{۲}$ ② $\frac{۳}{۴}$ ③ $\frac{۱}{۴}$ ④ $\frac{۳}{۲}$

۷-حاصل $\lim\limits_{x\to (\frac{۱}{۲})^+} \dfrac{|\cos \pi x|}{۱-\sqrt{۲x}}$ کدام است؟

① $-\pi$ ② $-\frac{\pi}{۲}$ ③ π ④ ۲π

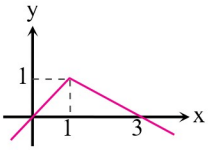
۸-مقدار $\lim\limits_{x\to\pi^+} \dfrac{\sqrt{۲+۲\cos x}}{\cos(\frac{۳\pi}{۲}-۲x)}$ کدام است؟

① $\frac{۱}{۲}$ ② $\frac{۱}{۴}$ ③ $-\frac{۱}{۲}$ ④ $-\frac{۱}{۴}$

۹-حاصل $\lim\limits_{x\to\pi^+} \dfrac{\sin(\pi\sin x)\sin\frac{x}{۴}}{\sqrt{۱+\cos x}}$ کدام است؟

① $-\pi$ ② -۲π ③ $\pi^۲$ ④ $\pi\sqrt{۲}$

۱۰-نمودار تابع f به صورت مقابل است. حاصل $\lim\limits_{x\to ۱^+} \dfrac{۱-f(۲-x)}{۱-f(x)}$ کدام است؟



① $-\frac{۱}{۲}$ ② $\frac{۱}{۲}$

③ ۲ ④ -۲

بی نام

پاسخنامه تشریحی

۱-گزینه ۴

$$\lim_{x\to ۴}\frac{۱-cos\pi x}{(\sqrt{x}-۲)^۲}\times\frac{۱+\cos\pi x}{۱+\cos\pi x}=\lim_{x\to ۴}\frac{۱-\cos^۲\pi x}{(\sqrt{x}-۲)^۲(۲)}=\lim_{x\to ۴}\frac{sin^۲\pi x}{۲(\sqrt{x}-۲)^۲}$$

$$=\lim_{x\to ۴}\frac{۱}{۲}(\frac{\sin\pi x}{\sqrt{x}-۲})^۲=\lim_{x\to ۴}\frac{۱}{۲}(\frac{sin\pi x}{\sqrt{x}-۲}\times\frac{\sqrt{x}+۲}{\sqrt{x}+۲})^۲=\lim_{x\to ۴}\frac{۱}{۲}(\frac{۴\sin\pi x}{x-۴})^۲$$

$$\xrightarrow{x-۴=t\to x=t+۴},\lim_{x\to ۴}\frac{۱}{۲}\frac{(۴\sin\pi(t+۴))^۲}{t}=\lim_{x\to ۴}\frac{۱}{۲}\frac{(۴\sin\pi t)^۲}{t}=\frac{۱}{۲}(۱۶\times\pi^۲)=۸\pi^۲$$

۲-گزینه ۳

$$\lim_{x\to ۱}\frac{۱+\cos\pi x}{x^۲(x-۱)-(x-۱)}\lim_{x\to ۱}\frac{۱+\cos\pi x}{(x-۱)(x^۲-۱)}=\lim_{x\to ۱}\frac{۱+\cos\pi x}{(x-۱)^۲(x+۱)}$$

$$=\frac{۱}{۲}\lim_{x\to ۱}\frac{۱+\cos\pi x}{(x-۱)^۲}\ x-۱=t\to x=t+۱,\frac{۱}{۲}\lim_{x\to ۰}\frac{۱+\cos\pi(t+۱)}{t^۲}$$

$$=\frac{۱}{۲}\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\cos\pi t}{t^۲}=\frac{۱}{۲}\lim_{x\to ۰}\frac{۲\sin^۲\frac{\pi t}{۲}}{t^۲}=\frac{۱}{۲}\lim_{x\to ۰}\frac{۲(\frac{\pi t}{۲})^۲}{t^۲}=\frac{۱}{۲}\times\frac{۲\times\frac{\pi t}{۴}}{t^۲}=\frac{\pi^۲}{۴}$$

۳-گزینه ۱

$$\lim_{x\to\frac{۱}{۴}}\frac{۱-\frac{\sin\pi x}{\cos\pi x}}{۲x-\sqrt{x}}\times\frac{(۲x+\sqrt{x})}{(۲x+\sqrt{x})}=\lim_{x\to\frac{۱}{۴}}\frac{\cos\pi x-\sin\pi x(۱)}{(۴x^۲-x)\cos\pi x}\times\frac{(\cos\pi x+\sin\pi x)}{\cos\pi x+\sin\pi x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{۱}{۴}}\frac{\cancel{\cos^۲\pi x}-\sin^۲\pi x\ \cos ۲\pi x}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\sqrt{۲})\underbrace{\cancel{(۴x^۲}-x)}_{x(۴x-۱)}}\xrightarrow{x-\frac{۱}{۴}=t}=\lim_{x\to ۰}\frac{\cos ۲\pi(t+\frac{۱}{۴})}{(t+\frac{۱}{۴})(۴t)}=\lim_{x\to ۰}\frac{-\sin ۲\pi t}{\frac{۱}{۴}(۴t)}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{-(\frac{\sin ۲\pi t}{۲\pi t})\times ۲\pi t}{t}=-۲\pi$$

