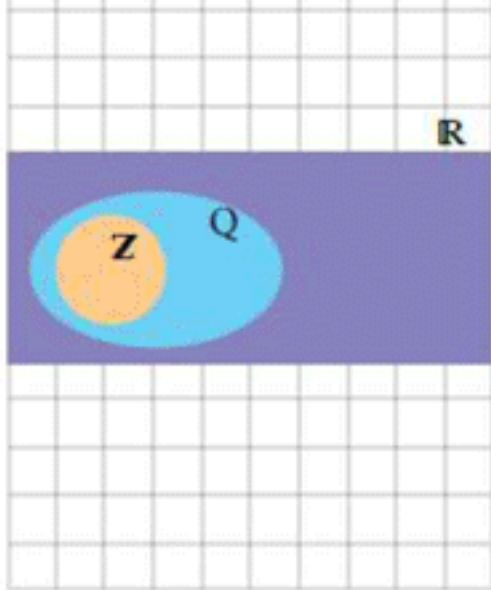


فصل اول



الف) مجموعه $Q-R$ چه نام دارد؟ آن را روی نمودار مقابل هاشور بزنید و دو عضو دلخواه از آن را در ناحیه هاشور خورده بنویسید.

ب) دو عدد گویا مثل بزنید که عدد صحیح نباشند و آنها را روی نمودار مقابل در محل مناسب بنویسید.
پ) مجموعه اعداد صحیح غیر حسابی را با نمایش اعضا بنویسید.

$$Z-W = \{ \quad \quad \quad \}$$

ت) مجموعه $W-N$ چند عضو دارد؟

الف) تهی یا $\{ \}$

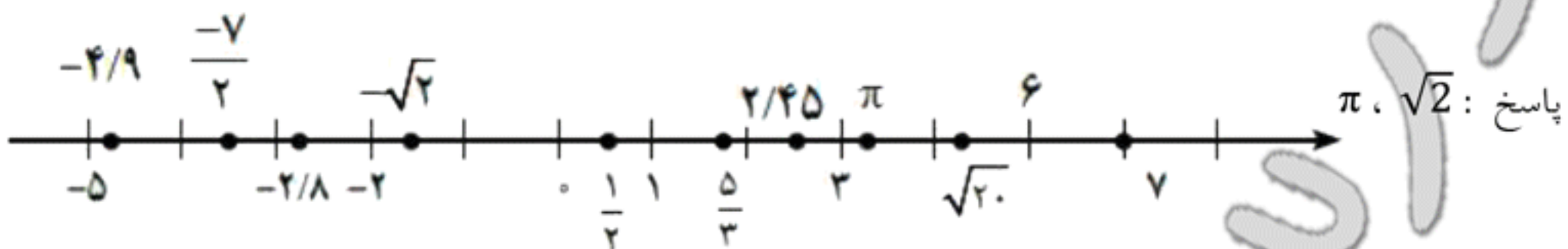
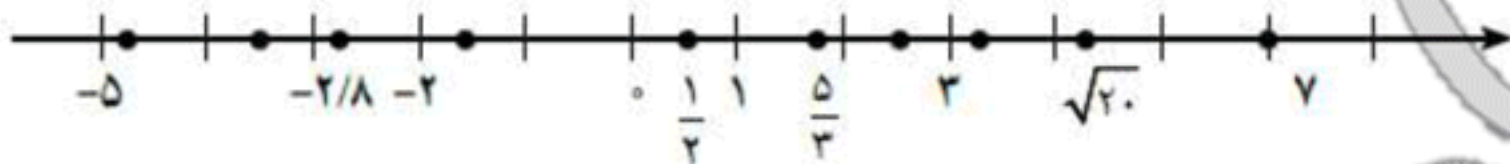
ب) $1/2$ و $2/3$

پ) $Z-W = \{ \dots, -2, -1 \}$

ت) $W-N = \{0\}$

۲- محور زیر را در نظر بگیرید و جای اعداد داده شده را روی آن تعیین نمایید: کدام یک از این شش عدد گنگ هستند؟ زیر آنها خط بکشید

$$2/45, \frac{-7}{2}, 6, -4/9, \pi, -\sqrt{2}$$



تعالی

$a, b \in \mathbb{R}$

اگر a و b دو عدد حقیقی دلخواه باشند، به طوری که $a < b$ آنگاه جدول زیر را کامل کنید:

نوع بازه	بازه	نمایش مجموعه‌ای	نمایش هندسی
باز	(a, b)	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	
بسته	$[a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	
نیم باز	$[a, b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	
نیم باز	$(a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	
مثال	$(1, 5]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 5\}$	
مثال	$[-3, 2)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < 2\}$	

نوع بازه	بازه	نمایش مجموعه‌ای	نمایش هندسی
باز	$(a, +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	
نیم باز	$[a, +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$	
نیم باز	$(-\infty, a]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$	
باز	$(-\infty, a)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$	
باز	$(-\infty, +\infty)$	\mathbb{R}	
نیم باز	$[3, +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$	
باز	$(-\infty, 5)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < 5\}$	

کار در کلاس

۱- درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید:

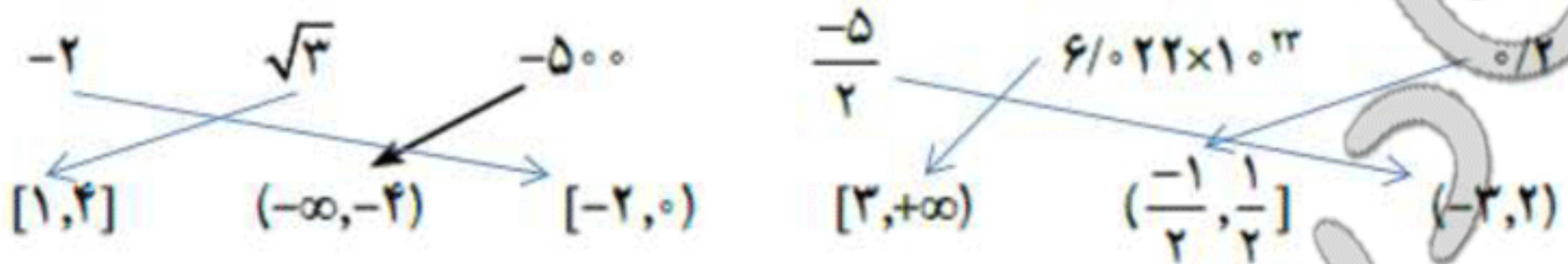
الف) $\frac{4}{3} \in [\frac{1}{2}, 2)$ ✓
 ب) $0 \in (-2, 0)$
 پ) $-2 \in (-2, 0)$

ت) $-2 \in \{-2, 0\}$ ث) $-1 \in \{-2, 0\}$ ج) $[-1, 2] \subset (-1, 2)$

ح) $\{0, 1\} \subset [-1, 2]$ خ) $[2, 5) = (2, 5]$ د) $\sqrt{2} \in (0, 1)$

بغ: ب) غلط، پ) درست، ت) درست، ث) غلط ج) غلط چ) درست، ح) غلط، خ) غلط، د) غلط

۲- هر یک از اعداد زیر عضو یکی از بازه‌های داده شده هستند. هر عدد را به بازه نظیر آن وصل کنید.



فعالیت

فرض کنید A مجموعه اعداد طبیعی کمتر از ۴ و B مجموعه اعداد صحیح کمتر از ۴ باشد.

A = { ۱ و ۲ و ۳ }

B = { ۳ و ۲ و ۱ و ۰ و -۱ و -۲ و -۳ }

الف) این دو مجموعه را با نمایش اعضای آنها مشخص کنید.

ب) A چند عضو دارد؟ **۳ عضو**

پ) درباره تعداد اعضای B چه می‌توان گفت؟ **تعداد اعضای مشخص نیست (شماره عضو دارد)**

الف) متناهی یا نامتناهی بودن هر یک از مجموعه‌های زیر را مشخص کنید. در مورد مجموعه‌های متناهی سعی کنید تعداد تقریبی اعضای هر یک از آنها را بنویسید.

- ۱- مجموعه اعداد اول یک رقمی
- ۲- مجموعه انسان‌های روی زمین
- ۳- مجموعه اعداد طبیعی فرد
- ۴- مجموعه سلول‌های عصبی مغز یک انسان بزرگسال
- ۵- مجموعه تمام دایره‌های به مرکز مبدأ مختصات
- ۶- مجموعه دانش‌آموزان مدرسه شما
- ۷- مجموعه اعداد طبیعی ده رقمی
- ۸- مجموعه درخت‌های جنگل‌های آمازون
- ۹- مجموعه کسرهای مثبت با صورت یک
- ۱۰- مجموعه مضرب‌های طبیعی عدد ۱۰
- ۱۱- بازه (۱ و ۰)
- ۱۲- مجموعه مولکول‌های موجود در یک مول مشخص از آب

ب) دو مجموعه متناهی نام ببرید.

پ) دو مجموعه نامتناهی مثال بزنید که یکی از آنها زیرمجموعه دیگری باشد.

ت) دو مجموعه نامتناهی مثال بزنید که یکی از آنها دقیقاً یک عضو بیشتر از دیگری داشته باشد.

۱) متناهی، ۲) متناهی، ۳) نامتناهی، ۴) نامتناهی، ۵) نامتناهی، ۶) متناهی، ۷) متناهی، ۸) متناهی، ۹)

نامتناهی، ۱۰) نامتناهی، ۱۱) نامتناهی، ۱۲) متناهی

ب) مجموعه اعداد اول و زوج، اعداد طبیعی کمتر از ۱۰

ج) $A = \{2, 3, 4, 5, \dots\} \subset B = \{1, 2, 3, \dots\}$

د) $\{4, 5, 6, \dots\} \subset \{3, 4, 5, 6, \dots\}$

- ۱- فرض کنید A مجموعه تمام مضرب‌های طبیعی عدد ۵ باشد.
 (الف) A را با نمایش اعضای آن بنویسید.
 (ب) A متناهی است یا نامتناهی؟
 (پ) یک زیرمجموعه متناهی از A بنویسید.
 (ت) دو زیرمجموعه نامتناهی مانند C و D از A بنویسید به طوری که $C \subset D$.

(الف) $A = \{5, 10, 15, \dots\}$

(ب) نامتناهی

(پ) $\{5, 10, 15\}$

(ت) $C = \{10, 15, \dots\}$, $D = \{5, 10, 15, \dots\}$

- ۲- متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

(الف) مجموعه اعداد طبیعی

(ب) مجموعه مقسوم علیه‌های مثبت عدد ۳۶

(پ) بازه $(\frac{1}{4}, \frac{1}{3})$

(ت) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x < 2\}$

(ث) مجموعه مضرب‌های طبیعی عدد ۱۰۰

- ۳- دو مجموعه نامتناهی مثال بزنید که اشتراک آنها مجموعه‌ای متناهی باشد.

(الف) $\dots, 1, 3, 5, \dots$, $\dots, 2, 4, 6, \dots$

$A = \{2, 4, 6, \dots\}$, $B = \{1, 3, 5, \dots\}$ که اشتراکشان تهی است.

- ۴- حاصل هر یک از مجموعه‌های زیر را با رسم بازه‌های آنها روی یک محور به دست

آورید:

محورهای مربعی مرتب (۴):

(الف) $(-3, 0) \cup (-2, 5)$

(ب) $(3, +\infty) \cup (6, 10)$

(الف) $(-3, 5]$, (ب) $(2, 6]$, (ج) $(3, 10]$, (ت) $\{\}$

- ۵- مجموعه $\mathbb{R} - \{3\}$ را روی محور نشان دهید و سپس آن را به صورت اجتماع دو بازه

بنویسید.

$(-\infty, 3) \cup (3, \infty)$

- ۶- اگر $A \subset B$ و B مجموعه‌ی متناهی باشد آنگاه A متناهی خواهد بود یا نامتناهی؟

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$

۱- اگر U مجموعه شامل تمام استان‌های کشورمان باشد و A مجموعه استان‌های غیر ساحلی، آنگاه A' را با نمایش اعضای آن بنویسید.

متمم $A =$ استانهای ساحلی

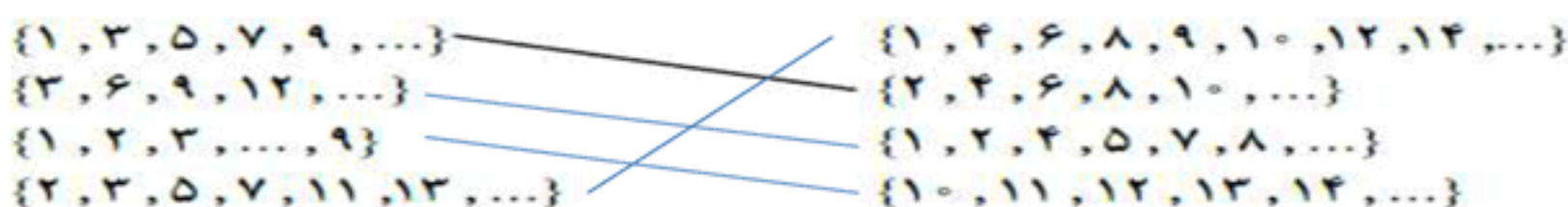
۲- فرض کنیم U مجموعه تمام اتومبیل‌های پلاک‌گذاری شده کشور باشد و B مجموعه اتومبیل‌های با پلاک فرد. در این صورت A' چه مجموعه‌ای خواهد بود؟

ماشینهای با پلاک زوج

۳- اگر \mathbb{R} را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیریم، متمم مجموعه اعداد گویا چه مجموعه‌ای است؟

$$R-Q=Q'$$

۴- با فرض آنکه \mathbb{N} مجموعه مرجع باشد، هر مجموعه را به متمم خودش وصل کنید.



۵- U مجموعه مرجع و A زیرمجموعه دلخواهی از آن می باشد طرف دوم تساوی‌های زیر را بنویسید.

$$\emptyset' = \quad U' = \quad A \cup A' = \quad A \cap A' =$$

آیا این روابط همیشه درست هستند؟ توضیح دهید.

از راست به چپ : تهی ، U ، تهی ، U

۶-

الف) اگر Z را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیریم آنگاه N' را با نوشتن اعضای آن مشخص کنید.

ب) اگر \mathbb{R} را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیریم در این صورت N' را روی محور نمایش دهید.

الف) $(-\infty, 1)$



۷- جمعیت در سن کار یک کشور را به عنوان مجموعه مرجع یعنی U در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم A نشان دهنده مجموعه افراد شاغل این کشور باشد. در این صورت A' برابر مجموعه

افراد آن کشور و نسبت $\frac{n(A')}{n(U)}$ بیانگر نرخ آن کشور خواهد بود.

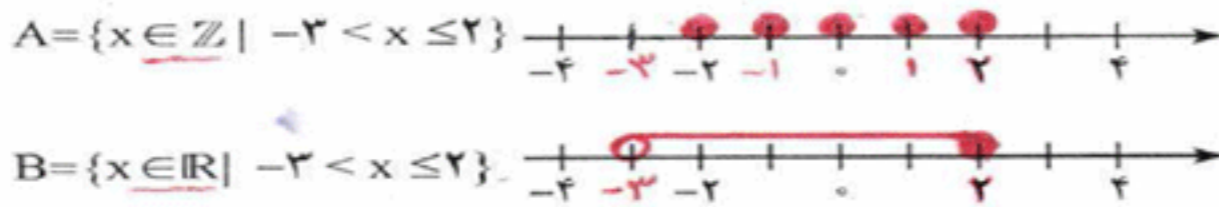
بیکار - بیکاری

۸- فرض کنیم $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ مجموعه مرجع باشد و $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{2, 4\}$. جدول‌های زیر را کامل کنید.

$$A' = \{4, 5\}, B' = \{1, 3, 5\}, A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}, (A \cup B)' = \{5\}, A' \cap B' = \{5\}$$

$$A - B = \{1, 3\}, (A \cap B) = \{2\}, (A \cap B)' = \{1, 3, 4, 5\}, A' \cup B' = \{1, 3, 4, 5\}, A \cap B' = \{1, 3\}$$

الف) دو مجموعه زیر را در نظر بگیرید و اعضای هر یک را روی محور نشان دهید.



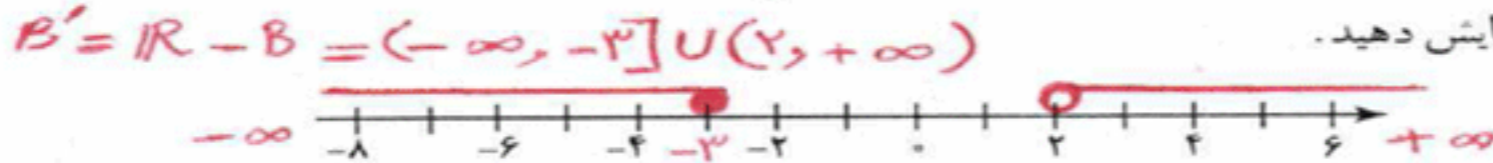
ب) A را با نمایش اعضا و B را به صورت یک بازه بنویسید.

$A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$
 $B = (-3, 2]$

پ) در مورد A، اگر مجموعه مرجع را Z در نظر بگیریم، A' را مشخص کنید.

$A' = Z - A = \{\dots, -4, -3, 3, 4, \dots\}$

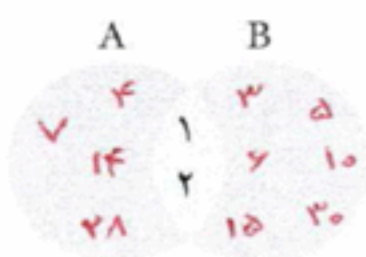
ت) در مورد B با فرض این که IR مجموعه مرجع باشد، B' را مشخص کنید و آن را روی محور نمایش دهید.



ب) جدول زیر را کامل کنید.

n(A)	n(B)	n(A ∩ B)	n(A ∪ B)
6	8	2	12

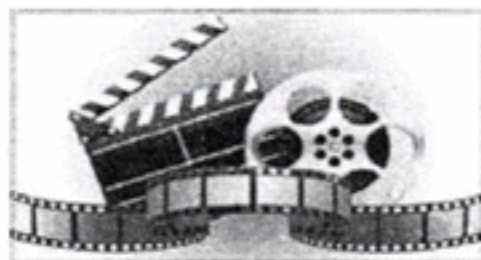
ب) چرا رابطه‌ای را که در فعالیت (۱) به دست آوردید؛ یعنی $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ این مثال برقرار نیست؟



چون مجموعه‌های A و B عضو مشترک دارند، یعنی $A \cap B \neq \emptyset$

ت) با تکمیل نمودار مقابل، سعی کنید رابطه درست برای $n(A \cup B)$ را حدس بزنید.

کاردرکلاس

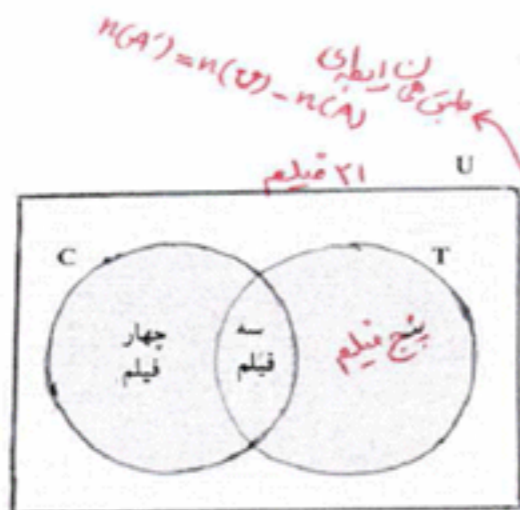


۱) یک دوره جشنواره فیلم کوتاه با شرکت ۲۱ فیلم در موضوعات مختلف در حال برگزاری است که در بین آنها ۷ فیلم بویانمایی (کارتونی) و ۸ فیلم طنز وجود دارد، به طوری که ۳ تا از فیلم‌های بویانمایی با مضمون طنز می‌باشند. مطلوب است تعداد کل فیلم‌هایی که:

(الف) بویانمایی یا طنزند.

(ب) غیر بویانمایی و غیر طنزند.

روش اول حل: مجموعه شامل تمام فیلم‌ها را با U، مجموعه فیلم‌های بویانمایی را با C و مجموعه فیلم‌های طنز را با T نشان می‌دهیم. جاهای خالی را پر کنید و جواب‌ها را بیابید.



الف) $n(C \cup T) = n(C) + n(T) - n(C \cap T) = 7 + 8 - 3 = 12$

ب) $n(C \cup T)' = n(U) - n(C \cup T) = 21 - 12 = 9$

روش دوم حل: در نمودار وین مقابل، دو مجموعه C و T سطح درون U را به چهار ناحیه جداگانه تقسیم کرده‌اند که عدد مربوط به دوتا از نواحی نوشته شده است. با نوشتن اعداد مربوط به دو قسمت دیگر، جواب قسمت‌های (الف) و (ب) را بیابید.

الف) $12 = 4 + 3 + 5$ (بویانمایی یا طنز)

ب) $9 = 21 - 12$ (غیر بویانمایی و غیر طنز)

۲- در یک کلاس ۲۵ نفری، تعداد ۱۵ نفر عضو تیم فوتبال و ۱۱ نفر عضو تیم بسکتبال کلاس هستند.

اگر ۵ نفر از دانش‌آموزان این کلاس عضو هیچ یک از این دو تیم نباشند، مشخص کنید چند نفر از آنها عضو هر دو تیم هستند.

عضو هر دو تیم $15 + 11 + 5 = 31$, $31 - 25 = 6$

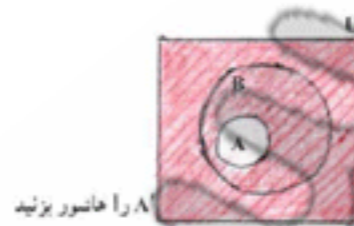
۳) الف) فرض کنیم $A \subseteq B \subseteq U$ که در آن U مجموعه مرجع است. در نمودارهای مقابل

A' و B' را مشخص کنید و سپس تعیین کنید که آیا بین A' و B' هم رابطه زیر مجموعه بودن برقرار است؟ چگونه؟

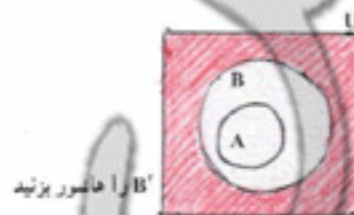
$A \subseteq B \Rightarrow B' \subseteq A'$

ب) اگر $U = \{a, b, c, d, e\}$ مجموعه مرجع باشد و $A = \{a, b\}$ و $B = \{a, b, c\}$ ، در این صورت $A \subseteq B$ می‌باشد. با به دست آوردن A' و B' نشان دهید که بین A' و B' هم رابطه زیرمجموعه بودن برقرار است.

$A' = U - A = \{c, d, e\} \Rightarrow B' \subseteq A'$
 $B' = U - B = \{d, e\}$



A را هاشور بزنید



B' را هاشور بزنید



(الف) (۱)



(ب) (۱)



(ج) (۱)



(د) (۱)

(۲) الف) مجموعه اعداد زوج

(ب) $\{5,6,7,\dots\}$

(پ) $\{1,2\}$

۴- اگر $n(A) = 15$ ، $n(A \cap B) = 5$ و $n(A \cup B) = 30$ آنگاه $n(B)$ را محاسبه کنید.

$$30 = 15 + n(B) - 5$$

$$n(B) = 20$$

(۴) الف) $60 + 40 - 20 = 80$

(ب) $n(A-B) = 40$

(ج) $n(B-A) = 20$

(د) 20

(۵) الف) $14 - 5 = 9$

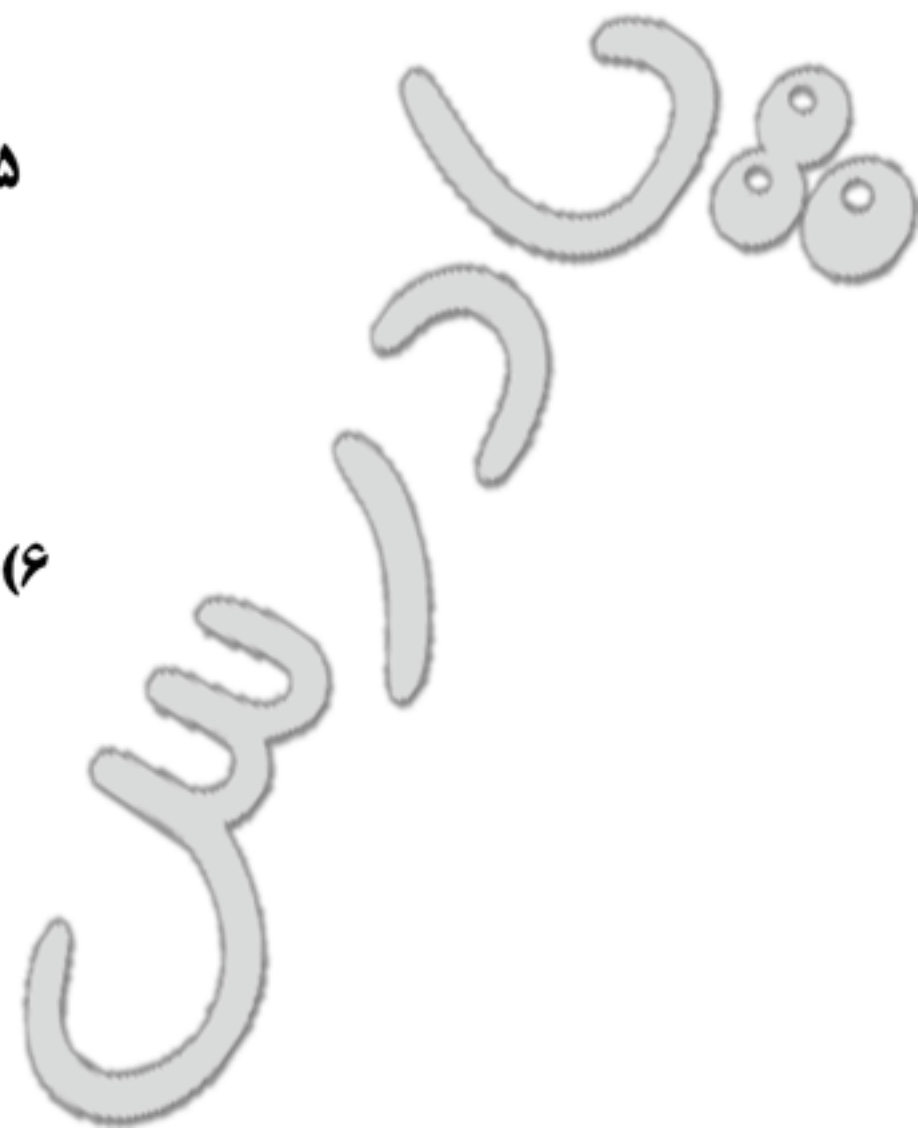
(ب) $31 - 28 = 3$

(۶) الف) $70 + 57 - 32 = 95$

(ب) $70 - 32 = 38$

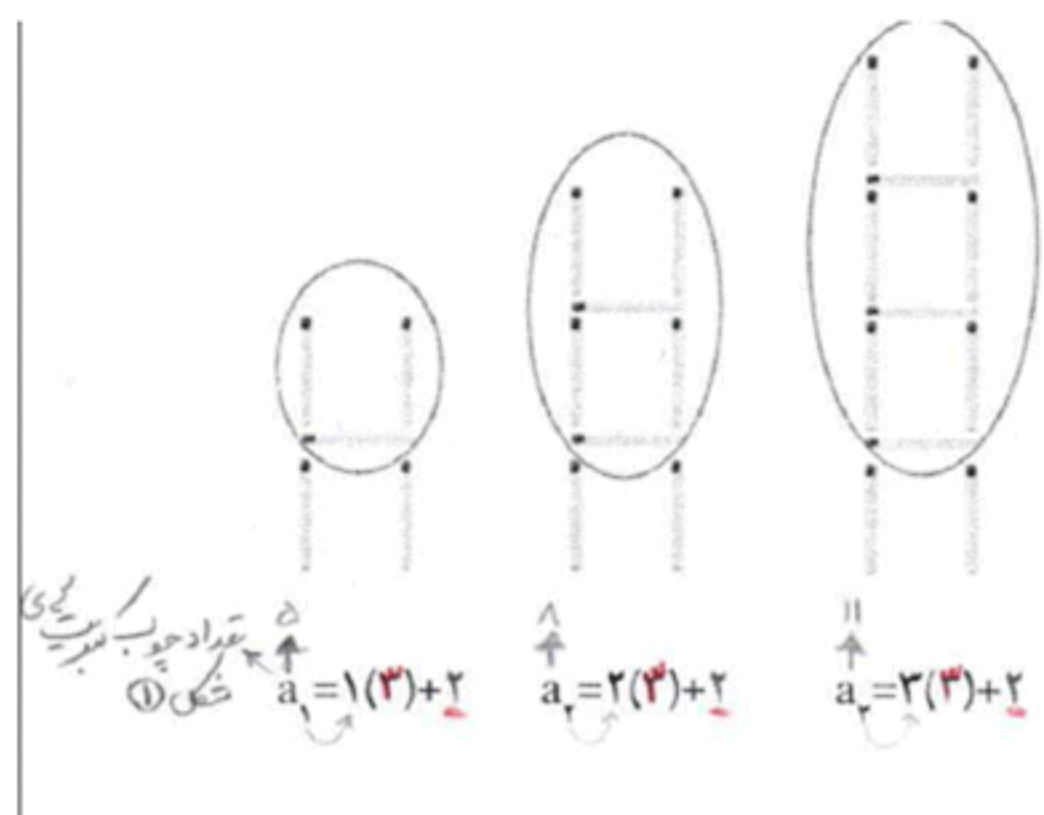
(پ) $(70 - 32) + (57 - 32) = 38 + 25 = 63$

(ت) $110 - 95 = 15$

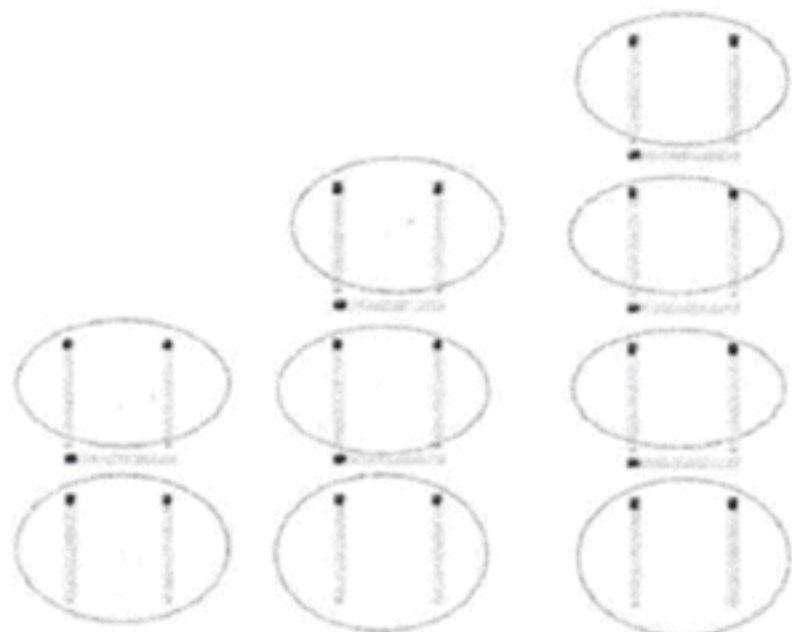


تعمیم

۱ آیدا برای به دست آوردن حاصل a_n در مثال بالا، شکل های الگورا به صورت روبه رو در نظر گرفت. به کمک این روش، مقدار a_n و a_{10} را به دست آورید.



۲ آیساروش دیگری را به کار برد. او تعداد چوب کبریت های افقی و عمودی در هر شکل را به طور جداگانه مورد توجه قرار داد تا بتواند به مقدار a_n دست یابد. مقدار حاصل برای a_n از این روش را در جای مشخص شده بنویسید.



چوب های عمودی چوب های افقی

$$a_1 = 1 + 2(2) \quad a_2 = 2 + 2(2) \quad a_3 = 3 + 2(2) \quad a_4 = 4 + 2(2) \quad \dots \quad a_n = n + (n+1)2$$

۳ آیا شما راه دیگری را برای به دست آوردن حاصل a_n می دانید؟ جواب در بالای صفحه

۴ همان طور که در قسمت های (۱) و (۲) دیدیم، آیدا و آیساروش مقدار a_n را به ترتیب به صورت های $a_n = 3n + 2$ و $a_n = n + (n+1)2$ به دست آوردند. جواب آیساروش ساده کنید تا به شکل جواب آیدا درآید.

همان جواب آیدا $a_n = 3n + 2$ است

$$a_n = n + 2n + 2 \Rightarrow a_n = 3n + 2$$

۵ به کمک رابطه $a_n = 3n + 2$ تعداد چوب کبریت های شکل بیستم را بیابید.

$$n = 10 \Rightarrow a_{10} = 3(10) + 2 = 32 \Rightarrow a_{10} = 32$$

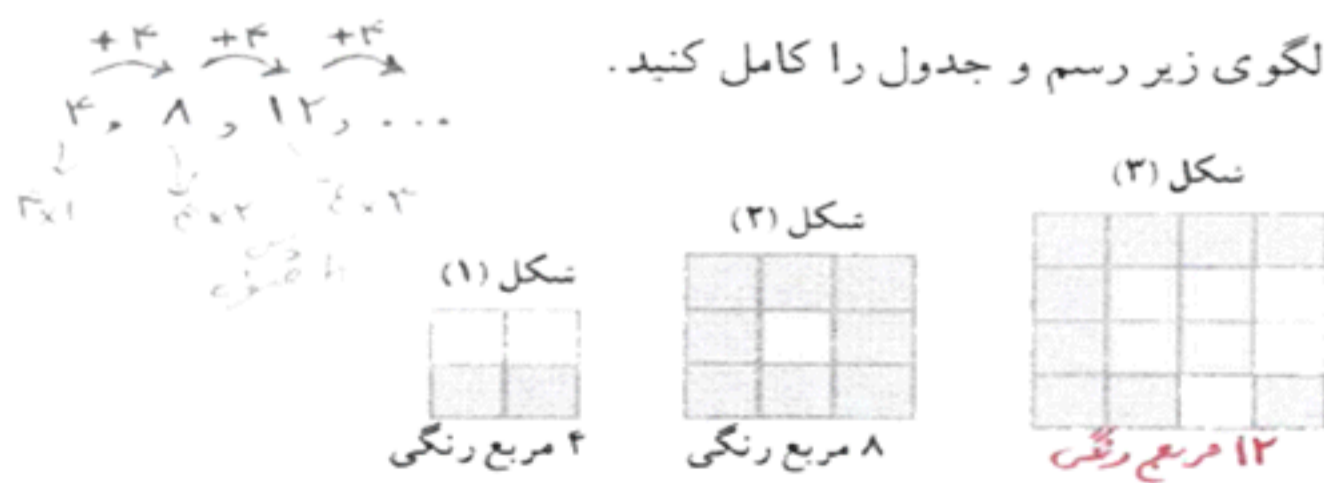
۶ با استفاده از رابطه $a_n = 3n + 2$ مشخص کنید که چندمین شکل در الگوی بالا دارای ۷۷ قطعه چوب کبریت است.

$$a_n = 3n + 2 \Rightarrow 77 = 3n + 2 \Rightarrow 3n = 77 - 2 \Rightarrow 3n = 75 \Rightarrow n = \frac{75}{3} = 25 \Rightarrow n = 25$$

تذکر: در مثال بالا دیدیم که a_n بیانگر تعداد چوب کبریت های شکل n ام است. $a_n = 3n + 2$ را جمله عمومی الگو می نامیم؛ چرا که این رابطه در واقع ساختار جملات الگو را مشخص می کند و به کمک آن می توان مقدار هر جمله از الگو را به دست آورد. به عبارت دیگر، در اختیار داشتن جمله عمومی یک الگو به معنای آگاهی داشتن از تمام جملات آن الگو است.

تعمیر کلاس

۱ شکل بعدی را در الگوی زیر رسم و جدول را کامل کنید.



شماره شکل: n	۱	۲	۳	۴	۵
تعداد مربع های رنگی: b_n	۴	۸	۱۲	۱۶	۲۰
رابطه بین n و b_n	$b_1 = 4$	$b_2 = 8$	$b_3 = 12$	$b_4 = 16$	$b_5 = 20$

۲ توضیح دهید که چرا این الگو یک الگوی خطی محسوب می شود. چون اختلاف هر دو جمله متوالی در آن عددی ثابت است.

۳ با توجه به میزان افزایش جملات الگو، مقدار a در رابطه $b_n = an + h$ را بیابید و پس از

حذف h مقدار a حاصل b_n را به دست آورید. اختلاف هر دو جمله متوالی برابر ۴ است پس $a = 4$

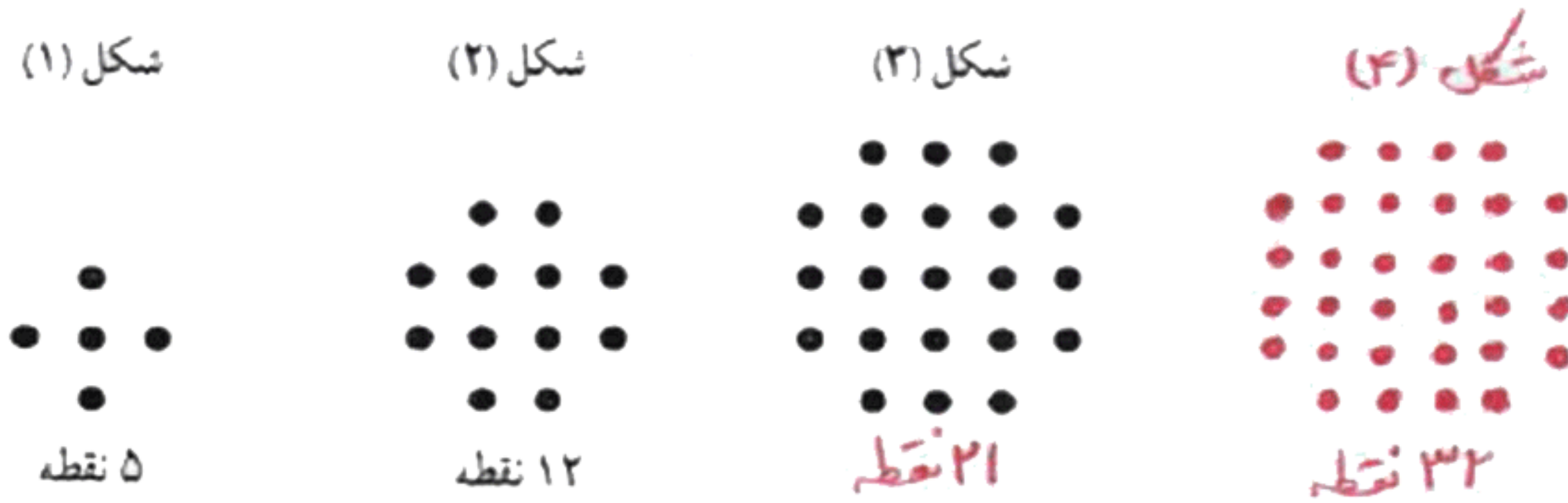
۴ شکل شماره ۲۵۰ دارای چند مربع رنگی است؟ $b_n = 4n + h \Rightarrow b_{250} = 4 \cdot 250 + h = 1000 + h$

۵ در چه مرحله ای از الگوی بالا، تعداد مربع های رنگی برابر ۱۴۴ است؟

$$b_n = 4n \Rightarrow 144 = 4n \Rightarrow n = \frac{144}{4} = 36 \Rightarrow n = 36$$

معنی در مرحله و شکل ۳۶م تعداد مربع های رنگی برابر ۱۴۴ می شود

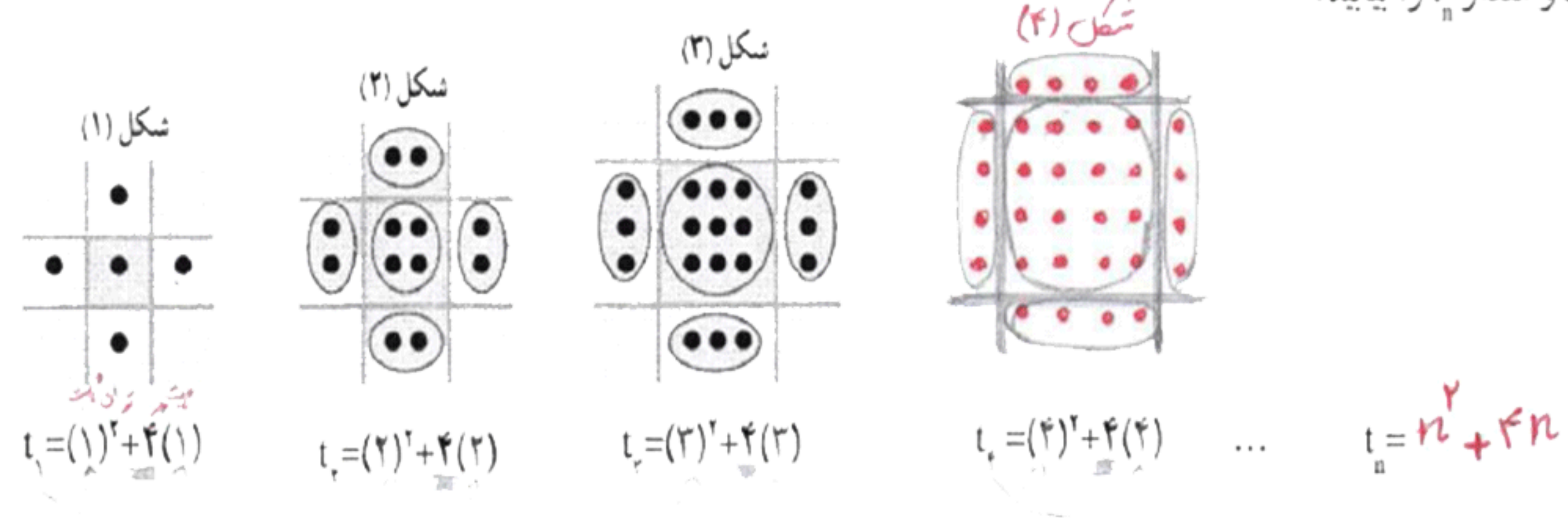
۱ در الگوی زیر، شکل بعدی را رسم کنید و جدول را کامل نمایید.



