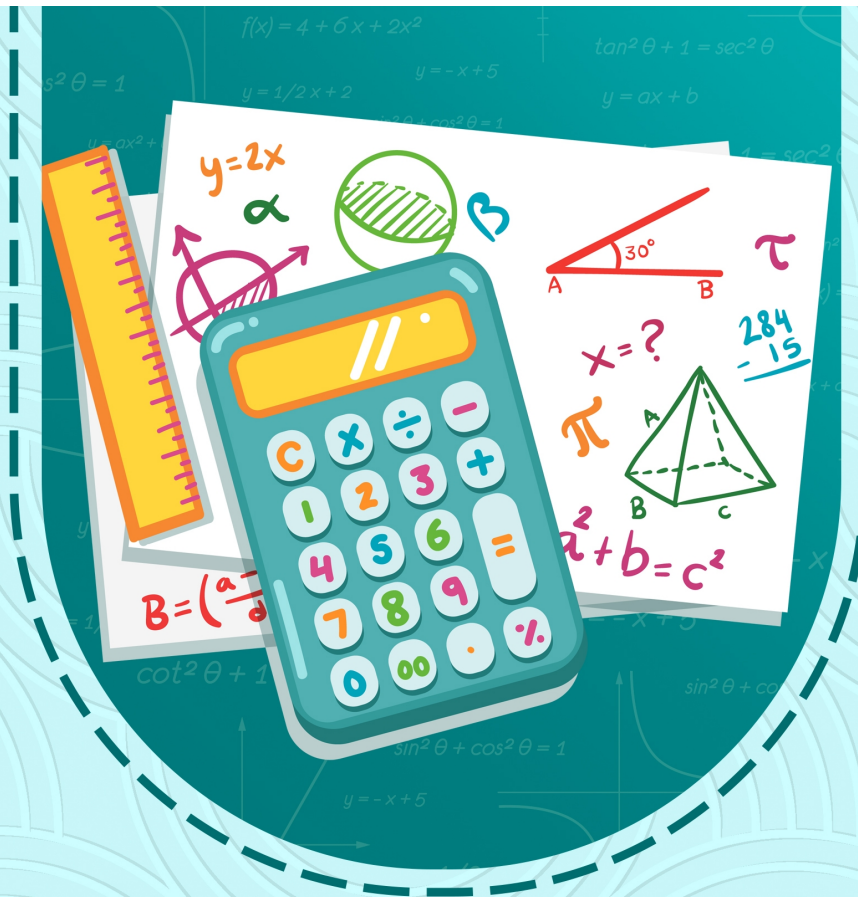


الورتبه



مجموعه خلاصه های کنگوری الورتبه

تابع



alorotbe



alorotbe_konkooor

اینجا کنگور بهت خوش میگذره



جمع بندی کنکوری تابع

الورتبه



جمع بندی تابع

زوج مرتب: هرگاه مقدار X و Y به عنوان دو عدد را به شکل (x, y) نمایش دهیم، آن را دو تایی مرتب یا زوج مرتب می‌گوییم (x, y) مولفه اول و y مولفه دوم).

تعریف تابع: یک رابطه تعریف شده از مجموعه A به مجموعه B است که در آن **هر عضو مجموعه A به یک و فقط یک عضو مجموعه B نسبت داده شود.**

نکته: در نمودار ون تابع از هر عضو مجموعه اول یک و فقط یک پیکان خارج می‌شود.

نکته: در تابع هیچ دو زوج مرتب متمایزی با مولفه های اول مساوی وجود ندارد ولی زوج های مرتب متمایز می‌توانند مولفه دوم مساوی داشته باشند.

مثال: مجموعه f روبرو میتواند یک تابع باشد: $f: \{(5,0), (3,2), (1,2)\}$

اما g تابع نیست و فقط یک مجموعه رابطه است: $g: \{(1,-7), (1,5), (1,2)\}$

تست) به ازای چه مقداری از a مجموعه رو به رو معرف یک تابع است؟ $F: \{(5,6), (3,a), (-1, 2a^2+a), (0,5)\}$

(۱) فقط ۲ (۲) فقط ۳- (۳) هر دو مقدار ۲-، ۳ (۴) هیچ مقدار a

جواب: اگر به مجموعه دقت کنید متوجه می‌شوید که در دو تا از زوج های مرتب، مولفه اول برابر ۵ وجود دارد بنابراین باید مولفه دوم این دو زوج با هم برابر باشد یعنی $a^2+a=6$ باشد $(a^2+a-6=0)$

حال از حل معادله بالا در می‌یابیم که: $a=2$ یا $a=-3$

حالا دقت کنید که اگر $a=2$ باشد، در دو تا از زوج های مرتب، مولفه اول یکسان به وجود می‌آید بنابراین فقط $a=-3$ درست است و جواب گزینه ۲ میباشد.

نکته: از مجموعه n عضوی A به مجموعه m عضوی B تعداد توابع قابل تعریف عبارت است از: m^n

از بین این توابع، $m^n - m$ تابع آن **یک به یک** هستند. (مفهوم تابع یک به یک رو جلوتر براتون توضیح میدیم).



جمع بندی کنکوری تابع

الورتبه



مثال: از مجموعه $A: \{a, b, c\}$ به مجموعه $B: \{1, 2, 3, 4\}$ چند تابع قابل تعریف است؟

طبق فرمول بالا: $4^3 = 64$ که از بین این 64 تابع 60 تابع آن، یک به یک هستند.

نکته: در نمودار هندسی تابع، هر خط موازی با محور y ها (عرض ها)، منحنی تابع را **حداکثر در یک نقطه** قطع میکند.

نکته: در معادله تابع (y تابعی از x) به ازای هر x ورودی یک و فقط یک y خروجی حاصل می گردد.

مثال: $x^2 + y^2 = 5$ یک تابع نیست. چرا؟ چون به ازای یک x ثابت، بیش از یک عدد را میتوان به جای y گذاشت و باز هم رابطه برقرار باشد.

اگر قرار بود این رابطه تابع باشد، پس از انتخاب عددی برای x ، ما باید فقط و فقط یک انتخاب برای y داشته باشیم. (خلاصه که y خیلی

غیرتیه، به x میگوید که با y دیگه ای بینم این رابطه دیگه تابع نیست)

تعریف دامنه تابع: مجموعه مقادیر حقیقی که به جای متغیر تابع قرار می گیرند تا مقدار تابع، حقیقی شود.

نکته: دامنه توابع چند جمله ای، همه اعداد حقیقی است.

نکته: دامنه توابع کسری گویا شامل همه اعداد حقیقی به جز ریشه های حقیقی مخرب است. مثال:

$$F(x) = \frac{2x}{x^3 - 4x}$$

$$x^3 - 4x = 0 \rightarrow x(x^2 - 4) = 0 \rightarrow x = 0, x = 2, x = -2 \rightarrow Df = R - \{-2, 0, 2\}$$

دامنه توابع رادیکالی:

(الف) با فرجه فرد: در این حالت برای تعیین دامنه توابع، دامنه عبارت زیر رادیکال را در نظر می گیریم.

$$F(x) = \sqrt[2n+1]{g(x)} \rightarrow Df = Dg$$

(ب) با فرجه رادیکال زوج: در این حالت برای تعیین دامنه تابع، عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد.

$$F(x) = \sqrt{x^2 - 4x} \Rightarrow x^2 - 4x \geq 0 \Rightarrow x \leq -2 \text{ یا } x \geq +2$$

$$Df = R - (-2, 2) = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$$



جمع بندی کنکوری تابع

الورته



نکته: هرگاه دامنه تابعی تهی شود آن تابع قابل تشکیل نمی باشد.

۲. دامنه توابع لگاریتمی:

$$F(x)=\log_b a \rightarrow D_f = a > 0, b > 0, b \neq 1$$

مثال:

$$F(x)=\log_3(4-x^2) \rightarrow 4-x^2 > 0 \rightarrow -2 < x < 2 \rightarrow D_f = (-2, 2)$$

نامساوی های مهم لگاریتمی:

$$\log_b a < 0 \rightarrow \begin{cases} a > 1 \\ 0 < b < 1 \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} 0 < a < 1 \\ b > 1 \end{cases}$$

$$\log_b x \leq a \rightarrow x \leq b^a, b > 1$$

$$\log_b a > 0 \rightarrow \begin{cases} a > 1 \\ b > 1 \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} 0 < a < 1 \\ 0 < b < 1 \end{cases}$$

$$\log_b x \geq a \rightarrow x \geq b^a, 0 < b < 1$$

۳. دامنه توابع چند ضابطه ای: دامنه این توابع، اجتماع شرط های آن می باشد.

$$F(x)=\begin{cases} \sqrt{4-x^2} \\ 5, x > 2 \end{cases}; -2 \leq x \leq 2$$

۴. دامنه توابع مثلثاتی:

الف) دامنه تابع $y=\sin x$ و $y=\cos x$ تمام R می باشد.