بی نام

گزینه ۳ -۴

:روش اول: مخرج کسر را گویا می‌کنیم

$$\lim_{x\to -۱}\frac{۲x^۲+۵x+۳}{۲-\sqrt{۲+\sqrt{۳-x}}}=\lim_{x\to -۱}\frac{(x+۱)(۲x+۳)(۲+\sqrt{۲+\sqrt{۳-x}})}{(۴-۲-\sqrt{۳-x})}$$

$$=\lim_{x\to -۱}\frac{(x+۱)(۱)(۴)(۲+\sqrt{۳-x})}{(۲-\sqrt{۳-x})(۲+\sqrt{۳-x})}=\lim_{x\to -۱}\frac{(x+۱)(۱)(۴)(۴)}{(۴-۳+x)}=۱۶$$

:روش دوم: با استفاده از هوپیتال

$$\lim_{x\to -۱}\frac{۲x^۲+۵x+۳}{۲-\sqrt{۲+\sqrt{۳-x}}}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to -۱}\frac{۴x+۵}{-\frac{\frac{-۱}{۲\sqrt{۳-x}}}{۲\sqrt{۲+\sqrt{۳-x}}}}=\frac{۱}{\frac{\frac{۱}{۴}}{۴}}=\frac{۱}{\frac{۱}{۱۶}}=۱۶$$

۵-گزینه ۳ **روش اول:**

با ابهام $\frac{۰}{۰}$ مواجه هستیم که برای رفع ابهام از اتحاد چاق‌ولاغر کمک می‌گیریم

$$\left((a+b)(a^۲+b^۲-ab)=a^۳+b^۳\right)$$

$$\lim_{x\to -۸}\frac{x^۲+۱۰x+۱۶}{۶(۲+\sqrt[۳]{x})}\times\frac{۴+\sqrt[۳]{x^۲}-۲\sqrt[۳]{x}}{۴+\sqrt[۳]{x^۲}-۲\sqrt[۳]{x}}$$

$$=\lim_{x\to -۸}\frac{(x+۸)(x+۲)(۴+\sqrt[۳]{x^۲}-۲\sqrt[۳]{x})}{۶(۸+x)}$$

$$=\lim_{x\to -۸}\frac{(x+۲)(۴+\sqrt[۳]{x^۲}-۲\sqrt[۳]{x})}{۶}=\frac{-۶(۱۲)}{۶}=-۱۲$$

روش دوم:

ز قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x\to -۸}\frac{x^۲+۱۰x+۱۶}{۱۲+۶\sqrt[۳]{x}}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to -۸}\frac{۲x+۱۰}{۶(\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}})}=\frac{-۶}{۶(\frac{۱}{۱۲})}=-۱۲$$

۶-گزینه ۲ راه حل اول:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-\sqrt{\cos x}}{x^2}\times\frac{\cos^2 x+\sqrt{\cos x}}{\cos^2 x+\sqrt{\cos x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^4 x-\cos x}{x^2(\cos^2 x+\sqrt{\cos x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x(\cos^3 x-1)}{x^2(\cos^2 x+\sqrt{\cos x})}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x(\cos x-1)(\cos^2 x+\cos x+1)}{x^2(\cos^2 x+\sqrt{\cos x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x(-2\sin^2\frac{x}{2})(\cos^2 x+\cos x+1)}{x^2(\cos^2 x+\sqrt{\cos x})}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\times\frac{x^2}{4}}{x^2}$$

$$\times\frac{\cos x(\cos^2 x+\cos x+1)}{\cos^2 x+\sqrt{\cos x}}=-\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}=-\frac{3}{4}$$

راه حل دوم:

بهترین روش محاسبه این حد استفاده از هم‌ارزی $\cos x=1-\frac{x^2}{2}$ است:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-\sqrt{\cos x}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\frac{x^2}{2})^2-\sqrt{1-\frac{x^2}{2}}}{x^2}$$

حال به کمک هم ارزی برنولی صورت را ساده می‌کنیم ($(1+x)^r=1+rx$ وقتی $x\to 0$)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-2\times\frac{x^2}{2}-(1-\frac{1}{2}\times\frac{x^2}{2})}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(-1+\frac{1}{4})x^2}{x^2}=\frac{-3}{4}$$