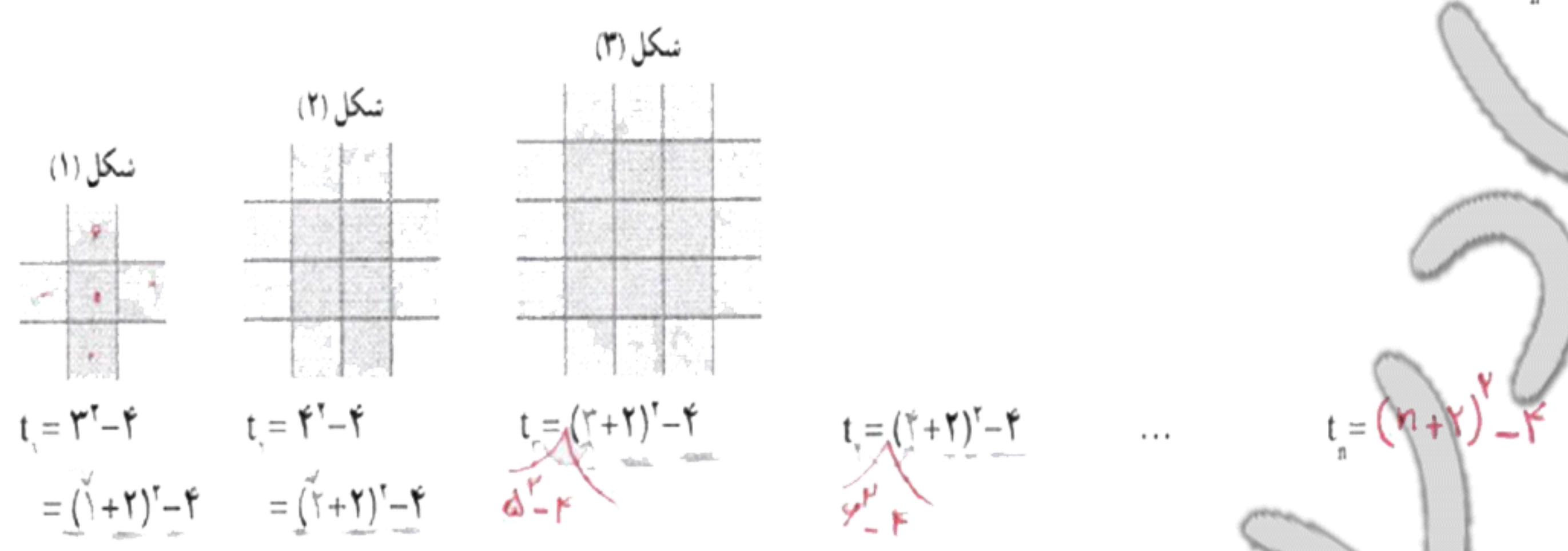
شماره شکل : n	۱	۲	۳	۴	۵
تعداد نقطه ها : t_n	۵	۱۲	۲۱	۳۲	...
رابطه بین n و t_n	$t_1=5$	$t_2=12$	$t_3=21$	$t_4=32$...

۲ آیا این الگوی یک الگوی خطی است؟ چرا؟ **خیر - چون اختلاف هر دو جمله ی متوالی در آن، عددی ثابت نیست.**

۳ امیررضا برای یافتن جمله عمومی این الگو، مجموعه نقاط هر شکل را به صورت زیر دسته بندی کرد. از شکل های امیررضا کمک بگیرید و مقدار t_n را بیابید.



۴ امیرمحمد نگاه دیگری به مسئله داشت. او برای هر شکل این الگو، شکل دیگری را به صورت زیر نظیر کرد. با استفاده از این شکل ها مقدار t_n را بنویسید.



۵ نشان دهید که دو مقدار به دست آمده برای t_n در دو قسمت قبلی، برابرند. **آه امیرمحمدی جواب امیرمحمد**
 $t_n = (n+2)^2 - 4 = n^2 + 4n + 4 - 4 \Rightarrow t_n = n^2 + 4n \rightarrow$ **نه امیررضا اینست**

۱ دو دنباله دلخواه مثال بنویسید. $2, 4, 6, 8, \dots$ و $1, 7, 13, 19, \dots$

۲ جمله عمومی چند دنباله داده شده است. در هر مورد، جاهای خالی را پر کنید.

الف) $a_n = n^2 - 1$: $0, 3, 8, 15, 24$

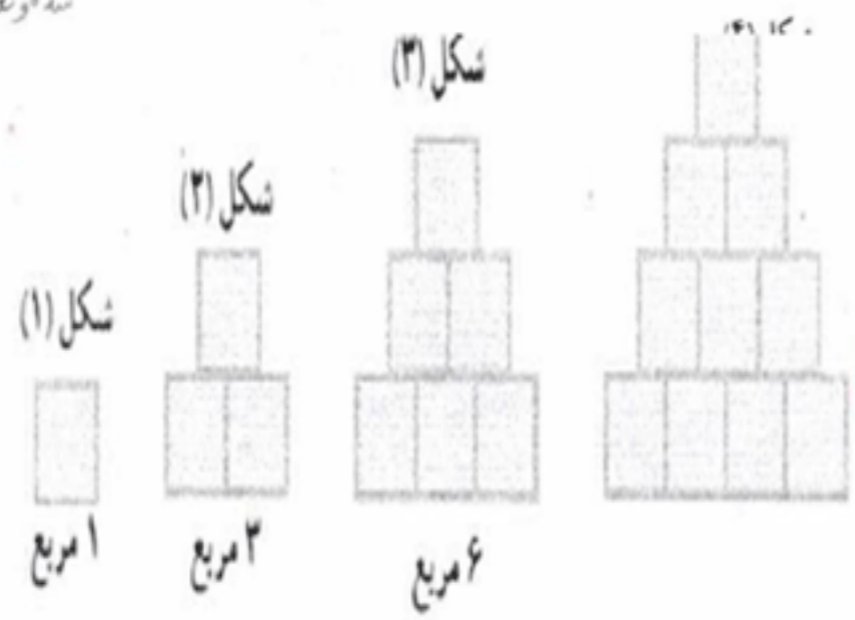
ب) $b_n = -n + 4$: $3, 2, 1, 0, -1, -2$

ج) $c_n = -12 + 2n$: $-11, -9, -7, -5, -3$

۳ در هر سطر از جدول زیر یک دنباله آمده است. در هر مورد سه جمله بعدی را بنویسید. همچنین در پنج مورد اول سعی کنید جمله عمومی دنباله را نیز حدس بزنید.

t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	...	t_n	...
-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	...	-n	...
1	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{7}$	$\sqrt{9} = 3$	$\sqrt{11}$	$\sqrt{13}$...	$\sqrt{2n-1}$...
1	4	9	16	25	36	49	...	n^2	...
0/1	0/01	0/001	0/0001	0/00001	0/000001	0/0000001	...	$(\frac{1}{10})^n$...
-1	8	-27	64	-125	216	-343	...	$(-1)^n (n^3)$...
5	18	31	44	57	70	83	...	$13n - 8$...
-2	1	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{-1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{-1}{32}$...	$(-1)^n \times 2^{2-n}$...
1	2	4	7	11	16	23
3	1	2	1	5	1	4	1
1	1	2	3	5	8	13	21
2	3	5	7	11	13	17
2	3	5	7	9	11	13

۴ الگوی مقابل را در نظر بگیرید.

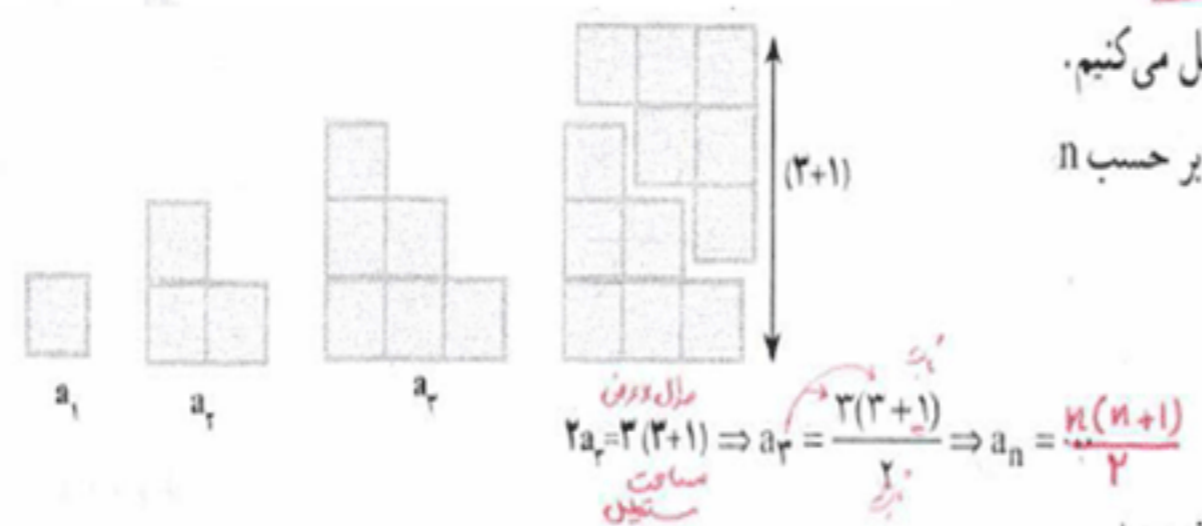


الف) تعداد مربع ها در الگو را به صورت یک دنباله نا جمله ششم آن بنویسید. $1, 3, 6, 10, 15, 21, \dots$ (دنباله مثلثی)

ب) آیا دنباله حاصل یک دنباله خطی است؟ چرا؟ **چون اختلاف**

هر دو جمله متوالی آن، عددی ثابت نیست.

ب) شکل های الگوی بالا را به صورت مقابل تبدیل می کنیم. با دقت در تصویر مقابل سعی کنید حاصل a_n را بر حسب n به دست آورید.



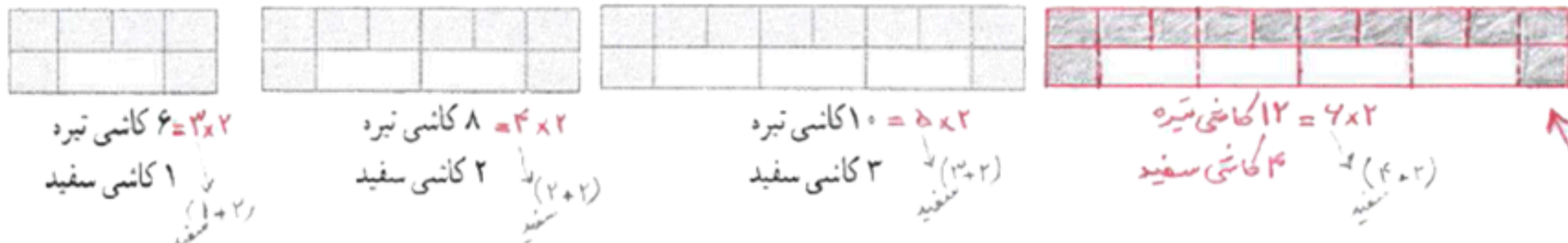
$2a_3 = 3(3+1) \Rightarrow a_3 = \frac{3(3+1)}{2} \Rightarrow a_n = \frac{n(n+1)}{2}$

ت) به کمک مرحله قبل حاصل عبارت زیر را بنویسید.

$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
 همان جمله n ام رطبی قبل

تهیه کننده: گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه استان خوزستان

۱ به الگوی زیر توجه کنید.



الف) شکل بعدی را رسم کنید و تعداد کاشی های تیره آن را مشخص کنید.

ب) تعداد کاشی های تیره در هر مرحله را به صورت یک دنباله تا جمله هفتم آن بنویسید. $6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, \dots$

پ) اگر n تعداد کاشی های سفید و t_n تعداد کاشی های تیره باشد، مقدار t_n را بر حسب n بنویسید.

$t_n = (n+2)(2)$ تعداد تیره ها
مقدار سفید ها

ت) برای ۱۰۰ کاشی سفید، چند کاشی تیره لازم است؟ $t_{100} = (100+2)(2) = 204$

ث) آیا در این الگو شکلی وجود دارد که شامل ۵۰ کاشی تیره باشد؟ اگر هست، تعداد کاشی های سفید آن چند است؟ 23

۲ الگوی زیر را در نظر بگیرید. $t_n = (n+2)(2) \rightarrow 50 = 2n+4 \rightarrow 2n = 46 \rightarrow n = 23$



$a_1 = 1+0 = 1^2 + (1 \times 0)$
 $a_2 = 6 = 2^2 + (2 \times 2)$
 $a_3 = 15 = 3^2 + (3 \times 3)$
 $a_4 = 28 = 4^2 + (4 \times 4)$
 $a_5 = 45 = 5^2 + (5 \times 5)$

الف) شکل بعدی را رسم کنید، سپس تعداد نقاط هر مرحله را به صورت یک دنباله تا جمله ششم آن بنویسید. $1, 6, 15, 28, 45, 66, \dots$

ب) جمله عمومی الگو را بیابید. $a_n = n^2 + (n-1)n$ ساده شده شش

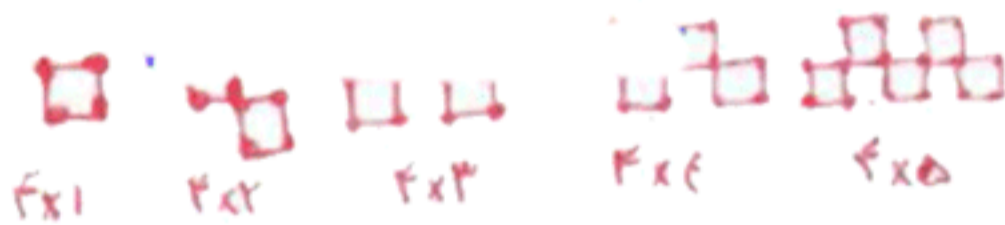
پ) شکل دهم در این الگو چند نقطه دارد؟ $a_{10} = 10^2 + (10-1)(10) = 190$

۳ جمله عمومی چند دنباله داده شده است. در هر مورد چهار جمله اول دنباله را بنویسید و سپس به هر یک از آنها یک الگوی هندسی

نظیر کنید. (جواب در بالای صفحه)

- الف) $a_n = 4n$
- ب) $b_n = 3n+1$
- پ) $c_n = n^2+2$
- ت) $d_n = n^2+n$ $\frac{n(n+1)}{2}$

الف) $4, 8, 12, 16, 20, \dots$



ب) $4, 7, 10, 13, \dots$



پ) $3, 6, 11, 18, \dots$



ت) $2, 6, 12, 20, \dots$

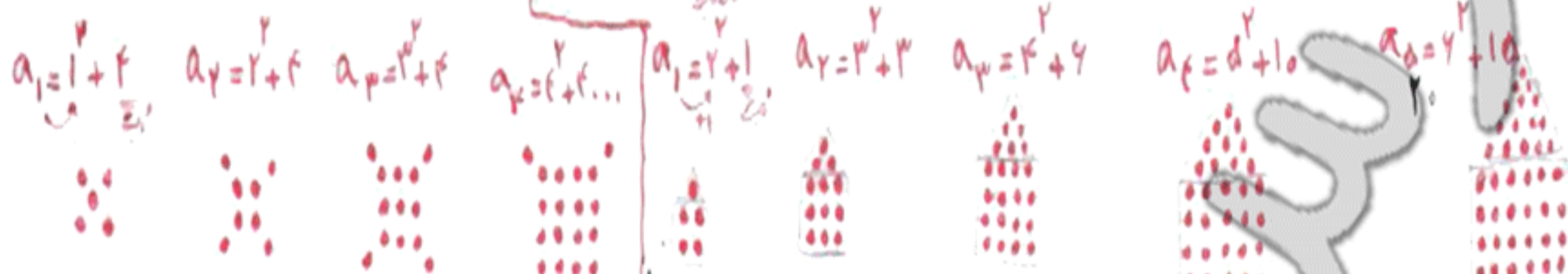


۴ برای دنباله های درجه دو زیر، یک الگوی هندسی نظیر کنید و به کمک آن جمله عمومی هر دنباله را بیابید.

الف) $5, 8, 13, 20, 29, \dots$

ب) $5, 12, 22, 35, 51, \dots$

با در نظر گرفتن $\frac{n(n+1)}{2}$ و $\frac{n(n+1)}{2}$ است



$a_n = n^2 + 4$

$b_n = (n+1)^2 + \frac{n(n+1)}{2}$



الف) یک دنباله حسابی با قدرنسبت مثبت مثال بزنید که جمله چهارم آن 10° باشد.

ب) یک دنباله حسابی با قدرنسبت منفی مثال بزنید که جمله چهارم آن 10° باشد.

پ) دنباله‌ای حسابی مثال بزنید که تنها سه جمله مثبت داشته باشد و سایر جملات آن منفی باشند.

الف) $4, 6, 8, 10, \dots$

ب) $16, 14, 12, 10, \dots$

پ) $4, 2, 0, \dots$

۳ الف) بین 18 و 62 سه عدد را چنان قرار دهید که پنج عدد حاصل تشکیل دنباله حسابی بدهند. در این حالت می‌گوییم بین 18 و 62 سه واسطه حسابی درج کرده‌ایم.
حل: با فرض اینکه 18 جمله اول باشد، قدرنسبت را به دست آورید و جدول را کامل کنید.

$$\begin{cases} t_1 = 18 \\ t_5 = 62 \end{cases} \Rightarrow t_1 + 4d = 62 \Rightarrow d = 11$$

$4d = 62 - 18$

t_1	$\xrightarrow{+11}$	$\xrightarrow{+11}$	$\xrightarrow{+11}$	$\xrightarrow{+11}$	t_5
18		29	40	51	62

ب) بین 20 و 80 به تعداد مشخص شده در هر مورد واسطه حسابی درج کنید.

$t_3 = t_1 + 2d \rightarrow 80 = 20 + 2d \rightarrow 2d = 60 \rightarrow d = 30$

t_1	t_3
20	80

$t_5 = t_1 + 4d \rightarrow 80 = 20 + 4d \rightarrow 4d = 60 \rightarrow d = 15$

t_1	t_5
20	80

$t_7 = t_1 + 6d \rightarrow 80 = 20 + 6d \rightarrow 6d = 60 \rightarrow d = 10$

t_1	t_7
20	80

$t_9 = t_1 + 8d \rightarrow 80 = 20 + 8d \rightarrow 8d = 60 \rightarrow d = 7.5$

t_1	t_9
20	80

$t_{11} = t_1 + 10d \rightarrow 80 = 20 + 10d \rightarrow 10d = 60 \rightarrow d = 6$

t_1	t_{11}
20	80

$t_{13} = t_1 + 12d \rightarrow 80 = 20 + 12d \rightarrow 12d = 60 \rightarrow d = 5$

t_1	t_{13}
20	80

$t_{15} = t_1 + 14d \rightarrow 80 = 20 + 14d \rightarrow 14d = 60 \rightarrow d = 4.28$

t_1	t_{15}
20	80

$t_{17} = t_1 + 16d \rightarrow 80 = 20 + 16d \rightarrow 16d = 60 \rightarrow d = 3.75$

t_1	t_{17}
20	80

$t_{19} = t_1 + 18d \rightarrow 80 = 20 + 18d \rightarrow 18d = 60 \rightarrow d = 3.33$

t_1	t_{19}
20	80

$t_{21} = t_1 + 20d \rightarrow 80 = 20 + 20d \rightarrow 20d = 60 \rightarrow d = 3$

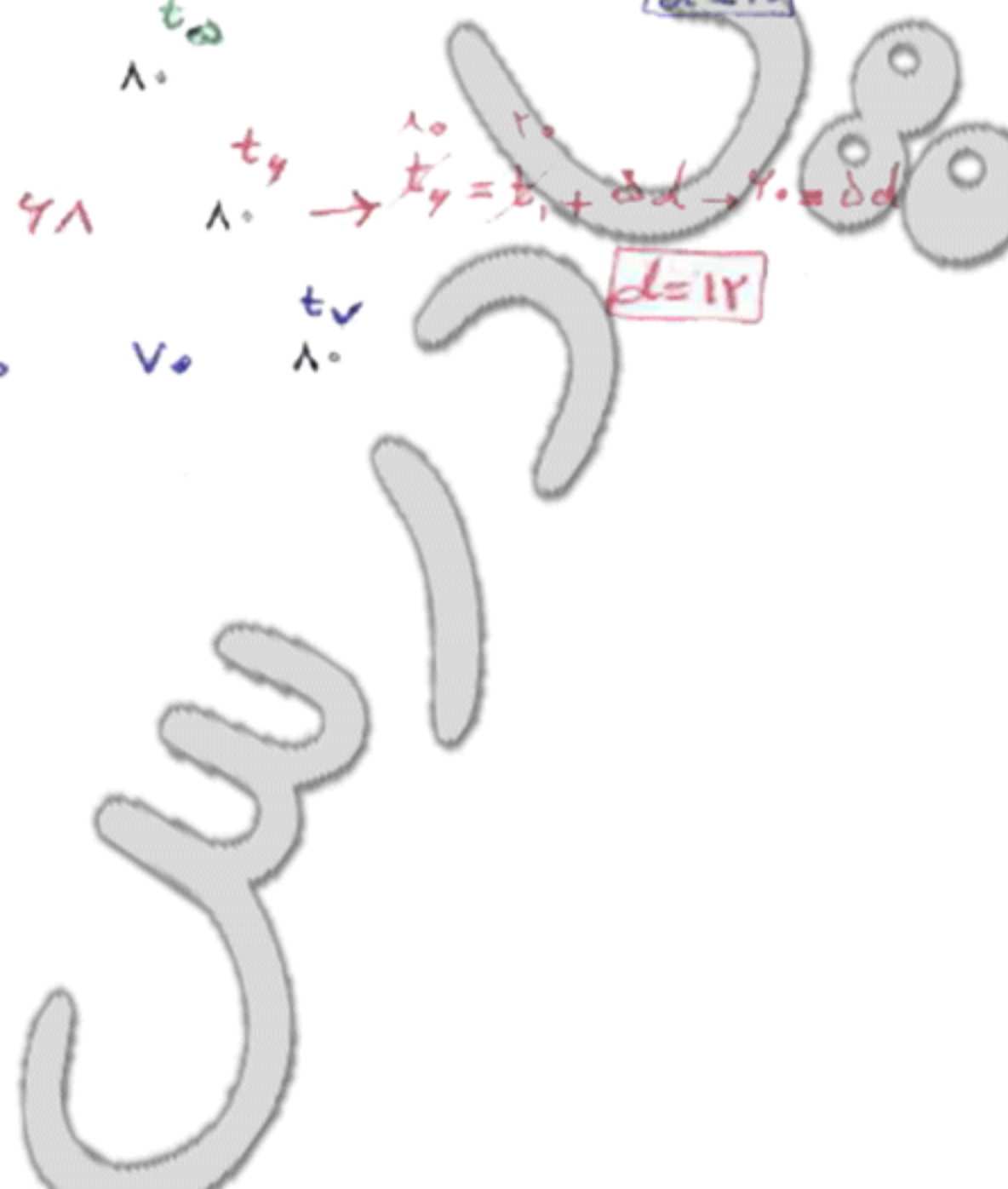
t_1	t_{21}
20	80

$t_{23} = t_1 + 22d \rightarrow 80 = 20 + 22d \rightarrow 22d = 60 \rightarrow d = 2.72$

t_1	t_{23}
20	80

$t_{25} = t_1 + 24d \rightarrow 80 = 20 + 24d \rightarrow 24d = 60 \rightarrow d = 2.5$

t_1	t_{25}
20	80



الف) $t_n = 3 + (n-1) \times 7 \rightarrow t_{11} = 3 + 10 \times 7 = 74$

از بین دنباله های زیر، دنباله های حسابی را مشخص کنید و در هر یک از آنها با تعیین قدرنسبت، جمله بیست و یکم را بیابید.

ب) $a_n = \sqrt{3} + (n-1) \times \sqrt{3} \rightarrow a_{11} = \sqrt{3} + 10 \times \sqrt{3} = 11\sqrt{3}$

ت) $b_n = 10 + (n-1) \times (-3) \rightarrow b_{11} = 10 - 20 = -10$

ث) $c_n = \frac{2}{5} + (n-1) \times (\frac{1}{5}) \rightarrow c_{11} = \frac{2}{5} + \frac{10}{5} = \frac{12}{5}$

ج) $t_n = 2 + (n-1) \times 0 \rightarrow t_{11} = 2 + 0 = 2$

الف) $3, 10, 17, 24, \dots \rightarrow t_1=3, d=7$

ب) $\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}, 4\sqrt{3}, \dots \rightarrow t_1=\sqrt{3}, d=\sqrt{3}$

ت) $\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1, \dots \rightarrow t_1=\frac{2}{5}, d=\frac{1}{5}$

ب) $1, 2, 4, 8, \dots$

ن) $10, 7, 4, 1, \dots \rightarrow t_1=10, d=-3$

ج) $2, 2, 2, 2, \dots \rightarrow t_1=2, d=0$

در یک دنباله حسابی، جملات سوم و هفتم به ترتیب ۲۰ و ۵۶ است. دنباله را مشخص کنید: یعنی با به دست آوردن جمله اول و قدرنسبت، جملات دنباله را بنویسید.

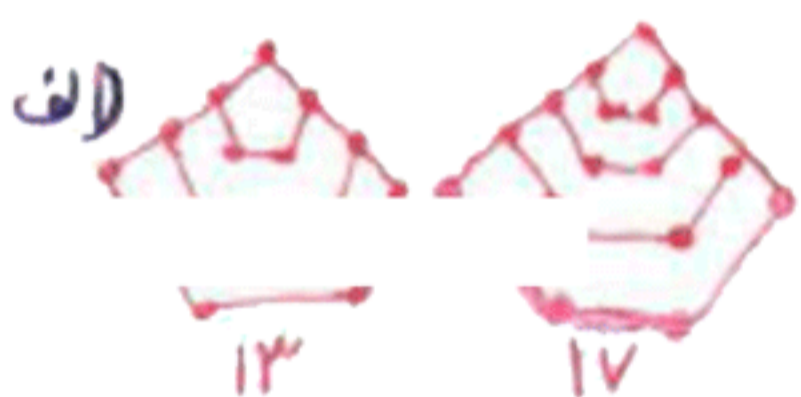
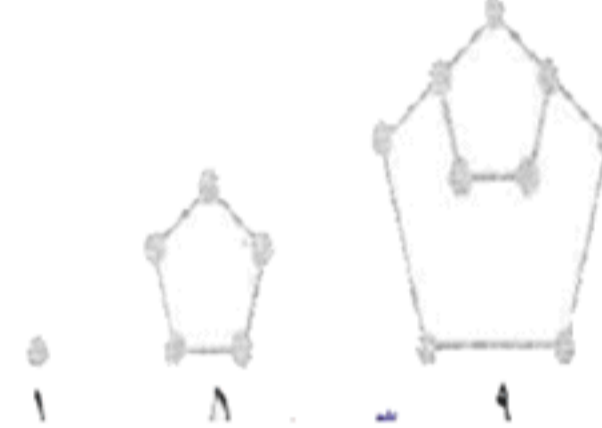
$t_3 = t_1 + 2d = 20$
 $t_7 = t_1 + 6d = 56$
 $t_1 + 2(9) = 20 \rightarrow t_1 = 2$
 $d = 9$

در یک دنباله حسابی، مجموع سه جمله اول ۳ و مجموع سه جمله بعدی آن ۳۹ است. دنباله را مشخص کنید.

$t_1 + t_2 + t_3 = 3 \rightarrow 3t_1 + 3d = 3$
 $t_4 + t_5 + t_6 = 39 \rightarrow 3t_1 + 12d = 39$
 $9d = 34 \rightarrow d = 4$

الف) دو جمله بعدی الگوی مقابل را با رسم شکل بیابید و نوع دنباله را مشخص کنید. ب) جمله عمومی آن را مشخص کنید. پ) جمله چندم این دنباله ۲۹۷ است؟

$3t_1 + 3(\frac{1}{2}) = 3 \rightarrow 3t_1 = -\frac{3}{2} \rightarrow t_1 = -\frac{1}{2}$
 دنباله: $-3, 1, 5, 9, 13, 17, 21, \dots$



دنباله حسابی است: $1, 5, 9, 13, 17, \dots$

ب) $t_n = t_1 + (n-1)d \rightarrow t_n = 1 + (n-1) \times 4 \rightarrow t_n = 4n - 3$

پ) $297 = 4n - 3 \rightarrow 300 = 4n \rightarrow n = 75$

الف) واسطه حسابی بین ۵ و ۱۱ چه عددی است؟
 ب) واسطه حسابی بین ۲۰ و ۳۰ چه عددی است؟

$t_3 = t_1 + 2d \rightarrow 11 = 5 + 2d \rightarrow d = 3$
 $t_3 = t_1 + 2d \rightarrow 30 = 20 + 2d \rightarrow d = 5$
 ب) از دو قسمت قبل چه نتیجه ای می گیرید؟
 ۲ برابر جمله می وسط برابر مجموع جمله اول و سوم است یعنی $2b = a + c$

مسئله زیر در پایروس رایند آمده است. آن را حل کنید.
 «۱۰۰ قرص نان را بین ۵ مرد چنان تقسیم کنید که سهم های دریافت شده، دنباله حسابی تشکیل دهند و یک سوم مجموع سه سهم بزرگ تر، مساوی مجموع دو سهم کوچک تر باشند.»

$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 = 100 \rightarrow 5t_1 + 10d = 100$
 $\frac{1}{3}(t_3 + t_4 + t_5) = t_1 + t_2 \rightarrow -t_1 + 2d = 0$
 $\begin{cases} 5t_1 + 10d = 100 \\ -t_1 + 2d = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} d = 10 \\ t_1 = 10 \end{cases}$

۱ جدول مقابل را کامل کنید و r را بیابید.

۲ در روز دهم چند فرد جدید مبتلا می شوند؟ $t_{10} = 2^{10} = 1024$

۳ در روز یازدهم چند شخص جدید به این بیماری مبتلا می شوند؟ $t_{11} = 2^{11} = 2048$

۴ در روز چندم تعداد افراد جدیدی که به بیماری آنفولانزا مبتلا می شوند، برابر 16384 نفر می شود.

نفر می شود. $t_n = 2^n \rightarrow 16384 = 2^n \rightarrow 2^{14} = 2^n \rightarrow n = 14$

در مثال بالا می توانیم تعداد مبتلایان جدید هر روز را به صورت دنباله زیر بنویسیم:

۱ (امید و محسن) 2
 ۲ $2 \times 2 = 2^2$
 ۳ $4 \times 2 = 2^3$
 ۴ $8 \times 2 = 16 = 2^4$
 ۵ $16 \times 2 = 32 = 2^5$
 ۶ $32 \times 2 = 64 = 2^6$
 ...
 n $t_n = 2^n$

$2, 4, 8, 16, 32, \dots$

این دنباله یک دنباله حسابی نیست؛ چرا که تفاضل جملات متوالی آن ثابت نیست، بلکه نسبت تقسیم هر دو جمله متوالی آن برابر عددی ثابت است.

$\dots = \frac{32}{16} = \frac{16}{8} = \frac{8}{4} = \frac{4}{2} = 2$

اینگونه دنباله ها را دنباله های هندسی می نامیم. یعنی:

تفاوت در کلاس

۱ نرگس و نگار برای محاسبه هفتمین جمله دنباله هندسی $9, 3, 1, \dots$ روش های مقابل را به کار بردند. کدام یک از آنها این مثال را درست حل کرده اند؟ توضیح دهید برای محاسبه ی مرتبه ی دنباله ی هندسی $9, 3, 1, \dots$ هر جمله را تقسیم بر جمله ی متقبلش کرد.

	✓	×
نگار		
نرگس		
$r = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$		$r = \frac{9}{3} = 3$
$t_7 = 9 \left(\frac{1}{3}\right)^{7-1}$		$t_7 = 9(3)^{7-1}$
$= \frac{1}{81}$		$= 6561$

۲ در دنباله های هندسی زیر، قدر نسبت را مشخص کنید و دو جمله بعدی را بنویسید. سپس جمله عمومی هر دنباله را به دست آورید.

الف) $2, 6, 18, 54, \boxed{162}, \boxed{486}, \dots, a_n = 2 \times 3^{n-1}$

ب) $5, 10, 20, 40, \boxed{80}, \boxed{160}, \dots, b_n = 5 \times 2^{n-1}$

ج) $6, -6, 6, -6, \dots, \boxed{60000}, \boxed{-60000}, \dots, c_n = 6 \times (-10)^{n-1}$

د) $4, 2, 1, \frac{1}{2}, \boxed{\frac{1}{4}}, \boxed{\frac{1}{8}}, \dots, d_n = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

۳ الف) اگر بین ۳ و ۴۸، عدد ۱۲ را قرار دهیم، سه عدد حاصل تشکیل دنباله هندسی می دهند. در این حالت می گوئیم ۱۲ واسطه هندسی بین ۳ و ۴۸ است. برای این کار به جز ۱۲ چه عدد دیگری را می توان در نظر گرفت؟ هیچ عدد دیگری نمی شود در نظر گرفت.

$t_1 = 3$
 $t_3 = 48 \Rightarrow t_1 r^2 = 48 \Rightarrow 3^2 r^2 = 48 \Rightarrow r^2 = 16 \Rightarrow r = 4$

ب) بین ۳ و ۴۸ سه واسطه هندسی درج کنید. آیا جواب یکتاست؟ خیر

$t_5 = 48$
 $t_1 r^4 = 48 \rightarrow r^4 = 16 \rightarrow r = \pm 2$

ب) جاهای خالی را طوری پر کنید که در هر مورد یک دنباله هندسی حاصل شود.

$t_4 = 4000 \rightarrow t_1 r^3 = 4000$
 $r^3 = 4000 \rightarrow r = 10$

$t_4 = 10000 \rightarrow t_1 r^3 = 10000$
 $r^3 = 10000 \rightarrow r = 20$



از بین موارد زیر، دنباله‌های هندسی را مشخص کنید و قدر نسبت آنها را بنویسید.

الف) $7, 28, 112, 448, \dots$ → $r=4$
 ب) $2\sqrt{5}, 4\sqrt{5}, 6\sqrt{5}, 8\sqrt{5}, \dots$ X
 ج) $5, 5, 5, 5, \dots$ → $r=1$ (دنباله یکنواخت)
 د) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ → $r=\frac{1}{2}$
 ه) $\frac{112}{28} = 4, \frac{28}{7} = 4$
 و) $\frac{448}{112} = 4, \frac{112}{28} = 4$
 ز) $\frac{6\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} = \frac{3}{2}, \frac{4\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = 2$
 ح) $\frac{5}{5} = 1, \frac{5}{5} = 1$
 ط) $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$

چند دنباله هندسی با قدر نسبت $\frac{4}{9}$ می‌توان ساخت؟ دو مورد را بنویسید. مثلا: $\dots, \frac{12}{9}, \frac{16}{9}, \frac{21}{9}, \dots$ و $\dots, \frac{12}{9}, \frac{16}{9}, \frac{21}{9}, \dots$

درستی یا نادرستی جملات زیر را بررسی کنید. در صورت درست بودن توضیح دهید و در صورت نادرست بودن مثال نقض ارائه کنید.
 الف) هر دنباله، یا حسابی است یا هندسی. X
 ب) دنباله‌ای وجود ندارد که هم حسابی باشد و هم هندسی. X
 ج) دنباله‌های ثابت هم حسابی و هم هندسی اند. مثلا: $7, 7, 7, \dots$

علی دو چرخه‌ای را به قیمت ۵۰۰ هزار تومان خرید. فرض کنید قیمت دو چرخه دست دوم، در هر سال ۲۰ درصد نسبت به سال قبل از خودش کاهش یابد. $\frac{100}{100} \cdot \frac{80}{100} = \frac{80}{100}$
 الف) اگر او بعد از ۳ سال قصد فروش دو چرخه‌اش را داشته باشد، به چه قیمتی می‌تواند آن را بفروشد؟
 ب) قیمت دو چرخه بعد از گذشت ۱۱ سال از چه رابطه‌ای به دست می‌آید؟
 ... و $(\frac{80}{100})^3 \cdot 500,000$ و $(\frac{80}{100})^2 \cdot 500,000$ و $(\frac{80}{100})^1 \cdot 500,000$
 ... و $320,000$ و $256,000$ و $204,800$

حاصل ضرب بیست جمله اول دنباله هندسی مقابل را محاسبه کنید.
 $2, 2, 8, \dots$

جملات سوم و ششم یک دنباله هندسی به ترتیب ۱۲ و ۹۶ می‌باشند. دنباله را مشخص کنید. در پاسخ خود

$t_3 = 12 \rightarrow t_1 r^2 = 12$
 $t_6 = 96 \rightarrow t_1 r^5 = 96$
 $\frac{t_1 r^2}{t_1 r^5} = \frac{12}{96} \rightarrow \frac{1}{r^3} = \frac{1}{8} \rightarrow r^3 = 8 \rightarrow r = 2$
 $t_1 \cdot 2^2 = 12 \rightarrow t_1 \cdot 4 = 12 \rightarrow t_1 = 3$
 ... و 48 و 24 و 12 و 6 و 3 دنباله

بنابر آمار منتشر شده از جانب پزشکی کشور، آمار تلفات حادثه‌ای از عدد ۲۷۷۵۱ نفر در سال ۱۳۸۴ به عدد ۱۶۵۸۴ نفر در سال ۱۳۹۴ کاهش یافته است که نشان دهنده حدود ۵ درصد کاهش سالانه در این دهه است. اگر آمار حوادث زلزله‌ای در کشور با همین سرعت کاهش یابد،

الف) پیش‌بینی می‌شود در هر یک از سال‌های منتهی به سال ۱۴۰۰ چند نفر از هم‌وطن‌های ما جان خود را در حوادث زلزله‌ای از دست بدهند؟ نتایج را در جدول زیر ثبت کنید.

سال	۱۳۹۴	۱۳۹۵	۱۳۹۶	۱۳۹۷	۱۳۹۸	۱۳۹۹	۱۴۰۰
تعداد تلفات مورد انتظار	۱۶۵۸۴	۱۵۹۰۲	۱۵۲۲۰	۱۴۵۳۸	۱۳۸۵۶	۱۳۱۷۴	۱۲۴۹۲

ب) اعداد حاصل، چه نوع دنباله‌ای تشکیل می‌دهند؟ هندسی است یا حسابی؟

فصل دوم

۱ در مثلث های قائم الزاویه ABC و A'B'C' ، $\hat{A} = \hat{A}'$. جاهای خالی را کامل کنید .