نکته: در این دو تابع برای تعیین دامنه به کمان توجه کرده و دامنه کمان را مشخص میکنیم.

$$f(x)=\sin \frac{1}{x} \rightarrow D_f = R - \{0\}$$

$$g(x)=\cos \sqrt{x} \rightarrow D_g = [0, +\infty)$$



ب) دامنه تابع تانژانت و کوتانژانت:

• دامنه تابع $y = \tan x$ به شکل $D_y = \left\{ x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\}$

• دامنه تابع $y = \cot x$ به شکل $D_y = \{ x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq k\pi; k \in \mathbb{Z} \}$

مثال:

$$F(x) = \tan\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow D_f = 2x - \frac{\pi}{2} \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow 2x = k\pi + \pi \rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \rightarrow$$

$$D_f = \left\{ x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

تعیین دامنه و برد تابع از روی شکل تابع:

محدوده ای از محور x ها که توسط منحنی تابع پوشش داده می شود، دامنه تابع را تشکیل می دهد و محدوده ای از محور y ها که توسط منحنی تابع پوشش داده می شود، برد تابع را مشخص می کند.

انجام عملیات روی توابع حقیقی:

برای رسم تابع $f(ax+b)$ نسبت به تابع $f(x)$ باید:

(۱) اگر $a > 0$ و $b > 0$ باشد باید b واحد نمودار $f(x)$ را به سمت چپ حرکت دهیم و عرض نقاط تابع را $\frac{1}{a}$ برابر کنیم.

(۲) اگر $a > 0$ و $b < 0$ باشد باید b واحد نمودار $f(x)$ را به سمت راست حرکت دهیم و عرض نقاط تابع را $\frac{1}{a}$ برابر کنیم.

(۳) اگر $a < 0$ باشد قوانین قبلی پابرجاست ولی در نهایت نمودار را نسبت به محور y ها قرینه می کنیم.

مثال: برای رسم نمودار تابع $f(-x+3)$ ، ابتدا نمودار $f(x)$ را ۳ واحد به سمت چپ حرکت می دهیم سپس نمودار ایجاد شده را نسبت

به محور y ها قرینه می کنیم. (بچه ها دقت کنید که وارون کردن نمودار نسبت به محور y ها باید در آخرین مرحله انجام بشه!)



جمع بندی کنکوری تابع

الورتبه



اعمال جبری روی توابع:

تابع	ضابطه	دامنه
$f + g$	$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ $(af + bg)(x) = af(x) + bg(x)$	$D_{f+g} = D_f \cap D_g$
$f - g$	$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ $(af - bg)(x) = af(x) - bg(x)$	$D_{f-g} = D_f \cap D_g$
$f \times g$	$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$	$D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$
$\frac{f}{g}$	$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$	$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g, g(x) \neq 0$

نکته: حاصل ضرب دو تابع خطی و غیر ثابت f و g همواره تابعی درجه دوم است.

$$a > 0 \rightarrow a + \frac{1}{a} \geq 2$$

$$a < 0 \rightarrow a + \frac{1}{a} \leq -2$$

ترکیب توابع:

اگر $f \circ f(x)$ تابعی خطی باشد، $f(x)$ هم تابعی خطی است.

$$x \xrightarrow{g} g(x) \xrightarrow{f} f(g(x)) = (f \circ g)(x)$$

$$D(f \circ g) = \{x \in Dg \mid g(x) \in Df\}$$

نکته: ترکیب یک تابع پیوسته (با ضابطه) با یک تابع گسسته (زوج مرتبی) همواره تابعی گسسته خواهد بود.

$$D_{(f \circ g)} \subseteq Dg, R_{(f \circ g)} \subseteq Rf$$

جمع بندی کنکوری تابع

الورتبه



نکته: شرط تشکیل تابع fog این است که $Rf \cap Df \neq \emptyset \iff$

نکته: هر گاه با داشتن دامنه تابع ساده $f(x)$ بخواهیم دامنه تابع مرکب $f(ax + b)$ را مشخص کنیم، کافی است بخش مرکب $(ax + b)$ را در دامنه تابع قرار داده و حدود x را تعیین کنیم.

مثال: اگر $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$ ، دامنه تابع $f(3 - x)$ کدام است؟ (سراسری ۹۲)

$[\frac{1}{2}, 3](4)$

$[\frac{1}{2}, 2](3)$

$[0, 3](2)$

$[0, 2](1)$

جواب: گزینه ۴

$$Df = 2x - x^2 \geq 0 \rightarrow x^2 - 2x \leq 0 \rightarrow x(x - 2) \leq 0 \rightarrow x = 0$$

$$Df(x) = [0, 2] \rightarrow Df(3 - x) = 0 \leq 3 - x \leq 2 \rightarrow 1 \leq x \leq 3$$

نکته: هرگاه دامنه تابع مرکب را در اختیار داشته باشیم برای تعیین دامنه تابع ساده، از روی دامنه داده شده بخش مرکب را می‌سازیم.

نکته: اگر نمودار تابع در دو نقطه x_1 و x_2 با محور x ها تلاقی داشته باشد به x_1 و x_2 ، ریشه های ساده میگویند. اگر نمودار تابع در یک نقطه x_1 با محور x ها مماس باشد به آن نقطه x_1 ، ریشه مضاعف گفته میشود.

نکته: در توابع خطی، افزایش یا کاهش y ها نسبت به افزایش x ها یک عدد ثابت است که همان شیب خط است.

تابع یک به یک: تابعی است که هر عضو دامنه را به یک و فقط یک عضو از برد خود نسبت می‌دهد و برای هر عضو از برد خود یک و فقط یک عضو از دامنه را نسبت می‌دهد.

نکته: در نمودار ون تابع یک به یک، به هر عضو مجموعه دوم حداکثر یک عضو از دامنه نسبت داده می‌شود.

نکته: اگر دامنه تابعی یک به یک، n عضوی باشد، برد آن نیز n عضوی است؛ اگر در رابطه ای تعداد اعضای برد بیشتر از تعداد اعضای دامنه باشد یعنی قطعا به ازای یک یا چند x دو یا چند y وجود داشته است پس این رابطه نمیتواند یک تابع باشد.

تابع ثابت: تابعی است که برد آن یک عدد منحصر به فرد حقیقی است مانند $f(x) = 3$ که تمام عضو های دامنه خود را به عدد ۳ نسبت می‌دهد.



جمع بندی کنکوری تابع

الورتبه



نکته: هرگاه دامنه تابع ثابت R باشد، نمودار آن خط افقی و موازی محور x ها است.

تابع همانی: تابعی است که هر عضو دامنه خود را به همان عضو در برد خود نسبت می دهد مانند $f(x) = x$

نکته: نمودار تابع همانی هرگاه دامنه آن R باشد، نیمساز ناحیه اول و سوم است ($y = x$).

تابع خطی: هر تابعی که به شکل $y = ax + b$ نمایش داده شود یک تابع خطی است که نمودار آن یک خط راست با شیب a و عرض از مبدا b می باشد.

نکته:

- برای اینکه تابع خطی از ناحیه سوم مختصاتی نگذرد باید: $a \leq 0$ و $b \geq 0$
- برای اینکه تابع خطی از ناحیه دوم مختصاتی نگذرد باید: $a \geq 0$ و $b \leq 0$
- برای اینکه تابع خطی از ناحیه اول مختصاتی نگذرد باید: $a \leq 0$ و $b \leq 0$
- برای اینکه تابع خطی از ناحیه چهارم مختصاتی نگذرد باید: $a \geq 0$ و $b \geq 0$

توابع درجه ۲:

این تابع به شکل کلی به صورت $f(x) = ax^2 + bx + c$ با شرط $a \neq 0$ بیان میشود.

تابع درجه ۲ دارای یک Δ است که در سه حالت زیر ریشه های معادله درجه دوم مشخص می شوند:

۱) اگر $\Delta > 0$ باشد تابع دارای دو ریشه حقیقی و متمایز به شکل زیر می باشد (x_1 و x_2 ریشه های ساده تابع می گوئیم):

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

در این حالت سهمی (نمودار تابع درجه دوم)، در دو نقطه متمایز محور x ها را قطع می کند به همین علت سهمی **حداقل از سه ناحیه مختصاتی** عبور می کند:

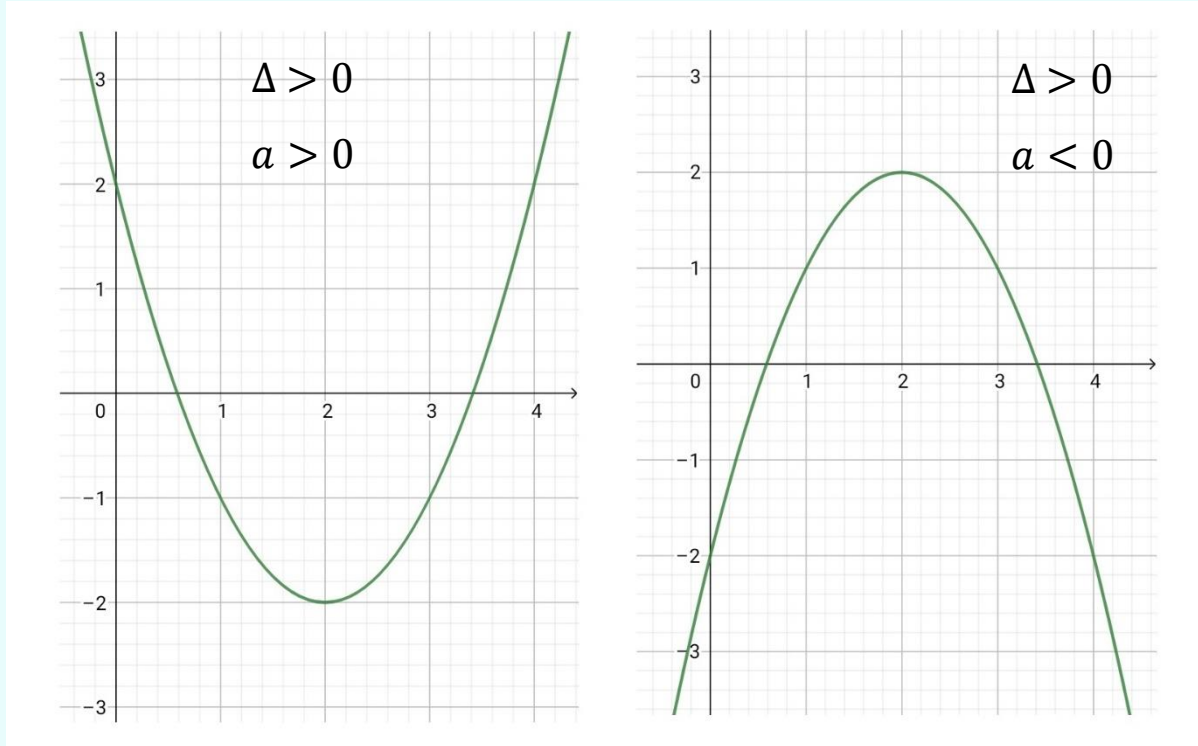


جمع بندی کنکوری تابع

الورتبه



الف) اگر ریشه ها هم علامت باشند ، سهمی از ۳ ناحیه عبور خواهد داشت و از یک ناحیه عبور نخواهد کرد.



ب) اگر ریشه ها هم علامت نباشند ($a/c < 0$) سهمی از ۴ ناحیه عبور می کند.

نکته: هر گاه $\frac{c}{a} < 0$ باشد (یعنی a و c مختلف العلامه باشند)، تابع درجه دوم دارای **دو ریشه متمایز حقیقی** خواهد بود زیرا Δ مثبت خواهد بود و سهمی از ۴ ناحیه عبور می کند.

نکته: حالات خاص:

الف) اگر $a + b + c = 0$ باشد آنگاه $x_1 = 1$ و $x_2 = -\frac{c}{a}$

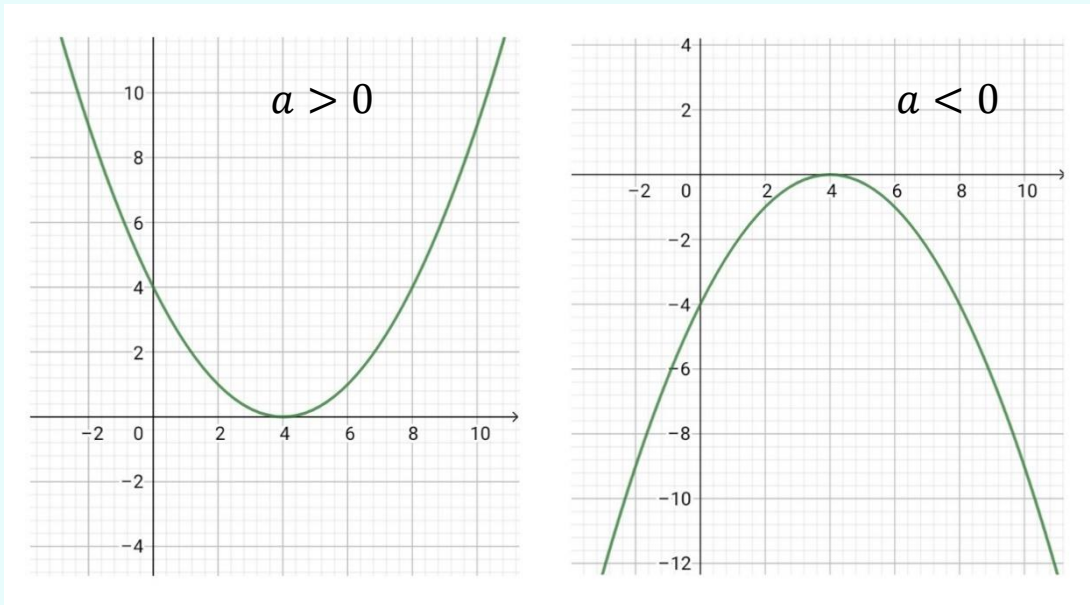
ب) اگر $b = a + c$ باشد آنگاه $x_1 = -1$ و $x_2 = -\frac{c}{a}$

جمع بندی کنکوری تابع

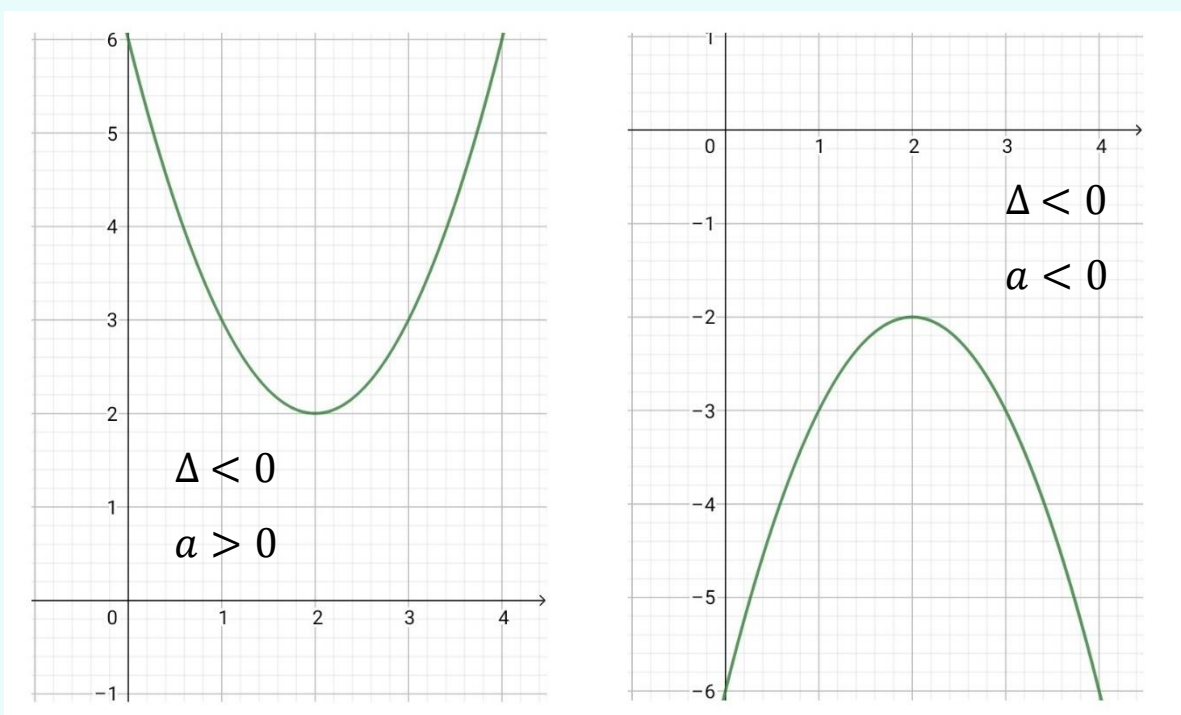
الورتبه



(۲) اگر $\Delta = 0$ باشد تابع درجه دوم دارای یک ریشه مضاعف (دو ریشه مساوی) خواهد بود که مقدار آن $X = -\frac{b}{2a}$ می باشد و در این حالت سهمی در ریشه مضاعف خود بر محورها مماس می شود و سهمی فقط از دو ناحیه عبور خواهد کرد یعنی همواره بالای محور x ها یا همواره زیر محور x ها قرار می گیرد.



(۳) اگر $\Delta < 0$ باشد تابع فاقد ریشه حقیقی خواهد بود و سهمی با محور x ها نقطه تماس یا تلاقی نخواهد داشت و نمودار تابع همواره بالای محور x ها (با شرط $\Delta < 0$ و $a > 0$) و یا زیر محور x ها (با شرط $\Delta < 0$ و $a < 0$) قرار خواهد گرفت.





جمع بندی کنکوری تابع

الورتبه



روابط بین ریشه های تابع درجه دوم :

$S = \frac{-b}{a}$	مجموع ریشه های معادله
$P = \frac{c}{a}$	حاصل ضرب ریشه ها
$ X_1 - X_2 = \frac{\sqrt{\Delta}}{ a }$	قدر مطلق تفاضل دو ریشه
$x_1^3 + x_2^3 = S^3 - 3SP$	مجموع مکعبات دو ریشه
$x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P$	مجموع مربعات دو ریشه
$(x_1 - x_2)^2 = S^2 - 4P$	مربع تفاضل دو ریشه
$\sqrt{x_1} \pm \sqrt{x_2} = \sqrt{S \pm 2\sqrt{P}}$	جمع یا تفریق جذر دو ریشه

نکته: با استفاده از ریشه های یک تابع درجه ۲ می توانیم ضابطه ی آن را به دست بیاوریم به این صورت که :

$$x^2 - sx + p = 0 \quad s = -\frac{b}{a} \quad p = \frac{c}{a}$$

نکته: نقطه $(0, C)$ ، عرض از مبدا سهمی است.