۷-گزینه ۱ روش اول:

$$x-\frac{1}{2}=t\to x=t+\frac{1}{2}\to\lim_{t\to 0^+}\frac{-\cos\pi(t+\frac{1}{2})}{1-\sqrt{2(t+\frac{1}{2})}}=\lim_{t\to 0^+}\frac{-\cos(\frac{\pi}{2}+\pi t)}{1-\sqrt{2t+1}}$$

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{\sin\pi t}{1-\sqrt{2t+1}}\times\frac{1+\sqrt{2t+1}}{1+\sqrt{2t+1}}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\sin\pi t(1+\sqrt{2t+1})}{1-2t-1}$$

$$=\frac{\pi t(2)}{-2t}=-\pi$$

روش دوم:

می‌دانیم: اگر $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = ۰$ و هردو در $x = a$ مشتق‌پذیر باشند آن‌گاه روش هوپیتال برای رفع ابهام $\frac{۰}{۰}$ به قرار زیر است:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)} = \frac{۰}{۰} \qquad H: \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

نکته:در محاسبه‌ی حد، هرگاه x به سمت ریشه‌ی ساده قدر مطلق میل کرد، ابتدا قدر مطلق را تعیین علامت و سپس حاصل حد را می‌یابیم.

$$x \to (\frac{۱}{۲})^+ : x > \frac{۱}{۲} \Rightarrow \pi x > \frac{\pi}{۲} \Rightarrow \text{ربع دوم } \pi x \Rightarrow \cos \pi x < ۰$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to(\frac{۱}{۲})^+}\frac{|\cos \pi x|}{۱-\sqrt{۲x}} = \lim_{x\to(\frac{۱}{۲})^+}\frac{-\cos \pi x}{۱-\sqrt{۲x}} = \frac{۰}{۰} \overset{HOP}{=\!=} \lim_{x\to(\frac{۱}{۲})^+}\frac{\pi \sin \pi x}{-\frac{۲}{۲\sqrt{۲x}}} = -\pi$$

۸-گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\sqrt{۲+۲\cos x} = \sqrt{۲(۱+\cos x)} = \sqrt{۲\times ۲\cos^۲ \frac{x}{۲}} = ۲|\cos\frac{x}{۲}| = -۲\cos\frac{x}{۲}$$

(توجه کنید که اگر $x \to \pi^+$، آن‌گاه $\frac{x}{۲} \to \frac{\pi^+}{۲}$ و $\cos\frac{x}{۲} < ۰$)

از طرف دیگر $\cos(\frac{۳\pi}{۲} - ۲x) = -\sin ۲x$. بنابراین:

$$\lim_{x\to\pi^+}\frac{\sqrt{۲+۲\cos x}}{\cos(\frac{۳\pi}{۲}-۲x)} = \lim_{x\to\pi^+}\frac{-۲\cos\frac{x}{۲}}{-\sin ۲x} = \lim_{x\to\pi^+}\frac{\cos\frac{x}{۲}}{۲\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲}}$$

$$= \lim_{x\to\pi^+}\frac{۱}{۲\sin\frac{x}{۲}} = \frac{۱}{۲\times ۱} = \frac{۱}{۲}$$

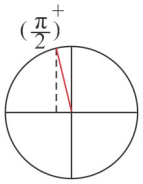
۹-گزینه ۱ نکته: $\lim_{u\to ۰}\frac{\sin u}{u} = ۱$

$$\lim_{x\to\pi^+}\frac{\dfrac{\sin(\pi\sin x)}{\pi\sin x}\times\pi\sin x\cdot\sin\frac{x}{۴}}{\sqrt{۲\cos^۲\frac{x}{۲}}}$$

$$=\lim_{x\to\pi^+}\frac{\pi\sin x\sin\frac{x}{۴}}{\left|\cos\frac{x}{۲}\right|\sqrt{۲}}$$

$$=\lim_{x\to\pi^+}\frac{\pi\times ۲\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲}\sin\frac{x}{۴}}{-\cos\frac{x}{۲}\times\sqrt{۲}}$$

$$=\frac{۲\pi\sin\frac{x}{۲}\sin\frac{x}{۴}}{-\sqrt{۲}}=\frac{۲\pi\times ۱\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{-\sqrt{۲}}=-\pi$$



$$x\to(\frac{\pi}{۲})^+\Rightarrow\cos x<۰$$

۱۰-گزینه ۳ ابتدا ضابطه f را پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}x & x<۱\\ -\frac{۱}{۲}x+\frac{۳}{۲} & x\geq ۱\end{cases}$$

$$\lim_{x\to ۱^+}\frac{۱-f(۲-x)}{۱-f(x)}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{۱-(۲-x)}{۱-(-\frac{۱}{۲}x+\frac{۳}{۲})}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{x-۱}{\frac{۱}{۲}x-\frac{۱}{۲}}=۲$$

بی نام

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۱	۱ - ۷	۳ - ۵	۱ - ۳	۴ - ۱
۳ - ۱۰	۱ - ۸	۲ - ۶	۳ - ۴	۳ - ۲