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Rightarrow \frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$$

۲ از تساوی $\frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'}$ می توان نتیجه گرفت $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$ (چرا؟) . با توجه به این نکته، جاهای خالی را کامل کنید :

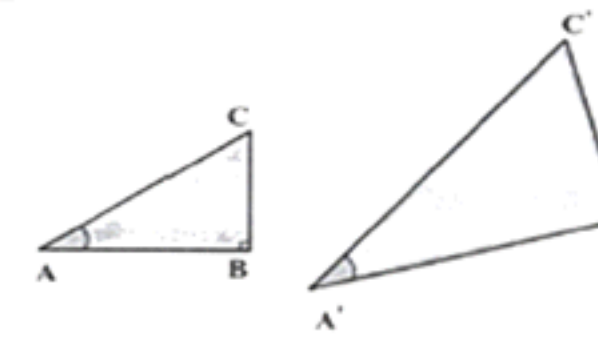
$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} \text{ و } \frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{A'C'}$$

نتیجه : اگر زاویه A از مثلث قائم الزاویه ABC با زاویه A' از مثلث قائم الزاویه A'B'C' (مطابق شکل بالا) برابر باشند، داریم :

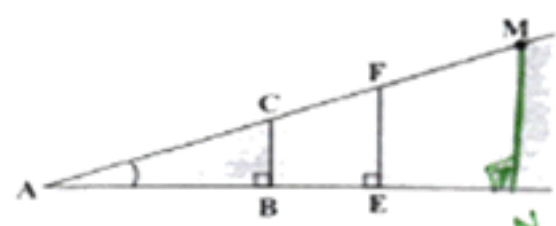
$$\frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{A'C'} \text{ و } \frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} \text{ و } \frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$$

$$\frac{AC}{AF} = \frac{AB}{AE} = \frac{BC}{EF}$$

۱ در شکل سمت راست، درستی تساوی $\frac{BC}{AB} = \frac{EF}{AE}$ را بررسی کنید .
 ۲ نقطه دیگری مثل M را در امتداد AC در نظر بگیرید و از آن نقطه، عمودی بر ضلع دیگر زاویه A رسم کنید و پای عمود را N بنامید. اکنون جاهای خالی را کامل کنید :



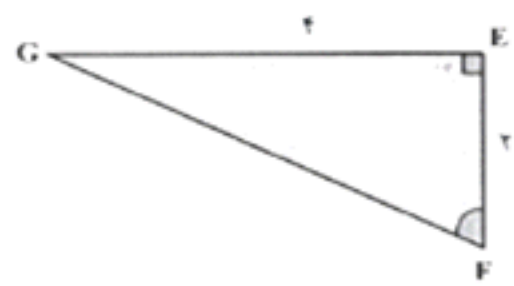
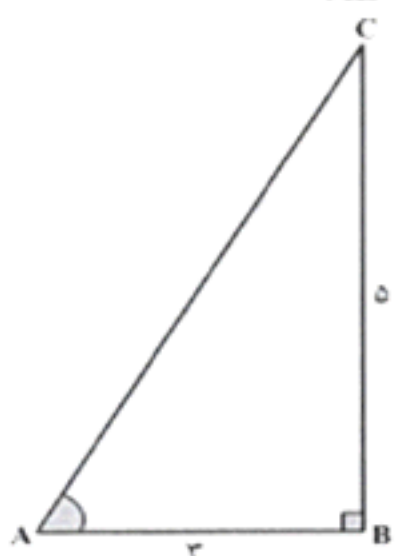
فعالیت



$$\frac{AC}{AM} = \frac{AB}{AN} = \frac{BC}{MN}$$

فعالیت

۱ در هر یک از شکل های زیر، جاهای خالی را کامل کنید .



$$\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{5}{3}$$

$$\cot M = \frac{MN}{NO} = \frac{2}{2/5}$$

$$\tan F = \frac{EF}{GE} = \frac{2}{2}$$

$$\cot A = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{5}$$

$$\tan M = \frac{NO}{MN} = \frac{2/5}{2}$$

$$\cot F = \frac{GE}{EF} = \frac{2}{2}$$



۲ مثلث متساوی الاضلاع ABC با اضلاعی به طول ۲ واحد را در نظر بگیرید .
 الف) محل برخورد نیمساز زاویه A با پاره خط BC را M بنامید. با توجه به خواص مثلث متساوی الساقین، AM، ...، ضلع BC است. بنابراین

$$BM = MC = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} AB = 1$$

ب) با استفاده از رابطه فیثاغورس، طول AM و حاصل کسره های زیر را به دست آورید .

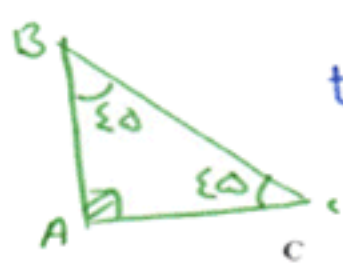
$$\tan 30^\circ = \frac{BM}{AM} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \tan 60^\circ = \frac{AM}{BM} = \frac{\sqrt{3}}{1}$$

$$2^2 = 1^2 + AM^2 \Rightarrow \sqrt{3} = AM$$

ب) با استفاده از یک مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین، تنازات و کتانزات زاویه ۴۵ در پیدا کنید .

$$\tan 45^\circ = \frac{AB}{AC} = 1$$

$$\cot 45^\circ = \frac{AC}{AB} = 1$$



در هر مثلث قائم الزاویه ABC، نسبت طول ضلع مقابل زاویه حاده A به طول وتر، همواره

تهیه کننده: گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه استان خوزستان

۱ یک زاویه ۵۰° رسم کنید. با تشکیل یک مثلث قائم الزاویه و اندازه گیری طول های مورد نظر با یک خط کش مدرج، نسبت های مثلثاتی زاویه ۵۰° را به صورت تقریبی حساب کنید. سپس با مائین حساب، مقادیر واقعی را به دست آورید و با مقادیر قبل مقایسه کنید.

به کمک شکل فعالیت قبل، با پیدا کردن نسبت های مثلثاتی زاویه های ۳۰° و ۶۰°، جدول زیر را کامل کنید (در صورت لزوم، کسرها را گویا کنید).

مقدار	۳۰°	۴۵°	۶۰°
sin A	1/2	√2/2	√3/2
cos A	√3/2	√2/2	1/2
tan A	1/√3	1	√3
cot A	√3	1	1/√3

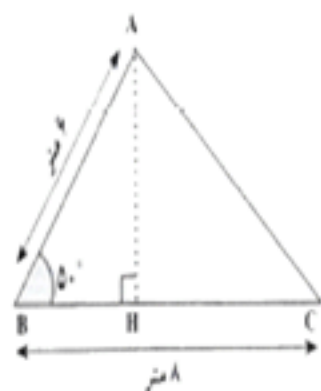
۲ می خواهیم مساحت مثلث ABC در شکل زیر را پیدا کنیم. می دانیم:

ارتفاع × قاعده × 1/2 = مساحت مثلث ABC
 الف) با توجه به اینکه sin 50° = 0.76 داریم:

ب) با توجه به قسمت الف) داریم:

$$\sin 50^\circ = \frac{AH}{AB} = \frac{AH}{9} \Rightarrow AH = 0.76 \times 9 = 6.84$$

مساحت مثلث ABC = 1/2 × AH × BC = 1/2 × 6.84 × 8 = 27.72

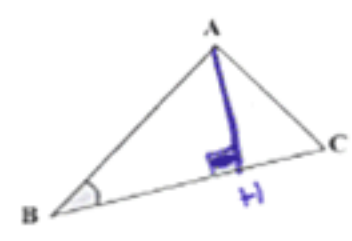


کار در کلاس

۱ در هر مثلث، با معلوم بودن مقادیر طول دو ضلع مثلث و اندازه زاویه بین آنها نشان دهید:

مساحت ABC = 1/2 × AB × BC × sin B

$S = \frac{1}{2} AH \times BC \xrightarrow{\sin B = \frac{AH}{AB}} S = \frac{1}{2} AB \times BC \sin B$



۲ در راه پیمایی ۲۲ بهمن، یک بالن اطلاع رسانی توسط دو طناب به زمین بسته شده است. طول یکی از طناب ها ۳۰ متر است. می خواهیم طول طناب دوم را پیدا کنیم. الف) ابتدا اندازه زاویه B را به دست آورید. سپس ارتفاع وارد بر ضلع AC را رسم کنید و آن را BH بنامید.

B = 110° - 125° = 55°

ب) طول BH را با استفاده از سینوس زاویه A به دست آورید.

$\sin 40^\circ = \frac{BH}{AB} \rightarrow BH = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 30 = 15\sqrt{3}$

ب) اکنون با استفاده از سینوس زاویه ۶۵°، طول طناب دوم را پیدا کنید.

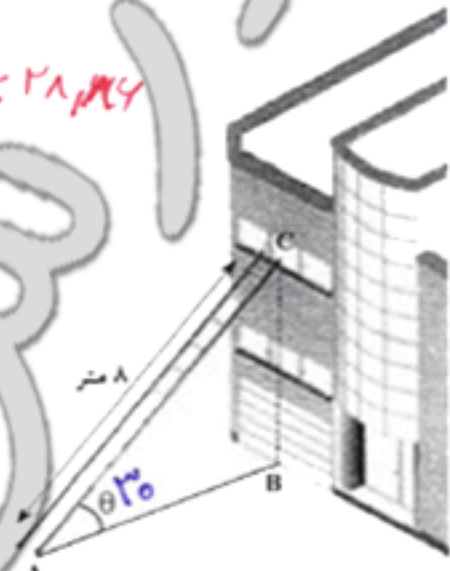
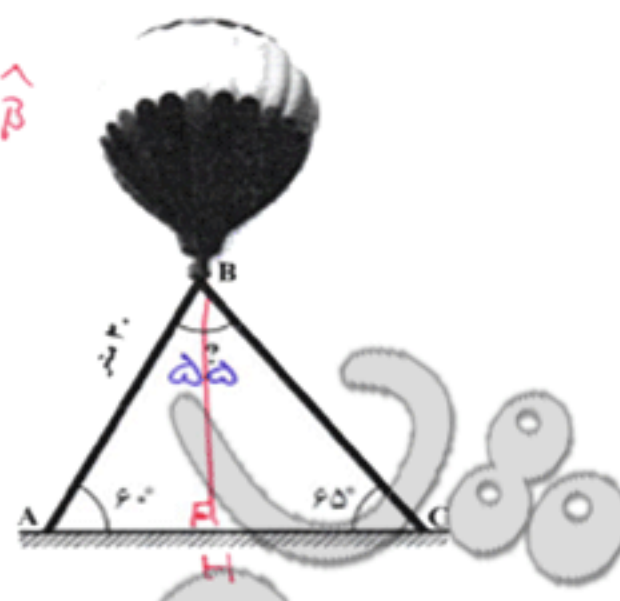
$\sin 65^\circ = \frac{BH}{BC} \rightarrow BC = \frac{BH}{\sin 65^\circ} = \frac{15\sqrt{3}}{1/2} = 30\sqrt{3}$

۳ مطابق شکل مقابل، نردبانی به طول ۸ متر در زیر پنجره ساختمانی قرار گرفته است. اگر زاویه نردبان با سطح زمین ۳۰° باشد، ارتفاع پنجره تا زمین را محاسبه کنید. فاصله پای نردبان تا ساختمان چقدر است؟

$\sin \theta = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{BC}{8} \Rightarrow 2BC = 8 \Rightarrow BC = 4$

اکنون به کمک رابطه فیثاغورس داریم:

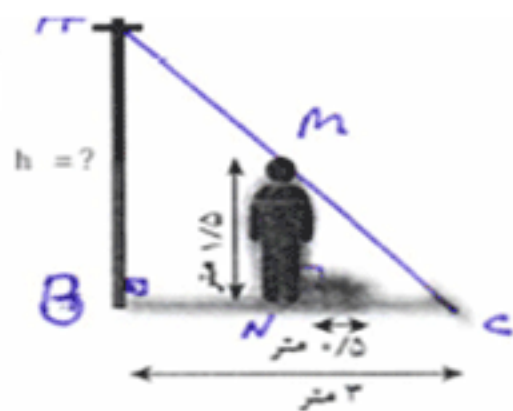
$AB^2 = AC^2 - BC^2 = 8^2 - 4^2 = 48 \Rightarrow AB = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$



تهیه کننده: گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه استان خوزستان

تمرین

۱. نسرین می خواهد ارتفاع یک تیر برق را که طول سایه آن ۳ متر است، حساب کند. قد نسرین ۱/۵ متر و طول سایه او در همان لحظه ۰/۵ متر است. ارتفاع تیر برق چقدر است؟



$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{B} = \hat{N} = 90^\circ \\ \hat{C} = \hat{C} \end{array} \right. \rightarrow \triangle ABC \sim \triangle MNC \Rightarrow$$

$$\frac{CN}{CB} = \frac{CM}{AC} = \frac{MN}{AB}$$

$$\frac{1.5}{3} = \frac{1.5}{h} \rightarrow h = \frac{1.5 \times 3}{1.5} = 9 \text{ m}$$

۲۴

$$\hat{\alpha} = 70^\circ \left\{ \begin{array}{l} \hat{B}_1 = 40^\circ \\ \hat{C}_1 = 40^\circ \end{array} \right. \leftarrow \triangle OB_1C_1$$

پس $\triangle OB_1C_1$ متساوی الساق است.

۲. مساحت منش ضلعی منتظم زیر را به دست آورید.



$$\triangle OBH \rightarrow \sin 30^\circ = \frac{OH}{OB}$$

$$OH = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 1.5\sqrt{3}$$

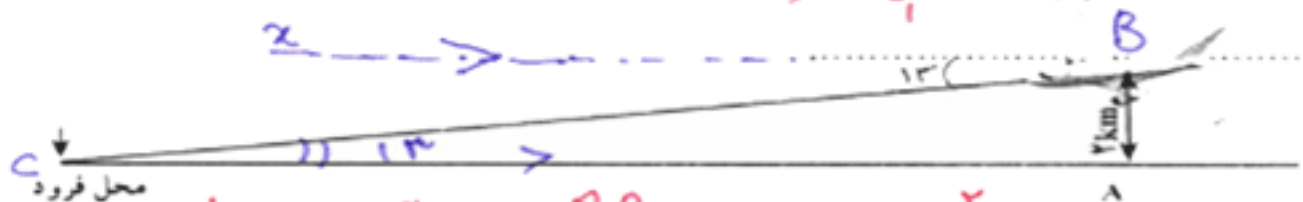
$$S_{\triangle OB_1C_1} = 2 \times \frac{1.5\sqrt{3} \times 2}{2} = 3\sqrt{3}$$

$$S_{\text{منش}} = 6 \times 3\sqrt{3} = 18\sqrt{3}$$

۳. یک هواپیما در ارتفاع ۲ km از سطح زمین در حال فرود آمدن است. اگر زاویه هواپیما با افق حدود ۱۳° باشد، هواپیما در چه فاصله‌ای از نقطه A فرود می‌آید.

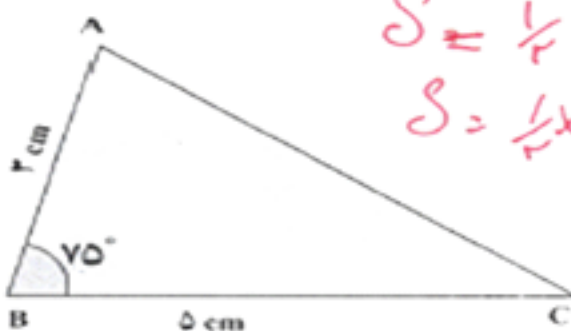
$$\tan 13^\circ = 0.23$$

$$Bx \parallel AC \rightarrow \hat{B}_1 = \hat{C} = 13^\circ$$



$$\tan 13^\circ = \frac{AB}{AC} \rightarrow AC = \frac{2}{0.23} \rightarrow AC \approx 8.7 \text{ km}$$

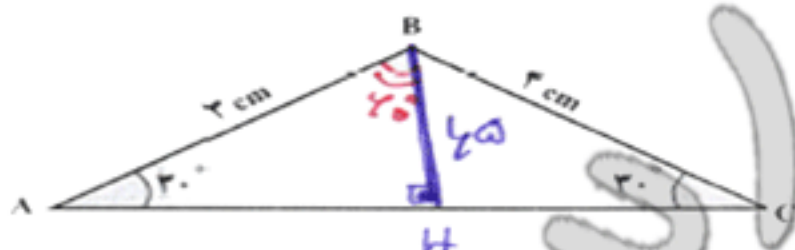
۴. فرض کنید $\sin 70^\circ = 0.94$. مساحت مثلث ABC در شکل زیر را به دست آورید.



$$S = \frac{1}{2} AB \times BC \sin 70^\circ$$

$$S = \frac{1}{2} \times 7 \times 5 \times 0.94 = 16.4$$

۵. مساحت مثلث ABC را پیدا کنید.

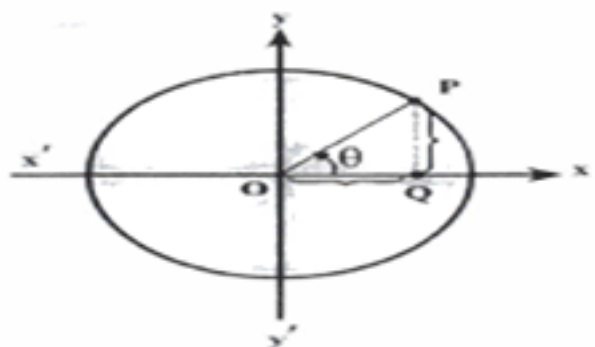
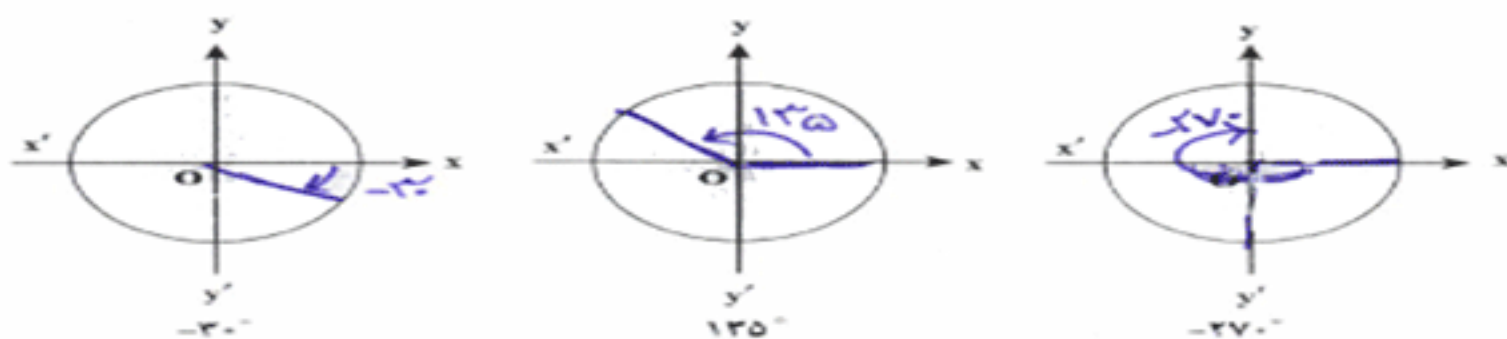


$$\triangle ABH \rightarrow \sin A = \frac{BH}{AB} \rightarrow BH = 7 \times \sin 40^\circ$$

$$S_{ABH} = \frac{1}{2} \times 7 \times 7 \times \sin 40^\circ \times 2 = 49 \times \sin 40^\circ = 49 \times 0.64 = 31.36$$

$$\triangle ABH \cong \triangle AHC \rightarrow S_{ABH} = S_{AHC} \Rightarrow S_{ABC} = 2 \times 31.36 = 62.72$$

۱ هر یک از زاویه های زیر را روی دایره های مثلثاتی داده شده، نشان دهید.

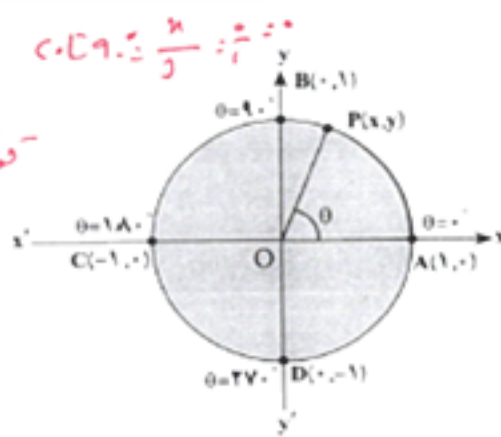


۲ فرض کنید $P(x,y)$ نقطه ای دلخواه روی دایره مثلثاتی روبه رو باشد و θ زاویه ای است که نیم خط \vec{OP} با محور \vec{Ox} می سازد. از نقطه P خطی بر محور \vec{Ox} عمود می کنیم و محل برخورد را Q می نامیم. الف) در مثلث OPQ ، نسبت های مثلثاتی زاویه θ را به دست آورید.

$\cos\theta = \frac{OQ}{OP}$ و $\sin\theta = \frac{PQ}{OP}$ و $\tan\theta = \frac{PQ}{OQ}$
 $\cos\theta = OQ$ $\sin\theta = PQ$

فعالیت

۱ در دایره مثلثاتی روبه رو اگر $\theta = 90^\circ$ ، نسبت های مثلثاتی θ را پیدا کنید. $\sin 90^\circ = 1$ $\cos 90^\circ = 0$ $\tan 90^\circ = \frac{y}{x} = \frac{1}{0} = \text{تعریف نشده}$
 ۲ اگر $\theta = 180^\circ$ ، نسبت های مثلثاتی θ را پیدا کنید. $\sin 180^\circ = 0$ $\cos 180^\circ = -1$ $\tan 180^\circ = \frac{y}{x} = \frac{0}{-1} = 0$
 ۳ اگر $\theta = 270^\circ$ ، نسبت های مثلثاتی θ را پیدا کنید. $\sin 270^\circ = -1$ $\cos 270^\circ = 0$ $\tan 270^\circ = \frac{y}{x} = \frac{-1}{0} = \text{تعریف نشده}$



کار در کلاس

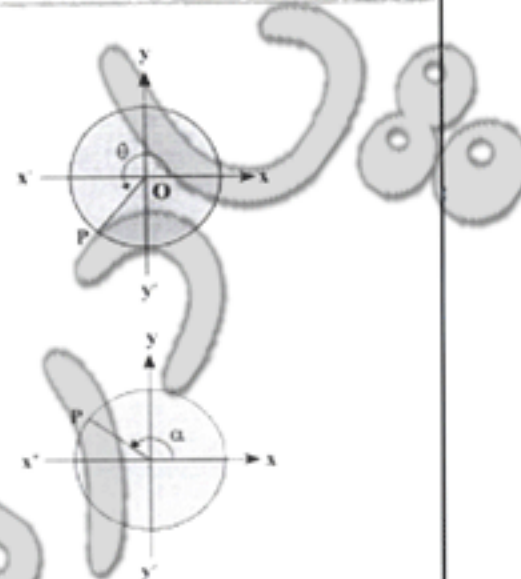
$0^\circ < \alpha < 90^\circ$ در ربع اول است
 $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ در ربع دوم است
 $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ در ربع سوم است
 $270^\circ < \alpha < 360^\circ$ در ربع چهارم است

مقدار	0°	90°	180°	270°	360°
$\sin\theta$	0	1	0	-1	0
$\cos\theta$	1	0	-1	0	1
$\tan\theta$	0	تعریف نشده	0	تعریف نشده	0
$\cot\theta$	تعریف نشده	0	تعریف نشده	0	تعریف نشده

فعالیت

۱ فرض کنید θ زاویه ای در ربع سوم دایره مثلثاتی باشد. با توجه به اینکه $x = \cos\theta$ و $y = \sin\theta$ و در ربع سوم، $x, y < 0$ ، علامت هر یک از نسبت های مثلثاتی θ را در ربع سوم مشخص کنید.
 $\sin\theta < 0$ $\cos\theta < 0$ $\tan\theta > 0$ $\cot\theta > 0$
 ۲ فرض کنید α زاویه ای در دایره مثلثاتی در ربع دوم باشد. فعالیت قبل را برای α نیز تکرار کنید.
 $\sin\theta > 0$ $\cos\theta < 0$ $\tan\theta < 0$ $\cot\theta < 0$
 ۳ جدول زیر را کامل کنید:

مقدار	ربع اول $x, y > 0$	ربع دوم $x < 0, y > 0$	ربع سوم $x < 0, y < 0$	ربع چهارم $x > 0, y < 0$
$\sin\theta$	+	+	-	-
$\cos\theta$	+	-	-	+
$\tan\theta$	+	-	+	-
$\cot\theta$	+	-	+	-



نکته: برای هر زاویه دلخواه θ ، $-1 \leq \sin\theta \leq 1$ و $-1 \leq \cos\theta \leq 1$



فرض کنید نقطه P روی دایره مثلثاتی قرار دارد به طوری که $\cos \theta = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ می دانیم $y = \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ بنابراین $P(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ الف) مختصات نقطه P را به دست آورید. ب) سایر نسبت های مثلثاتی زاویه θ را به دست آورید.

$\tan \theta = \frac{y}{x} = 1$ و $\cot \theta = \frac{x}{y} = 1$



اگر $\cos \alpha = \frac{-2}{5}$ ، آنگاه در مورد ناحیه ای که α در آن قرار می گیرد، بحث کنید.

نمایی توان در زاویه ای درم یا سوم باشد

زاویه ای منال بزنند که سینوس آن منفی و کسینوس آن مثبت باشد.

برای آنگاه سینوس من و کسینوس مثبت باشد کانی اند در ناحیه دوم به ششم منتهی شده 135°



۲۹

فعالیت

نمودار خط $y=2x-4$ در شکل رویه رو رسم شده است. دو نقطه B و C روی این خط را در نظر بگیرید و خطی از آنها به محور x ها عمود کنید. پای عمودها را به ترتیب E و F بنامید.

الف) ناتزانت زاویه α را به دست آورید. $\tan \alpha = \frac{BE}{AE} = \frac{CF}{AF} = \frac{2}{1} = \frac{4}{2}$

$A \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$
 $B \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$

ب) شیب این خط را پیدا کنید. شیب خط = $\frac{\text{تفاضل عرض ها}}{\text{تفاضل طول ها}} = \frac{4-0}{2-0} = 2$

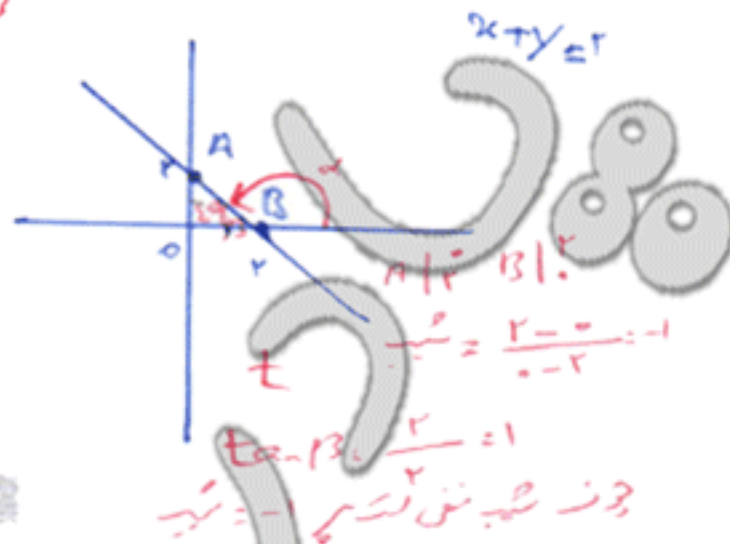


ب) از مقایسه قسمت الف) و ب) چه نتیجه ای می گیرید؟ توضیح دهید.

پایان نتیجه گرفت ناتزانت بین خط و جهت مثبت محور افقی معنی شیب خط اند

شیب هر خط که محور افقی را قطع می کند، برابر است با ناتزانت زاویه بین آن خط و جهت مثبت محور افقی. به عبارت دیگر، اگر α زاویه ای باشد که خط با جهت مثبت محور افقی می سازد، آنگاه:

$\text{شیب خط} = \tan \alpha$



فعالیت

فعالیت بالا را برای خط های زیر، تکرار کنید.

ب) $x+y=2$

الف) $2y-2x=5$

معادله خطی را بنویسید که زاویه آن با محور x ها 30° است و از نقطه $(1,0)$ می گذرد.

$\tan \alpha = a \rightarrow \tan 30^\circ = a \rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$y = ax + b \rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + b \xrightarrow{(1,0)} 0 = \frac{\sqrt{3}}{3} + b \rightarrow b = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

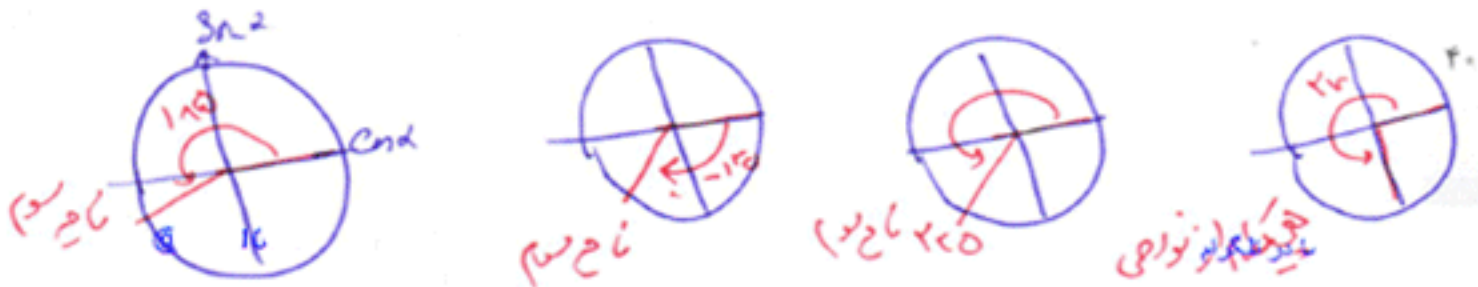
تمرین

تهیه کننده: گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه استان خوزستان

تمرین

۱ هر یک از زاویه های زیر روی دایره مثلثاتی رسم کنید. سپس مشخص کنید در کدام یک از نواحی چهارگانه قرار می گیرد.

- (الف) $+270^\circ$ (ب) 225° (ب) -135° (ت) 185°



۲ در هر یک از موارد زیر، نسبت مثلثاتی زاویه ای داده شده است. سایر نسبت های مثلثاتی را به دست آورید.

(الف) $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ (در ربع چهارم)
 $\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \pm \sqrt{\frac{16}{25}} = \pm \frac{4}{5}$
 Since α is in the fourth quadrant, $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$

$\tan \alpha = \frac{-4}{3}$ $\cot \alpha = -\frac{3}{4}$

(ب) $\sin \beta = \frac{-1}{2}$ (در ربع سوم)

$\cos \beta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\tan \beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\cot \beta = \sqrt{3}$

۳ اگر $\sin \theta$ و $\tan \theta$ هم علامت باشند، آنگاه θ در کدام ربع مثلثاتی قرار دارد؟



θ می تواند در ربع اول یا سوم باشد.

۴ حدود زاویه θ را در هر یک از حالات زیر مشخص کنید.



(الف) $\sin \theta > 0, \cos \theta > 0$ (ب) $\sin \theta < 0, \cos \theta > 0$

۵ اگر $\sin \alpha \times \cos \alpha < 0$ ، آنگاه α در کدام یک از نواحی چهارگانه می تواند قرار بگیرد؟



چرا؟ $\sin \alpha$ و $\cos \alpha$ قیافه العرینه هستند

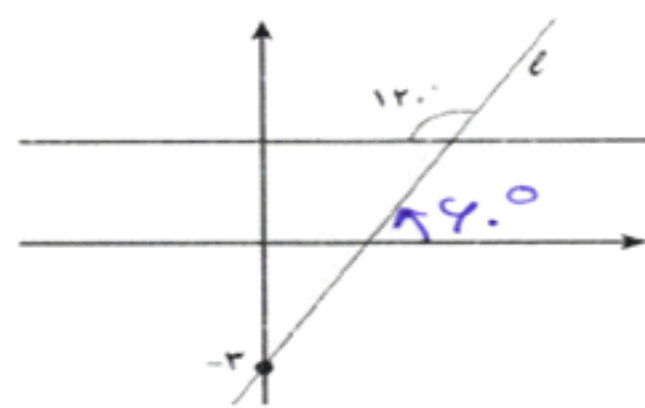
بر α در ربع دوم یا سوم است

۶ زاویه ای مثل α پیدا کنید به طوری که $\tan \alpha > \cot \alpha$. اکنون زاویه ای مثل β پیدا کنید، به طوری که $\cot \beta > \tan \beta$. از این تمرین چه نتیجه ای می گیرید؟

$\alpha = 45^\circ \rightarrow \tan \alpha = 1, \cot \alpha = 1$
 $\beta = 30^\circ \rightarrow \tan \beta = \frac{1}{\sqrt{3}}, \cot \beta = \sqrt{3}$
 معادله خطی را بنویسید که زاویه آن با محور xها 45° است و نقطه $(0, 2)$ روی آن قرار دارد.

$\alpha = 45^\circ \rightarrow \tan \alpha = 1 \rightarrow$ شیب = 1

$y = ax + b \rightarrow y = x + b \rightarrow 2 = 0 + b \rightarrow y = x + 2$



$\tan 45^\circ = 1 \rightarrow$ شیب = 1
 $y = \sqrt{3}x + b \rightarrow$ شیب = $\sqrt{3}$
 $(0, -3) \rightarrow -3 = \sqrt{3} \cdot 0 + b$

$y = \sqrt{3}x - 3$

تهیه کننده:

مثلث قائم الزاویه ABC را در نظر بگیرید.

الف اندازه وتر یعنی x را بیابید و سپس مقدار عددی هر یک از چهار نسبت مثلثاتی را برای زاویه θ و α به دست آورید.

$$\sin \theta = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{5}$$

$$\cos \theta = \dots = \frac{4}{5}$$

$$\tan \theta = \frac{BC}{AB} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{3}{4}$$

$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{4}{3}$$

$$\sin \alpha = \dots = \frac{4}{5}$$

$$\cos \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{5}$$

$$\tan \alpha = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{3}$$

$$\cot \alpha = \frac{3}{4}$$

ب با توجه به مقادیر عددی حاصل در قسمت (الف) مقدار $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta$ و $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$ را به دست آورید.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

ب درستی رابطه $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ را با استفاده از تعریف و اضلاع مثلث، بررسی کنید.

$$(\sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2 = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 + \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \frac{BC^2 + AB^2}{AC^2} = \frac{AC^2}{AC^2} = 1$$

ت مشابه قسمت (ب) درستی رابطه $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ را بررسی کنید.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 = \frac{AB^2 + BC^2}{AC^2} = \frac{AC^2}{AC^2} = 1$$

زستان

کار در کلاس

با توجه به رابطه بالا، یعنی $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ جاهای خالی را پر کنید:

الف) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$

ب) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$

کار در کلاس

رابطه های تانژانت بر حسب کسینوس و کتانژانت بر حسب سینوس

در این قسمت رابطه ای برای تانژانت بر حسب کسینوس یک زاویه و همچنین رابطه ای برای کتانژانت بر حسب سینوس، به دست می آوریم:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\Rightarrow \tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad (\cos \alpha \neq 0)$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

اگر $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ و $\tan \alpha = \frac{-3}{4}$ ، آنگاه سایر نسبت های مثلثاتی زاویه α را به دست

$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \rightarrow 1 + \frac{9}{16} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \rightarrow \frac{25}{16} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{4}{5}$
 آورد $90^\circ < \alpha < 180^\circ \rightarrow \cos \alpha = -\frac{4}{5}$

$\cot \alpha = \frac{-4}{3} \rightarrow 1 + \frac{16}{9} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \rightarrow 1 + \frac{16}{9} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \rightarrow \frac{25}{9} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{3}{5}$
 $90^\circ < \alpha < 180^\circ \rightarrow \sin \alpha = \frac{3}{5}$

انحاد مثلثاتی

۱ فرض کنید α زاویه ای در ناحیه دوم مثلثانی باشد و $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ نسبت های دیگر مثلثانی زاویه α را به دست آورید.

$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \rightarrow \sin \alpha = \frac{4}{5}$ (چون در ناحیه دوم سینوس مثبت است)
 اگر $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{4}{-3} = -\frac{4}{3}$ و $\cot \alpha = -\frac{3}{4}$

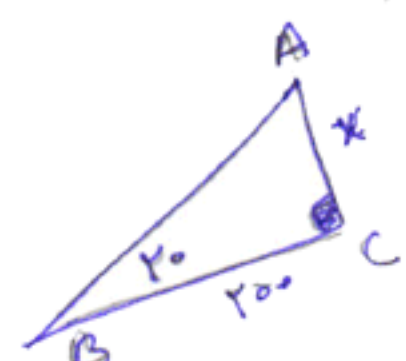
$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \rightarrow 1 + \frac{16}{9} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \rightarrow \frac{25}{9} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \rightarrow \cos \alpha = -\frac{3}{5}$ (با فرض داده شده)

۲ اگر $\sin \alpha = -\frac{1}{5}$ و α زاویه ای در ناحیه چهارم مثلثانی باشد، نسبت های دیگر مثلثانی زاویه α را به دست آورید.
 $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{1}{25} = \frac{24}{25} \rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{24}}{5} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$
 $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-1/5}{2\sqrt{6}/5} = -\frac{1}{2\sqrt{6}}$ و $\cot \alpha = -2\sqrt{6}$

۳ اگر $\sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ، آنگاه نسبت های دیگر مثلثانی زاویه 135° را به دست آورید.
 $\cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\tan 135^\circ = -1$ و $\cot 135^\circ = -1$

۴ اگر $\tan 24^\circ = \sqrt{3}$ ، آنگاه نسبت های دیگر مثلثانی زاویه 24° را به دست آورید.
 $\sin 24^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\cos 24^\circ = \frac{1}{2}$ و $\cot 24^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$

۵ شخصی می خواهد عرض یک رودخانه را اندازه گیری کند. او ابتدا مطابق شکل، نقطه ای چون C و سپس نقطه ای مانند A را در امتداد رودخانه در طرف دیگر رودخانه مشخص می کند و به اندازه ۲۰۰ متر از C به صورت افقی در امتداد رودخانه حرکت می کند تا به نقطه B برسد. اگر زاویه دید این شخص (از نقطه B به نقطه A) 20° باشد و $\sin 20^\circ = 0.34$ ، او چگونه می تواند عرض رودخانه را محاسبه کند؟ (پاسخ خود را نادو رقم اعشار بر حسب متر بنویسید.)



$\sin \hat{B} = \frac{AC}{AB} = \frac{34}{100}$
 $\rightarrow AB = \frac{100}{34} AC = \frac{25}{8.5} AC$

۶ با فرض با معنی بودن هر کسر، درستی هر یک از تساوی های زیر را بررسی کنید.
 الف) $\frac{1}{\sin \theta} \times \tan \theta = \frac{1}{\cos \theta}$
 ب) $\frac{1 + \tan \alpha}{1 + \cot \alpha} = \tan \alpha$
 ج) $\frac{1}{\cos x} - \tan x = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$
 د) $\frac{1 + \sin x - \cos^2 x}{1 + \sin x} = \sin x$
 ه) $\frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} = \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta}$

الف) $\frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} = \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta}$ (ب)

الف) $\frac{1}{\sin \theta} \times \tan \theta = \frac{1}{\cos \theta}$

ب) $1 - \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x} = \sin x$ (ت)

ب) $\frac{1 + \tan \alpha}{1 + \cot \alpha} = \tan \alpha$

ج) $\frac{1 + \tan x}{1 + \cot x} = \frac{1 + \frac{\sin x}{\cos x}}{1 + \frac{\cos x}{\sin x}} = \frac{\frac{\cos x + \sin x}{\cos x}}{\frac{\sin x + \cos x}{\sin x}} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$

ج) $\frac{1}{\cos x} - \tan x = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$

د) $\frac{1 - \cos^2 x}{1 + \sin x} = \frac{1 - \cos x}{1 + \sin x} \times \frac{1 + \sin x}{1 + \sin x} = \frac{(1 - \cos x)(1 + \sin x)}{(1 + \sin x)^2}$

د) $\frac{1}{\cos x} - \tan x = \frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1 - \sin x}{\cos x}$

ه) $\frac{1 + \sin x - \cos^2 x}{1 + \sin x} = \frac{1 + \sin x - (1 - \sin^2 x)}{1 + \sin x} = \frac{1 + \sin x - 1 + \sin^2 x}{1 + \sin x} = \frac{\sin x(1 + \sin x)}{1 + \sin x} = \sin x$

ه) $\frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} = \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta}$

و) $\frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} = \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta}$

و) $\frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} = \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta}$

فصل سوم

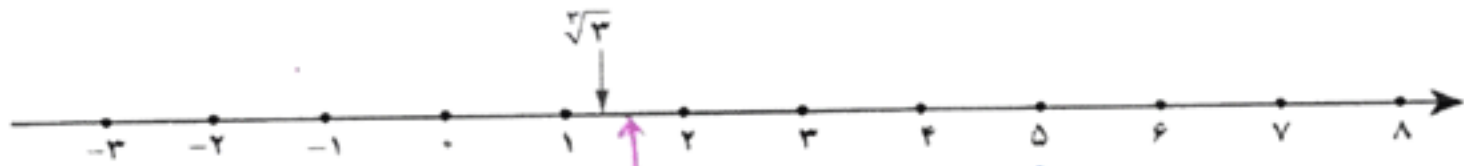
تهیه کننده: گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه استان خوزستان

۱ حجم مخزن آبی که به شکل مکعب است، برابر ۲۵ متر مکعب است. طول ضلع این مکعب را حدس بزنید و حدس خود را آزمایش کنید. می‌دانیم هرگاه طول ضلع مکعب a متر باشد، حجم آن برابر a^3 متر مکعب است. ابتدا جدول را کامل کنید.

طول ضلع	۱	۲	۳	۴	۵	۶
حجم مکعب	۱	۸	۲۷	۶۴	۱۲۵	۲۱۶

۲ مقدار تقریبی یا دقیق ریشه‌ها را محاسبه کنید و مانند نمونه روی محور اعداد، نشان دهید (می‌توانید از ماشین حساب استفاده کنید).

$\sqrt[3]{1} = 1$ $\sqrt[3]{8} = 2$ $\sqrt[3]{27} = 3$ $\sqrt[3]{64} = 4$ $\sqrt[3]{125} = 5$ $\sqrt[3]{-8} = -2$



۴۹



۳ مانند نمونه با استدلال مشخص کنید که هر ریشه بین کدام دو عدد صحیح متوالی است:
الف) چون $25 < 30 < 36$ پس $5 < \sqrt[3]{30} < 6$. همچنین چون $1 < 5 < 8$ پس $1 < \sqrt[3]{5} < 2$.