نکته: عدد b در ضابطه تابع درجه دوم ، شیب خط مماس بر سهمی در نقطه عرض از مبدا است یعنی اگر ضابطه این تابع به صورت $ax^2 + 2x + 3 = 0$ باشد ، شیب خط مماس بر نقطه عرض از مبدا ، ۲ است.

نکته: حداقل و حداکثر مقدار تابع درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) در نقطه $x = -\frac{b}{2a}$ قرار دارد که عرضی برابر با $y = -\frac{\Delta}{4a}$ دارد.

جمع بندی کنکوری تابع

الورتبه



$$a > 0 \rightarrow \min = -\frac{\Delta}{4a}$$

$$a < 0 \rightarrow \max = -\frac{\Delta}{4a}$$



نکته: ریشه های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ و ارون ریشه های معادله $cx^2 + bx + a = 0$ است. ریشه های معادله $ax^2 - bx + c = 0$ قرینه ریشه های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ است.

نکته: دو خط $ax + by = c$ و $nx + my = t$ زمانی بر هم منطبق هستند که $a/n=b/m=c/t$ باشد.

نکته: زوج مرتب های تابع یک به یک، در مولفه اول و دوم باهم متمایزند.

نکته: در نمودار هندسی تابع یک به یک، هر خط موازی با محور x ها، منحنی تابع یک به یک را حداکثر در یک نقطه قطع می کند بنابراین توابع درجه ۲ و تابع ثابت، یک به یک حساب نمی شوند.

نکته: هرگاه تابع f با دامنه D_f یک به یک است که داشته باشیم: به ازای هر x_1 و x_2 که عضو دامنه باشند:

$$F(x_1) = F(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

یعنی اگر دو نقطه مجهول، در توابع یک به یک دارای برد یکسان باشند قطعاً آن دو نقطه دارای دامنه یکسان هم هستند درواقع یک نقطه هستند.

نکته: توابعی که دارای محور تقارن هستند ممکن است در یک طرف محور تقارن، تابع یک به یک شود.

مانند تابع $y = a|x - x_0| + y_0$ که یک تابع قدر مطلق است با شرط $x \leq x_0$ یا $x \geq x_0$ یک طرف نمودار تابع نسبت به خط تقارن حذف می شود و تابع یک به یک خواهد بود.

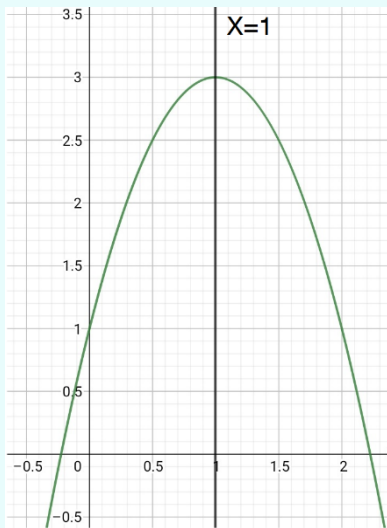
مثال: تابع $y = |x - 1| + 2$ با شرط $x \leq 1$ یا $x \geq 1$ یک به یک خواهد بود.

نکته: تابع $y = a(x - x_0)^2 + y_0$ یا $y = ax^2 + bx + c$ که یک سهمی قائم است در یک طرف محور تقارن خود (در یک طرف راس سهمی)، یک به یک خواهد بود.



جمع بندی کنکوری تابع

الورتبه



مثال: نمودار تابع $y = -2x^2 + 4x + 1$ با شرط $x \leq 1$ یا $x \geq 1$ یک به یک خواهد بود.

تابع وارون: وارون تابع f را به شکل f^{-1} نمایش می‌دهیم که به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$f^{-1} = \{(y, x) | (x, y) \in f\}$$

نکته: شرط وارون پذیری تابع f این است که یک به یک باشد.

نکته: تابع f در صورتی وارون پذیر است که وارون آن نیز تابع باشد.

مثال: اگر $f = \{(1, 2), (3, 5), (7, 0)\}$ باشد آنگاه $f^{(-1)} = \{(2, 1), (5, 3), (0, 7)\}$

نکته: چون جای x و y در زوج مرتب ها عوض می‌شود پس: دامنه f برابر برد وارون آن است و دامنه f^{-1} برابر با برد f است.

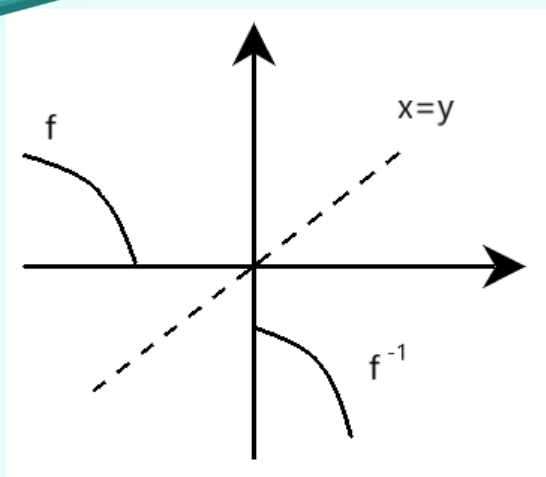
نکته: اگر تابعی یک به یک باشد، وارون آن نیز یک به یک است. اگر تابعی اکیدا صعودی باشد وارون آن نیز اکیدا صعودی است.

نکته: ترکیب هر تابع با تابع وارون خود، یک تابع همانی خواهد بود یعنی:

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = x \quad ; \quad x \in Df^{-1}$$



جمع بندی کنکوری تابع



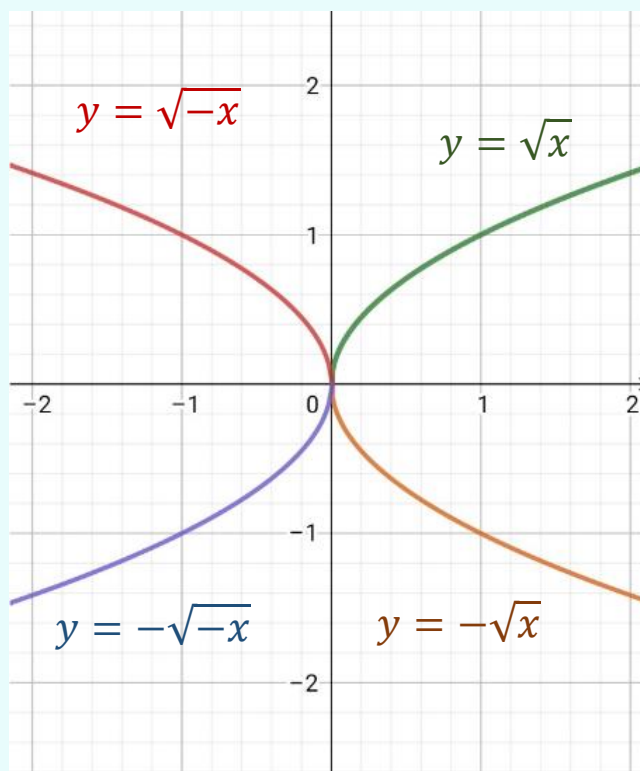
نکته: برای رسم نمودار هندسی f^{-1} قرینه نمودار تابع f را نسبت به خط $y=x$ رسم میکنیم.

نکته: نمودار هندسی و پیوسته تابع f و f^{-1} در صورت داشتن نقطه تلاقی، این نقطه تلاقی روی خط $y=x$ خواهد بود یعنی طول و عرض نقطه تلاقی، با هم برابر خواهند بود.

مثال: تابع $y = 2x - 3$ در چه نقطه ای نمودار وارون خود را قطع خواهد کرد؟

جواب: کافیهست به جای y عبارت x را قرار داده و معادله را حل کنیم:

$$x = 2x - 3 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow A(3,3)$$



شکل توابع رادیکالی:



جمع بندی کنکوری تابع

الورتبه



نکته: برای یافتن ضابطه وارون تابع رادیکالی f از روی ضابطه f ابتدا به جای $f(x)$ عبارت y را قرار می دهیم و سپس جای x و y را در معادله تغییر می دهیم و معادله را بر حسب y مرتب می کنیم؛ ضابطه مرتب شده بر حسب x در ادامه، همان ضابطه f^{-1} است.

مثال: اگر $f(x) = \sqrt[3]{\frac{2x-1}{5}}$ باشد ضابطه f^{-1} را مشخص کنید.