ب) $\sqrt[3]{\square} < \sqrt[3]{10} < \sqrt[3]{\square}$

ب) $\sqrt[3]{\square} < \sqrt[3]{7} < \sqrt[3]{\square}$

ت) $\sqrt[3]{\square} < \sqrt[3]{20} < \sqrt[3]{\square}$

ت) $\sqrt[3]{\square} < \sqrt[3]{-17} < \sqrt[3]{\square}$

۴ زیر رادیکال (جای خالی) عدد یا عددهایی بگذارید که نامساوی‌ها برقرار باشند.

ب) $9 < \sqrt[3]{\square} < 10$
هر عددی بین ۷۲۹ تا ۱۰۰۰

الف) $4 < \sqrt[3]{\square} < 5$
هر عددی بین ۶۴ تا ۱۲۵

۵ سه مکعب تو در تو مانند شکل مقابل واقع شده‌اند. حجم مکعب بیرونی (بزرگ) برابر ۶۴ و حجم مکعب داخلی (کوچک) ۲۷ است. طول ضلع مکعب میانی چه عددهایی می‌تواند باشد؟ (حداقل سه پاسخ متفاوت ارائه کنید.)

$27 < a^3 < 64$
 $\sqrt[3]{27} < \sqrt[3]{a^3} < \sqrt[3]{64}$
 $3 < a < 4$

۱ جاهای خالی را در جدول تکمیل کنید. آخرین ستون را به دلخواه کامل کنید.

عدد	۱۶	۶۲۵	۱۰۰۰۰۰	۳۱۲۵
ریشه‌های چهارم	۲	-۲	۵	-۵

۲ جاهای خالی را در جدول تکمیل کنید.

عدد	-۳۲	۳۱۲۵	۷۱	-۲۴۳	-۱	۱۰۰۰۰۰۰	۱۶
ریشه پنجم	-۲	۵	$\sqrt[5]{71}$	-۳	-۱	-۱۰	$\sqrt[5]{16}$

۳ ریشه پنجم چه عددهایی با خودشان برابر است؟

$\sqrt[5]{1} = 1$ $\sqrt[5]{0} = 0$

۴ محاسبه کنید.

$\sqrt[5]{\frac{1}{1000000}} = \frac{1}{10}$
 $\sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \frac{1}{2}$

$\sqrt[5]{-32} = -2$
 $\sqrt[5]{-1000000000} = -100$

۵ عبارت را کامل کنید.

هر عدد مثبت یا منفی دارای یک ریشه پنجم است. اگر عدد مثبت باشد، ریشه پنجم آن مثبت و اگر عدد منفی باشد ریشه پنجم آن منفی است.

۱ برای هر عدد رادیکالی زیر، اگر حاصل آن یک عدد صحیح است، جواب را بنویسید و در غیر این صورت دو عدد صحیح متوالی بنویسید که عدد رادیکالی مورد نظر بین آنها باشد.

$$\begin{aligned} \sqrt{16} &= 4 \\ \sqrt{49} &= 7 \\ \sqrt{64} &= 8 \\ \sqrt{81} &= 9 \\ \sqrt{100} &= 10 \\ \sqrt{121} &= 11 \\ \sqrt{144} &= 12 \\ \sqrt{169} &= 13 \\ \sqrt{196} &= 14 \\ \sqrt{225} &= 15 \\ \sqrt{256} &= 16 \\ \sqrt{289} &= 17 \\ \sqrt{324} &= 18 \\ \sqrt{361} &= 19 \\ \sqrt{400} &= 20 \\ \sqrt{441} &= 21 \\ \sqrt{484} &= 22 \\ \sqrt{529} &= 23 \\ \sqrt{576} &= 24 \\ \sqrt{625} &= 25 \\ \sqrt{676} &= 26 \\ \sqrt{729} &= 27 \\ \sqrt{784} &= 28 \\ \sqrt{841} &= 29 \\ \sqrt{900} &= 30 \\ \sqrt{961} &= 31 \\ \sqrt{1024} &= 32 \end{aligned}$$

۵۱

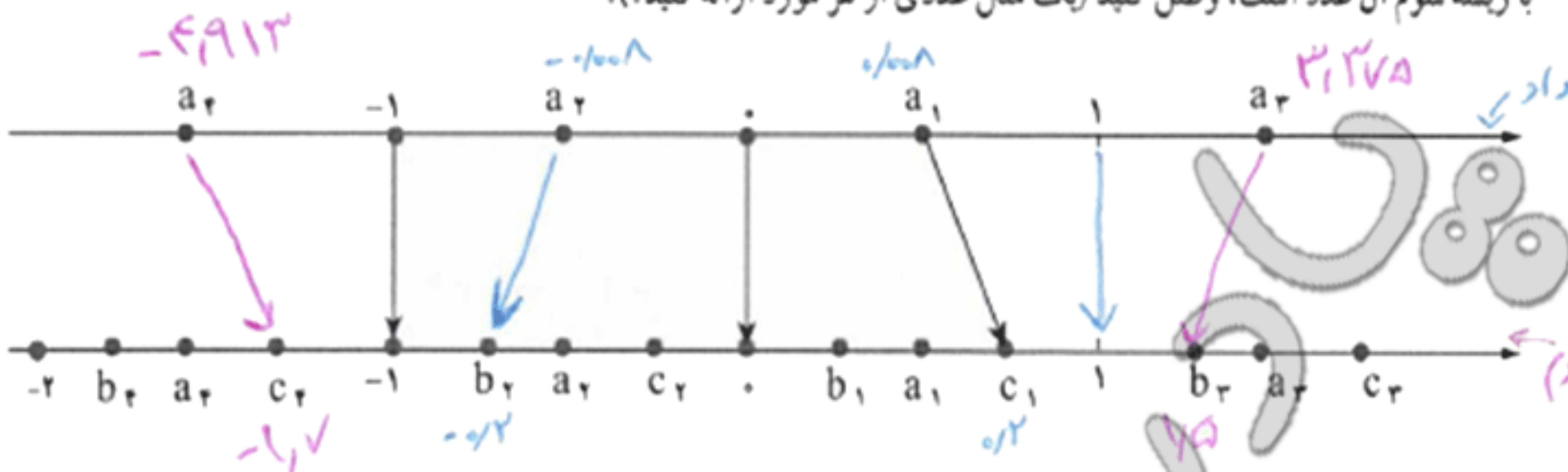
$$\sqrt[4]{256} = 4 < \sqrt[4]{400} < 5 = \sqrt[4]{625}$$

$$\sqrt[5]{243} = 3 < \sqrt[5]{400} < 4 = \sqrt[5]{1024}$$

۲ مقدار تقریبی هر کدام از اعداد رادیکالی زیر را با یک رقم اعشار مشخص کنید (می توانید از ماشین حساب استفاده کنید).

$$\begin{aligned} \sqrt{10} &\approx 3.16 \\ \sqrt[3]{27} &\approx 3.00 \\ \sqrt[4]{64} &\approx 2.83 \\ \sqrt{25} &\approx 5.00 \\ \sqrt[3]{64} &\approx 4.00 \\ \sqrt{7/25} &\approx 0.53 \end{aligned}$$

۳ مانند نمونه در شکل زیر، هر یک از اعداد مشخص شده روی محور بالا را به یکی از نقاط مشخص شده روی محور پایین که منظره باریشه سوم آن عدد است، وصل کنید (یک مثال عددی از هر مورد ارائه کنید).



۴ با توجه به آنچه درباره ریشه سوم اعداد درک کرده اید، به سوال های زیر پاسخ دهید.

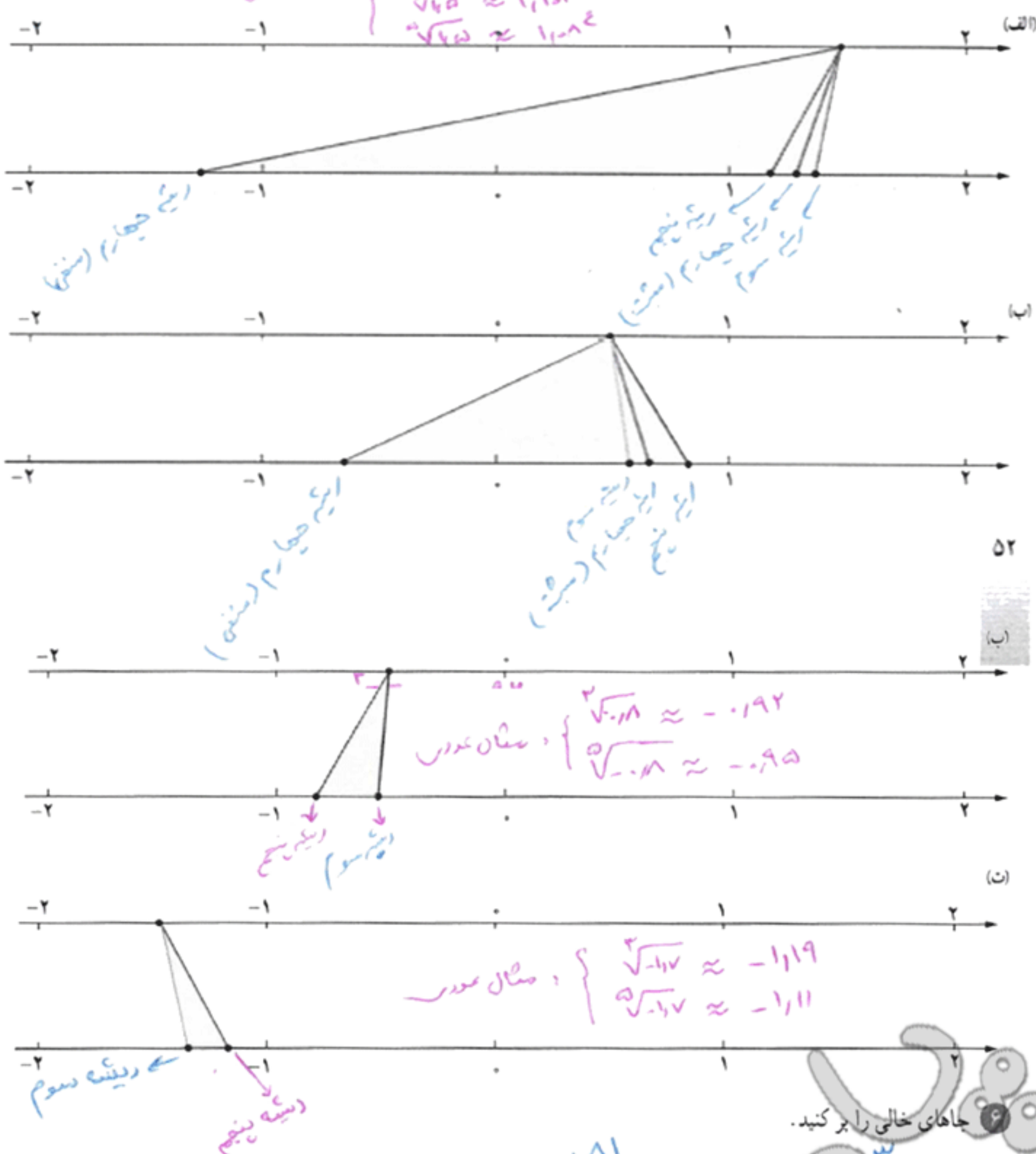
(الف) عددی مثبت است و $\sqrt[3]{a} > a$ چه عددی می تواند باشد؟ اعداد بین ۰ تا ۱

(ب) عددی است که ریشه سوم آن با خودش برابر است: یعنی $\sqrt[3]{a} = a$ چه اعدادی می تواند باشد؟ ۰، ۱، -۱

(پ) عددی مثبت است و $\sqrt[3]{a} < a$ چه اعدادی می تواند باشد؟ اعداد بزرگتر از ۱ ($a > 1$)

(ت) به موارد (الف) و (ب) برای حالتی که a عددی منفی باشد، نیز پاسخ دهید.

(الف) $a < 0, \sqrt[3]{a} > a$ اعداد کوچکتر از -۱ ($a < -1$)
 (ب) $a < 0, \sqrt[3]{a} < a$ اعداد بین ۰ و -۱ ($-1 < a < 0$)



۵۲
(ب)

جاهای خالی را پر کنید.
 الف) اعداد ۳ و ۴... ریشه های چهارم عدد ... + ۸۱ می باشند.
 ب) اگر $a = \sqrt[3]{16}$ باشد، در این صورت حاصل عبارت $a^2 + 5$ را بیابید.
 ۷) می دانیم $11 = \sqrt[5]{161051}$ ، $\sqrt[5]{170000}$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟
 ۸) در جاهای خالی یکی از علامت های «>» ، «<» یا «=» را قرار دهید.
 $(-0/1)^5 > (-0/1)^3$ $(0/1)^5 < (0/1)^3$ $2^5 > 2^3$
 $(-2)^5 < (-2)^3$ $(-2)^5 < (-2)^3$ $\sqrt[5]{0/00001} = 0/1$
 ۹) فرار دهید $\sqrt[5]{a} = \square$. اکنون با توجه به تعریف مشخص کنید \square^5 برابر چه عددی است؟ بنابراین داریم $(\sqrt[5]{a})^5 = a$ دربارۀ $(\sqrt[5]{a})^2$ چه می توان گفت؟ $(\sqrt[5]{a})^2 = a$

تهیه کننده: گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه استان خوزستان

۱ مشابه آنچه که برای ریشه های دوم، سوم، چهارم و پنجم گفته شد، می توان برای ریشه های دیگر مثلاً ریشه ششم نیز عمل کرد. جدول زیر را که مربوط به ریشه های مختلف عدد ۶۴ است، کامل کنید.

ریشه های دوم	ریشه سوم	ریشه های چهارم	ریشه پنجم	ریشه های ششم	ریشه هفتم	ریشه های هشتم
$\sqrt{64} = 8$ و $-\sqrt{64} = -8$	$\sqrt[3]{64} = 4$ و $-\sqrt[3]{64} = -4$	$\sqrt[4]{64}$ و $-\sqrt[4]{64}$	$\sqrt[5]{64}$	$\sqrt[6]{64} = 2$ و $-\sqrt[6]{64} = -2$	$\sqrt[7]{64}$	$\sqrt[8]{64} = 2$ و $-\sqrt[8]{64} = -2$

ریشه های ششم عدد ۶۴ اعداد $\sqrt[6]{64}$ و $-\sqrt[6]{64}$ با همان ۲ و -۲ هستند؛ زیرا $2^6 = 64$ و $(-2)^6 = 64$. درباره ریشه های هفتم و هشتم عدد ۶۴ چه می توانید بگویید؟ $(2^7 = 128, 2^8 = 256)$ به طور کلی اگر $n \in \mathbb{N}$ ، درباره ریشه n ام عدد ۶۴ چه می توان گفت؟ در حالت کلی اگر a یک عدد مثبت باشد و $n \in \mathbb{N}$ ، درباره تعداد ریشه های n ام a چه می توان گفت؟

$1 < \sqrt[n]{a} < a$ $0 < a < 1 \Rightarrow 0 < \sqrt[n]{a} < 1$

۲ جدول زیر را که درباره ریشه های مختلف عدد -۶۴ است، تکمیل کنید.

ریشه دوم	ریشه سوم	ریشه چهارم	ریشه پنجم	ریشه ششم	ریشه هفتم	ریشه هشتم
وجود ندارد	$\sqrt[3]{-64} = -4$	وجود ندارد	$\sqrt[5]{-64}$	وجود ندارد	$\sqrt[7]{-64}$	وجود ندارد

ریشه های زوج -۶۴ وجود ندارند؛ زیرا عددی وجود ندارد که به توان ... برسد و مساوی -۶۴ شود. درباره ریشه های n ام -۶۴ ($n \in \mathbb{N}$) بحث کنید.

اگر a یک عدد منفی و $n \in \mathbb{N}$ باشد، درباره ریشه n ام a چه می توان گفت؟
 $-1 < a < 0 \Rightarrow -1 < \sqrt[n]{a} < 0$ و n فرد باشد
 $a < -1, n$ فرد باشد $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n+1]{a} < -1$

درس دوم: ریشه nام

۳ جدول زیر را کامل کنید.

زوج n	a دارای دو ریشه n ام $\sqrt[n]{a}$ و $-\sqrt[n]{a}$ است	$a = 81$ $n = 4$	۸۱ دارای دو ریشه چهارم $\sqrt[4]{81} = 3$ و $-\sqrt[4]{81} = -3$ است
$a > 0$ فرد n	a دارای یک ریشه n ام $\sqrt[n]{a}$ است	$a = 27$ $n = 3$	۲۷ دارای یک ریشه سوم $\sqrt[3]{27} = 3$ است
زوج n	ریشه n ام وجود ندارد	$a = -16$ $n = 4$	وجود ندارد
$a < 0$ فرد n	a دارای یک ریشه n ام $\sqrt[n]{a}$ است	$a = -32$ $n = 5$	-۳۲ دارای یک ریشه پنجم $\sqrt[5]{-32} = -2$ است

الف) حاصل هر عبارت را به دست آورید:

$\sqrt{125} = 5$ $\sqrt[5]{-32} = -2$ $\sqrt{128} = 2\sqrt{2}$ $\sqrt[4]{256} = 4$
 $\sqrt{-1} = -1$ $\sqrt[4]{625} = 5$ $-\sqrt{16} = -4$ $\sqrt[5]{-1} = -1$
 $\sqrt{-128} = -2\sqrt{2}$ $\sqrt[5]{-0.001} = -0.1$ $-\sqrt{1} = -1$ $\sqrt[5]{0} = 0$

ب) الف) می دانید که $\sqrt{x^2} = |x|$ درباره $\sqrt{x^2}$ چه حدسی می زنید؟ درستی حدس خود را درباره چند عدد آزمایش کنید.

ب) کدام یک درست محاسبه شده است؟
 $\sqrt{(-2)^4} = \sqrt{16} = 4$ $\sqrt[4]{(-2)^4} = -2$ X
 $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$ $\sqrt[5]{(-3)^5} = -3$ ✓
 $\sqrt[4]{(-2)^4} = 2$ ✓
 $\sqrt[5]{(-3)^5} = -3$ ✓
 $\sqrt[4]{(-3)^4} = -3$ X
 $\sqrt[5]{(-3)^5} = 3$ ✓

ب) به طور کلی اگر n زوج باشد، $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ ؛ و اگر n فرد باشد $\sqrt[n]{a^n} = a$.
 ت) متالی ارائه دهد که نشان دهد تساوی زیر همیشه درست نیست!

ت) در قسمت (ت) تساوی به ازای چه مقادیری برای a و n برقرار است؟
 $\sqrt[4]{(-2)^4} \neq (\sqrt[4]{-2})^4$
 ت) اگر $a < 0$ و n زوج باشد.

در سال نهم دیدید که :

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab} \quad a \text{ و } b \text{ برای هر دو عدد مثبت}$$

آیا رابطه بالا درباره $\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b}$ نیز برقرار می باشد؟ مثال بزنید.

$$\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{ab} \quad a \text{ و } b \text{ برای هر دو عدد}$$

$$\sqrt[3]{1} \times \sqrt[3]{8} = 1 \times 2 = 2$$

$$\sqrt[3]{1} \times \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{1 \times 8} = \sqrt[3]{8} = 2$$

$$\sqrt[5]{425} \times \sqrt[5]{10000} = 5 \times 10 = 50$$

$$\sqrt[5]{425} \times \sqrt[5]{10000} = \sqrt[5]{4250000} = 50$$

نشان دهید که این رابطه برای هر دو عدد زوج و فرد نیز برقرار است.

اعدادی

با توجه به اینکه 4 یک عدد زوج است، باید a و b زوج باشند.

$$\sqrt[4]{16} \times \sqrt[4]{81} = 2 \times 3 = 6$$

$$\sqrt[4]{16} \times \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{1296} = 6$$

درباره $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ چه می توان گفت؟ درست است.

آیا a و b حتماً باید مثبت باشند؟ منافی از a و b مثبت و منافی از a و b منفی ارائه کنید و نشان دهید تساوی همواره برقرار است.

$$\sqrt[5]{32} \times \sqrt[5]{243} = 2 \times 3 = 6$$

$$\sqrt[5]{32} \times \sqrt[5]{243} = \sqrt[5]{7776} = 6$$

$a, b > 0$ و n زوج

۱) آیا $(\sqrt[5]{2})^5$ و $\sqrt[5]{2^5}$ با هم برابرند؟ درباره $(\sqrt[5]{-2})^5$ و $\sqrt[5]{(-2)^5}$ چه می توان گفت؟

$$(\sqrt[5]{2})^5 = \sqrt[5]{2} \times \sqrt[5]{2} \times \sqrt[5]{2} \times \sqrt[5]{2} \times \sqrt[5]{2} = \sqrt[5]{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2} = \sqrt[5]{2^5} = 2$$

۲) با توجه به اینکه

$$\sqrt[5]{(-2)^5} = -2$$

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

$$(\sqrt[5]{2})^3 = \sqrt[5]{2} \times \sqrt[5]{2} \times \sqrt[5]{2} = \sqrt[5]{2^3}$$

۳) درستی رابطه $\sqrt[k]{a^m} = (\sqrt[k]{a})^m$ را با مقادیر مختلف به m, k و a بررسی کنید (اگر k زوج باشد، a باید مثبت باشد).

$$\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{44} = 4$$

$$(\sqrt[3]{27})^4 = \sqrt[3]{27} \times \sqrt[3]{27} \times \sqrt[3]{27} \times \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{27 \times 27 \times 27 \times 27} = \sqrt[3]{27^4} = 4$$

$$\sqrt[7]{1000} = \sqrt[7]{1000} = \sqrt[7]{1000}$$

$$\sqrt[7]{1000} = \sqrt[7]{1000} = \sqrt[7]{1000}$$

۱ جدول زیر را کامل کنید.

$\sqrt[n]{a^m}$	زوج n	$a > 0$	$n=4$ $a=2$	$\sqrt[4]{2^4} = 2$	$(2= 2)$
		$a < 0$	$n=4$ $a=-2$	$\sqrt[4]{(-2)^4} = 2$	$(2= -2)$
	فرد n	$a > 0$	$n=3$ $a=2$	$\sqrt[3]{2^3} = 2$	()
		$a < 0$	$n=3$ $a=-2$	$\sqrt[3]{(-2)^3} = -2$	()

چه نتیجه‌ای از جدول بالا می‌گیرید؟

زوج n $\begin{cases} a > 0 \rightarrow \sqrt[n]{a^n} = a \\ a < 0 \rightarrow \sqrt[n]{a^n} = |a| \end{cases}$

فرد n $\begin{cases} a > 0 \rightarrow \sqrt[n]{a^n} = a \\ a < 0 \rightarrow \sqrt[n]{a^n} = a \end{cases}$

۲ جدول زیر را کامل کنید.

$(\sqrt[n]{a})^n$	زوج n	$a > 0$	$n=4$ $a=16$	$(\sqrt[4]{16})^4 = 2^4 = 16$
		$a < 0$	$n=4$ $a=-16$	$(\sqrt[4]{-16})^4 \rightarrow$ تعریف نشده
	فرد n	$a > 0$	$n=3$ $a=8$	$(\sqrt[3]{8})^3 = 2^3 = 8$
		$a < 0$	$n=3$ $a=-8$	$(\sqrt[3]{-8})^3 = -2^3 = -8$

چه نتیجه‌ای از جدول بالا می‌گیرید؟

زوج n $\begin{cases} a > 0 \rightarrow (\sqrt[n]{a})^n = a \\ a < 0 \rightarrow (\sqrt[n]{a})^n \rightarrow$ تعریف نشده است

فرد n $\begin{cases} a > 0 \rightarrow (\sqrt[n]{a})^n = a \\ a < 0 \rightarrow (\sqrt[n]{a})^n = a \end{cases}$

ایراد علامت = ندارد

۱ الف) یکی از علامت‌های > یا < را در □ قرار دهید.

$$(0.5)^4 \square (0.5)^3 \quad 25 = \sqrt{0.125} \square \sqrt[3]{0.125} = 1/5$$

ب) وقتی $0 < a < 1$ است، یکی از علامت‌های مقایسه را در □ قرار دهید.

$$a^4 \square a^3$$

مثال: $(0.7)^4 < (0.7)^3$ پس $0.7^4 < 0.7^3$

$$\sqrt{a} \square \sqrt[3]{a}$$

شماره عدد

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt[3]{0.7} \approx 0.883 \\ \sqrt{0.7} \approx 0.837 \end{array} \right.$$

۲ فرض کنیم $a = -1$ است، در □ علامت مناسب را قرار دهید.

$$\sqrt[3]{a} \square \sqrt[5]{a}$$

$$\sqrt[5]{a} \square \sqrt[3]{a}$$

$$a^4 \square a^3$$

$$a^3 \square a^5$$

۳ با توجه به تعریف ریشه (اگر $\sqrt[n]{a} = b$ آنگاه $b^n = a$)، نشان دهید برای هر عدد a و هر عدد طبیعی n (به شرط با معنا بودن رادیکال) رابطه زیر برقرار است:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a \quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \left(\sqrt[n]{b^n}\right)^n \quad (b^n)^n = a$$

۴ آیا تساوی $\sqrt[n]{a+b} = \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$ برقرار است؟ n را برابر ۴، ۳ یا ۵ بگیرید و به جای a و b مقدارهای عددی بدهید.

۵ عددهای زیر را مانند نمونه محاسبه کنید.

$$5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \left(\frac{1}{5}\right)^2 \rightarrow \sqrt[2]{5^{-2}} = \frac{1}{5}$$

$$\sqrt[5]{2^{-5}} = \sqrt[5]{\left(\frac{1}{2}\right)^5} = \frac{1}{2} \quad \sqrt[3]{\frac{1}{125}} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{5}\right)^3} = \frac{1}{5} \quad \sqrt[4]{3^{-4}} = \sqrt[4]{\left(\frac{1}{3}\right)^4} = \frac{1}{3}$$

۶ به جای a و b و عدد طبیعی n عددهایی قرار دهید: به طوری که:

$$\sqrt[3]{\frac{8}{125}} = \sqrt[3]{\frac{2^3}{5^3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{2}{5}\right)^3} = \frac{2}{5}$$

الف) تساوی $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ برقرار باشد.

$$\sqrt[3]{\frac{8}{125}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{2}{5}$$

ب) تساوی $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ برقرار نباشد. (وقتی n زوج است، a و b هر دو مثبت اند).

$$\sqrt[3]{8+27} = \sqrt[3]{35} \approx 3.27$$

$$\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{27} = 2 + 3 = 5$$

$$\sqrt[5]{22+243} = \sqrt[5]{265} \approx 3.8$$

$$\sqrt[5]{22} + \sqrt[5]{243} = 2 + 3 = 5$$

$$\sqrt[4]{425+81} = \sqrt[4]{506} \approx 4.8$$

$$\sqrt[4]{425} + \sqrt[4]{81} = 5 + 3 = 8$$

احتمال زیاد اشکال دارد - چون با شرطی که ذکر کرده همیشه تساوی برقرار است

تهیه کننده: گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه استان خوزستان

۱ توان های کسری زیر را در صورت امکان به شکل رادیکال بنویسید.

$$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{2}$$

$$3^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{3}$$

$$4^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{4}$$

$$5^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{5}$$

$$5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5}$$

$$(-3)^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{-3}$$

$$6^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{6}$$

$$81^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{81}$$

$$(-5)^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{-5}$$

۲ کدام درست است؟

الف) $(-32)^{\frac{1}{5}} = -2$ ✗

ب) $\sqrt[5]{-32} = -2$ ✓

حاصل $a^{\frac{m}{n}}$ که $a > 0$ و m و n دو عدد طبیعی هستند را چگونه حساب می کنیم؟
در مبحث توان با نماهای طبیعی یادتان هست چگونه عمل کردیم؟

$$2^6 = 2^{2 \times 3} = (2^2)^3$$

(قاعده ضرب توان)

در مورد توان های گویا هم می توانیم به طریق مشابه عمل کنیم:

$$2^{\frac{2}{3}} = 2^{2 \times \frac{1}{3}} = (2^2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2^2}$$

$$5^{\frac{8}{3}} = 5^{8 \times \frac{1}{3}} = (5^8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5^8}$$

به طور کلی:

هرگاه $a > 0$ برای هر دو عدد طبیعی m و n ، توان کسری و غیر صحیح $\frac{m}{n}$ را برای a چنین تعریف می کنیم:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

اکنون شما اعداد توان دار را در صورت امکان به شکل رادیکال بنویسید.

ب) $\sqrt[2]{2^3} = 2^{\frac{3}{2}}$

ب) $\sqrt[3]{3^2} = 3^{\frac{2}{3}}$

الف) $\sqrt[2]{5^3} = 5^{\frac{3}{2}}$

ج) $(-3)^{\frac{2}{3}}$ تعریف نمی شود

ت) $\sqrt[3]{16^2} = 16^{\frac{2}{3}}$

ت) $(-6)^{\frac{2}{3}}$ تعریف نمی شود

۱ تساوی های زیر را مانند نمونه به صورت رادیکالی بنویسید.

$$3^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{3^2}$$

$$3^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{3^2 \times 3} = \sqrt[3]{3^2} \times \sqrt[3]{3} = 3\sqrt[3]{3}$$

$$4^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{4}$$

$$2^{\frac{2}{3}} \times 2^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{3} + \frac{2}{3}} = 2^{\frac{4}{3}}$$

$$4^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{4} = \sqrt[2]{2^2} = 2$$

$$5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{5 \times 5} = 5\sqrt[3]{5}$$

$$(16^{\frac{1}{2}})^{\frac{2}{3}} = (16^{\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}})^{\frac{2}{3}} = (16^{\frac{1}{3}})^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{16^2}$$

$$5^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{2}{3}} = 5^{\frac{1}{2} + \frac{2}{3}} = 5^{\frac{7}{6}} = 5\sqrt[6]{5}$$

$$\sqrt[3]{3^2} = 3^{\frac{2}{3}}$$

$$\sqrt[2]{2^5} = 2^{\frac{5}{2}}$$

$$\sqrt[3]{7^2} = 7^{\frac{2}{3}}$$

$$\sqrt{-1} = i$$

$$\sqrt[5]{19} = 19^{\frac{1}{5}}$$

$$\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{2^6} = 2^{\frac{6}{3}} = 2^2$$

$$\sqrt{-27} = 3i$$

$$\sqrt[5]{25} = 25^{\frac{1}{5}}$$

۲ جدول های زیر را کامل کنید:

$a > 0$	a^2	a^{-2}	$a^{\frac{1}{2}}$	$a^{\frac{1}{3}}$
$a = 5$	5^2	$\frac{1}{5^2}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt[3]{5}$

$a < 0$	a^2	a^{-2}	$a^{\frac{1}{2}}$	$a^{\frac{1}{3}}$
$a = -5$	$(-5)^2$	$\frac{1}{(-5)^2}$	تعریف نمی شود	$(-5)^{\frac{1}{3}}$

بعضی از توان ها را می توانیم به صورت کسری بنویسیم

۱) هر یک از توان های کسری زیر را به صورت رادیکال بنویسید.

$$16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} \quad 3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{3}{3}} = \sqrt[3]{3^3} \quad 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5} \quad 4^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4^2} \quad (4^{\frac{1}{2}})^{\frac{2}{3}} = 4^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4}$$

$a > 0 \rightarrow a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$

$$3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$4^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4}$$

$$32^{-\frac{1}{5}} = \left(\frac{1}{32}\right)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{\frac{1}{32}}$$

$$32^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{32^2}$$

$$17^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{17}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{17}}$$

۲) هر یک از رادیکال ها را به صورت توان کسری بنویسید. توجه داشته باشید که نمای کسری وقتی معنادار دارد که پایه عدد مثبت باشد.

$a > 0 \rightarrow \sqrt[2]{a^2} = a^{\frac{2}{2}}$

$a > 0 \rightarrow \sqrt[5]{a^2} = a^{\frac{2}{5}}$
 $\sqrt[5]{a^2} = a^{\frac{2}{5}}$

$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$

$\sqrt[5]{2^{10}} = 2^{\frac{10}{5}} = 2^2$

۳) می دانیم

$$\sqrt[2]{a^2} = a^{\frac{2}{2}} = a^1 = \sqrt{a}$$

$$\sqrt[2]{a^2} = (a^2)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{2}{2}} = a^1 = \sqrt{a}$$

آیا تساوی $\sqrt[kn]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^m}$ همواره برقرار است ($a > 0$)؟ n, m, k طبیعی اند نتیجه بگیرید که هر سه عدد $\sqrt{2}$ ، $\sqrt[2]{2}$ و $\sqrt[4]{2}$ برابرند.

۴) فرض کنیم $a=64$ ، $r=\frac{1}{3}$ و $s=\frac{1}{4}$ مقدارهای عددی $\frac{a^r}{a^s}$ و a^{r-s} را محاسبه و با هم مقایسه کنید.

اکنون خودتان، مانند نمونه سه مقدار دیگر برای a ، r و s انتخاب کنید و بار دیگر مقدارهای $\frac{a^r}{a^s}$ و a^{r-s} را محاسبه و با هم مقایسه کنید.

می توانید از ماشین حساب کمک بگیرید. چه نتیجه ای می گیرید؟

۵) حساب کنید.

$$\sqrt{\sqrt{5}} = \sqrt[2]{5^{\frac{1}{2}}} = (5^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{1}{4}}$$

$$\sqrt[2]{\sqrt{64}} = \sqrt[2]{4} = 2$$

$$\sqrt{\sqrt{81}} = \sqrt[2]{9} = 3$$

$\frac{4^{\frac{1}{3}}}{4^{\frac{1}{4}}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[4]{4}} = \frac{1}{4} = 2$

$a^{r-s} = 64^{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}} = 64^{\frac{4-3}{12}} = 64^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{64} = \sqrt[12]{2^6} = 2^{\frac{6}{12}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

$\sqrt[4]{2^2} = 2^{\frac{2}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

$\sqrt[4]{2^2} = \sqrt{2} = \sqrt[2]{2^2}$

$\sqrt[4]{2^2} = 2^{\frac{2}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

تهیه کننده: گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه استان خوزستان

۱ حاصل عبارت های زیر را به دست آورید و ساده کنید. *نشانی جبری با این باشد*

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3 = a^3 + b^3$$

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3$$

۲ با استفاده از پرسش ۱ عبارت های $a^3 - b^3$ و $a^3 + b^3$ را تجزیه کنید و اتحاد های جدیدی

به دست آورید. *مشاهده به سوال ۱۱ دارد*

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

این را هم جبری

$$\begin{cases} (a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3 \\ (a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3 \end{cases}$$

۳ عبارت های زیر را مانند نمونه تجزیه کنید.

$$\begin{aligned} 8x^3 - 27 &= (2x)^3 - 3^3 \\ &= (2x - 3)[(2x)^2 + 2x \times 3 + 3^2] \\ &= (2x - 3)(4x^2 + 6x + 9) \end{aligned}$$

$$x^3 + 1 = (x)^3 + (1)^3 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$$

$$x^3 - 8 = (x)^3 - (2)^3 = (x - 2)(x^2 + x(2) + (2)^2) = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$$

$$x^3 - 125 = (x)^3 - 5^3 = (x - 5)(x^2 + x(5) + 5^2) = (x - 5)(x^2 + 5x + 25)$$

$$\begin{aligned} x^3 - 1 &= (x^3)^3 - 1^3 = (x^3 - 1)(x^{6x^2} + x^{3x} + 1) = (x^3 - 1)(x^{6x^2} + x^{3x} + 1) \\ &= (x - 1)(x + 1)(x^2 + x + 1) \end{aligned}$$

فعالیت

آیا $a + b$ مضرب دیگری دارد؟ *بله*

۱ مضرب های هر عبارت جبری و یا یک چند جمله ای. از ضرب آن عبارت در عددهای صحیح و یا عبارت های جبری دیگر (و یا همزمان در هر دو) به دست می آیند:

..... و $(a + b)(a - b)$ و $-4(a + b)$ و $(a + b)(a + b)^2$ و $2(a + b)$ و $a + b$: بعضی از مضرب های $a + b$

بعضی از مضرب های $a - b$ را بنویسید. $(a - b)^2, 2(a - b), -5(a - b), 2a(a - b)$

۲ دو عبارت بنویسید که $a - b$ شمارنده هر یک از آنها باشد. $(a + b)(a^2 + b^2), (a - b)^2(a + b)$

۳ عبارت $27a^3 - 1$ مضرب کدام یک از عبارت هاست؟

الف) $a - 1$ ب) $3a - 1$ ج) $9a^2 + 3a + 1$ د) $2a + 1$

$$27a^3 - 1 = (3a - 1)(9a^2 + 3a + 1)$$

نکته: عبارت $\sqrt{3}(a + b)$ یک مضرب $a + b$ محسوب نمی شود. ضرایب عددی فقط می توانند عدد صحیح باشند.

۴ کدام یک از عبارت های زیر گویا هستند؟

الف) $\frac{\sqrt{3x} - \sqrt{7}}{x^2}$ ب) $\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^2 + 1}$ ج) $\sqrt{x} - 1$ د) $\sqrt[3]{x^2} + x - 1$

نکته: یک عبارت گویا به ازای مقدارهایی از متغیر که مخرج آن صفر می شود، تعریف نمی گردد. (مقدار ندارد)

۵ عبارت گویای زیر به ازای چه مقدارهایی از x تعریف نمی شود؟

ملاحظه: $x=1$ و $x=0$ تعریف نشده است.

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2+4}$$

۶ حاصل کسرهای زیر را به دست آورید و ساده کنید.

الف) $\frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{2}{\sqrt{x}+1} + \frac{3}{x-1} = \frac{1(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} + \frac{2(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} + \frac{3}{x-1} = \frac{\sqrt{x}+1 + 2\sqrt{x}-2 + 3}{x-1} = \frac{3\sqrt{x}+2}{x-1}$

ب) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2-1} + \frac{1}{x^2+1} = \frac{(x+1)(x^2+1) + (x-1)(x^2+1) - (x^2+1) + (x^2-1)}{(x^2-1)(x^2+1)}$

۷ حاصل عبارت زیر را به دست آورید.
$$= \frac{x^3 + x + x^2 + x + x^3 + x - x^2 - 1 + x^2 - 1}{(x^2-1)(x^2+1)} = \frac{2x^3 + 2x - 2}{(x^2-1)(x^2+1)}$$

1 صورت و مخرج هر کسر را تجزیه و عبارت را ساده کنید. (جاهای خالی را پر کنید)

الف) $\frac{x^6 + 1}{x^4 + 2x^2 + 1} = \frac{(x^2 + 1)(x^4 + 1)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^4 + 1}{x^2 + 1} = \frac{(x-1)(x^2 + x - 1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2 + x - 1}{(x-1)^2}$

ب) $\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \frac{x^2 + 1}{(x^2 + 1)(x^2 - 1)} = \frac{1}{x^2 - 1}$ ن) $\frac{y^3 - y}{y^2 + y^2 + y} = \frac{y(y^2 - 1)}{y(y^2 + y + 1)} = \frac{y^2 - 1}{y^2 + y + 1}$

ن) $\frac{y^5 - y^3 - 12y}{8y^2 + 16y} = \frac{y(y^4 - y^2 - 12)}{8y(y + 2)} = \frac{y(y^2 - 4)(y^2 + 3)}{8y(y + 2)} = \frac{y(y-2)(y+2)(y^2 + 3)}{8y(y + 2)} = \frac{(y-2)(y^2 + 3)}{8}$ در اتحاد

$a^2 + 1 = (a+1)(a^2 - a + 1)$

فرار دهید $a = \sqrt{x^2}$ و حاصل را بازنویسی کنید:

$(\sqrt{x^2})^2 + 1 = (\sqrt{x^2} + 1)(\sqrt{x^2} - \sqrt{x^2} + 1)$

$x^2 + 1 = (\sqrt{x^2} + 1)(\sqrt{x^2} - \sqrt{x^2} + 1)$

2 گویا کردن مخرج های گنگ: صورت و مخرج کسرهای زیر را مانند نمونه در عبارتهای ضرب کنید که عبارت مخرج تبدیل به یک عبارت گویا شود.