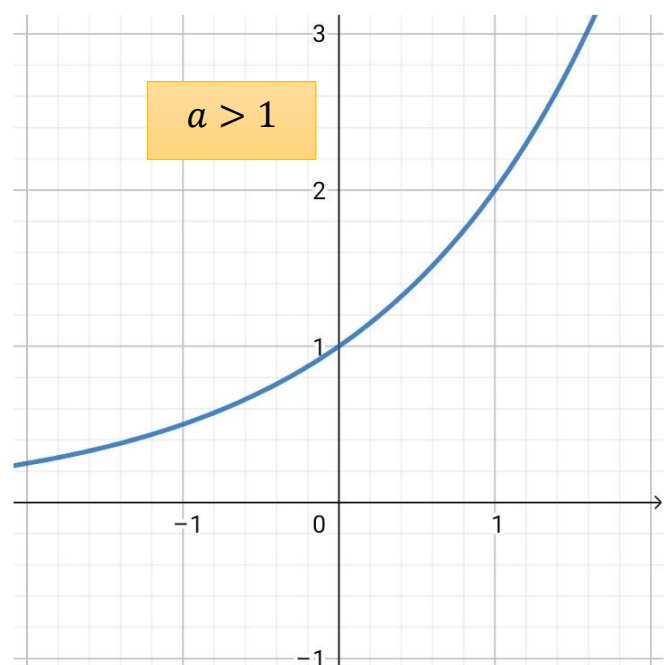
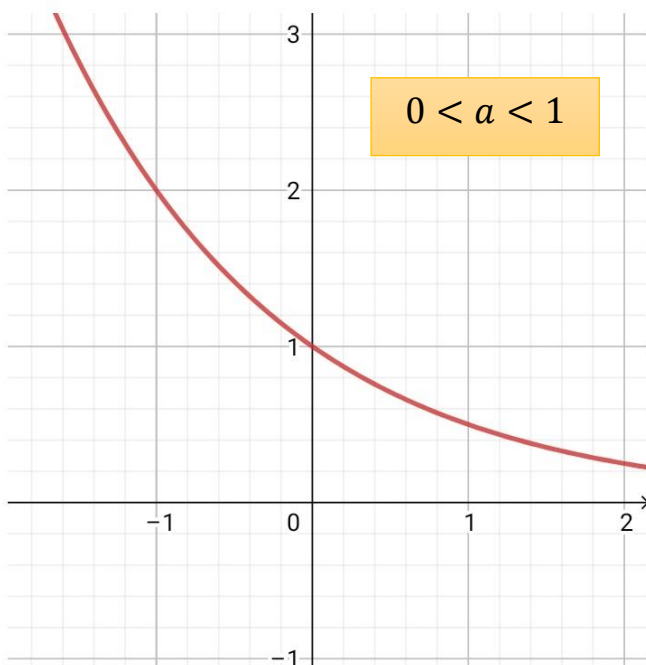
جواب:

$$y = \sqrt[3]{\frac{2x-1}{5}} \rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{2y-1}{5}} \rightarrow x^3 = \frac{2y-1}{5} \rightarrow 5x^3 = 2y-1 \rightarrow y = \frac{1+5x^3}{2} = f^{-1}$$

توابع نمایی: تابع $y = a^x$ با شرط $a > 0$ و $a \neq 1$ را تابع نمایی می گویم.

(۱) اگر $0 < a < 1$ باشد، تابع نمایی به شکل نزولی خواهد بود و آن را کاهشی می گویم. نمودار آن به شکل زیر خواهد بود:

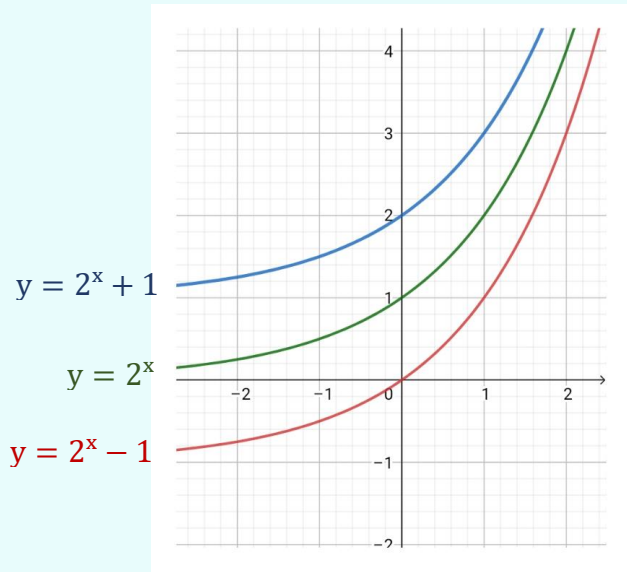
(۲) اگر $a > 1$ باشد، نمودار تابع نمایی به شکل صعودی خواهد بود و آن را افزایشی می گویم. نمودار آن به شکل زیر خواهد بود:



نکته: نمودار توابع نمایی همواره از نقطه $(0, 1)$ عبور می کند.

جمع بندی کنکوری تابع

الورتبه



تابع $y = 2^x + 1$ یا $y = 2^x - 1$ رفتار مشابه تابع نمایی دارند که

نمودار آن به شکل رو به رو خواهد بود:

برای رسم تابع $y = 2^{x-1}$ باید یک واحد تابع $y = 2^x$ به سمت راست

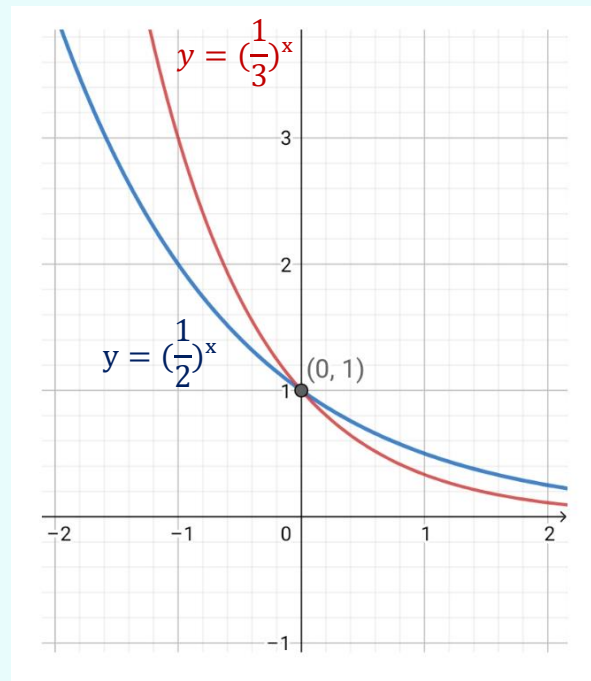
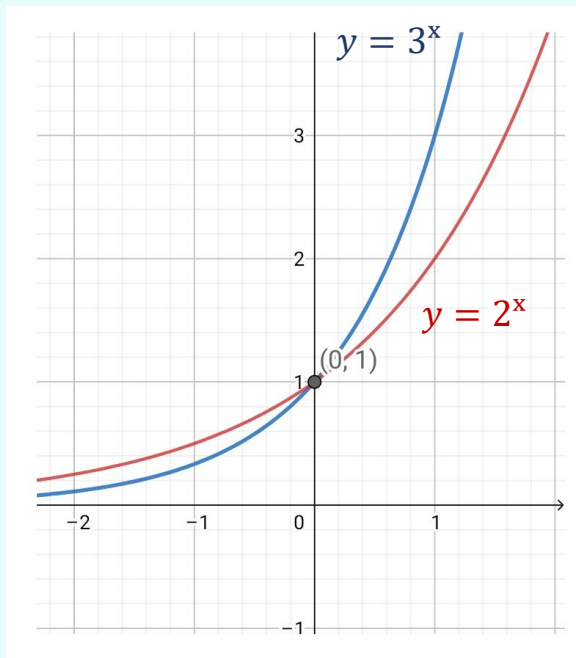
حرکت کند و برای رسم نمودار تابع $y = 2^{x+1}$ نمودار $y = 2^x$ را

یک واحد به سمت چپ حرکت می دهیم.

نکته: تابع $y = 2^x$ در $x > 0$ نسبت به تابع $y = 3^x$ پایین تر قرار دارد و در $x < 0$ بالاتر است. محل تلاقی توابع $y = a^x$ و

$y = b^x$ در نقطه $(0, 1)$ است.

نمودار تابع $y = (\frac{1}{2})^x$ در $x < 0$ پایین تر از نمودار $y = (\frac{1}{3})^x$ قرار میگیرد و در $x > 0$ بالاتر قرار میگیرد.