$\frac{1}{\sqrt{x^2} + 1} = \frac{(\sqrt{x^2})^2 - \sqrt{x^2} + 1}{(\sqrt{x^2} + 1)(\sqrt{x^2})^2 - \sqrt{x^2} + 1}$

$= \frac{\sqrt{x^2} - \sqrt{x^2} + 1}{x^2 + 1}$

$\frac{1}{\sqrt{x} - 1} = \frac{(\sqrt{x})^2 + \sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x})^2 + \sqrt{x} + 1} = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x} + 1}{x - 1}$

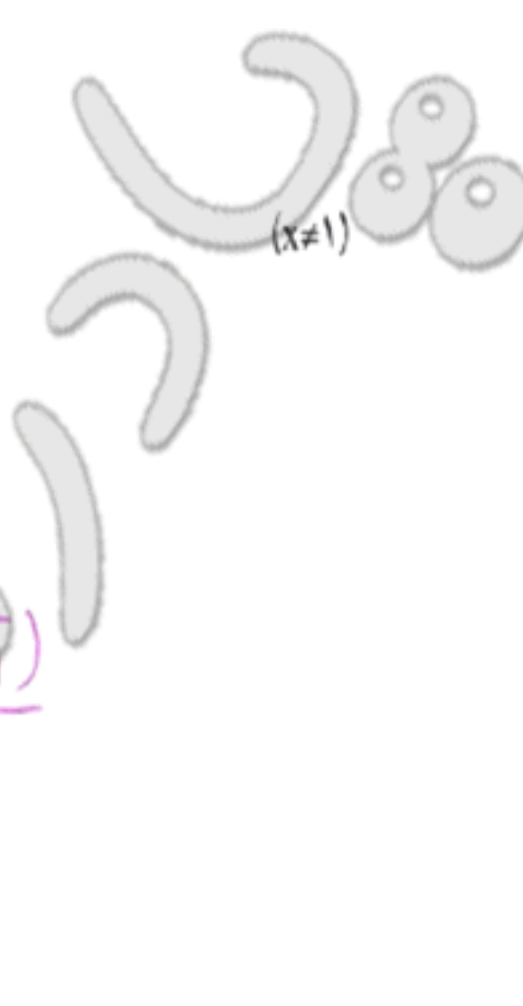
$\frac{1}{\sqrt{x} - 1} = \frac{\sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{\sqrt{x} + 1}{x - 1}$

$\frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)} = \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$

$\frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})} = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x - y}$

$\frac{x + y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{(x + y)(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})} = \frac{(x + y)(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{x - y}$

$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})} = \frac{x - 2\sqrt{xy} + y}{x - y}$



۱ هر یک از عبارات را تا حد ممکن (به عبارات های گویا) تجزیه کنید.

پ) $x^2 + y^2$

ب) $x^2 - y^2$

الف) $x^2 - y^2$

۲ مخرج کسره های زیر را گویا کنید.

ت) $\frac{1}{\sqrt{x-1}} + \frac{2}{\sqrt{x+1}} - \frac{5x}{x-1}$

ب) $\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$

ب) $\frac{1}{\sqrt{x} - 2}$

الف) $\frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$

۳ بعضی از ضرب های عددی را با استفاده از اتحادها می توان به صورت ذهنی حساب کرد. مانند نمونه. بقیه ضرب ها را ذهنی انجام دهید.

الف) $16 \times 14 = (15+1)(15-1) = 15^2 - 1 = 224$

ب) 105^2

ب) 1007^2

ب) 99^2

الف) $x^4 - y^4 = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) = (x - y)(x + y)(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)$

ب) $x^4 - y^4 = (x^2 + y^2)(x^2 - y^2) = (x^2 + y^2)(x - y)(x + y)$

ب) $x^2 + y^2$ تجزیه نمی شود

الف) $\frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \frac{(1)(\sqrt{x^2} + \sqrt{xy} + \sqrt{y^2})}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x^2} + \sqrt{xy} + \sqrt{y^2})} = \frac{\sqrt{x^2} + \sqrt{xy} + \sqrt{y^2}}{x - y}$

ب) $\frac{1}{\sqrt{x} - 2} = \frac{(1)(\sqrt{x^2} + 2\sqrt{x} + 4)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x^2} + 2\sqrt{x} + 4)} = \frac{\sqrt{x^2} + 2\sqrt{x} + 4}{x - 4}$

ب) $\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{(1)(\sqrt{x^2} - \sqrt{xy} + \sqrt{y^2})}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x^2} - \sqrt{xy} + \sqrt{y^2})} = \frac{\sqrt{x^2} - \sqrt{xy} + \sqrt{y^2}}{x + y}$

ت) $\frac{1}{\sqrt{x} - 1} + \frac{2}{\sqrt{x} + 1} - \frac{5x}{x-1} = \frac{(1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} + \frac{(2)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} - \frac{5x}{x-1}$
 $= \frac{\sqrt{x} + 1 + 2\sqrt{x} - 2 - 5x}{x-1} = \frac{3\sqrt{x} - 5x - 1}{x-1}$

۳) دیکر ب حل شده = 14×14 الف) 105^2

ب) $105^2 = (100 + 5)^2 = (100)^2 + 2(100)(5) + 5^2 = 10000 + 1000 + 25 = 11025$

ب) $(1007)^2 = (1000 + 7)^2 = (1000)^2 + 2(1000)(7) + (7)^2$
 $= 1000000 + 14000 + 49 = 1014049$

ت) $(99)^2 = (100 - 1)^2 = (100)^2 - 2(100)(1) + (1)^2 = 10000 - 200 + 1 = 9801$

۴ کسرها را گویا و سپس به یک کسر تبدیل کنید.

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}-1} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}-1}$$

۵ عبارت $a^4 - 2b^4 + 2a^2b^2$ را تجزیه کنید.

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}-1} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}-1}$$

$$= \frac{1}{x-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x-1} + \frac{(\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{x-1} + \frac{(\sqrt[4]{x}+1)(\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}$$

$$= \frac{1 + (\sqrt{x}+1) + (\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt{x}+1) + (\sqrt[4]{x}+1)(\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{x+1}$$

$$a^4 - 2b^4 + 2a^2b^2 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - 3b^4$$

$$= (a^2 + b^2)^2 - 3(b^2)^2 = (a^2 + b^2 - \sqrt{3}b^2)(a^2 + b^2 + \sqrt{3}b^2)$$

بر این عبارت به این صورت باشد: $a^4 - 2b^4 + 2a^2b^2$ تجزیه آن چنین می شود.

$$a^4 - 2b^4 + 2a^2b^2 = a^4 - a^2b^2 + 2a^2b^2 - 2b^4 + 2a^2b^2 = a^2(a^2 - b^2) + 2b^2(a^2 - b^2)$$

$$= (a^2 - b^2)(a^2 + 2b^2) = (a-b)(a+b)(a^2 + 2b^2)$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}-1} \times \frac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x}+1} = \frac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{x}-1} \times \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \frac{(\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}$$

$$\frac{1}{\sqrt[4]{x}-1} \times \frac{\sqrt[4]{x}+1}{\sqrt[4]{x}+1} = \frac{\sqrt[4]{x}+1}{\sqrt{x}-1} \times \frac{\sqrt[4]{x}+1}{\sqrt[4]{x}+1} = \frac{(\sqrt[4]{x}+1)(\sqrt[4]{x}+1)}{\sqrt{x}-1} \times \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$$

$$= \frac{(\sqrt[4]{x}+1)(\sqrt[4]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}$$

فصل چہارم

تهیه کننده: گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه استان خوزستان

بنابراین در هر حالت یک مستطیل با اضلاع ۹ و ۶ سانتی متر به دست می آید.

تمرین

۱) معادله های زیر را به کمک تجزیه حل کنید.

$$at^2 - 20 = 0$$

$$a(t^2 - 4) = 0$$

$$a(t-2)(t+2) = 0$$

$$\begin{cases} t-2=0 & t=2 \\ t+2=0 & t=-2 \end{cases}$$

$$x^2 - 11x + 10 = 0$$

$$(x-1)(x-10) = 0$$

$$\begin{cases} x-1=0 & x=1 \\ x-10=0 & x=10 \end{cases}$$

$$1) 5t^2 = 20$$

$$2) 4k^2 - 12k + 8 = 0$$

$$3) 5a^2 - 7a = 2a(a-2)$$

$$5a^2 - 7a = 2a^2 - 4a$$

$$3a^2 - a = 0 \rightarrow a(3a-1) = 0$$

۲) هر یک از معادله های زیر را با ریشه دوم گرفتن حل کنید.

$$4(k^2 - 3k + 2) = 0$$

$$4(k-1)(k-2) = 0$$

$$\begin{cases} k-1=0 & k=1 \\ k-2=0 & k=2 \end{cases}$$

$$1) n^2 - 2 = 26 \rightarrow n^2 = 28 \quad n = \pm\sqrt{28}$$

$$2) x^2 + 12 = 3 \rightarrow x^2 = -9$$

ریشه حقیقی ندارد

$$3) 3 - 2k = 2k(2k-1)$$

$$3) (2t-2)^2 = 4$$

$$3t-2 = \pm 2 \rightarrow 3t = 4 \rightarrow t = \frac{4}{3}$$

$$3t-2 = -2 \rightarrow 3t = 0 \rightarrow t = 0$$

۳) معادله های زیر را به روش مربع کامل حل کنید.

$$3 - 3k = 4k^2 - 3k$$

$$3 = 4k^2$$

$$k^2 = \frac{3}{4}$$

$$k = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$1) x^2 - 6x = 7$$

$$2) s^2 - 2s + 3 = 0$$

$$4) 2a^2 + 5a - 3 = 0$$

$$r^2 + 2r = 0$$

$$r(r+2) = 0$$

$$\begin{cases} r+2=0 & r=-2 \\ r=0 & r=0 \end{cases}$$

$$x^2 - 4x = 7$$

$$x^2 - 4x + 4 = 7 + 4$$

$$(x-2)^2 = 11$$

$$x-2 = \pm\sqrt{11}$$

$$x = 2 \pm \sqrt{11}$$

$$a^2 + \frac{9}{4}a = \frac{17}{4}$$

$$a^2 + \frac{9}{4}a + \frac{81}{64} = \frac{17}{4} + \frac{81}{64}$$

$$(a + \frac{9}{8})^2 = \frac{149}{64}$$

$$a + \frac{9}{8} = \pm\sqrt{\frac{149}{64}}$$

$$a + \frac{9}{8} = \pm\frac{\sqrt{149}}{8}$$

$$a = -\frac{9}{8} \pm \frac{\sqrt{149}}{8}$$

$$s^2 - 2s + \frac{9}{4} = \frac{9}{4} - 3$$

$$(s - \frac{1}{2})^2 = -\frac{3}{4}$$

معادله ریشه حقیقی ندارد

www.riazidahanom.ir

$$x^2 - 13x + 3 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 169 - 12 = 157$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{13 \pm \sqrt{157}}{2}$$

$$\frac{1}{10}t^2 - \frac{1}{5}t - \frac{1}{5} = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = \frac{1}{25} - 4(\frac{1}{10})(-\frac{1}{5}) = \frac{1}{25} + \frac{2}{5} = \frac{9}{25}$$

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\frac{1}{5} \pm \frac{3}{5}}{2(\frac{1}{10})} = \frac{4}{2} = 2$$

$$r^2 + r - 3 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 12 = -11 < 0$$

معادله ریشه حقیقی ندارد

$$a^2 + 2\sqrt{3}a - 9 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2\sqrt{3})^2 - 4(1)(-9) = 12 + 36 = 48$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2\sqrt{3} \pm 4\sqrt{3}}{2}$$

$$x = \sqrt{3} \text{ و } x = -3\sqrt{3}$$

$$1) 2x^2 = 25 \rightarrow x^2 = 12.5 \rightarrow x = \pm\sqrt{12.5}$$

$$2) a^2 + 2\sqrt{3}a = 9$$

$$1) 9 - 6z + z^2 = 0 \rightarrow (z-3)^2 = 0 \rightarrow z = 3$$

$$2) b^2 + \sqrt{2}b - 4 = 0$$

$$(b + \frac{1}{\sqrt{2}})^2 = \frac{1}{2} + 4 = \frac{9}{2}$$

$$b + \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$b = 1 \text{ و } b = -2$$

$$1) 2x^2 = 25 \rightarrow x^2 = 12.5 \rightarrow x = \pm\sqrt{12.5}$$

$$2) a^2 + 2a = 1$$

$$a^2 + 2a - 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4(1)(-1) = 8$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$$

مجموع مربعات دو عدد فرد متوالی ۲۹ است. این دو عدد را پیدا کنید.

پایین صفحه بعد



۷) طول یک مستطیل ۳ سانتی متر بیشتر از ۴ برابر عرض آن است. اگر مساحت این مستطیل ۴۵ سانتی متر مربع باشد، ابعاد این مستطیل را مشخص کنید.

$$a(4a+3) = 45$$

$$4a^2 + 3a - 45 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4(4)(-45) = 9 + 720 = 729$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 \pm 27}{8}$$

$$x = 3 \text{ و } x = -10$$

۸) آنها ۶۰ شود، سن هر کدام چقدر است؟

$$x^2 + 12x - 21 = 0$$

$$(x+14)(x-1.5) = 0 \rightarrow x = -14 \text{ و } x = 1.5$$

جواب سوال ۶

$$(2k+1)^2 + (2k+3)^2 = 290$$

$$4k^2 + 4k + 1 + 4k^2 + 12k + 9 = 290$$

$$8k^2 + 16k - 210 = 0$$

$$\Delta = (16)^2 - 4(8)(-210) = 0$$

$$8(k+7)(k-15) = 0$$

$k = -7$ و $k = 15$

۱۱ فرد اول و ۱۳ فرد بعدی
۱۳ - فرد اول و ۱۱ - فرد بعدی

۱ یک عکس به اندازه ۱ در ۱۵ سانتی متر درون یک قاب با مساحت ۲۰۰ سانتی متر مربع، قرار دارد. اگر فاصله همه لبه های عکس تا قاب برابر باشد، ابعاد این قاب عکس را پیدا کنید.

صفت بد

۱۱ در یک تیمگان (لیگ) والیبال، ۴۵ بازی انجام شده است. اگر هر تیم با دیگر تیم های تیمگان، تنها یک بازی انجام داده باشد، تعداد تیم های این تیمگان را به دست آورید. اگر تعداد بازی های تیمگان N و تعداد تیم ها n باشد، الگویی برای تعداد بازی ها به دست آورید.

صفت بد

۱۲ فشار خون نرمال یک شخص مذکر، که بر حسب میلی متر جیوه (mmHg) اندازه گیری می شود، با رابطه $P = 0.004s^2 - 0.02s + 120$ محاسبه می شود که در آن، P فشار خون نرمال یک فرد با سن s است. سن شخصی را پیدا کنید که فشار خون آن ۱۲۵ میلی متر جیوه باشد. (از مانسین حساب استفاده کنید.)

صفت بد

www.nazidahan.com

$$S = (10 + 2n)(10 + 2n)$$

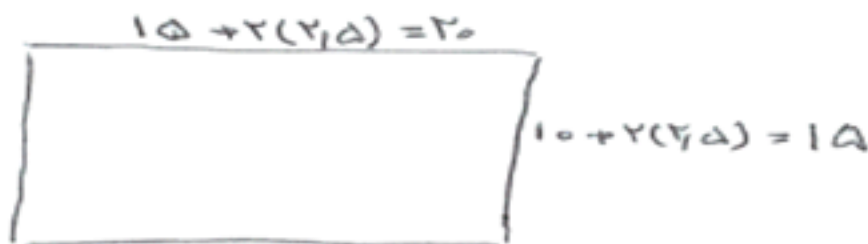
$$200 = 100 + 20n + 20n + 4n^2$$

$$4x^2 + 40x - 100 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2000 - 4(4)(-100) = 2000 + 1600 = 3600$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-40 \pm \sqrt{3600}}{8} = \frac{-40 \pm 60}{8}$$

$x = \frac{20}{8} = 2.5 \checkmark$
 $x = \frac{-100}{8} = -12.5 \times$



ابعاد قاب ۲۰ x ۱۵ می باشد.

$$\frac{n(n-1)}{2} = 45$$

$$n^2 - n = 90$$

$$n^2 - n - 90 = 0$$

$$(n-10)(n+9) = 0$$

$$\begin{cases} n-10=0 & n=10 \checkmark \\ n+9=0 & n=-9 \times \end{cases}$$

تعداد تیم ما ده تیم می باشد

هر تیم می تواند با سایر تیم ما به جز خودش بازی کند پس n تیم می تواند n-1 بازی انجام دهند و چون بازی ها، صورت رفت و برگشت هر دو در نظر گرفته شده اند پس به ۶ مرتبه تقسیم می کنیم

$$P = 0.004s^2 - 0.02s + 120$$

$$125 = 0.004s^2 - 0.02s + 120$$

$$0.004s^2 - 0.02s - 5 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (0.02)^2 - 4(0.004)(-5)$$

$$\Delta = 0.0004 + 0.08 = 0.0804$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{0.02 \pm \sqrt{0.0804}}{0.008} \approx \frac{0.02 \pm 0.2835}{0.008}$$

$$x = \frac{0.3035}{0.008} = 37.9375 \checkmark \text{ و } x = \frac{-0.2635}{0.008} = -32.9375 \times$$

۱ نمودار هر یک از سهمی‌های زیر را رسم کنید.

- الف) $y = -(x+1)^2 - 2$
- ب) $y = 2x^2 - 2$
- پ) $y = x - x^2$
- ت) $y = \frac{x^2}{2} + x - 2$

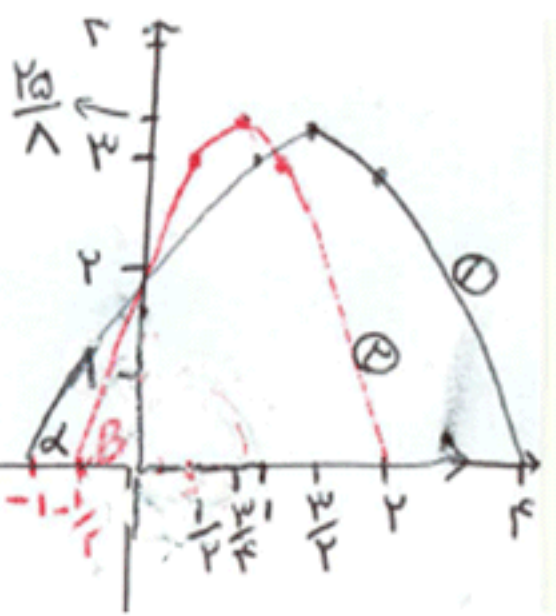
$y = \frac{x^2}{2} + x - 2$
 $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2(\frac{1}{2})} = -1$
 $y = \frac{(-1)^2}{2} + (-1) - 2 = -\frac{3}{2}$

$y = -x^2 - x$
 $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-1)}{2(-1)} = \frac{1}{2}$
 $y = -(\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2} = -\frac{5}{4}$

۲ اگر دو نقطه از یک سهمی باشند، خط تقارن این سهمی را به دست آورید. خط تقارن عمود منصف قطعی از سهمی است که خط عامل ارتفاع آن می‌باشد.

۳ نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ محور y ها را در نقطه‌ای به عرض 2 و محور x ها را در نقاط به طول -1 و 2 قطع کرده است. معادله این سهمی را بنویسید و آن را رسم کنید.

۴ دو برنابگر وزنه در یک مسابقه ورزشی، وزنه‌های خود را با زاویه‌های متفاوت α و β که $\alpha < \beta$ است، برناب کرده‌اند. برنابگر A ، زاویه α را انتخاب می‌کند و مسیر طی شده از رابطه $y = -\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x + 2$ به دست می‌آید. برنابگر B نیز زاویه β را انتخاب می‌کند و مسیر



$y = ax^2 + bx + c$
 $(0, 2) \rightarrow y = a(0)^2 + b(0) + c \rightarrow c = 2$
 $(-1, 0) \rightarrow 0 = a(-1)^2 + b(-1) + 2 \rightarrow a - b = -2$
 $(2, 0) \rightarrow 0 = a(2)^2 + b(2) + 2 \rightarrow 4a + 2b = -2$

$$\begin{cases} a - b = -2 \\ 4a + 2b = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a + 2b = -2 \\ 4a + 2b = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a + 2b = -2 \\ 3a = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -1 \end{cases}$$

$y = -x^2 + x + 2$
 $0 = (-1)^2 + (-1) + 2 = 2$ (check)

$y = -\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x + 2$
 $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-\frac{3}{2}}{2(-\frac{1}{2})} = \frac{3}{2}$
 $y = -\frac{(\frac{3}{2})^2}{2} + \frac{3}{2}(\frac{3}{2}) + 2 = -\frac{9}{8} + \frac{9}{4} + 2 = \frac{25}{8}$

$y = -2x^2 + 3x + 2$
 $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-3}{2(-2)} = \frac{3}{4}$
 $y = -2(\frac{3}{4})^2 + 3(\frac{3}{4}) + 2 = -\frac{9}{8} + \frac{9}{4} + 2 = \frac{25}{8}$

ب) محل برخورد وزنه با زمین یا محور x ها در چه نقطه‌ای است؟ کدام یک از وزنه‌ها مسافت افقی بیشتری را طی کرده است؟ وزنه A .

ب) کدام یک از وزنه‌ها ارتفاع بیشتری از سطح زمین پیدا کرده است؟ اندازه آنها را مشخص کند. هر دو وزنه ارتفاع یکسان از سطح زمین پیدا کرده‌اند بیشترین ارتفاع هر دو وزنه از سطح زمین $\frac{25}{8}$ می‌باشد.

محل برخورد وزنه A با محور x
 $y = -x^2 + \frac{3}{2}x + 2$
 $0 = -x^2 + \frac{3}{2}x + 2$
 $x^2 - \frac{3}{2}x - 2 = 0$
 $(x-4)(x+1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=-1 \end{cases}$

محل برخورد وزنه B با محور x
 $y = -2x^2 + 3x + 2$
 $\Delta = b^2 - 4ac$
 $\Delta = 9 - 4(-2)(2) = 9 + 16 = 25$
 $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 \pm 5}{-4}$
 $x = 2, x = -\frac{1}{2}$

بیشترین ارتفاع هر دو وزنه از سطح زمین یکسان است اما وزنه A نسبت به وزنه B مسافت بیشتری را طی می‌کند.

مسافت وزنه A : $4 - (-1) = 5 \text{ m}$
 مسافت وزنه B : $2 - (-\frac{1}{2}) = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} = 2.5 \text{ m}$

در هر یک از نامعادله‌های زیر، مجموعه جواب را به شکل بازه بنویسید.

- الف) $1 < 2x - 3 \leq 2$
- ب) $x + 1 \leq 5 - x < 2x + 3$
- ج) $x(x^2 + 4) < 0$
- د) $x(x^2 - 1) = 0$
- ه) $\frac{x^2 - x}{x^2 - 2x + 2} \leq 0$
- و) $x^2 - 2x + 2 = 0$
- ز) $|7 - 2x| < 1$
- ح) $\left| \frac{x-1}{2} - 1 \right| \geq 3$
- ط) $-2 < \frac{5-x}{2} < 0$
- ی) $\frac{2-2x}{3x+1} \geq 0$

تمرین (1) $2 < x \leq 3$ $(2, 3]$ $4 < 2x \leq 4$ $1 + 3 < 2x \leq 3 + 3$ $1 < 2x - 3 \leq 3$ اعا

ب) $x(x^2 + 4) < 0$

x	0		
$x^2 + 4$	+	+	+
$x(x^2 + 4)$	-	+	+

جواب $(-\infty, 0)$

ب) $x + 1 \leq 5 - x < 2x + 3$

$$\begin{cases} x + 1 \leq 5 - x \rightarrow 2x \leq 4 \rightarrow x \leq 2 \\ 5 - x < 2x + 3 \rightarrow 2 < 3x \rightarrow \frac{2}{3} < x \end{cases}$$

جواب $(\frac{2}{3}, 2]$

ج) $\frac{x^2 - x}{x^2 - 2x + 2} \leq 0$

$x^2 - 2x + 2 = 0$
 $\Delta = 4 - 4(1)(2) = -4 < 0$
 هر دو مثبت $\Delta < 0$

$x^2 - 1 = 0$
 $x = \pm 1$

x	-1	0	1	
$x^2 - 1$	+	-	+	+
$x^2 - 2x + 2$	+	+	+	+
$\frac{x^2 - x}{x^2 - 2x + 2}$	-	+	-	+

جواب $(-\infty, -1] \cup [0, 1)$

ب) $-2 < \frac{5-x}{2} < 0$
 $-4 < 5 - x < 0$ $-9 < -x < -5$ $5 < x < 9$ $(5, 9)$

ج) $|7 - 2x| < 1$
 $-1 < 7 - 2x < 1 \rightarrow -8 < -2x < -6 \rightarrow 4 > x > 3$ $(3, 4)$

د) $\frac{x^2 - x}{x^2 - 2x + 2} \geq 0$

$x^2 - 2x = 0 \rightarrow x = 0, 2$
 $x^2 + 1 = 0 \rightarrow x = \pm i$

x	$-\frac{1}{i}$	0	2
$x^2 - 2x$	+	+	-
$x^2 + 1$	-	+	+
$\frac{x^2 - x}{x^2 + 1}$	-	+	-

جواب $(-\frac{1}{i}, 2]$

ح) $\left| \frac{x-1}{2} - 1 \right| \geq 3$

$$\begin{cases} \frac{x-1}{2} - 1 \leq -3 \rightarrow \frac{x-1}{2} \leq -5 \rightarrow x-1 \leq -10 \rightarrow x \leq -9 \\ \frac{x-1}{2} - 1 \geq 3 \rightarrow \frac{x-1}{2} \geq 7 \rightarrow x-1 \geq 14 \rightarrow x \geq 15 \end{cases}$$

جواب $(-\infty, -9] \cup [15, \infty)$

۲ به ازای چه مقادیری از k ، عبارت $A = x^2 + 2x + k$ همواره مثبت است؟ $9 < 4k$ $\frac{9}{4} < k$

۳ به ازای چه مقادیری از m ، سهمی $y = mx^2 - mx - 1$ همواره پایین محور x است؟ $صحنه بعد$

۴ یک جسم از بالای یک ساختمان که ۱۳ متر ارتفاع دارد، به هوا پرتاب می‌شود. اگر ارتفاع این جسم از سطح زمین در ثانیه t از رابطه $h = -5t^2 + 18t + 13$ محاسبه شود، در چه فاصله زمانی، ارتفاع نوب از سطح زمین بیشتر از ۱۳ متر خواهد بود؟ $صحنه بعد$

۵ تعداد ضربان قلب، پس از x دقیقه کار سنگین بدنی، طبق رابطه $y = \frac{15}{8}x^2 - 30x + 200$ به دست می‌آید. در چه زمان‌هایی پس از یک کار سنگین بدنی، تعداد ضربان قلب از ۱۱۰ بیشتر است؟ آیا تمام جواب‌های به دست آمده قابل قبول اند؟

$$\frac{15}{8}x^2 - 30x + 200 > 110$$

$$\frac{15}{8}x^2 - 30x + 90 > 0 \rightarrow \frac{15}{8}x^2 - 240x + 720 > 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-240)^2 - 4(\frac{15}{8})(720) = 57600 - 54000 = 3600$$

$$\sqrt{\Delta} = 60$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{240 \pm 60}{\frac{15}{4}} \Rightarrow x = \frac{300}{\frac{15}{4}} = 80$$

$$x = \frac{180}{\frac{15}{4}} = 48$$



خبر تمام جواب‌های بدست آمده قابل قبول نیست چون بنا به تعریف علامت کمتر از ۴ (دسته و دسته‌بندی) ۱۳ نشده است. در تمام مواردی که در آن دسته‌بندی شده است.

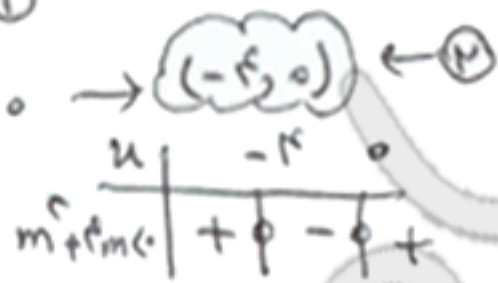
تمرین ۳

$$y = mx^2 - mx - 1$$

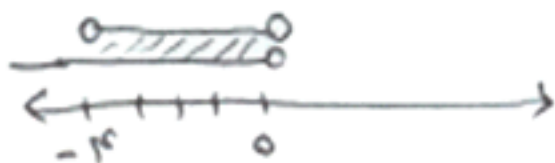
همواره پایین محور x است همواره مثبتی

$$\begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m^2 + 4m < 0 \end{cases}$$

$$m(m+4) < 0 \rightarrow \begin{cases} m < -4 \\ m > 0 \end{cases}$$



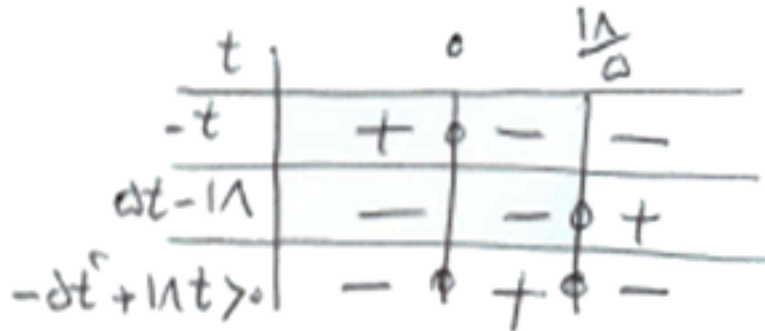
$$(1) \cap (2)$$



جواب $(-4, 0)$

$$h > 13 \quad -5t^2 + 18t + 13 > 13$$

$$-5t^2 + 18t > 0 \quad -t(5t - 18) = 0$$



$$t \in (0, \frac{18}{5})$$

تمرین ۴

فصل پنجم

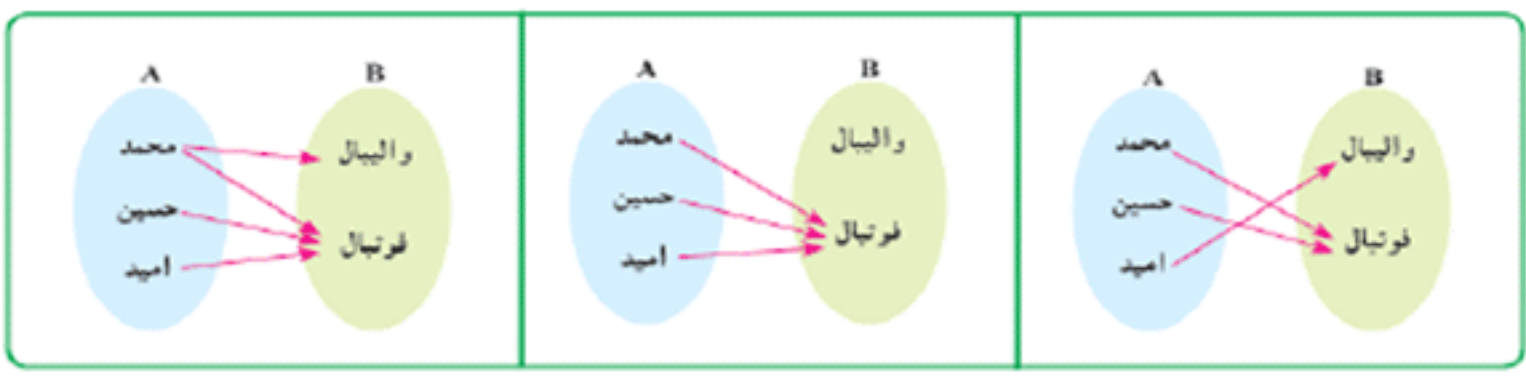
جدول‌های فعالیت ۱ را می‌توان به کمک مجموعه‌ها و پیکان‌هایی که اعضای آنها را به هم مربوط می‌کنند، مشخص کرد. به این شیوه نمایش نمودارهای پیکانی می‌گوییم. یک نمونه کامل شده است. بقیه را شما کامل کنید.



توجه دارید که در رابطه‌های بالا، از هر عضو مجموعه A دقیقاً یک پیکان خارج شده است. این گونه رابطه بین دو مجموعه را یک «تابع» می‌نامند.

کار در کلاس

۱. مجموعه A شامل سه دانش‌آموز به نام‌های محمد، حسین و امید و مجموعه B شامل دو رشته ورزشی است که دانش‌آموزان می‌توانند انتخاب کنند. کدام یک از نمودارهای پیکانی داده شده تابع است و کدام یک تابع نیست؟



تابع نیست

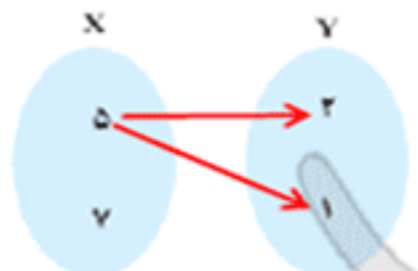
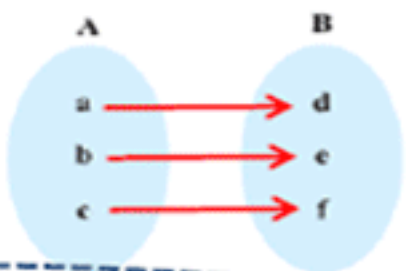
تابع است

تابع است

تهیه کننده: گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه استان خوزستان

درس اول: مفهوم تابع و پیکان‌های آن

۲. از مجموعه A به مجموعه B نمودار پیکانی را طوری رسم کنید که یک تابع را نمایش دهد. از مجموعه X به مجموعه Y این کار را به گونه‌ای انجام دهید که حاصل یک تابع نباشد. پاسخ خود را با پاسخ دوستانتان مقایسه کنید.



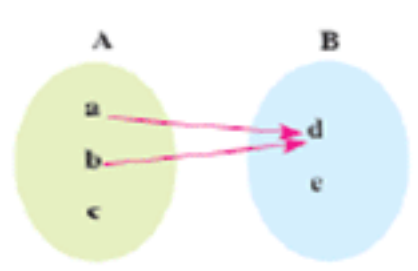
بله؛ یک فرد معین نمی‌تواند دو وزن متفاوت داشته باشد.

بله. یک فرد معین نمی‌تواند دو سن متفاوت داشته باشد.

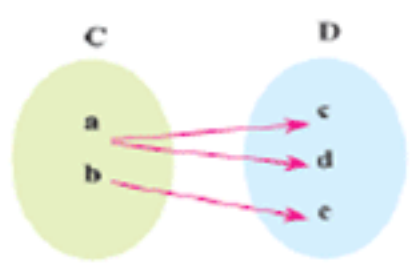
۳. الف) آیا رابطه‌ای که به افراد سن آنها را نسبت می‌دهد، یک تابع است؟ رابطه‌ای که به افراد وزن آنها را نسبت می‌دهد، چگونه؟
ب) آیا رابطه‌ای که به افراد غذای مورد علاقه آنها را نسبت می‌دهد، یک تابع است؟ توضیح دهید.

خیر. یک فرد معین می‌تواند همزمان به دو غذای متفاوت علاقه داشته باشد.

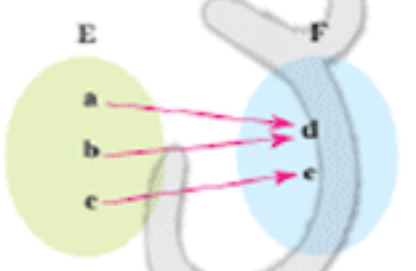
۴. کدام یک از نمودارهای پیکانی زیر یک تابع است؟



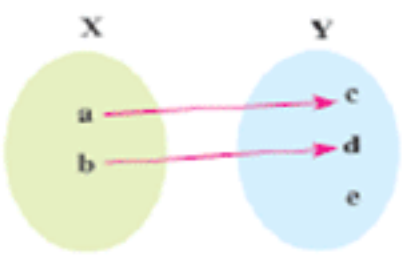
تابع نیست



تابع نیست



تابع است



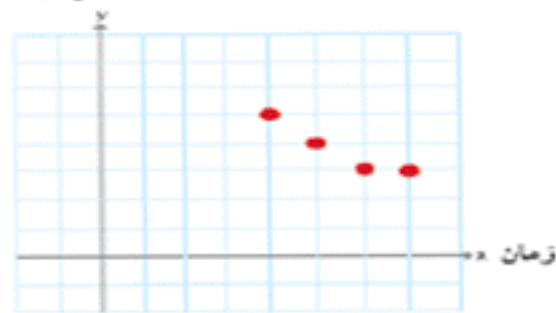
تابع است

نمودار زیر، دمای هوا را در چهار ساعت متفاوت در اردبیل نشان می دهد.

رابطه بین زمان و دما را به صورت نمودار بیکانی نمایش دهید و معلوم کنید که آیا این رابطه یک تابع است؟ جدول را هم کامل کنید.



دما (سانتی گراد)



ساعت	۴	۵	۶	۷
دما	۵	۴	۳	۳

اگر در نمودار بالا محور افقی را محور طول و محور عمودی را محور عرض در نظر بگیریم، مختصات هر یک از نقاط داده شده را می توان با یک «زوج» از اعداد به صورت زیر نمایش داد:

$(4, 5), (5, 4), (6, 3), (7, 3)$

صفحه ۹۸

۱۳۹۳

۱ نام شهرهای تهران، مشهد، اصفهان، شیراز، تبریز و اهواز در یک سطر جدول زیر نوشته شده اند. در سطر دیگر، جمعیت آن شهرها را به طور تقریبی بنویسید (جمعیت دقیق لازم نیست).

شهر	تهران	مشهد	اصفهان	شیراز	تبریز	اهواز	کرمان
جمعیت	۱۲۰۰۰۰۰۰	۷۰۰۰۰۰۰	۶۰۰۰۰۰۰	۵۵۰۰۰۰۰	۴۰۰۰۰۰۰	۴۰۰۰۰۰۰	۳۰۰۰۰۰۰

رابطه بالا را به صورت بیکانی و زوج مرتب نمایش دهید. آیا این رابطه یک تابع است؟

تهیه کننده:
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه
استان خوزستان



توصیف رابطه	مجموعه زوج های مرتب	نمودار بیکانی	جدول با نمودار
به هر عدد طبیعی کمتر از ۴ مقسوم علیه های آن را نسبت می دهد.	$\{(1,1), (2,1), (2,2), (3,1), (3,3)\}$ تابع نیست		
به اعداد ۲ و ۳ و ۴ مجنورشان را نسبت می دهد	$\{(2,4), (3,9), (4,16)\}$ تابع است		
به اعداد ۲ و ۷ ریشه های دوم آنها را نسبت می دهد.	$\{(2,2), (2,-2), (7,\sqrt{7}), (7,-\sqrt{7})\}$ تابع نیست		
به اعداد ۱- و ۰ و ۱ دو برابر شان را نسبت می دهد	$\{(-1,-2), (0,0), (1,2)\}$ تابع است		
به اعداد ۱- و ۰ و ۱ مکعبشان را نسبت می دهد	$\{(-1,-1), (0,0), (1,1)\}$ تابع است		

۳ الف) کدام یک از رابطه های زیر تابع است؟ چرا؟

$g = \{(1,5), (2,9), (2,5), (3,10)\}$

$f = \{(1,5), (2,9), (3,10)\}$

رابطه ی f یک تابع است زیرا هیچ یک از مولفه های اول آن تکرار نشده است.

ب) با تکمیل جمله زیر برای تشخیص تابع بودن یک رابطه، هنگامی که رابطه به صورت زوج مرتبی ارائه می شود، معیاری به دست آورید:

- ۱ کدام یک از روابط زیر یک تابع را معلوم می‌کند؟ توضیح دهید.
- الف) رابطه‌ای که به ضلع یک مربع، محیط مربع را نسبت می‌دهد. **تابع است، زیرا به ازای هر طول ضلع فقط یک محیط وجود دارد.**
- ب) رابطه‌ای که به هر فرد، دمای بدن او را در یک زمان معین نسبت می‌دهد. **تابع است، زیرا به ازای هر فرد در یک زمان فقط یک دما وجود دارد.**
- ج) رابطه‌ای که به هر فرد، گروه خونی او را نسبت می‌دهد. **تابع است، زیرا به هر فرد فقط یک گروه خونی را می‌توان نسبت داد.**
- د) رابطه‌ای که به هر دانش‌آموز، دوستان او را نسبت می‌دهد. **تابع نیست، زیرا یک دانش‌آموز می‌تواند بیش از یک دوست داشته باشد.**
- ه) رابطه‌ای که به هر عدد، ریشه‌های دوم آن عدد را نسبت می‌دهد. **تابع نیست، زیرا عدد مثبت بیشتر از یک ریشه دوم دارد.**
- و) رابطه‌ای که به هر عدد، ریشه سوم آن را نسبت می‌دهد. **تابع است، زیرا هر عدد فقط یک ریشه سوم دارد.**

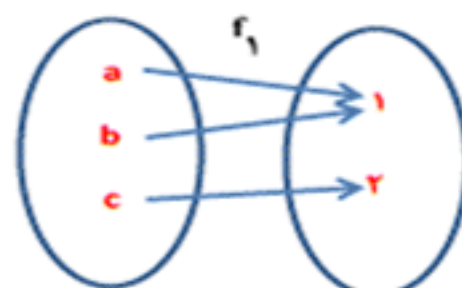
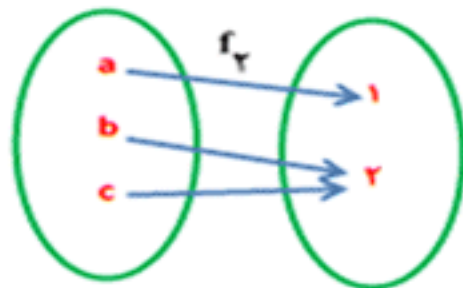
تهیه کننده:
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه
استان خوزستان

۲ مجموعه‌های $A = \{a, b, c\}$ و $B = \{1, 2\}$ داده شده‌اند.

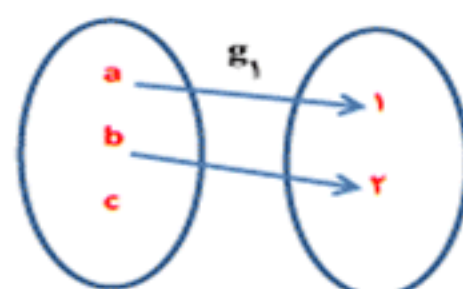
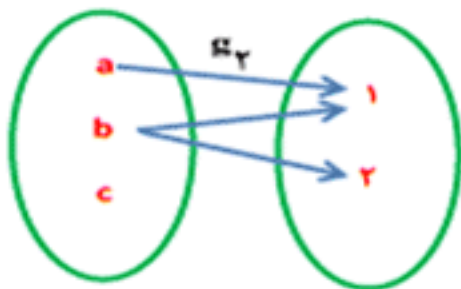
الف) به کمک نمودار بی‌کافی دو رابطه از A به B ارائه کنید که تابع باشند.

ب) دو رابطه ارائه کنید که تابع نباشند.

ج) چهار رابطه به دست آمده را به کمک زوج‌های مرتب و نمودار نمایش دهید.

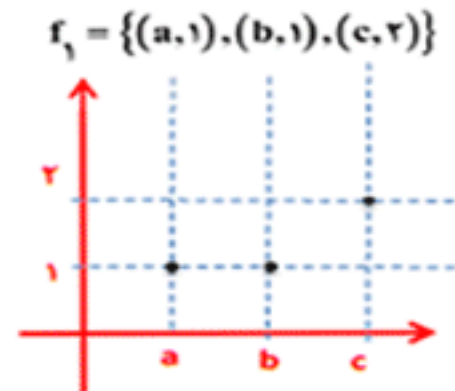
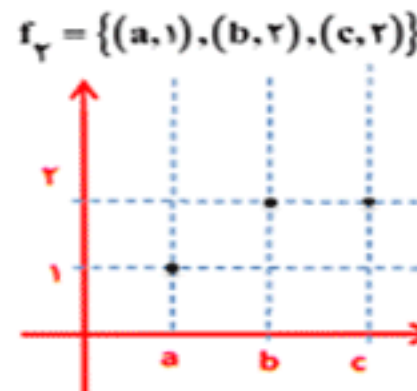
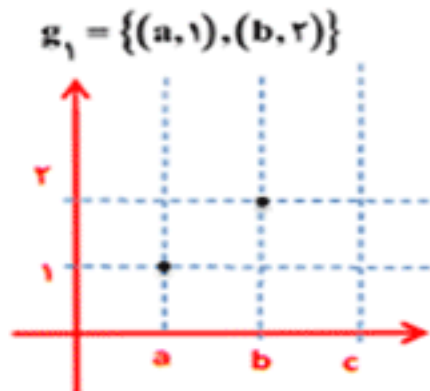
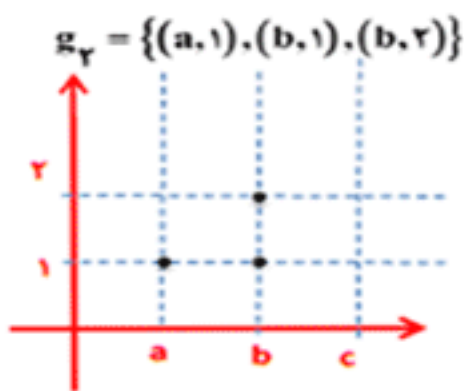


پاسخ الف:



پاسخ ب:

پاسخ ج:



۳ کدام یک از مجموعه‌های زیر یک تابع است؟

$f = \{(2, 1), (3, -5), (3, 7)\}$ **تابع نیست**

$g = \{(0, 1), (\frac{3}{5}, 1), (-5, 1), (8, 1)\}$ **تابع است**

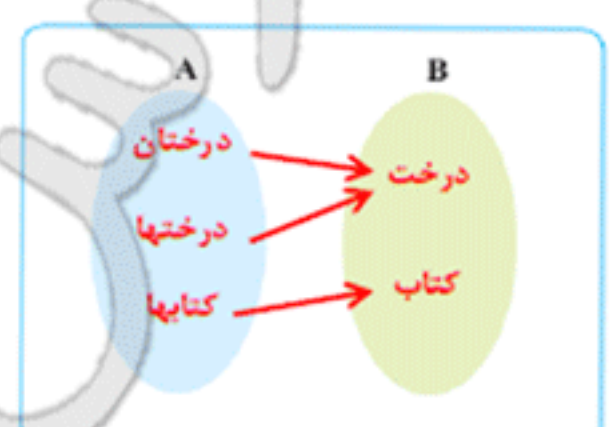
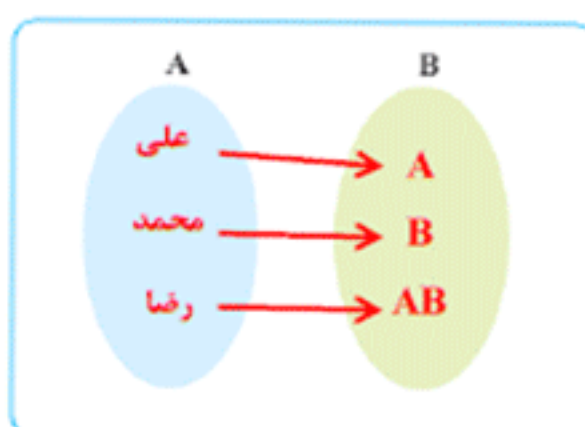
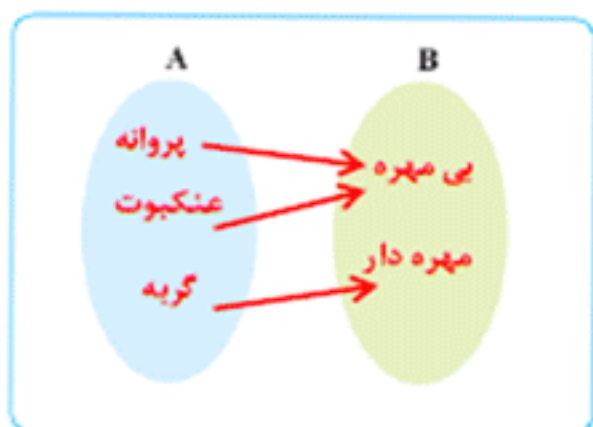
$h = \{(2, 3), (3, 2), (1, 1)\}$ **تابع است**

$k = \{(2, 5)\}$ **تابع است**

$r = \{(2, 0), (-7, 0)\}$ **تابع است**

$l = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), \dots\}$ **تابع است**

۴ A و B مجموعه‌هایی غیر عددی‌اند، در شکل زیر در A و B اعضای دلخواه بگذارید و یک تابع از A به B به کمک نمودار بی‌کافی ارائه کنید. سعی کنید لااقل سه تابع مختلف بنویسید. پاسخ خود را با پاسخ دوستانتان مقایسه کنید.



در جدول زیر رابطه بین تعدادی چند ضلعی و مجموع زوایای داخلی آنها داده شده است. جدول را کامل کنید.

چندضلعی	مثلث	مربع	لوزی	پنج ضلعی
مجموع زوایای داخلی (درجه)	180°	360°	360°	540°

این رابطه را به صورت زوج مرتبی نمایش دهید.

تهیه کننده: گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه استان خوزستان

چرا f یک تابع است؟

و زوج مرتب متمایز در آن مولفه های اول یکسان ندارند

کاردر کلاس

۱ در جدول زیر رابطه بین ضلع یک مربع و محیط آن داده شده است. جدول را کامل کنید.

طول ضلع	$\frac{1}{2}$	۱	$\frac{3}{2}$	۲	۴	۵
محیط	۲	۴	۶	۸	۱۲	۲۰

نمایش رابطه داده شده را به صورت مجموعه زوج های مرتب بنویسید. چرا این رابطه تابع است؟ دامنه و برد این تابع را بنویسید.

$$f = \left\{ \left(\frac{1}{2}, 2 \right), (1, 4), \left(\frac{3}{2}, 6 \right), (2, 8), (4, 12), (5, 20) \right\}$$

زیرا هیچ دو زوج مرتب متمایز در آن مولفه های اول یکسان ندارند

$$D_f = \left\{ \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, 4, 5 \right\}, D_g = \{2, 4, 6, 8, 12, 20\}$$

۲ الف) تابعی مثل بزنید که دامنه آن سه عضو و برد آن دو عضو داشته باشد. $f = \{(1, 2), (-1, 2), (4, 1)\}$

ب) آیا تابعی وجود دارد که دامنه آن دو عضو و برد آن سه عضو داشته باشد؟ خیر

۳ اگر f تابعی از مجموعه A به مجموعه B باشد، می دانیم که دامنه f همان مجموعه A است. آیا همیشه برد تابع f با مجموعه B برابر است؟ مثال بزنید. خیر، مثال

$$A = \{1, 2\}, B = \{-1, -2, -3\}; f = \{(1, -2), (2, -1)\}$$

مسئله ۵: تابع

شعاعیت

دنباله شکل های زیر را در نظر بگیرید:



جدول را کامل کنید.

شماره شکل	۱	۲	۳	۴	۵	۶	...	۱۰۰	...	n	...
تعداد دایره ها	۱	۳	۵	۷	۹	۱۱	...	۱۹۹	...	2n-1	...

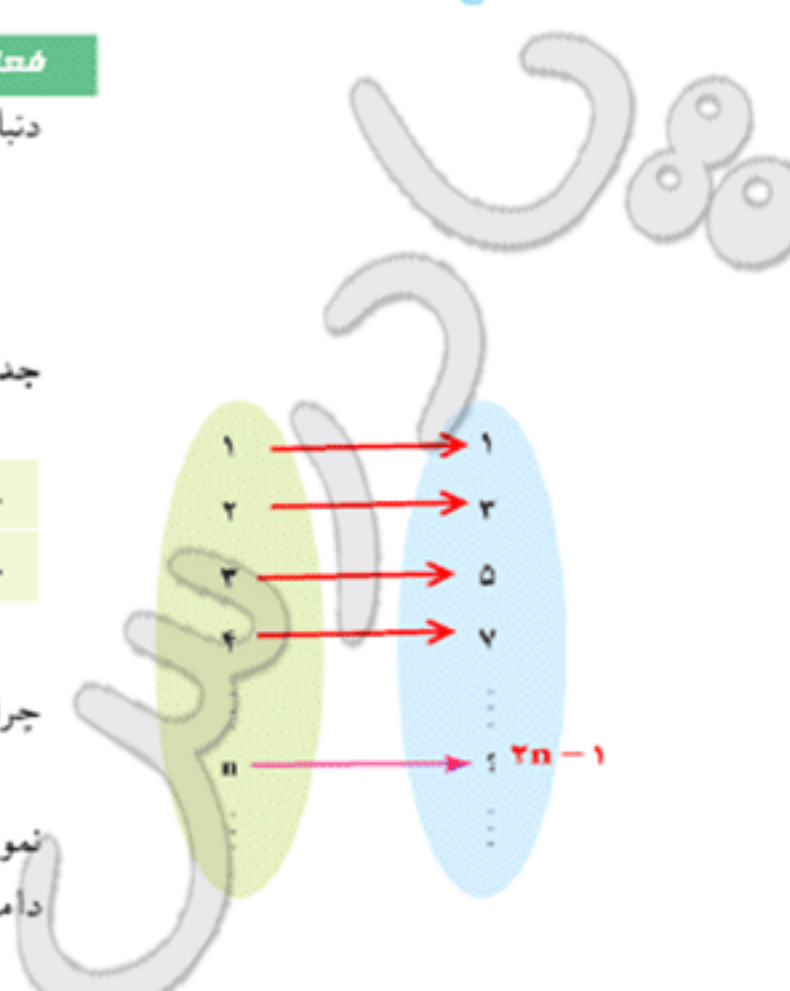
چرا این جدول یک تابع را نشان می دهد؟ نمایش زوج مرتبی این تابع:

$$f = \{(1, 1), (2, 3), (3, 5), \dots, (100, \dots), \dots, (n, \dots), \dots\}$$

نمودار بیکانی و نمودار مختصاتی این تابع را رسم کنید.

دامنه و برد این تابع را بنویسید. دامنه و برد چه مجموعه هایی هستند؟ نام ببرید.

$$D_f = \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}, R_f = \{1, 3, 5, \dots\} = \mathbb{O}$$



اگر تابعی با نمایش جبری $f(n) = n^2 + 1$ داده شده باشد و دامنه آن $A = \{1, 2, 3, 4\}$ باشد، برد تابع f را به دست آورید.

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= 1+1=2 \\ f(2) &= 4+1=5 \\ f(3) &= 9+1=10 \\ f(4) &= 16+1=17 \end{aligned} \right\} \Rightarrow R_f = \{2, 5, 10, 17\}$$

صفحه ۱۰۳

جدول را کامل کنید و از آن برای رسم نمودار خط $y = 2x - 1$ استفاده کنید.

x	۱	۲	۳	-۱	۰	-۲	-۳	-۴
y	۱	۳	۵	-۳	-۱	-۵	-۷	-۹

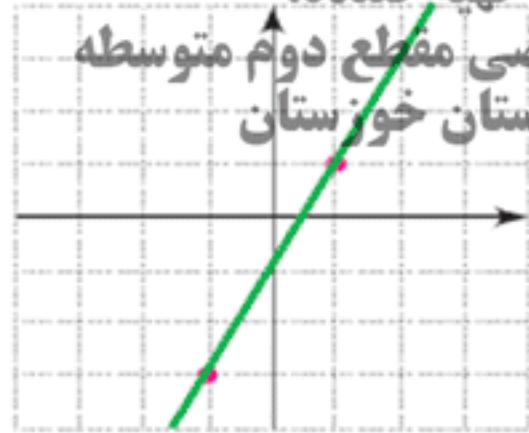
آیا می‌توانید شباهت این جدول و تفاوت آن را با جدول فعالیت قبل نشان دهید؟ چرا این جدول هم یک تابع را نشان می‌دهد؟ این تابع را g بنامید.

نمودار این تابع و تابع داده شده در فعالیت قبل چه تفاوتی با هم دارند؟ دامنه و برد این تابع را به دست آورید و با دامنه و برد تابع $f(n) = 2n - 1$ که در آن $n \in \mathbb{N}$ مقایسه کنید. جاهای خالی را کامل کنید.

$$g\left(-\frac{1}{5}\right) = -\frac{7}{5} \quad g(0) = -1 \quad g\left(\frac{2}{7}\right) = -\frac{3}{7} \quad g(\sqrt{5}) = \sqrt{5} - 1 \quad g(10) = 19$$

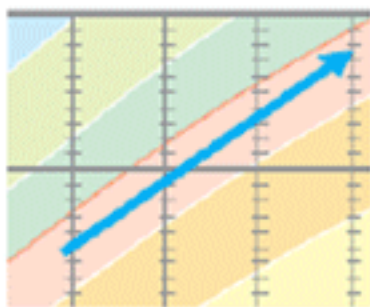
نمایش جبری تابع داده شده در این «کاردر کلاس» را بنویسید. $g(x) = \dots$ در اینجا x یک عدد حقیقی است.

تهیه کننده:
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه
استان خوزستان

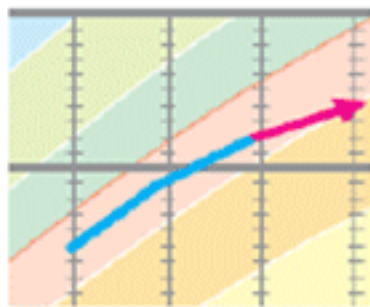


شباهت: مختصات نقاط هر دو جدول در یک راستا است.

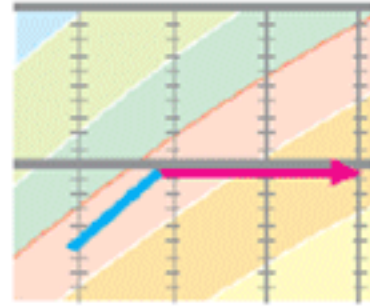
تفاوت: مولفه های اول جدول فعالیت قبل مجموعه اعداد طبیعی است ولی در این فعالیت مولفه های اول اعداد حقیقی اند



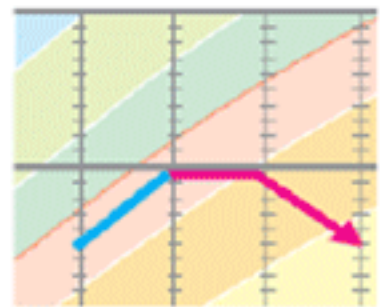
الف) رشد مطلوب



ب) کندی رشد



پ) توقف رشد



ت) افت رشد

زمان (ماه)	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
وزن (کیلوگرم)	۲/۸	۳/۳	۴/۲	۵	۵	۵	۴/۸	۴/۵	۵/۵	۶/۵	۷/۲	۸	۸/۵



شکل ۱- نمودار تغییرات در وزن یک کودک طبیعی

الف) به نظر شما در فاصله زمانی تولد تا سه ماهگی، رشد کودک با کدام یک از چهار وضعیت نشان داده شده در شکل (۲) مطابقت دارد؟ **الف**

ب) در چه فاصله زمانی ای وزن او ثابت مانده است؟ **۳ تا ۵ ماهگی**

پ) اعداد داده شده در جدول را روی شکل (۱) مشخص کنید. نقاط به دست آمده را به یکدیگر وصل کنید تا نمودار جدیدی به دست آید. با مقایسه این نمودار با نمودار اصلی، رشد کودک از نظر وزن را در طی یک سال بررسی کنید.

وزن کودک در فاصله بین ماهها اندازه گیری نشده بود؛ ولی به کمک نموداری که رسم کرده اید، می‌توانید وزن او را در فاصله بین ماهها نیز به صورت تقریبی تعیین کنید.

ت) دامنه و برد این تابع را به دست آورید و نمودار بیکنانی آن را نیز رسم کنید.

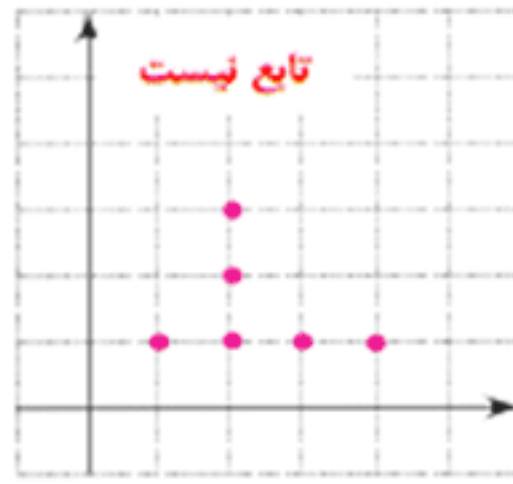
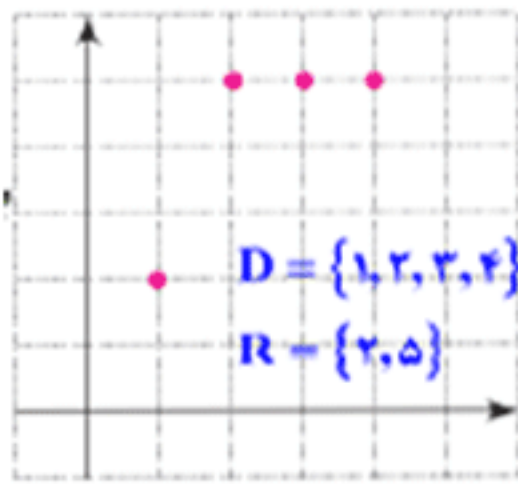
$$D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\} \quad R = \{2/8, 3/3, 4/2, 5, 5, 5, 4/8, 4/5, 5/5, 6/5, 7/2, 8, 8/5\}$$

۱ کدام یک تابع است؟

دامنه و برد هر تابع را معلوم کنید.

$$D = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

$$R = \{1, 2, 4\}$$



۲ تابعی مثال بزنید که :

الف) دامنه آن تنها شامل دو عضو باشد. $f = \{(1, 2), (3, 5)\}$

ب) برد آن تنها از یک عضو تشکیل شده باشد. $g = \{(1, 2), (3, 2), (5, 2)\}$

پ) دامنه آن تنها یک عضو داشته باشد. $h = \{(3, 5)\}$

ت) دامنه آن نامتناهی باشد، ولی برد آن تنها یک عضو داشته باشد. $f = \{(1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), \dots\}$

ث) دامنه و برد آن نامتناهی باشند. $f = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8), \dots\}$

تهیه کننده:
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه
استان خوزستان

۳ جاهای خالی در جدول را کامل کنید و نمودار توابعی را که در جدول، توصیف شده‌اند، رسم کنید.

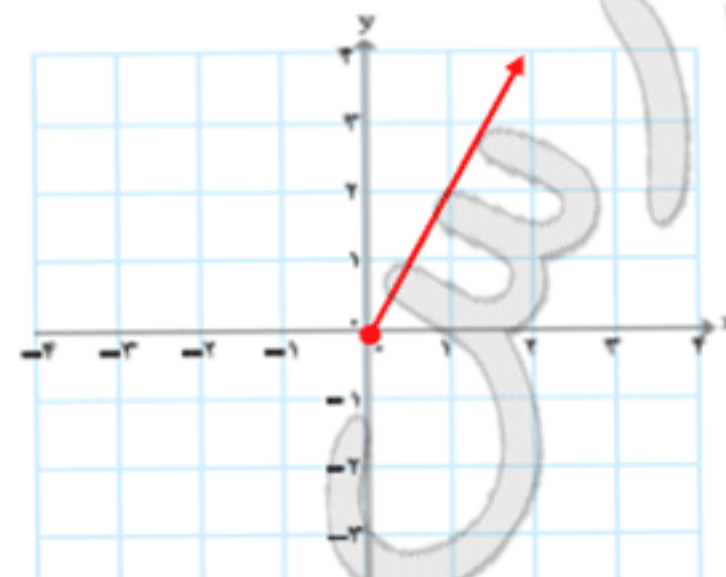
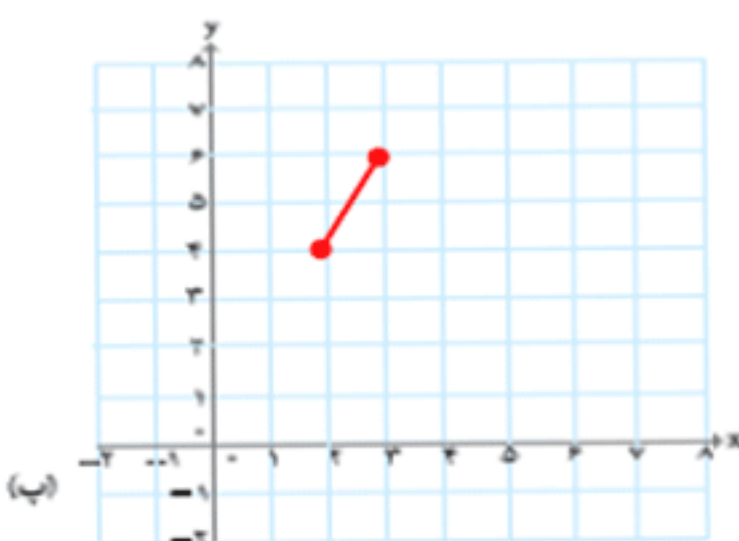
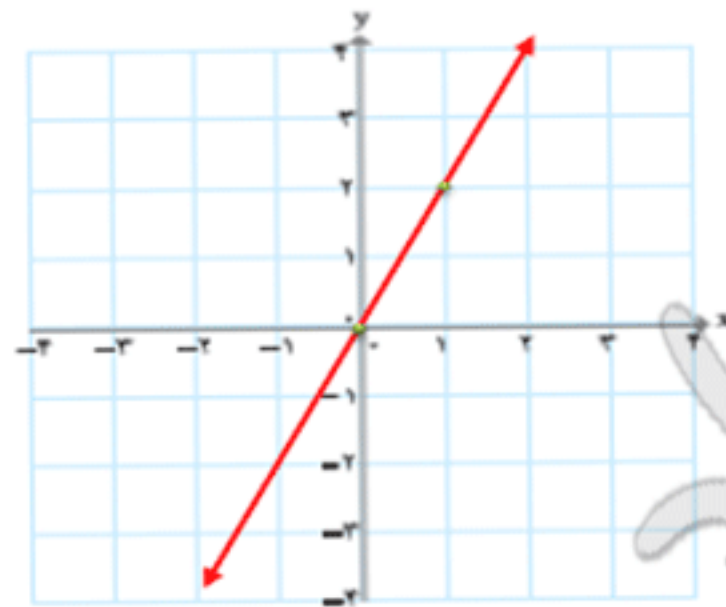
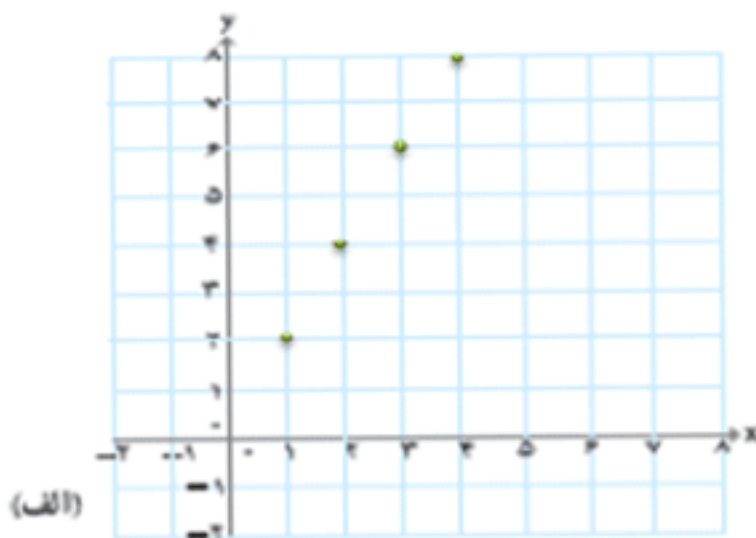
(الف)

(ب)

(پ)

(ت)

تابع	$f(x) = 2x$	$g(x) = 2x$	$h(x) = 2x$	$y = 2x$
دامنه	$\{1, 2, 3, 4\}$	مجموعه اعداد حقیقی	$[2, 3]$	مجموعه اعداد حقیقی نامنفی
برد	$R = \{2, 4, 6, 8\}$	مجموعه اعداد حقیقی	$R = [2, 6]$	مجموعه اعداد حقیقی نامنفی

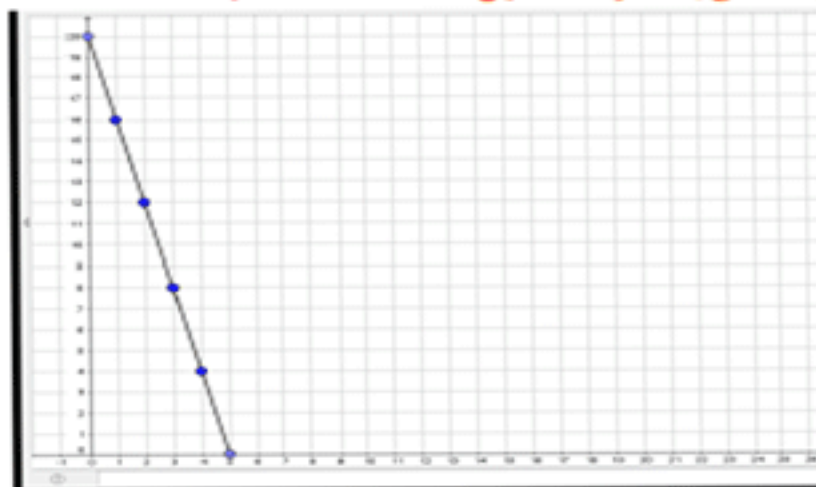


۳ یک شمع ۲۰ سانتی متر ارتفاع دارد و در هر ساعت ۴ سانتی متر آن می‌سوزد. پس از چند ساعت شمع خاموش خواهد شد؟ جدولی تنظیم کنید و در ساعات مختلف ارتفاع شمع را محاسبه کنید.

x (زمان)	۰	۱	۲	۳	۴	۵
y (ارتفاع شمع)	۲۰	۱۶	۱۲	۸	۴	۰

نمودار این تابع را رسم کنید.

چرا این تابع، یک تابع خطی است؟ زیرا نمودار آن قسمتی یک خط راست می‌باشد. و معادله این خط $y = -4x + 20$ است.



تهیه کننده: گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

۵ آیا خط $x = 2$ را می‌توان به عنوان یک تابع در نظر گرفت؟ چرا؟ خط $y = 5$ را چگونه در حالت کلی چه موقع یک خط را می‌توان یک تابع نیز در نظر گرفت؟

خیر - زیرا خط $x = 2$ با محور عرض‌ها موازی است لذا تمام نقاط آن مولفه‌های اول مساوی دارند ولی خط $y = 5$ تابع است زیرا نمودار آن با محور طولها موازی است و هیچ دو نقطه متمایز از آن مولفه‌های اول یکسان ندارند. - در حالت کلی اگر یک خط با محور عرض‌های موازی نباشد تابع است.

۶ نمایش جبری سه تابع خطی را بنویسید که دامنه آن بازه $[-3, 5]$ باشد. چه تعداد از این گونه توابع وجود دارند؟ بی‌شمار

$$f(x) = 2x + 3 ; -3 \leq x \leq 5$$

$$g(x) = 1 - x ; x \in [-3, 5]$$

$$h(x) = \frac{1}{2}x ; x \in [-3, 5]$$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

$$(-3, 0) \xrightarrow{y = ax + b} 0 = a(-3) + b$$

$$(1, 2) \xrightarrow{y = ax + b} 2 = a(1) + b$$

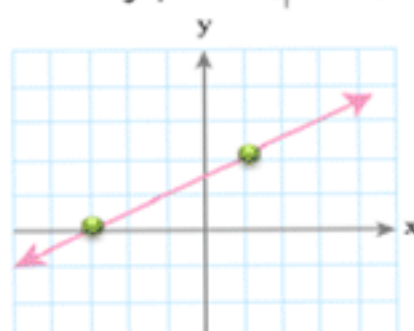
$$\Rightarrow \begin{cases} -3a + b = 0 \\ a + b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a - b = 0 \\ a + b = 2 \end{cases}$$

$$4a = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}, b = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

۷ نمایش جبری تابع زیر را که نمودار آن ارائه شده است، به دست آورید.

از بین نمایش‌های مختلفی که برای این تابع می‌دانید، کدام یک مناسب‌تر است؟ نمایش جبری



۸ جدول زیر دمای سنگ‌ها در عمق‌های متفاوت زیر سطح زمین را نشان می‌دهد.

عمق (کیلومتر)	۱	۲	۳	۴	۵	۶
دما (سانتی‌گراد)	۵۵	۹۰	۱۲۵	۱۶۰	۱۹۵	۲۳۰

الف) توضیح دهید که چرا این جدول یک تابع را به دست می‌دهد. نمودار آن را رسم کنید. زیرا هیچ کدام از مولفه‌های اول آن تکرار نشده (ب) معادله‌ای برای این تابع به دست آورید.

ب) دمای یک سنگ را که در عمق ۱۰ کیلومتری زیر زمین است، بیابید.

$$(1, 55) \xrightarrow{y = ax + b} 55 = a(1) + b$$

$$(2, 90) \xrightarrow{y = ax + b} 90 = a(2) + b$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b = 55 \\ 2a + b = 90 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a - b = -55 \\ 2a + b = 90 \end{cases}$$

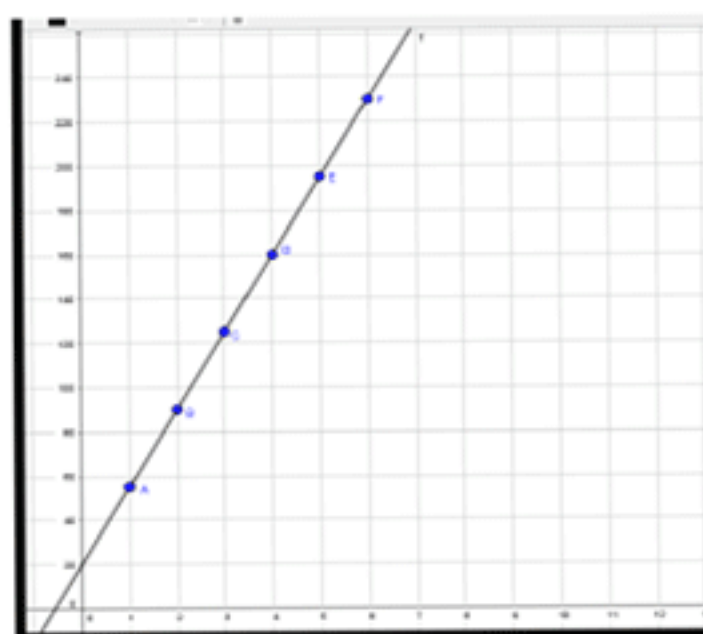
پاسخ ب:

$$a = 35 \Rightarrow 35 + b = 55$$

$$\Rightarrow b = 20$$

$$\Rightarrow f(x) = 35x + 20$$

$$\Rightarrow f(10) = 35(10) + 20 = 370$$



۹ الف تابع $f(x) = 3x - 2$ را رسم کنید و مقادیر $f(2)$ و $f(100)$ و $f(-5)$ و $f(\sqrt{5})$ و $f(-\frac{3}{4})$ را بدست آورید.

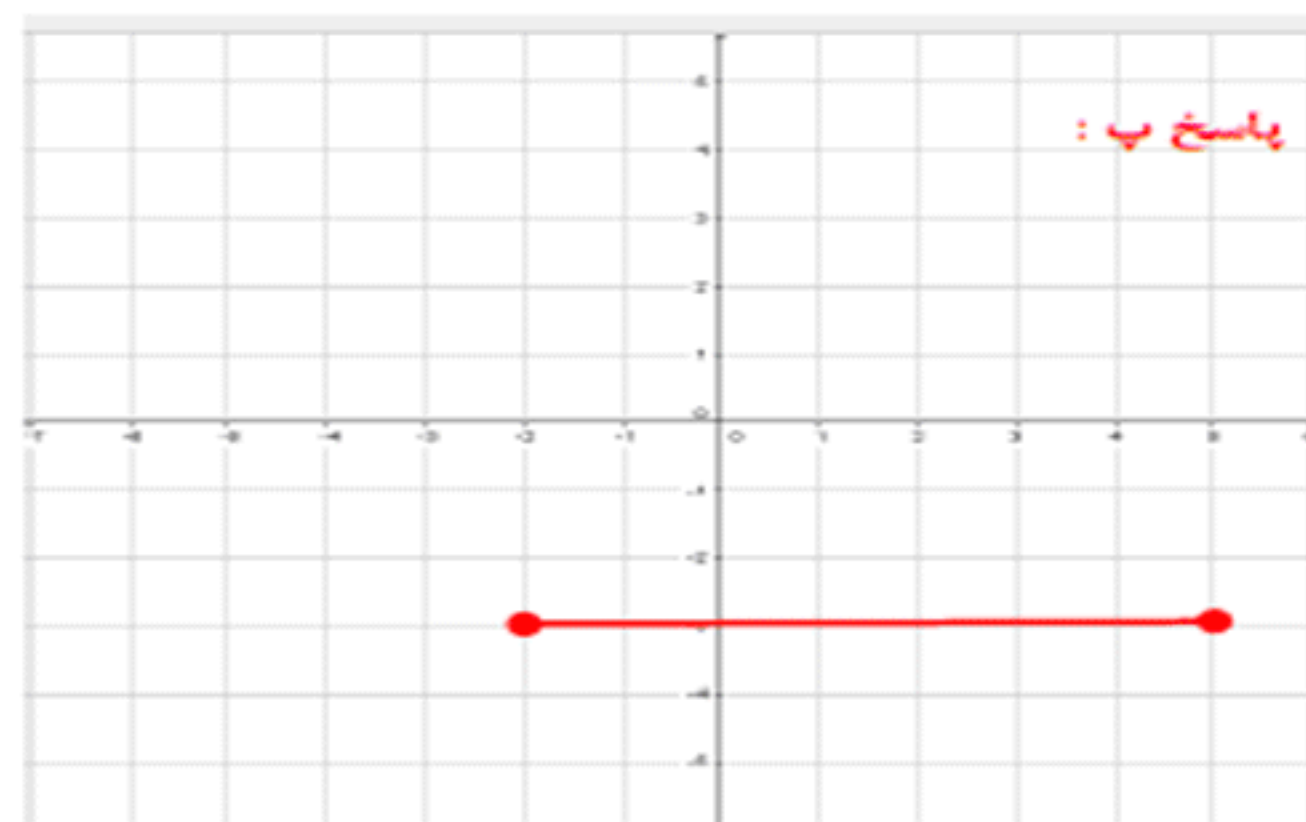
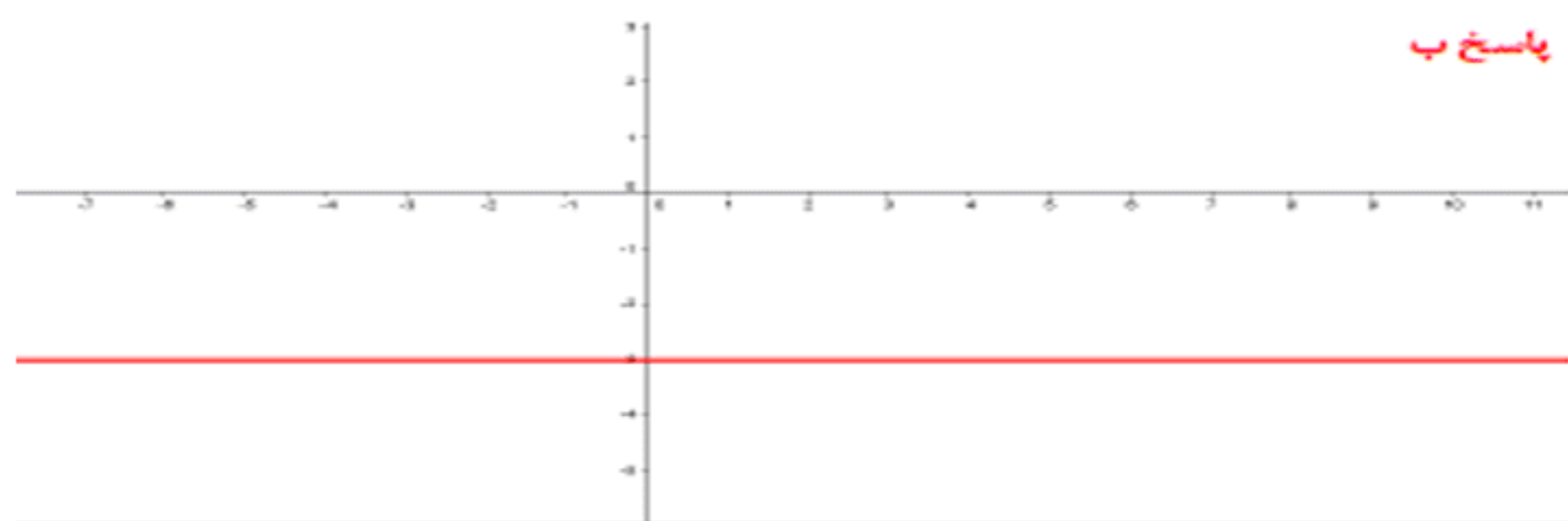
ب) اگر دامنه این تابع مجموعه اعداد حقیقی باشد، نمودار تابع را رسم کنید.

پ) نمودار این تابع را وقتی که دامنه آن بازه $[-2, 5]$ باشد، نیز رسم کنید.

پاسخ الف

$$f(2) = f(100) = f(-5) = f(\sqrt{5}) = f(-\frac{3}{4}) = -3$$

پاسخ ب

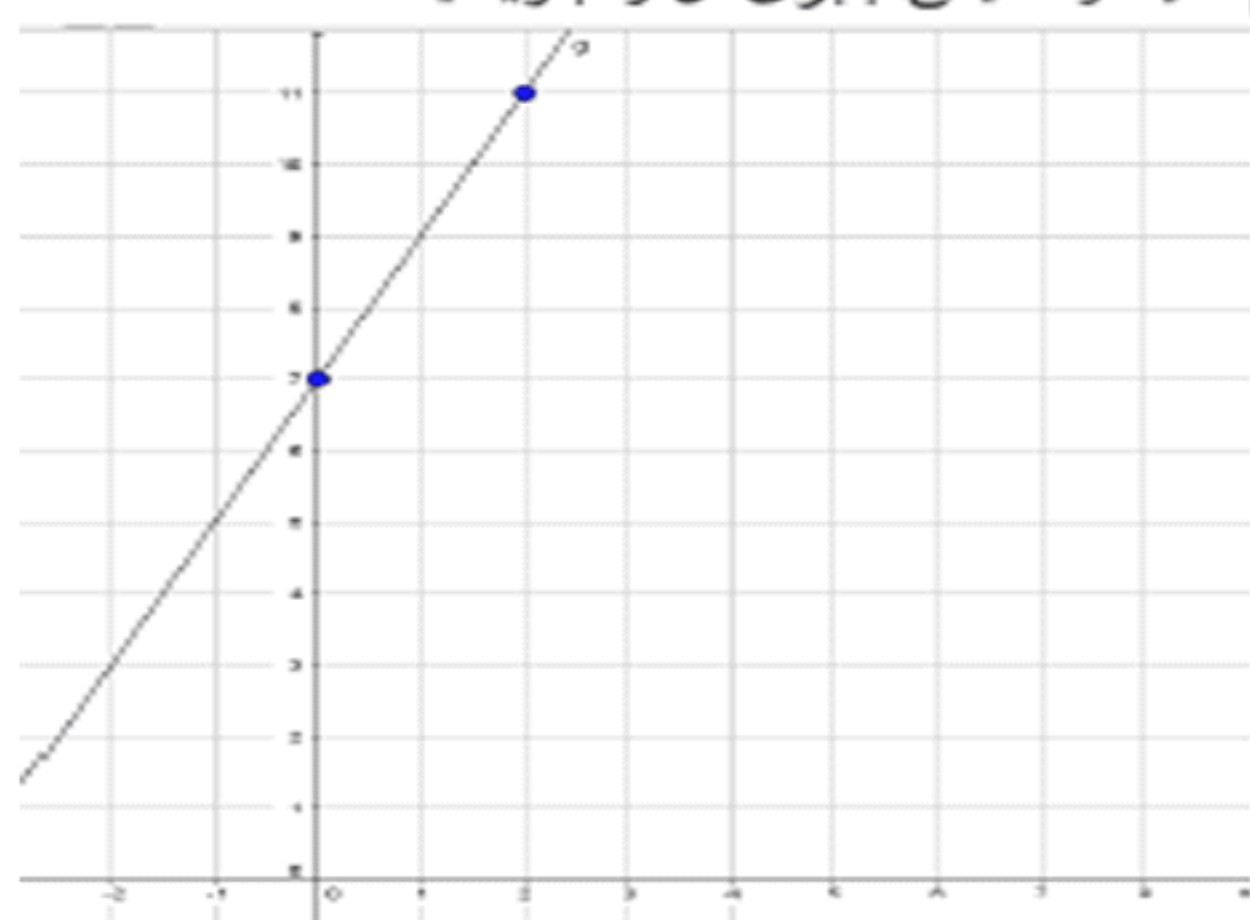


تهیه کننده:

۱۰ برای یک تابع خطی می دانیم که $f(2) = 11$ و $f(a) = 7$. نمودار این تابع را رسم کنید و نمایش جبری آن را بنویسید.