نکته: وارون تابع نمایی تابع لگاریتمی است.

$$F(x) = a^x \rightarrow y = a^x \rightarrow x = a^y \rightarrow y = \log_a x$$

جمع بندی کنکوری تابع

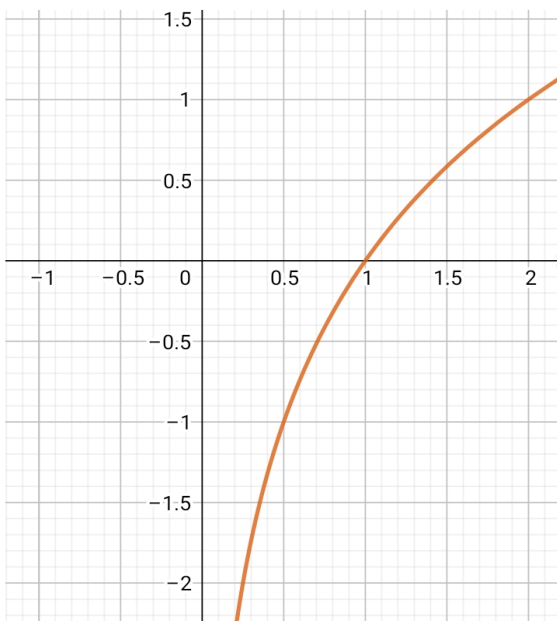
الورتبه



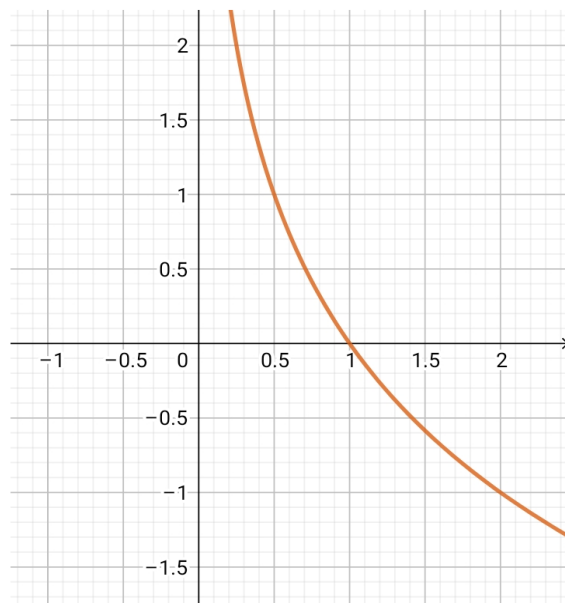
شرط دامنه تابع لگاریتم:

$$F(x) = \log_a b \rightarrow Df : \begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \\ b \neq 1 \end{cases}$$

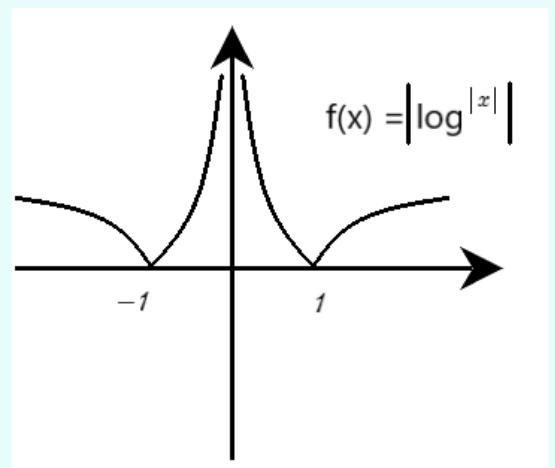
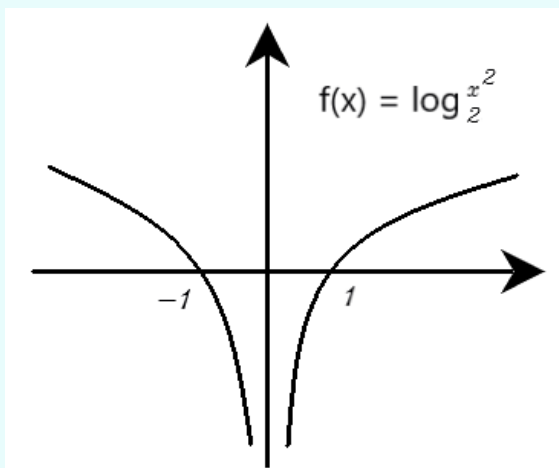
تابع صعودی لگاریتمی



تابع نزولی لگاریتمی



بچه ها این دوتا نمودار لگاریتمی خاص رو ببینید و سعی کنید قالبشون رو به ذهنتون بسپارید :





جمع بندی کنکوری تابع



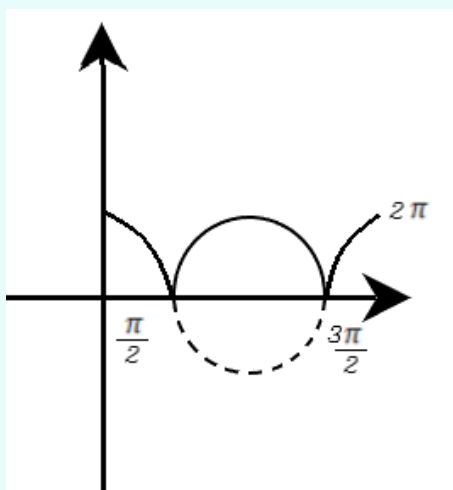
نمودار تابع قدر مطلق:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

نکته: زاویه بین دو خط در نمودار بالا یعنی نمودار تابع $y = |x|$ برابر 90° درجه است.

نکته: برای رسم نمودار تابع $y = |f(x)|$ ابتدا نمودار تابع $y = f(x)$ را رسم کرده سپس بخش زیر محور x ها را از تابع $f(x)$ در صورت وجود، به سمت بالای محور x ها قرینه می‌کنیم.

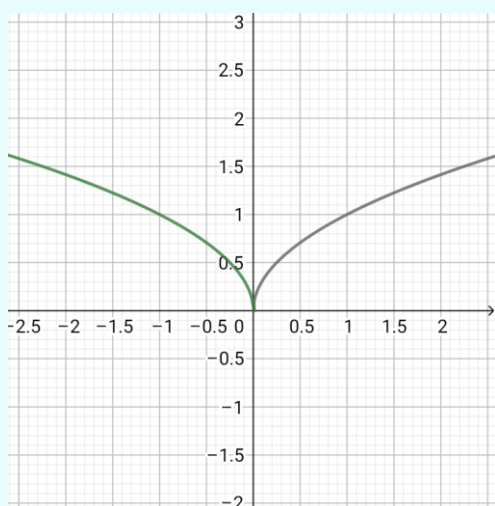
مثال:



$$y = |\cos x| \quad 0 \leq x \leq 2\pi$$

نکته: برای رسم نمودار تابع $y = f(|x|)$ ابتدا نمودار تابع $y = f(x)$ را رسم می‌کنیم سپس بخشی از نمودار f را که سمت چپ محور y ها در صورت وجود قرار می‌گیرد حذف می‌کنیم؛ در ادامه بخش باقی مانده را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم به این صورت بخش باقی مانده به همراه قرینه آن نسبت به محور y ها، نمودار تابع $y = f(|x|)$ است.

مثال: نمودار تابع $y = \sqrt{|x|}$ به صورت زیر است:

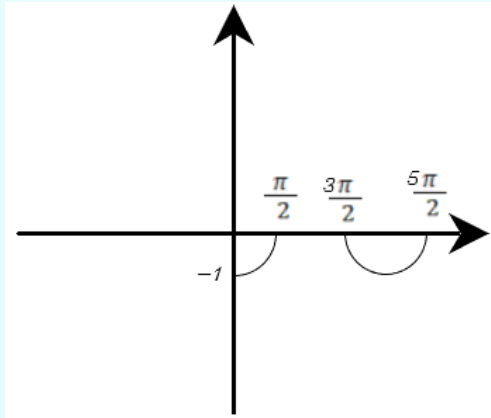


جمع بندی کنکوری تابع

الورتبه



رسم نمودار $|y|=f(x)$:



ابتدا نمودار تابع $f(x)$ را رسم میکنیم سپس بخشی از آن را که زیر محور x ها قرار میگیرد حذف می‌کنیم و بخش باقی مانده را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.

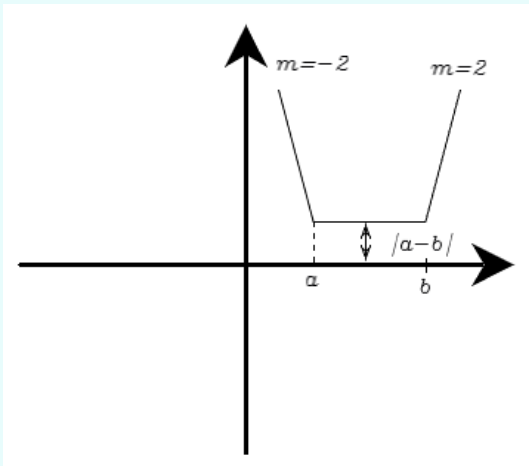
مثال: نمودار تابع $|y| = \cos x$ به صورت زیر است:

نمودار توابع خاص در قدرمطلق:

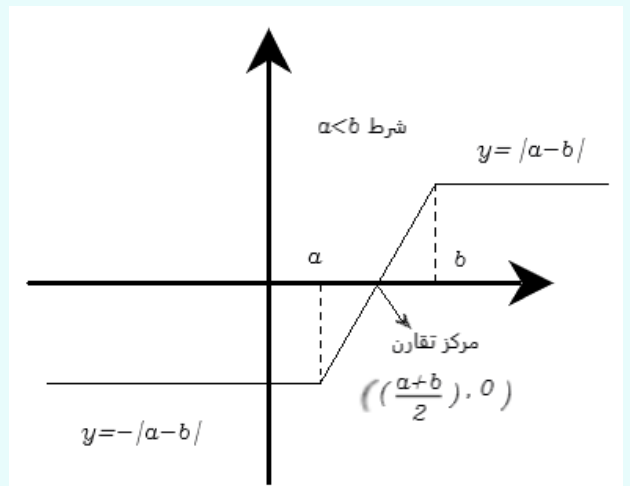
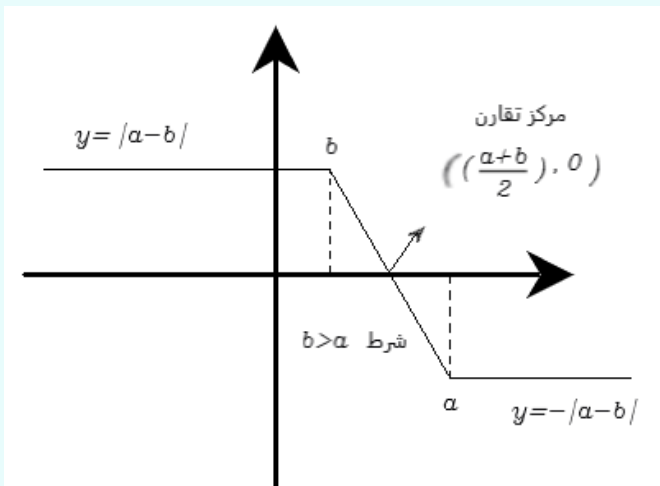
$$y = |x-a| + |x-b| \quad (\text{الف})$$

(به نمودار تابع الف، نمودار توابع گلدانی هم میگویند)

نکته: کمترین مقدار تابع در این توابع، $y = |a-b|$ است. یعنی برد این توابع از $|a-b|$ تا مثبت بی‌نهایت است. و نمودار تابع، محور تقارنی به طول $x = \frac{a+b}{2}$ دارد.



(ب) نمودار توابع به شکل $y = |x-a| - |x-b|$ به دو صورت زیر رسم میشود:





جمع بندی کنکوری تابع

الورته



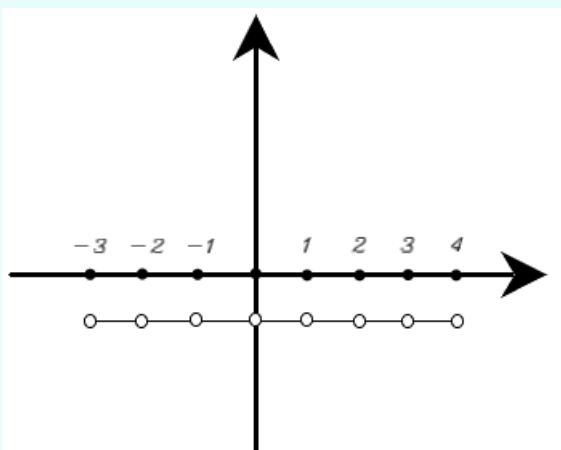
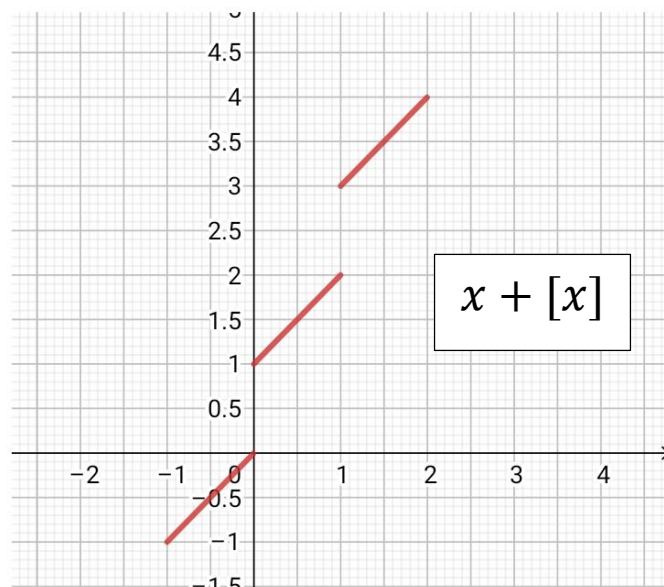
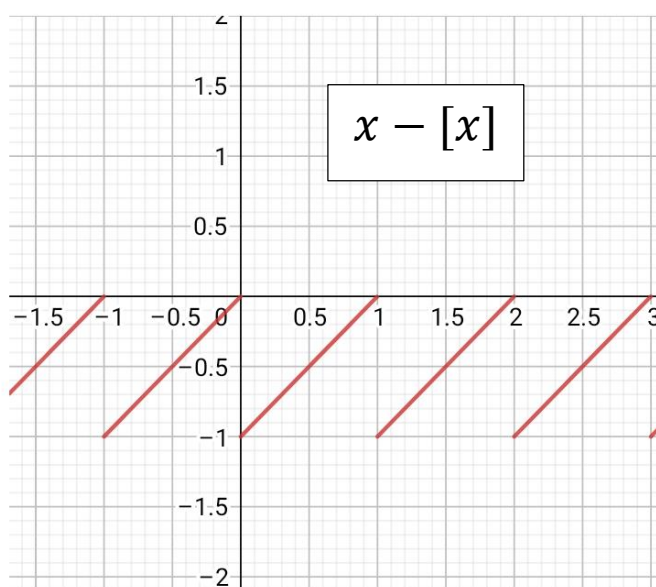
نکته: برد این تابع به صورت بازه بسته $-|a-b|$ تا $|a-b|$ است. این تابع دارای محور تقارنی به طول $x=(a+b)/2$ است.

تابع جزء صحیح:

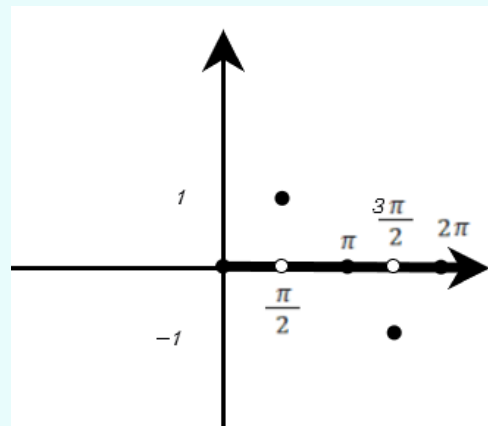
این تابع به شکل $f(x) = [x]$ نوشته میشود که ورودی آن اعداد حقیقی و خروجی آن اعداد صحیح هستند.

براکت x یعنی بزرگترین عدد صحیحی که کوچکتر یا مساوی با x باشد.

نکته: تابع $x + [x]$ یک به یک است ولی تابع $x - [x]$ اره ای شکل و غیر یک به یک است.



نمودار تابع $f(x) = [x] + [-x]$



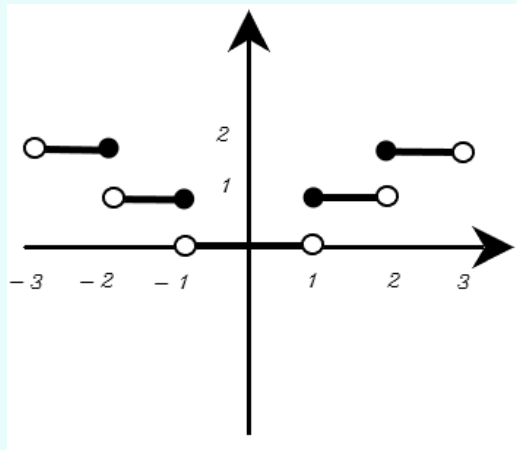
نمودار تابع $y = [\sin x]$ در بازه $0 \leq x \leq 2\pi$



جمع بندی کنکوری تابع



نکته: برای رسم نمودار تابع $y = [f(x)]$ ابتدا نمودار تابع $f(x)$ را رسم میکنیم سپس خطوطی به معادله $y = n \in \mathbb{Z}$ حداقل یک نقطه تماس با منحنی تابع $f(x)$ داشته باشد رسم کرده سپس بین نقاط تلاقی مانند شکل زیر، تابع را روی خطوط تصویر می کنیم. محل تلاقی یا تماس خطوط با منحنی، نقاط توپر و تصویر آنها بر خط پایین، نقاط توخالی هستند.



نمودار تابع $y = [x]$ به شکل روبه رواست:

تذکر: بچه ها به نکته بهتون بگما، توی تشخیص نمودار صحیح هر تابع، اگر توی ضابطه تابع عددگذاری کنید خیلی سریع میتونید نمودار درست رو تشخیص بدید یا رسم کنید!

توابع مثلثاتی:

تابع $f(x)$ را متناوب میگویم هر گاه برای هر x و $x+t$ از D_f داشته باشیم:

$$f(x+t) = f(x)$$

در این تعریف کوچکترین $t > 0$ را دوره تناوب تابع گوئیم که آن را با T نمایش می دهیم.

نکته: تابع $y = a \sin bx$ دارای دوره تناوب $T = \frac{2\pi}{|b|}$ می باشد و این تابع در نقاط $\frac{\pi}{2|b|}$ و $\frac{3\pi}{2|b|}$ دارای حداقل و حداکثر مقدار است که حداقل مقدار تابع $-|a|$ و حداکثر مقدار آن $|a|$ است که در یکی از نقاط بیان شده رخ می دهند.

نکته: تابع $y = a \cos bx$ دارای دوره تناوب $T = \frac{2\pi}{|b|}$ می باشد و دارای حداقل $-|a|$ و حداکثر $|a|$ می باشد که در نقاط $\frac{\pi}{|b|}$ رخ می دهد.

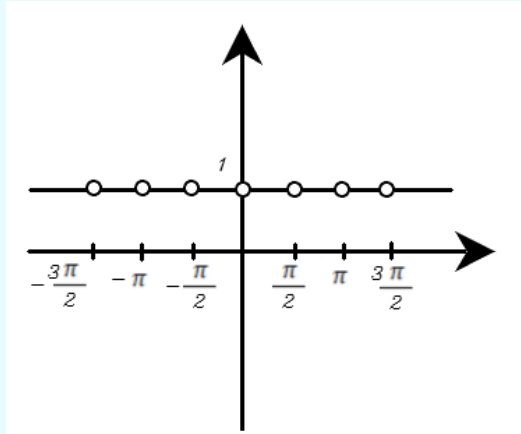


جمع بندی کنکوری تابع

الورته



نکته: برخی توابع مانند توابع ثابت، متناوب هستند ولی دوره تناوب ندارند! مثل $y = 2$ که یک تابع ثابت و متناوب است ولی دوره تناوب ندارد. از طرفی برخی توابع ثابت هستند ولی دوره تناوب دارند مثل:



$$F(x) = \tan x \times \cot x; x \neq \frac{k\pi}{2} \Rightarrow T = \frac{\pi}{2}$$

توابع صعودی و نزولی:

نکته: هرگاه برای هر x_1 و x_2 از D_f داشته باشیم:

$$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \rightarrow \text{صعودی}$$

$$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \rightarrow \text{نزولی}$$

$$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2) \rightarrow \text{اکیدا صعودی}$$

$$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2) \rightarrow \text{اکیدا نزولی}$$

نکته:

(۱) اگر f صعودی و g نزولی باشد، $f - g$ صعودی است.

(۲) اگر f و g هر دو صعودی باشند، $f + g$ صعودی است.

(۳) اگر f و g هر دو نزولی باشند، $f + g$ نزولی است.

(۴) اگر f اکیدا صعودی و g صعودی باشد، $f + g$ اکیدا صعودی است.



جمع بندی کنکوری تابع

الورتبه



نکته: تابع ثابت روی دامنه خود هم صعودی و هم نزولی است.

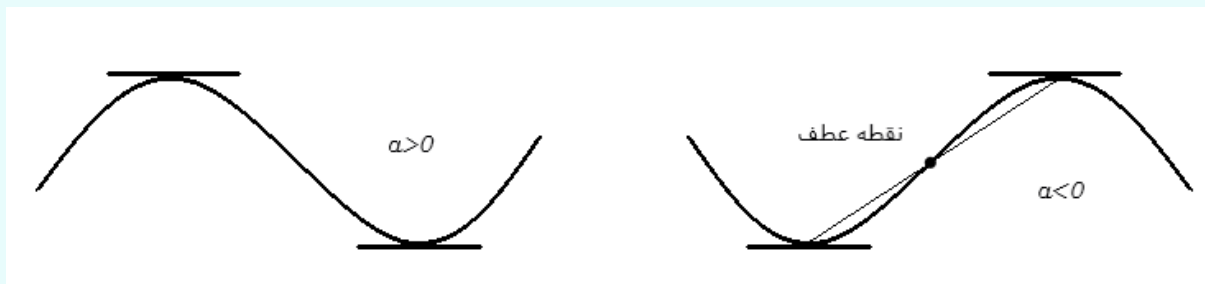
هرگاه تابع f روی دامنه اش صعودی یا نزولی باشد می‌گوییم یکنواست. هر گاه تابع f روی دامنه اش صعودی اکید یا نزولی اکید باشد می‌گوییم اکیداً یکنواست.

نمودار تابع درجه سوم:

تابع درجه سوم به شکل کلی به صورت $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) نمایش داده می‌شود که مشتق مرتبه اول آن به شکل $y' = 3ax^2 + 2bx + c$ می‌باشد که دارای Δ می‌باشد که بر اساس آن سه حالت زیر به وجود می‌آید:

$$\Delta = (2b)^2 - 4(3a)(c)$$

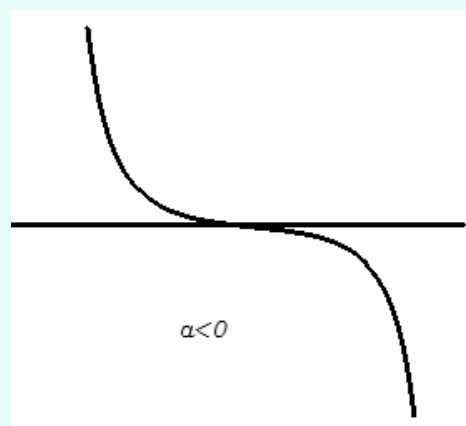
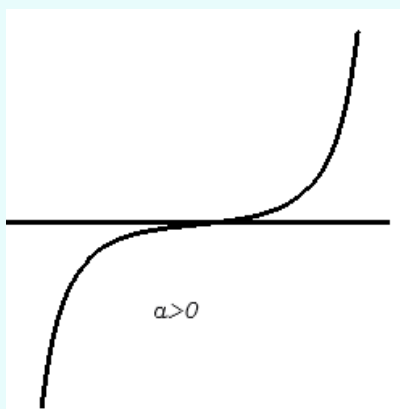
الف) اگر $\Delta > 0$ باشد منحنی تابع درجه سوم دارای یک ماکزیمم و یک مینیمم نسبی است که به شکل زیر است:



نکته: تابع درجه سوم دارای یک و فقط یک نقطه عطف به طول $x = -\frac{b}{3a}$ است که مرکز تقارن آن نیز میباشد.

در این حالت پاره خط واصل بین اکسترمم‌های نسبی تابع از نقطه عطف تابع می‌گذرانند و نقطه عطف وسط این پاره خط است.

ب) اگر $\Delta = 0$ باشد منحنی تابع فاقد اکسترمم نسبی است و در نقطه عطف آن خط مماس بر منحنی تابع افقی است. به همین علت نقطه عطف در این حالت، نقطه بحرانی تابع میشود. در این حالت تابع اکیدا یکنوا خواهد بود:



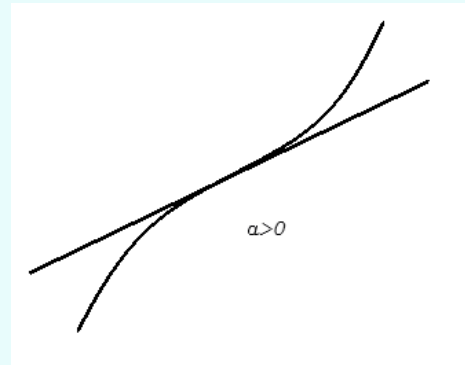
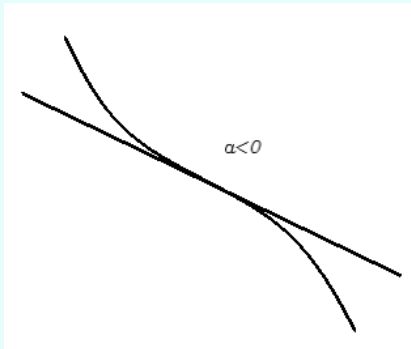


جمع بندی کنکوری تابع

الورته



ج) اگر $\Delta < 0$ باشد تابع در این حالت اکیدا یکنوا خواهد بود و فاقد اکسترمم نسبی میباشد و در این حالت خط مماس بر منحنی تابع، غیر افقی در عطف خواهد بود:



نمودار تابع هموگرافیک:

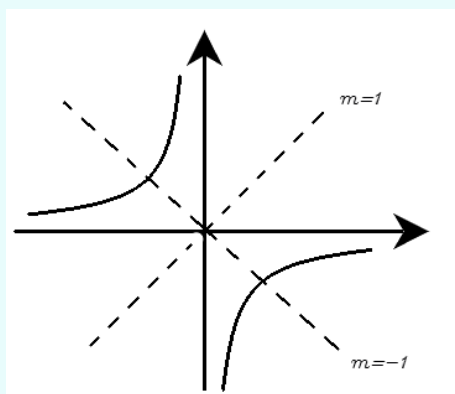
$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \quad c \neq 0$$

نکته: اگر $a + d = 0$ باشد، وارون این تابع خود تابع است.

نکته: اگر $ad - bc = 0$ باشد، تابع ثابت خواهد بود و به یک خط افقی تبدیل می شود که در نقطه $x = -\frac{d}{c}$ توخالی و تعریف نشده است. در این حالت، صورت مضربی از مخرج است.

نکته: تابع هموگرافیک دارای دو محور تقارن به شیب های ± 1 می باشد که هر دو، از نقطه مرکز تقارن تابع عبور می کنند. این دو محور تقارن بر هم عمود هستند.

نکته: برد این تابع به صورت $R = R - \{\frac{a}{c}\}$ است. دامنه این تابع به صورت $D = R - \{-\frac{d}{c}\}$ است.



معکوس تابع $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ به صورت $f(x)^{-1} = \frac{-dx+b}{cx-a}$ است.