استان خوزستان

پاسخ ب:



$$\begin{aligned} f(x) &= ax + b \\ f(0) &= 7 \rightarrow a(0) + b = 7 \Rightarrow b = 7 \\ f(2) &= 11 \rightarrow a(2) + b = 11 \\ \Rightarrow 2a + 7 &= 11 \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = 2 \\ \Rightarrow f(x) &= 2x + 7 \end{aligned}$$

صفحه ۱۰۸

۱۱ آیا جدول زیر یک تابع را نشان می دهد؟ چرا؟ **بله - زیرا هیچ کدام از مولفه های اول آن تکرار نشده است.**

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶
y	۱	۴	۹	۱۵	۲۵	۳۶

۱۲ علی در هر دقیقه پیاده روی، مسافت $\frac{1}{10}$ کیلومتر را طی می کند. اگر مسافتی را که علی در t دقیقه طی می کند، با $f(t)$ نمایش دهیم، کدام عبارت نمایش جبری این تابع را به دست می دهد؟

الف) $f(t) = t - \frac{1}{10}$

ب) $f(t) = \frac{1}{10}t$

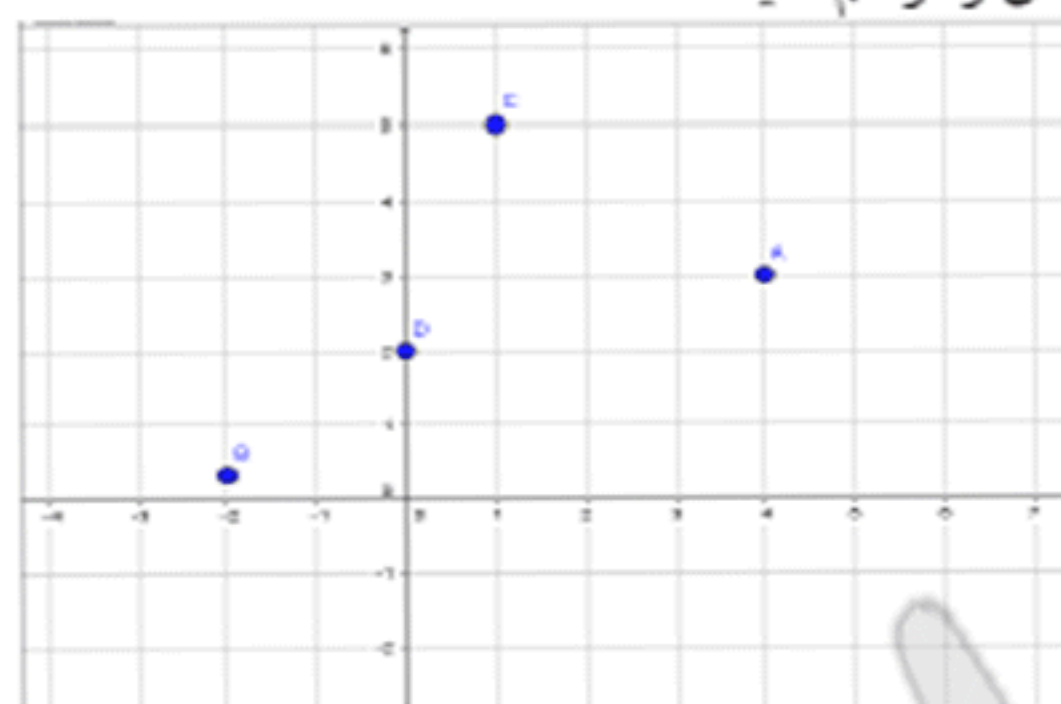
پ) $f(t) = t + \frac{1}{10}$

ت) $f(t) = \frac{1}{10} - t$

صفحه ۱۰۸

۱۳ اگر درباره تابع g داشته باشیم: $g(4) = 3$, $g(-2) = \frac{1}{3}$, $g(1) = 5$, $g(0) = 2$ را به صورت مجموعه ای از زوج های مرتب بنویسید و نمودار آن را رسم کنید.

x	۴	-۲	۱	۰
g(x)	۳	$\frac{1}{3}$	۵	۲



۱۴ برای اندازه گیری دما از واحدهای «سانتی گراد C» و «فارنهایت F» استفاده می شود که با رابطه $F = \frac{9}{5}C + 32$ به یکدیگر وابسته اند.

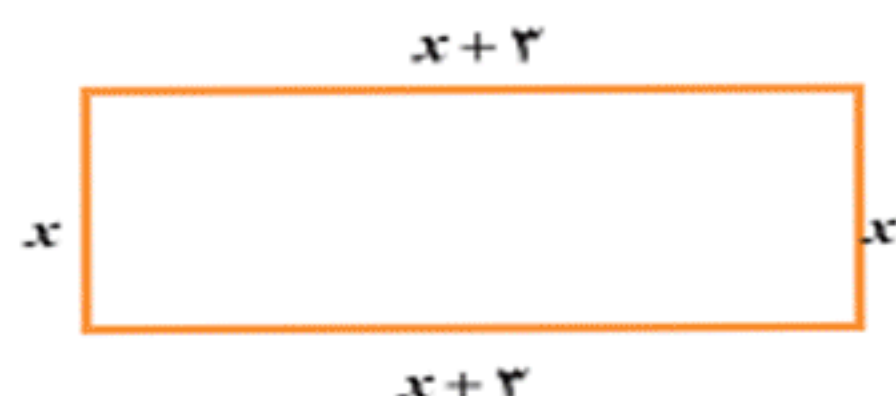
الف) -20 درجه سانتی گراد، چند درجه فارنهایت است؟ $F = \frac{9}{5}(-20) + 32 = -36 + 32 = -4$

ب) 104 درجه فارنهایت چند سانتی گراد است؟ $104 = \frac{9}{5}C + 32 \rightarrow 520 = 9C + 160 \rightarrow 9C = 360 \rightarrow C = 40$

پ) معادله ای بنویسید که سانتی گراد را برحسب فارنهایت به دست دهد. $F = \frac{9}{5}C + 32 \rightarrow 5F = 9C + 160 \rightarrow 9C = 5F - 160 \rightarrow C = \frac{5}{9}F - 40$

ت) آیا رابطه بین این دو واحد، یک تابع خطی را معلوم می کند؟ **بله**

۱۵ طول یک مستطیل ۳ واحد بیشتر از عرض آن است. رابطه ای ریاضی بنویسید که محیط این مستطیل را برحسب تابعی از عرض آن بیان کند.



$$p(x) = 2(x + 3 + x) = 2(2x + 3) \Rightarrow p(x) = 4x + 6$$

۱۶ دو تابع مثال بزنید که دامنه و برد آنها یکی باشند، ولی هیچ دو زوج مرتب مشترکی نداشته باشند.

$$f = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$$

$$g = \{(1, -2), (2, -3), (3, -1)\}$$

طول ضلع مربع	۰.۸	$\frac{1}{2}$	۱	۳	۴	$\frac{2}{5}$	۵	۱۲	x
مساحت آن	۰.۶۴	$\frac{1}{4}$	۱	۹	۱۶	$\frac{4}{25}$	۲۵	۱۴۴	x^2

شعاع دایره	$\frac{1}{2}$	۲	۳	۵	تهیه کننده: گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه				
مساحت آن	$\frac{\pi}{4}$	4π	9π	25π	استان خوزستان				

اگر x طول ضلع یک مربع باشد، مساحت آن تابعی از x است و به صورت $f(x) = x^2$ قابل نمایش است.

اگر r شعاع یک دایره باشد، مساحت دایره تابعی از r است و به صورت $g(r) = \pi r^2$ قابل نمایش است. چون f و g به صورت یک چند جمله‌ای درجه دوم به ترتیب از x و r بیان شده‌اند، آنها را توابع درجه دوم می‌نامیم. حجم یک کره را بر حسب یک تابع درجه سوم از r (شعاع کره) بنویسید:

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

فصل ۵: توابع

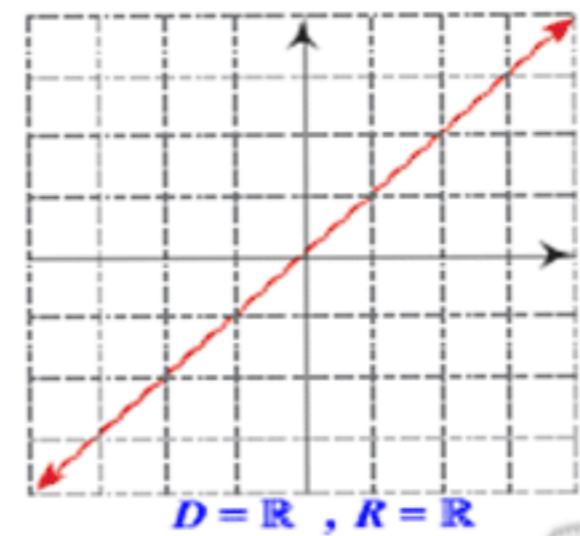
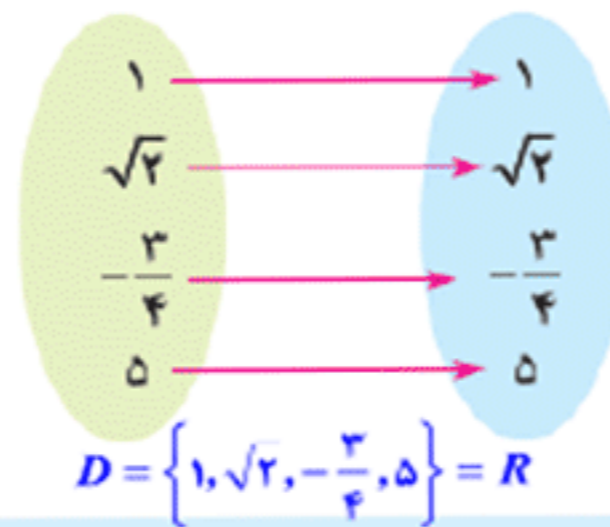
شباهت: در هر سه تابع، هر عضو از دامنه دقیقاً به همان عضو از برد نظیر شده است.

۲ دامنه و برد توابع زیر را به دست آورید. این سه تابع چه شباهت و چه تفاوتی با هم دارند؟

تفاوت: دامنه این توابع از مجموعه‌های متفاوتی انتخاب شده است.

$$f = \{(a,a), (b,b), (c,c)\}$$

$$D = \{a, b, c\}, R = \{a, b, c\}$$

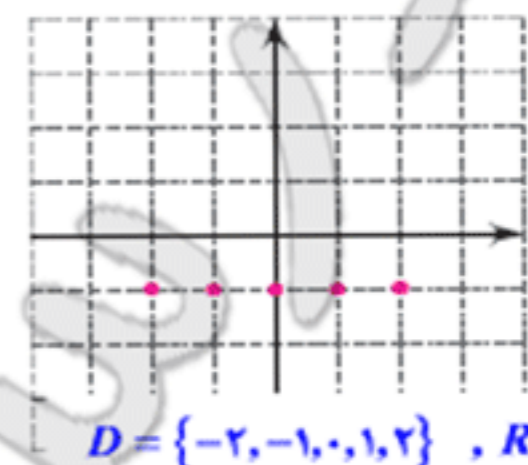
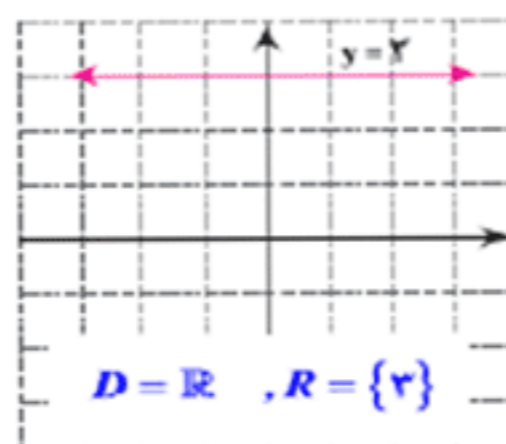


اگر دامنه و برد یک تابع برابر باشند و هر عضو از دامنه تابع دقیقاً به همان عضو در برد نظیر شود، تابع را همانی می‌نامند. اگر دامنه تابع همانی را \mathbb{R} در نظر بگیریم، نمودار آن همان خط $y = x$ است که با معادله $f(x) = x$ هم نمایش داده می‌شود.

۳ سه تابع زیر را با هم مقایسه کنید و دامنه و برد آنها را بنویسید. این سه تابع در چه ویژگی‌ای مشترک‌اند؟ برد آنها مجموعه‌ای یک عضوی است

ساعت	۸	۹	۱۰
دمای هوا	۱۹	۱۹	۱۹

$$D = \{8, 9, 10\}, R = \{19\}$$



تابعی مانند f را که برد آن تنها شامل یک عضو است، تابع ثابت می‌نامیم. اگر این عضو را k بنامیم، تابع ثابت را معمولاً با معادله $f(x) = k$ نمایش می‌دهیم.

۱ برای هر مورد مثالی به دلخواه ارائه کنید.

مثالی از یک تابع چند جمله‌ای ارائه کنید. $f(x) = x^2 - x + 2$

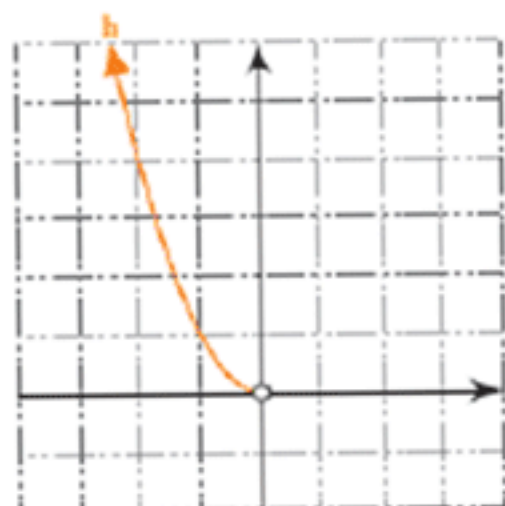
یک تابع همانی مثال بزنید که دامنه آن $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ باشد. $f = \{(\alpha, \alpha), (\beta, \beta), (\gamma, \gamma), (\delta, \delta)\}$

یک تابع مثال بزنید که دامنه و برد آن برابر باشند؛ ولی تابع همانی نباشد. $g = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$

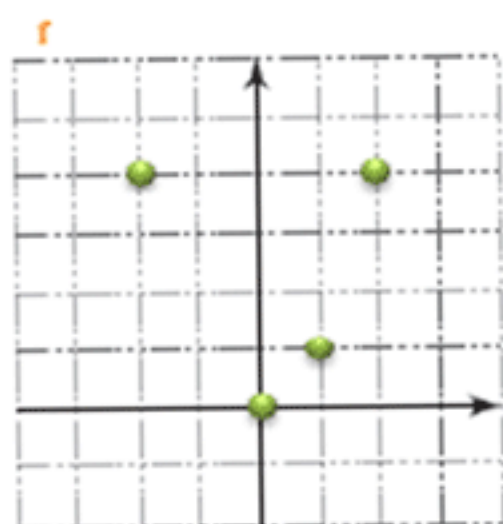
مثالی از یک تابع ثابت ارائه کنید که دامنه آن 5 عضوی باشد. $h = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 2), (5, 2)\}$

مثالی از تابع ثابت در دنیای واقعی ارائه کنید.

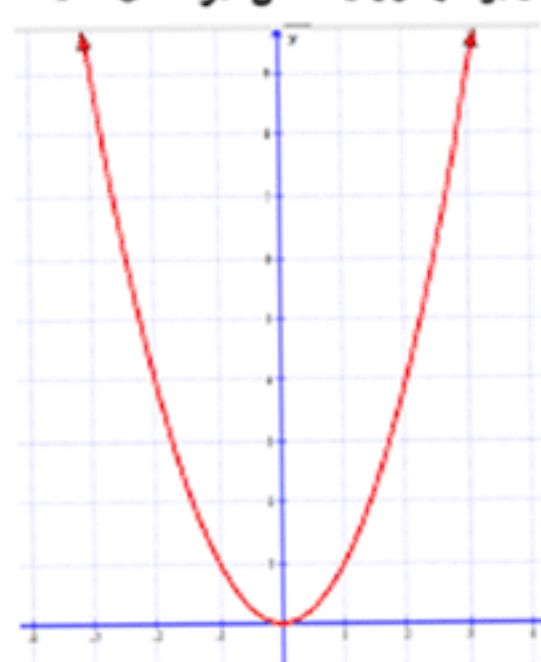
۲ نمودارهای توابع داده شده را رسم و با یکدیگر مقایسه کنید. نمودار تابع h رسم شده است. جدول را کامل کنید.



تابع	$f(x) = x^2$	$g(x) = x^2$	$h(x) = x^2$	$t(x) = x^2$
دامنه	$\{-2, 0, 1, 2\}$	$[-2, 2]$	مجموعه اعداد حقیقی منفی	مجموعه اعداد حقیقی
برد	$R_f = \{0, 1, 4\}$	$R_g = [0, 4]$	$R_h = [0, +\infty)$	$R_t = [0, +\infty)$

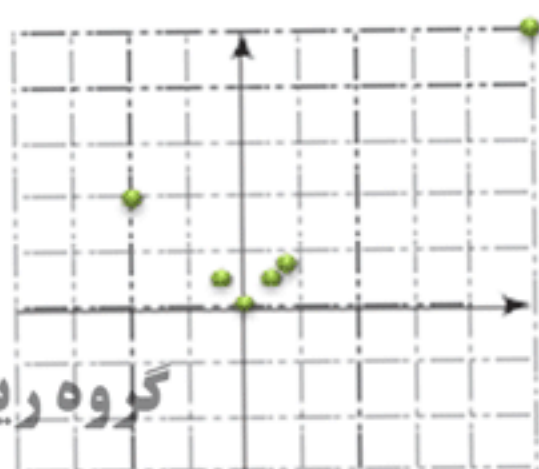


دامنه و برد را روی شکل نیز نشان دهید.



فعالیت

جدول زیر تابعی را نشان می‌دهد که اعداد داده شده را به قدر مطلق آن نظیر می‌کند. جاهای خالی را پر و نمودار تابع را رسم کنید. دامنه و برد این تابع را معلوم کنید.



x	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	5
$f(x)$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	5

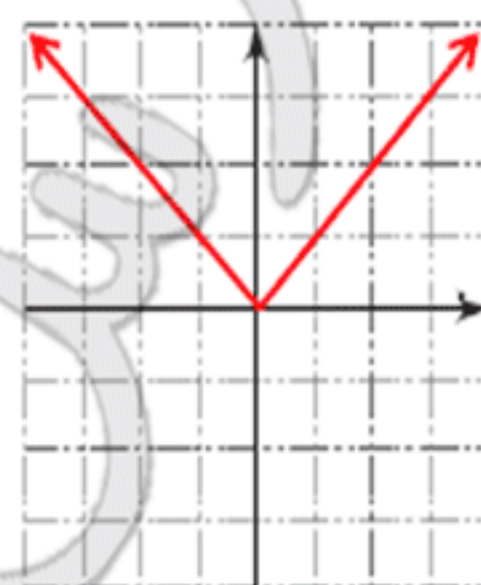
تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه
استان خوزستان

اگر دامنه یک تابع قدر مطلق مجموعه اعداد حقیقی باشد، نمودار آن را رسم کنید.

تابع قدر مطلق را به صورت $f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$ نیز نمایش می‌دهند.

با توجه به اینکه برای $x \geq 0$ و $x < 0$ تابع دارای معادله‌های مختلفی است، این تابع یک تابع چند ضابطه‌ای (قطعه‌ای) نامیده می‌شود.



۱ نمودار تابع‌های زیر را رسم و دامنه و برد آنها را مشخص کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x > 0 \\ 3x+1 & x \leq 0 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 2x-5 & x > 2 \\ 1 & -2 < x \leq 2 \\ -\frac{1}{2}x & x \leq -2 \end{cases}$$

مقادیر $f(0)$ ، $f(5)$ ، $f(-2)$ ، $g(2)$ ، $g(-\frac{1}{5})$ و $g(-\frac{1}{5})$ را به دست آورید.

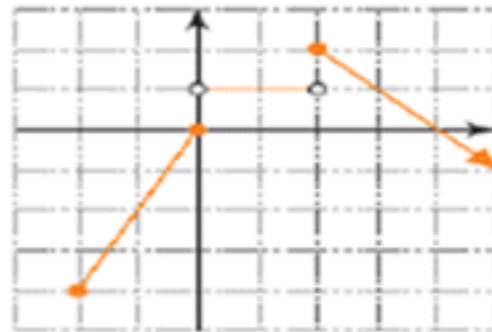
$$f(0) = 3(0)+1 = 1 \quad , \quad g(0) = 1 \quad , \quad f(5) = 5^2 = 25 \quad , \quad g(2) = 1$$

$$f(-2) = 3(-2)+1 = -5 \quad , \quad g(-\frac{1}{5}) = 1$$

۲ نمودار تابع قطعه‌ای f داده شده است. ضابطه آن را به دست آورید. دامنه و برد این تابع را به دست آورید.

$$f(x) = \begin{cases} 2x & ; -2 \leq x \leq 0 \\ 1 & ; 0 < x < 2 \\ -x+4 & ; 2 \leq x \end{cases}$$

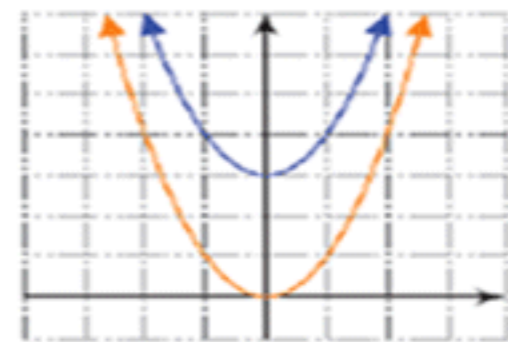
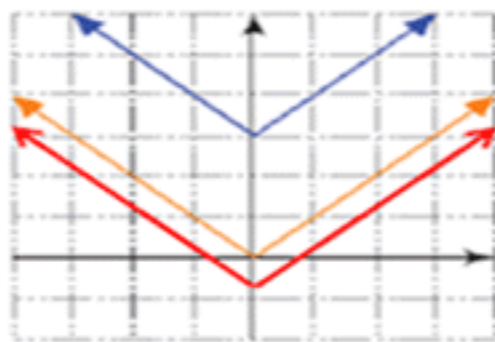
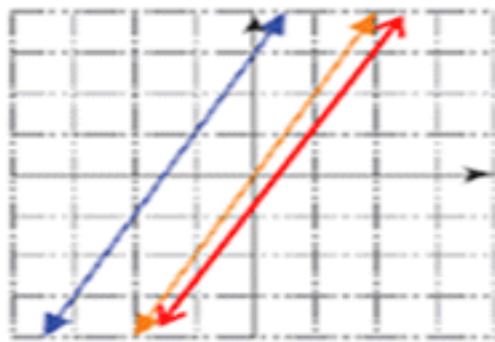
$$D_f = [-2, +\infty) \quad R_f = [-4, 2]$$



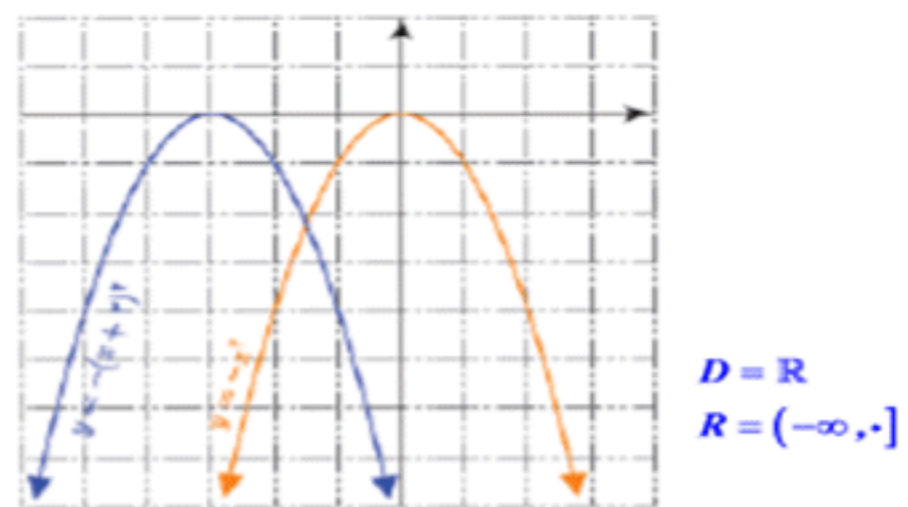
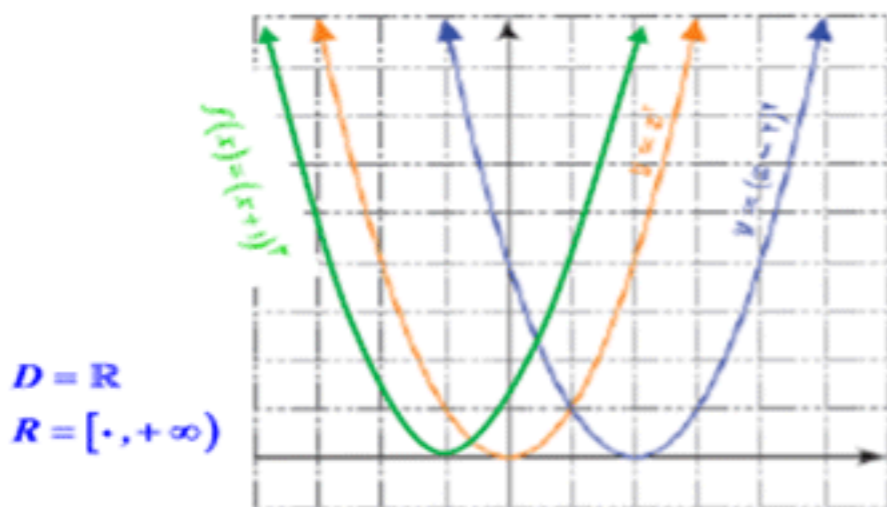
رسم برخی توابع به کمک انتقال

فعالیت

نمودارهای توابع $f(x) = 2x$ و $g(x) = |x|$ و $h(x) = x^2$ و توابع $f(x) = 2x+3$ و $g(x) = |x|+3$ و $h(x) = x^2+3$ داده شده‌اند. توضیح دهید که سه تابع آخر چگونه به کمک سه تابع اول رسم شده‌اند. سپس توابع $f(x) = 2x - \frac{3}{4}$ و $g(x) = |x| - \frac{3}{4}$ و $h(x) = x^2 - \frac{3}{4}$ را به همین روش رسم کنید. هر سه تابع به اندازه سه واحد در جهت مثبت محور انتقال داده شده‌اند.



۳ در شکل‌های زیر به کمک نمودار تابع $f(x) = x^2$ و $f(x) = -x^2$ نمودار توابع دیگری رسم شده‌اند. دامنه و برد آنها را بیابید. نمودار $f(x) = (x+1)^2$ را نیز رسم کنید.



درس سوم: انواع توابع

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه

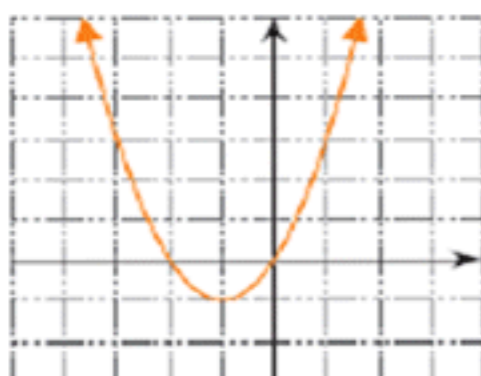
استان خوزستان

در شکل‌های زیر نمودار توابع درجه دوم f ، g ، h و t رسم شده‌اند.

$$g(x) = (x+1)^2 - 1$$

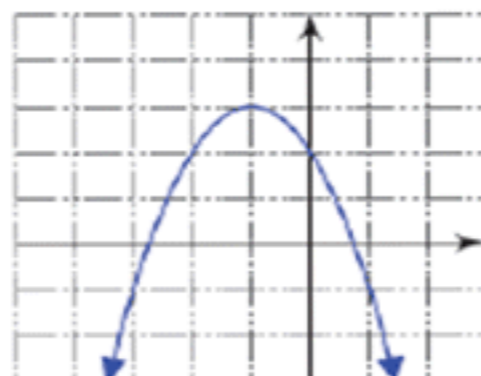
$$t(x) = -(x+1)^2 + 3$$

الف) هر یک از نمودارها کدام تابع را نشان می‌دهند؟
ب) دامنه و برد هر یک از این توابع را به دست آورید:



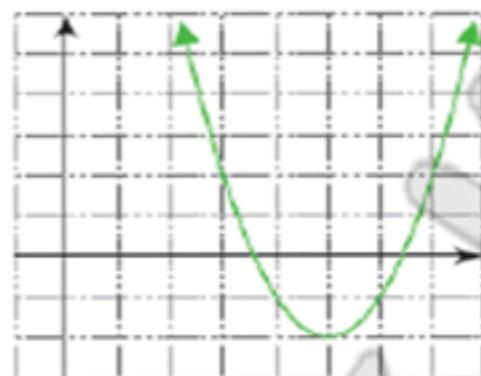
$$g(x) = (x+1)^2 - 1$$

$D = \mathbb{R}$
 $R = [-1, +\infty)$



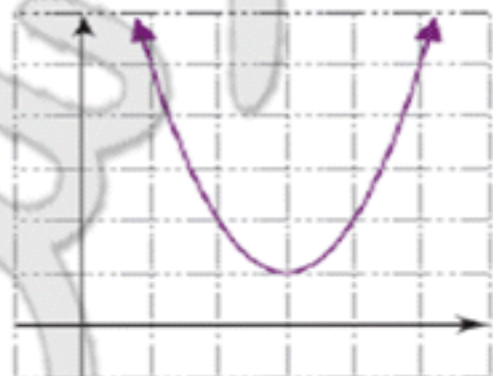
$$t(x) = -(x+1)^2 + 3$$

$D = \mathbb{R}$
 $R = (-\infty, 3]$



$$f(x) = (x-5)^2 - 2$$

$D = \mathbb{R}$
 $R = [-2, +\infty)$

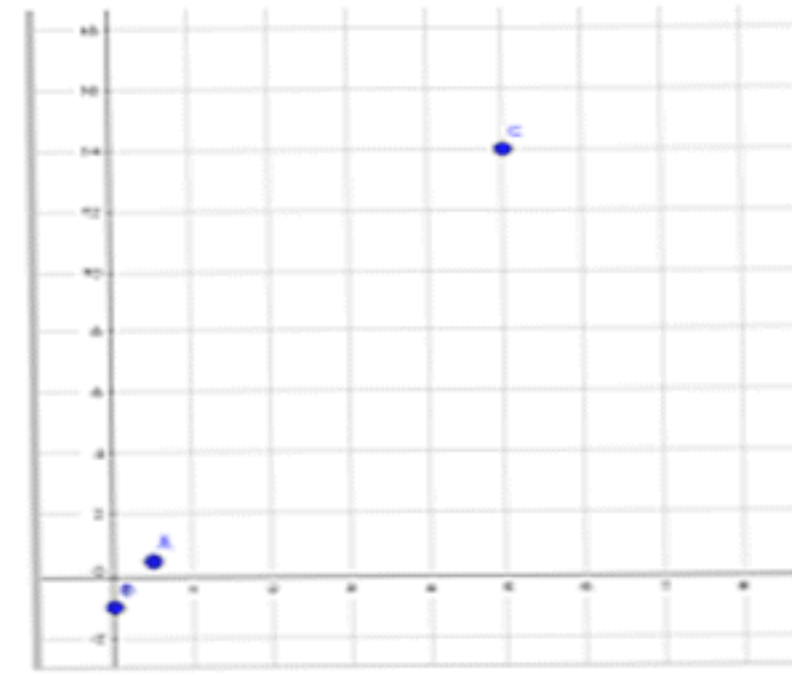
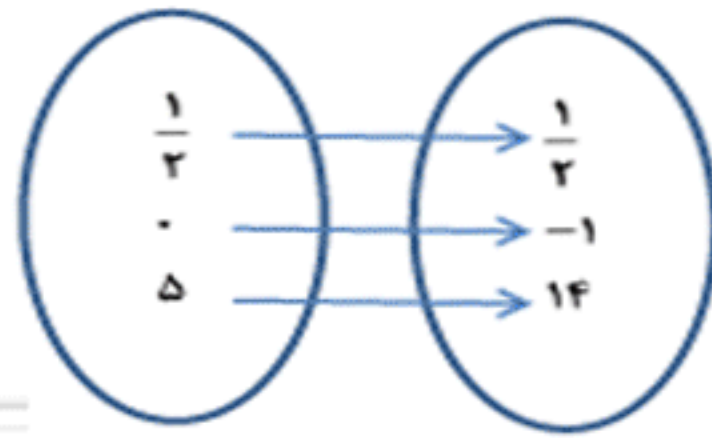


$$h(x) = (x-3)^2 + 1$$

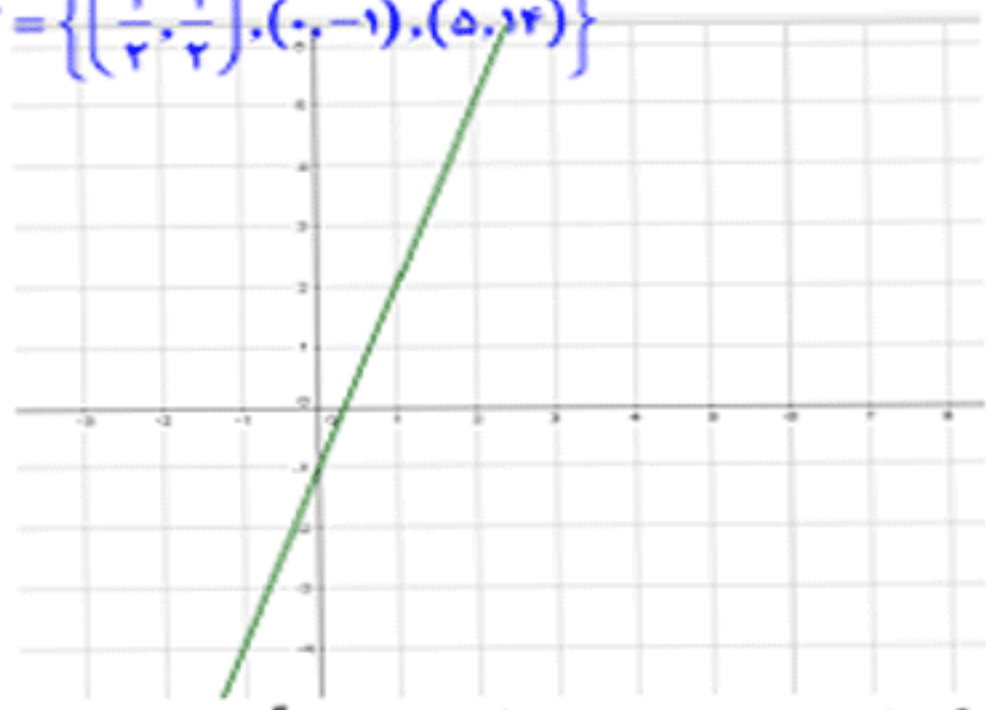
$D = \mathbb{R}$
 $R = [1, +\infty)$

۱ تابع $f(x) = 3x - 1$ را که دامنه آن مجموعه $\{\frac{1}{3}, 0, 5\}$ است، رسم کنید. برد این تابع را به دست آورید و نمایش زوج مرتبی و نمودار بیکنانی آن را ارائه دهید. اگر دامنه این تابع \mathbb{R} باشد، پاسخ‌ها چگونه خواهد بود؟

$$\left. \begin{aligned} f\left(\frac{1}{3}\right) &= 3\left(\frac{1}{3}\right) - 1 = \frac{1}{3} \\ f(0) &= 3(0) - 1 = -1 \\ f(5) &= 3(5) - 1 = 14 \end{aligned} \right\} \Rightarrow R_f = \left\{ \frac{1}{3}, -1, 14 \right\}$$

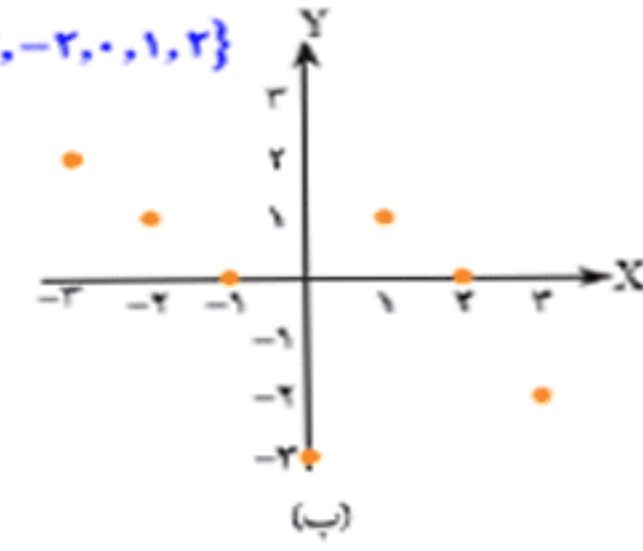
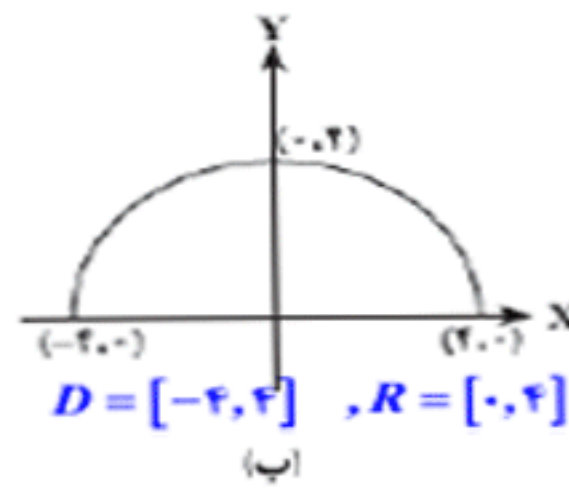
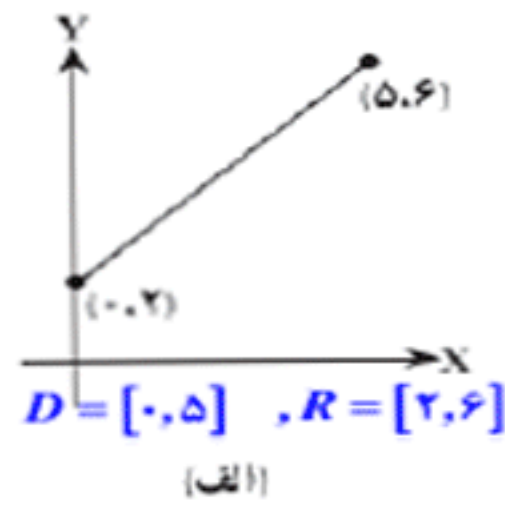


$$f = \left\{ \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right), (0, -1), (5, 14) \right\}$$



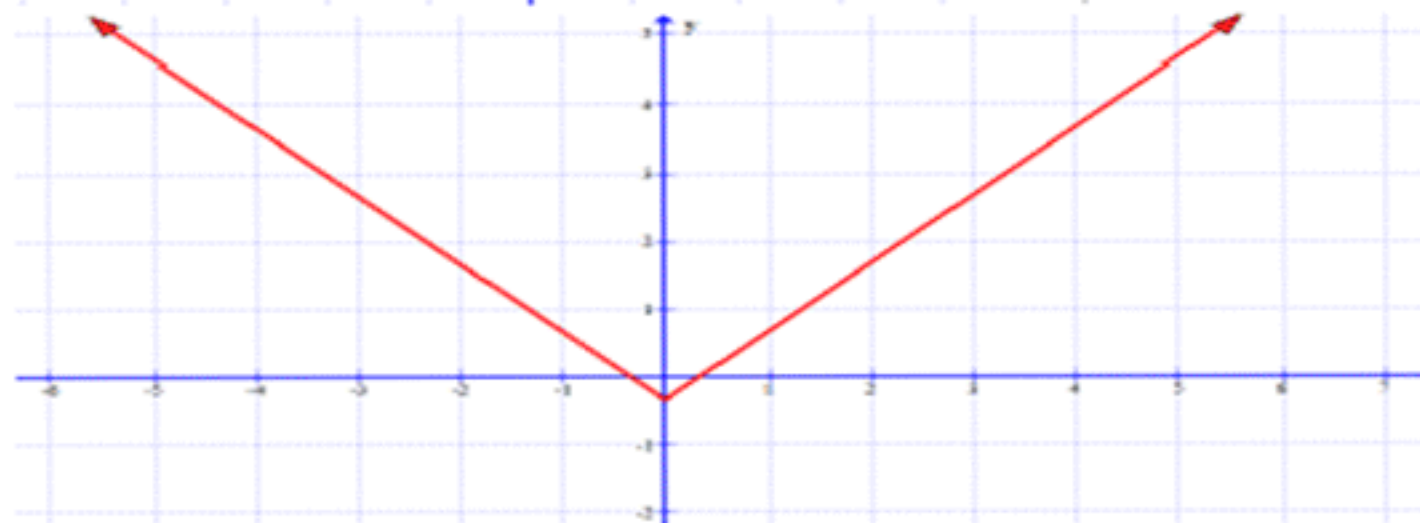
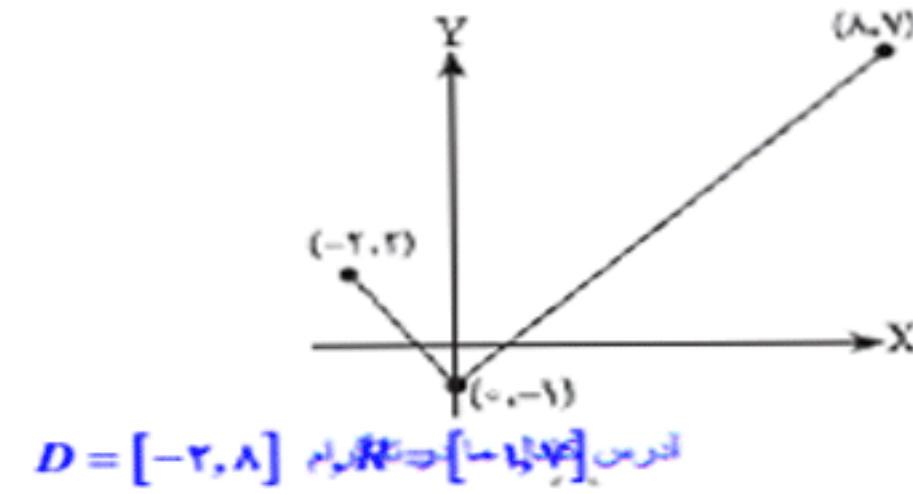
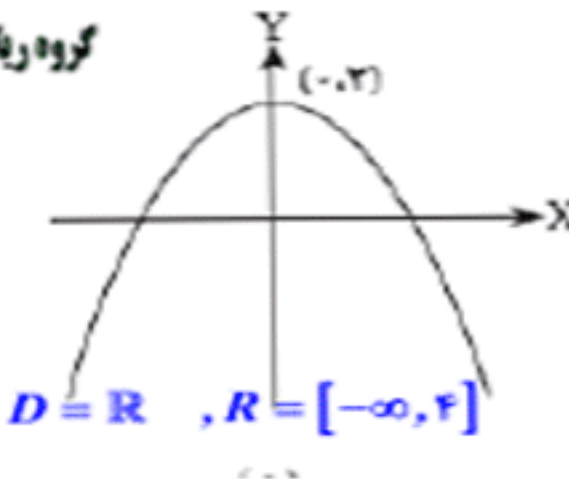
اگر دامنه تابع \mathbb{R} باشد آنگاه: $R_f = \mathbb{R}$ و نمودار به صورت مقابل است:

۲ در شکل‌های زیر نمودار تعدادی از توابع رسم شده‌اند. دامنه و برد هر یک از این توابع را به کمک نمودار آنها مشخص کنید. در هر مورد که امکان دارد، دامنه و برد را به صورت یک بازه نمایش دهید. نمایش جبری توابع (الف) و (ج) را بنویسید.



تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان



۳ درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید.
 (الف) دامنه تابع $f(x) = x^2 - 1$ برابر $(-\infty, +\infty)$ و برد آن نیز $(-\infty, +\infty)$ است. **نادرست**
 (ب) دامنه تابع $f(x) = |x| - \frac{1}{3}$ همه اعداد حقیقی و برد آن $(\frac{2}{3}, +\infty)$ است. **نادرست**
 (ج) دامنه تابع ثابت $f(x) = 2$ برابر $(-\infty, +\infty)$ است. **درست**
 (د) اگر $f(x) = 2x + 1$ آنگاه، $f(1) = \frac{f(2)}{2}$. **نادرست**

۴ یک تانکر گاز از یک استوانه و دو نیم کره به شعاع ۲ در دو انتهای استوانه، تشکیل شده است. اگر ارتفاع استوانه ۳ متر باشد، حجم تانکر را بر حسب ناچمی از ۲ بنویسید.

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi r^3, V_2 = \pi r^2 \times 3$$

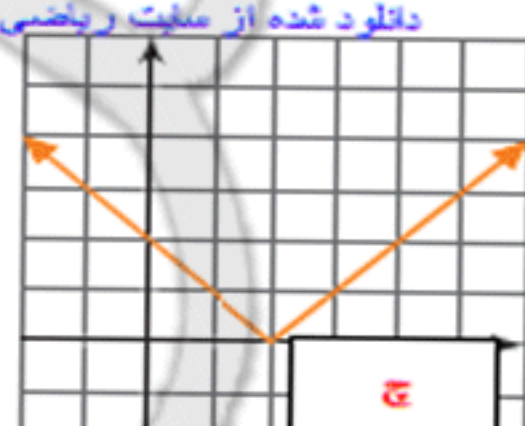
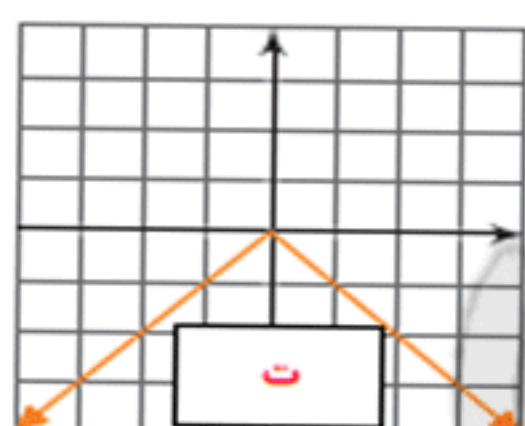
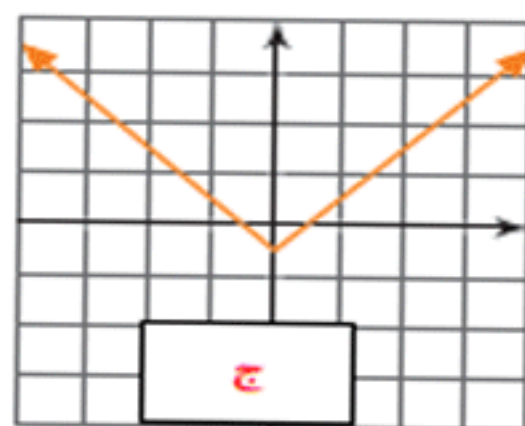
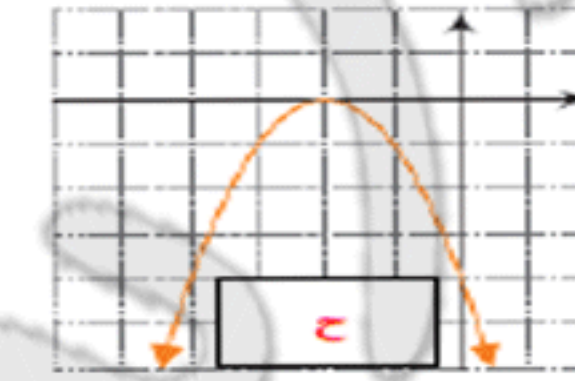
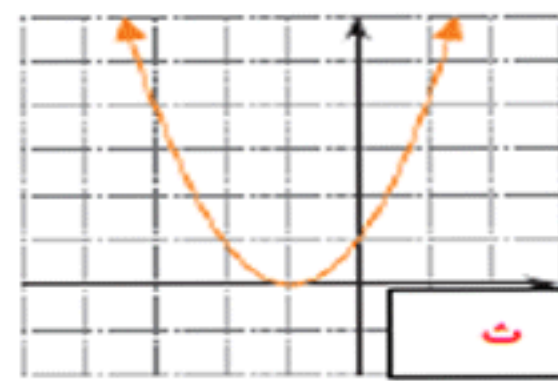
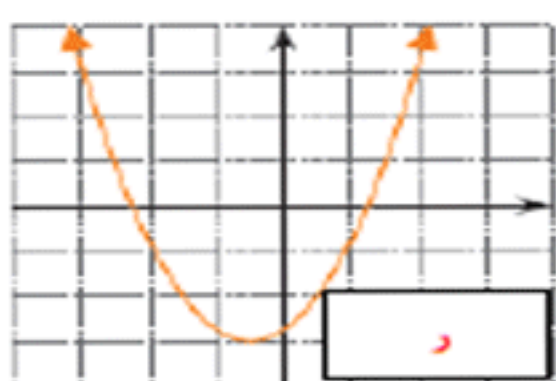
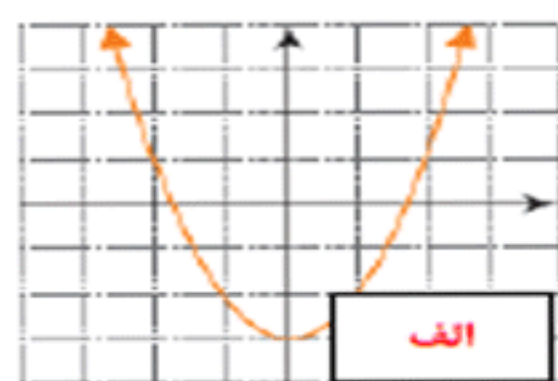
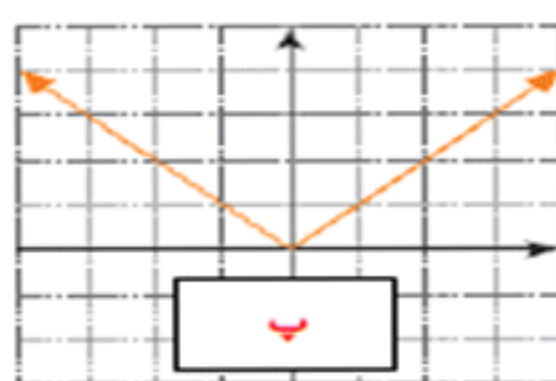
$$V(r) = V_1 + V_2 = \frac{4}{3}\pi r^3 + 3\pi r^2$$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

۵ هریک از نمودارهای زیر کدام یک از تابع‌های (الف) تا (ر) را نمایش می‌دهد؟ دامنه و برد این توابع چیست؟

تهیه کننده:
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه
استان خوزستان



دانلود شده از سایت ریاضی دهم

www.niazidahom.ir

فصل ششم

الف با سه رقم ۲ و ۳ و ۵ چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت؟ به‌طور مثال ۲۳۵ و ۳۵۲ و ۳۳۵ سه نمونه از این اعدادند. برای این کار می‌توان نوشتن عدد سه رقمی را به‌صورت برگردن سه جایگاه مقابل با ارقام مذکور در نظر گرفت.

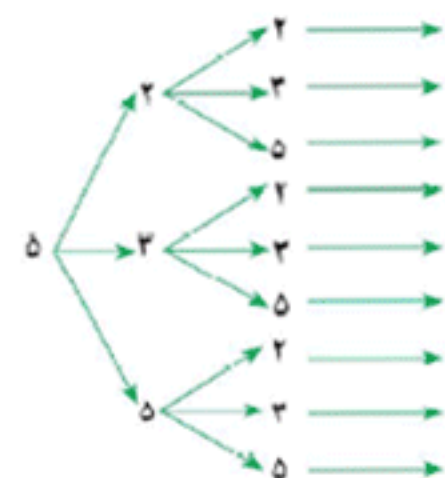
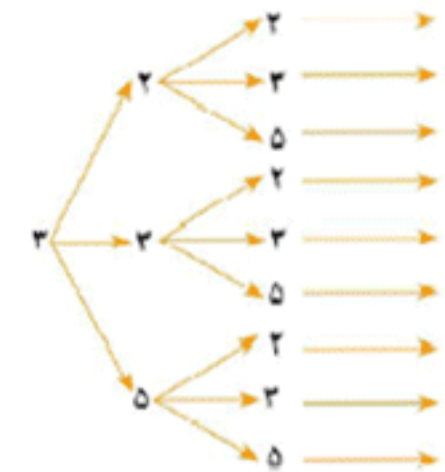
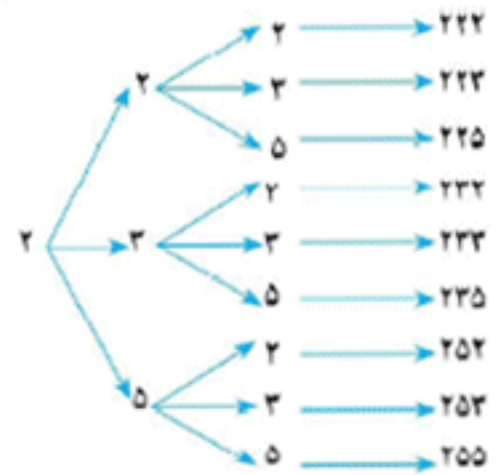


پس این کار سه مرحله دارد و هر سه مرحله آن باید انجام شود، برای به‌دست آوردن جواب، تعداد راه‌های برگردن هر جایگاه باید مشخص شود و با استفاده از اصل ضرب در هم ضرب شود.

هر جایگاه را به سه حالت می‌توان برگرد: لذا ۲۷ عدد وجود دارد.

$$۲۶۳۶۵ \quad ۲۶۳۶۵ \quad ۲۶۳۶۵$$

$۲۷ = ۳ \times ۳ \times ۳$. تعداد حالت‌ها با نمودار درختی در سال‌های پیش آشنا شده‌اید. از این نمودار نیز می‌توان برای به‌دست آوردن تعداد اعداد مورد نظر و نیز نوعی از نمایش آنها استفاده کرد. به نمودار درختی کشیده شده در حاشیه صفحه دقت و آن را تکمیل کنید.



ب با همان سه رقم چند عدد سه رقمی می‌توان ساخت که رقم تکراری نداشته باشد؟

۱- برای برگردن جایگاه اول از سمت چپ (صدگان) چند حالت امکان دارد؟



تعداد حالت‌ها \rightarrow ۳ حالت

۲- حال فرض کنیم یکی از اعداد را در اولین جایگاه گذاشته‌ایم. برای برگردن جایگاه دوم چند حالت امکان دارد؟

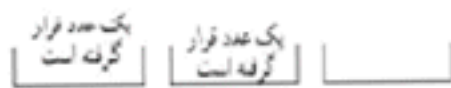


تعداد حالت‌ها \rightarrow ۲ حالت

تهیه کننده:

۳- برای برگردن جایگاه سوم چند حالت وجود دارد؟

لذا $۶ = ۳ \times ۲ \times ۱$. عدد سه رقمی توسط ۲ و ۳ و ۵ با ارقام غیر تکراری وجود دارد.



تعداد حالت‌ها \rightarrow ۱

ب با همان سه عدد چند عدد سه رقمی زوج می‌توان نوشت؟



۱- جایگاه سمت راست به چند روش می‌تواند پر شود، به گونه‌ای که عدد ساخته شده زوج باشد؟ **در اینم جایگاه فقط عدد ۲ می‌تواند قرار بگیرد، لذا ۱ حالت وجود دارد.**

۲- دو جایگاه دیگر هر یک به چند روش می‌توانند پر شوند؟ **هر جایگاه ها سه دیگر هر کدام از سه عدد می‌توانند قرار گیرند، پس هر کدام لذا تعداد اعداد در این حالت برابر است با $۹ = ۳ \times ۳$.**

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه استان خوزستان

ت با همان سه عدد چند عدد سه رقمی زوج با ارقام غیر تکراری می‌توان نوشت؟



۱- جایگاه سمت راست به چند روش می‌تواند پر شود به گونه‌ای که عدد ساخته شده زوج باشد؟

۲- پس از برگردن جایگاه سمت راست، جایگاه سمت چپ، به چند طریق می‌تواند پر شود؟

در جایگاه سمت چپ فقط یک عدد از اعداد ۳ یا ۵ می‌توانند باشند پس ۲ حالت داریم.

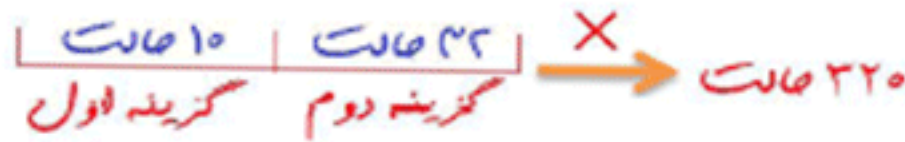
۳- حال جایگاه وسط به چند طریق می‌تواند پر شود؟

با قرار گرفتن یک عدد از اعداد ۳ یا ۵ در جایگاه سمت چپ، فقط یک عدد برابر جایگاه وسط باقی‌مانده، لذا در اینم جایگاه فقط ۱ حالت داریم.

۴- لذا تعداد اعداد مورد نظر در این حالت برابر است با $۲ = ۲ \times ۱$.

۱ تعداد حالت‌های ممکن برای رمز یک دستگاه را در حالت‌های زیر به دست آورید.
 مشخص کنید برای این کار از اصل جمع استفاده می‌شود یا از اصل ضرب یا از هر دو.
 الف) این رمز از یک گزینه تشکیل شده، که یک عدد یا یک حرف الفبای فارسی است.
رمز یک رقمی از اعداد ۰ تا ۹ و ۳۲ و ۰۰۰ و یا یک رقم از ۳۲ حرف الفبای فارسی خواهد بود
بنابراین $۱۰ + ۳۲ = ۴۲$ حالت داریم.

ب) این رمز از دو گزینه تشکیل شده است که گزینه اول یک عدد و گزینه دوم یک حرف الفبای فارسی است.

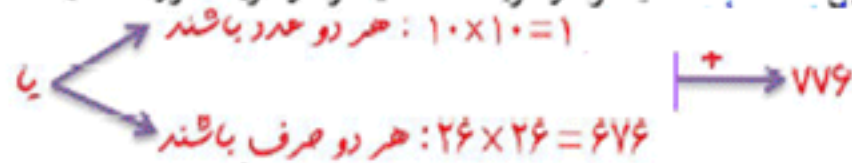


پ) این رمز از دو گزینه تشکیل شده است که یکی از گزینه‌ها یک عدد و گزینه دیگر یک حرف الفبای فارسی است.



درس اول شمارش

ت) این رمز از دو گزینه تشکیل شده است که یا هر دو گزینه عددند یا هر دو گزینه حروف انگلیسی اند.



ث) این رمز از ۴ گزینه تشکیل شده است که دو گزینه اول اعداد غیر تکراری و دو گزینه دوم

حروف انگلیسی غیر تکراری اند. $10 \times 9 \times 26 \times 26 = 58500$ حالت

۲ در یک شهرک صنعتی ۵ بلوار اصلی و در هر بلوار، بین ۸ تا ۱۰ خیابان، و در هر خیابان بین ۱۰ تا ۱۲ کوچه و در هر کوچه بین ۲۰ تا ۳۰ کارخانه وجود دارد. حداقل و حداکثر تعداد

کارخانه‌هایی که ممکن است در این شهرک وجود داشته باشند، چند است؟

$5 \times 10 \times 12 \times 30 = 18000$ صد کارخانه
 $5 \times 8 \times 10 \times 20 = 8000$ صد کارخانه

۳ می‌خواهیم رأس‌های مثلث زیر را با دو رنگ قرمز و آبی رنگ کنیم.

الف) به چند طریق این کار امکان پذیر است؟ برابر رنگ، برابر رنگ متفاوت با رنگ متفاوت با رنگ (A) به رنگ آبی و دو رأس دیگر قرمز باشند و برعکس) به همین ترتیب برابر متفاوت بودن B و C نیز هر کدام دو حالت داریم. به ترتیب اصل جمع $۶ + ۶ + ۶ = ۱۸$ طریق این کار امکان پذیر است.



تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

ب) به چند طریق می‌توان این رنگ آمیزی را انجام داد، به گونه‌ای که رأس‌هایی که به هم وصل اند، هم رنگ نباشند.
 (توجه به اینکه هر رأس دو رأس دیگر وصل است، این خواسته غیر ممکن است و در نتیجه به هیچ طریق نمی‌توان این کار را انجام داد.)

پ) هر دو قسمت (الف) و (ب) را در حالی که از سه رنگ مختلف استفاده می‌کنیم، بررسی کنید.

حالت الف: با توجه به این که مجبور به استفاده از هر سه رنگ هستیم تعداد انتخاب‌ها برابر است با:

$3 \times 2 \times 1 = 6$

حالت ب: جواب هیچ جواب قسمت (الف) یعنی ۶ می‌باشد زیرا با وجود سه رأس و ۳

رنگ متمایز، فرد به فرد در رأس‌ها رنگ نخواهند بود.

۴ با پلاک‌هایی به صورت زیر که عدد دو رقمی سمت راست آنها از مجموعه A انتخاب

شوند و سایر ارقام از مجموعه B انتخاب شوند و حرف استفاده شده در آن از مجموعه C

انتخاب شود، چند ماشین را می‌توان شماره گذاری کرد؟



$9 \times 9 \times 13 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9$

$13 \times 9^6 = 6908733$

$A = \{11, 22, \dots, 99\}$

$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$C = \{ب, ج, د, ح, ط, ص, س, ز, ح, ذ, ر, م, ن, و, ه, ی\}$

۵) در یک کشور نوعی اتومبیل در ۵ مدل، ۱۰ رنگ، ۳ حجم موتور مختلف و ۲ نوع دنده

(اتوماتیک و غیر اتوماتیک) تولید می شود.

الف) چند نوع مختلف از این اتومبیل تولید می شود؟

$$5 \times 10 \times 3 \times 2 = 300$$

دنده حجم موتور رنگ مدل

ب) اگر یکی از رنگ های تولید شده مشکلی باشد، چند نوع از این

اتومبیل با رنگ مشکلی تولید می شود؟

$$5 \times 1 \times 3 \times 2 = 30$$

دنده حجم موتور رنگ مدل

ب) چند نوع از این اتومبیل مشکلی دنده اتوماتیک تولید می شود؟

$$5 \times 1 \times 3 \times 1 = 15$$

دنده حجم موتور رنگ مدل



است. فردی قصد دارد به سؤالاتها به صورت تصادفی جواب دهد. او به چند روش می تواند

این کار را انجام دهد اگر:

الف) اگر مجبور باشند به همه سؤالاتها جواب دهد؟

$$\underbrace{4 \times 4 \times \dots \times 4}_{10 \text{ بار}} \times \underbrace{2 \times 2 \times \dots \times 2}_{5 \text{ بار}} = 2^25$$

سؤالات چهارگزینه ای سؤالات دوگزینه ای

ب) بتواند سؤالاتها را بدون جواب هم بگذارد؟

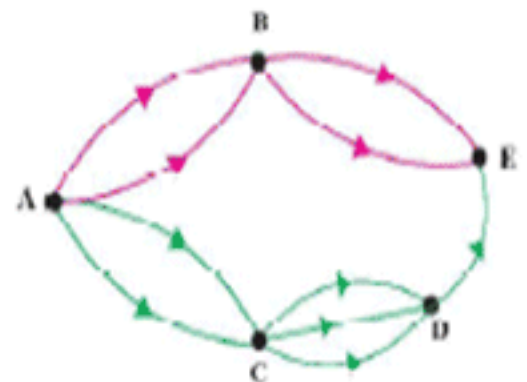
$$\underbrace{5 \times 5 \times \dots \times 5}_{10 \text{ بار}} \times \underbrace{3 \times 3 \times \dots \times 3}_{5 \text{ بار}} = 5^{10} \times 3^5$$

سؤالات چهارگزینه ای سؤالات دوگزینه ای

۷) اگر شکل مقابل نشان دهنده جاده های بین شهرهای A و B و C و D و E باشد و همه

جاده ها یک طرفه باشند، به چند طریق می توان از شهر A به شهر E رفت؟

$$\left. \begin{array}{l} \text{مسیر ABE: } 2 \times 2 = 4 \\ \text{مسیر ACDE: } 2 \times 3 \times 1 = 6 \end{array} \right\} + \rightarrow 10$$



۸) مسئله زیر را به گونه ای کامل کنید که جواب ارائه شده درست باشد.

مسئله: چند عدد دورقمی زوج می توان نوشت؟ به طوری که.....؟

برابر نقطه بیست و دو پیشنهاد دارم:

(۱) رقم دهگان کتبی نیز زوج باشد (۲) رقم دهگان کتبی عدد سه رقمی باشد.

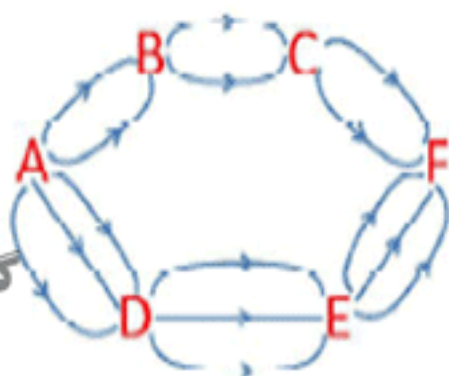
حل: تعداد راه های نوشتن یکان برابر ۵ تا است و تعداد راه های نوشتن دهگان برابر

۴ تا است. لذا با توجه به اصل ضرب ۲۰ عدد با شرایط مورد نظر وجود دارد.

۹) مسئله ای طرح کنید که با استفاده از اصل جمع یا اصل ضرب و یا هر دوی آنها حل شود

و جواب آن به صورت زیر باشد.

$$2 \times 2 \times 2 + 3 \times 3 \times 3 = 35$$



مسئله برابر سوال ۶: اگر شکل مقابل نشان دهنده سواره های بیست

شهر A, B, C, D, E, F باشد و همه سواره های یک طرفه فرود شوند،

به چند طریق می توان از شهر A به شهر F رفت؟

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه استان خوزستان

۱ فرض کنید فیش‌ها را a و b و c بنامیم. حالت‌های مختلف قرار دادن آنها را در مربع‌های زیر بنویسید.

a	b	c
a	c	b
b	a	c
b	c	a
c	a	b
c	b	a



۲ آیا در سه مربع به هم چسبیده، حرفی می‌تواند تکرار شود؟ **خیر**

۳ با توجه به اصل ضرب چگونه می‌توان تعداد این چینش‌ها را به دست آورد؟

$$6 \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 2 & 1 \\ \hline \text{درگاه سوم} & \text{درگاه دوم} & \text{درگاه اول} \\ \hline \end{array}$$

فعالیت

به چند حالت مختلف می‌توان چهار عدد ۱ و ۲ و ۳ و ۴ را کنار هم قرار داد؟
 می‌خواهیم مسئله قبل را با استفاده از اصل ضرب حل کنیم. فرض کنید ۴ مربع به صورت مقابل وجود دارد که پر کردن هر کدام از مربع‌ها یک مرحله از چینش است. واضح است که هر چهار مرحله باید انجام شود؛ لذا تعداد حالت‌های ممکن برای پر کردن مربع‌ها باید در هم ضرب شود.

«اگر چند شیء متمایز داشته باشیم، به هر حالت چینش آنها کنار هم، یک جایگشت از آن اشیاء می‌گوییم.»

۱ اولین مربع (مثلاً مربع سمت چپ) به چند روش می‌تواند پر شود؟ ۴

پس از پر شدن اولین مربع چند عدد چیده نشده باقی مانده است؟ ۳

حالا ده من مربع را به چند روش می‌توان پر کرد؟ ۲ سه من و چهار من مربع را چگونه؟

سومین مربع به ۲ روش و چهارمین مربع به ۱ روش

حالا با توجه به اصل ضرب، تعداد حالت‌های ممکن برابر است با

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

متمايز عبارت است از حاصل ضرب

۲ به نظر شما تعداد روش‌های چینش پنج حرف یونانی α و β و γ و δ و θ (به ترتیب الفبا، بتا، گاما، دلتا و ایتا خوانده می‌شوند) کنار هم و بدون تکرار، با به عبارتی تعداد جایگشت‌های پنج شیء متمایز چندتا است؟ $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

۳ تعداد کلمات هفت حرفی (با معنی و بدون معنی) که از کنار هم قرار دادن حروف «ت»، «س»، «و»، «ه»، «ا»، «ب» و «پ» می‌توان ساخت چندتا است؟ (بدون تکرار حروف)

۴ با استفاده از ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ چند عدد ۹ رقمی با ارقام متمایز می‌توان نوشت؟

۵ تعداد جایگشت‌های ۱۰ شیء متمایز چندتا است؟

۶ اگر n یک عدد طبیعی باشد، تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز را با یک حاصل ضرب نشان دهید.

$$7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$10 \times 9 \times \dots \times 2 \times 1$$

$$n(n-1)(n-2) \times \dots \times 2 \times 1$$

$$n(n-1)(n-2) \times \dots \times 2 \times 1$$

معرفی یک نماد

اگر n یک عدد طبیعی باشد، حاصل ضرب اعداد طبیعی و متوالی از ۱ تا n را به صورت $n!$

(n فاکتوریل) نمایش می‌دهیم. به طور مثال، $1! = 1$ ، $2! = 1 \times 2$ ، $3! = 1 \times 2 \times 3$ و الی آخر

قرار داد: $0! = 1$

حال با توجه به این نماد، تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز برابر است با $n!$

تمرین در کلاس

۱ مانند نمونه هر قسمت را کامل کنید.

الف) $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$

ب) $8! = 8 \times 7 \times \dots$

ب) $10! = 10 \times 9 \times \dots$

ت) $n! = n \times (n-1) \times \dots$

۲ حاصل عبارت‌ها، زیر را به دست آورید.

الف) $\frac{5!}{4!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 5$

ب) $\frac{10!}{9!} = \frac{10 \times 9!}{9!} = 10$

ت) $\frac{8!}{6!} = \frac{8 \times 7 \times 6!}{6!} = 56$

ت) $\frac{10!}{8!} = \frac{10 \times 9 \times 8!}{8!} = 90$

ج) $\frac{8!}{5!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5!} = 336$

ح) $\frac{10!}{7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7!} = 720$

د) $\frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)!}{(n-4)!} = n(n-1)(n-2)(n-3)$

ز) $\frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)$

تهیه کننده: گروه ریاضی صفی‌نور و استان خوزستان
استان خوزستان

ب) $\frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n$

ج) $\frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = n(n-1)$

ح) $\frac{n!}{(n-3)!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!} = n(n-1)(n-2)$

د) $\frac{n!}{(n-5)!} = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

۱ یک مربی فوتبال قصد دارد برای بازی پیش رو در تیم خود یک دفاع راست، یک دفاع چپ، یک دفاع جلو و یک دفاع عقب قرار دهد. او شش بازیکن دفاعی دارد که می‌توانند در هر کدام از این چهار پست بازی کنند. در شروع بازی چند حالت برای چیدن این خط دفاعی برای این مربی وجود دارد؟

$$P(6,4) = \frac{6!}{2!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = 360$$

۲ با اعداد ۵ و ۳ و ۲ و ۱ چند عدد سه رقمی با ارقام غیر تکراری می‌توان نوشت؟

$$P(4,3) = \frac{4!}{1!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{1} = 24$$

تمرین

۱ در یک لیگ فوتبال ۱۸ تیم قرار دارند. در پایان این لیگ تیم‌های اول تا سوم به چند حالت مختلف می‌توانند مشخص شوند؟

$$P(18,3) = \frac{18!}{15!} = \frac{18 \times 17 \times 16 \times 15!}{15!} = 4896$$

۲ از بین تعدادی کتاب مختلف می‌خواهیم سه کتاب را انتخاب کنیم و در فلسفه‌ای بچینیم. اگر تعداد حالت‌های مختلف برای این کار ۲۱۰ تا باشد، تعداد کتاب‌ها چند است؟

$$P(n,3) = \frac{n!}{(n-3)!} = n(n-1)(n-2) = 7 \times 6 \times 5 \Rightarrow n = 7$$

۳ کدام یک از موارد زیر درست و کدام نادرست است؟

$6! = 3! + 2!$ نادرست	$6! = 6 \times 5!$ درست
$8! = 4! \times 2!$ نادرست	$2 \times 3! = 6!$ نادرست
$(3!)^2 = 9!$ نادرست	$2! = \frac{8!}{7!}$ نادرست



۴ در یک نوع ماترین حساب کوچک که دارای ۲۰ کلید است، برای انجام یک دستور

خاص باید سه کلید مشخص با ترتیبی مشخص فشار داده شوند. اگر فردی نداند سه کلید مورد نظر کدام‌اند و بخواهد به‌طور تصادفی این کار را انجام دهد و فشردن هر سه کلید ۲ ثانیه زمان بخواهد، این فرد حداکثر (در بدترین حالت) در چه زمانی می‌تواند دستور مورد نظر را اجرا کند؟

$$2 \times P(20,3) = 13680 \text{ ثانیه}$$

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه «گل پیرا» و بدون تکرار حروف

استان خوزستان می‌تواند کلمه ۶ حرفی می‌توان نوشت؟ ۶! چند تا از آنها با «گل» شروع می‌شود؟ ۴!

$$P(6,4) = 360$$

ب) چند کلمه ۳ حرفی می‌توان نوشت که در آنها دو حرف «پ» و «ر» در کنار هم آمده باشند؟

$$2! \times 5! = 24$$

ت) چند کلمه ۵ حرفی می‌توان نوشت که در آنها حروف کلمه «پیرا» کنار هم آمده باشند؟

جابه‌جایی کلی گ ی ا ل پیرا

$$4! \times 2 \times 2 = 96$$

تهیه کننده:

۱ همان طور که دیدید، با پنج رقم ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ تعداد $5! = 120$ عدد سه رقمی با رقم‌های غیر تکراری می‌توان نوشت که عبارت‌اند از:

۱۲۳	۱۲۴	۱۲۵	۱۳۲	۱۳۵	۱۴۵	۲۳۴	۲۳۵	۲۴۵	۳۴۵
۱۳۲	۱۳۳	۱۵۲	۱۲۳	۱۵۳	۱۵۲	۲۳۳	۲۵۳	۲۵۲	۳۵۲
۲۱۳	۲۱۴	۲۱۵	۳۱۴	۳۱۵	۴۱۵	۳۲۴	۳۲۵	۴۲۵	۴۳۵
۲۳۱	۲۴۱	۲۵۱	۳۴۱	۳۵۱	۴۵۱	۳۴۲	۳۵۲	۴۵۲	۴۵۳
۳۱۲	۴۱۲	۵۱۲	۴۱۳	۵۱۳	۵۱۴	۴۲۳	۵۲۳	۵۲۴	۵۳۴
۳۲۱	۴۲۱	۵۲۱	۲۲۱	۵۲۱	۵۲۱	۲۲۲	۵۲۲	۵۲۲	۵۲۲

به شش عدد هر ستون نگاه کنید. چه ویژگی‌ای دارند؟

عدد سه رقمی موجود در هر ستون برابر رقم سه رقمی است و فقط جایگشت آن است.

۲ با توجه به ستون‌های جدول بالا چگونه می‌توانیم تمام زیرمجموعه‌های سه عضوی مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ را بنویسیم؟ این زیرمجموعه‌ها چندتا هستند؟ آنها را بنویسید.

کفایت ارقام استفاده شده در هر ستون را به عنوان یک زیرمجموعه از A نشان دهید. بنابراین ده زیرمجموعه سه عضوی موجود دارد.

$\{1, 2, 3\}$ ، $\{1, 2, 4\}$ ، $\{1, 2, 5\}$ ، $\{1, 3, 4\}$ ، $\{1, 3, 5\}$ ، $\{1, 4, 5\}$ ، $\{2, 3, 4\}$ ، $\{2, 3, 5\}$ ، $\{2, 4, 5\}$ ، $\{3, 4, 5\}$

۳ چه تفاوتی در فعالیت ۱ و ۲ وجود داشت که تعداد حالت‌های مورد نظر آنها را متمایز کرد؟

در فعالیت (۱) ترتیب قرار گرفتن ارقام مهم بود و در فعالیت (۲) ترتیب قرار گرفتن ارقام اهمیت نداشت.

۴ هر ستون در فعالیت ۱ چند زیرمجموعه سه عضوی از فعالیت ۲ را به دست می‌دهد؟ یک زیرمجموعه

۵ با توجه به فعالیت ۴، از تقسیم جواب فعالیت ۱ بر چه عددی تعداد زیرمجموعه‌های فعالیت ۲ حاصل می‌شود؟ ۶

این عدد را چگونه می‌توان به دست آورد؟

هر سه عضو از فعالیت ۱ زیرمجموعه را به $3! = 6$ طریق مرتب می‌توانیم در ترتیب‌های مختلف نوشتیم و تعداد متفاوتی ساختیم.

کار در کلاس

۱ در کدام یک از موارد زیر، ترتیب قرار گرفتن اشیاء اهمیت دارد و باید تعداد جایگشت‌های

۲ شیء از n شیء متمایز مشخص شود و در کدام یک ترتیب قرار گرفتن اشیاء اهمیت ندارد و باید تعداد ترکیب‌های r تایی از n شیء متمایز مشخص شود؟

الف) ساختن کلمه‌ای سه حرفی بدون حرف تکراری با ۵ حرف متمایز (بامعنی و بی‌معنی). ترتیب مهم است.

ب) انتخاب سه شاخه گل از بین پنج شاخه گل متمایز. ترتیب مهم نیست.

پ) انتخاب یک دفاع چپ، یک دفاع راست و یک دفاع وسط از بین هفت مدافع که همگی

در تمامی پست‌ها توانایی بازی دارند. ترتیب مهم است.

تهیه کننده: گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه استان خوزستان

توجه: به نظر بنده حقیر بهتر بود متن قسمت (پ) به صورت زیر نوشته می‌شد: تا حاضر از هر گونه ابهام باشد: استان خوزستان

ت) از بین هفت بازیکن دفاعی، یک تیم سه نفره قرار است از تیم کنار گذاشته شوند. ترتیب مهم نیست.

ث) ده نفر در یک دوره مسابقات شرکت خواهند کرد و سه نفر اول به المپیک راه خواهند یافت. ترتیب مهم نیست.

ج) ده نفر در یک مسابقه شرکت کرده‌اند و قرار است به نفرات اول تا سوم به ترتیب مدال‌های

طلا، نقره و برنز داده شود. ترتیب مهم است.

۲ در هر کدام از موارد «کار در کلاس ۱» تعداد حالت‌های ممکن را بنویسید. (نیاز به ساده کردن جواب نیست)

الف) $P(5, 2)$

ب) $\binom{5}{2}$

پ) $P(7, 3)$

نده:

د) $\binom{7}{3}$

ه) $\binom{10}{3}$

و) $P(10, 3)$

توسط استان خوزستان

۳ از میان ۸ ریاضی‌دان و ۶ فیزیک‌دان و ۵ شیمی‌دان قرار است کمیته‌ای علمی انتخاب

شود. به چند طریق این کمیته می‌تواند انتخاب شود هر گاه:

الف) کمیته ۶ نفره باشد و از هر رشته ۲ نفر در آن عضو باشند؟ $\binom{5}{2} \times \binom{6}{2} \times \binom{8}{2} = 10 \times 15 \times 28 = 4200$

ب) کمیته ۳ نفره باشد و از هر رشته حداقل یک نفر در آن عضو باشند؟ $\binom{5}{1} \times \binom{6}{1} \times \binom{8}{1} = 5 \times 6 \times 8 = 240$

ب) کمیته ۲ نفره باشد و حداقل یک ریاضی‌دان در آن باشد؟ $\binom{8}{1} \times \binom{11}{1} + \binom{8}{2} = 88 + 28 = 116$

۱ می دانیم که $\binom{n}{r}$ همان تعداد زیر مجموعه های r تایی از یک مجموعه n عضوی است. حال $\binom{n}{0}$ و $\binom{n}{1}$ را یک بار با توجه به این تعبیر از $\binom{n}{r}$ ، و یک بار با فرمول، به دست آورید.

هر مجموعه n عضوی دارای یک زیر مجموعه r هیچ عضو است نام تیر است بنابراین: $\binom{n}{0} = 1$ $\xrightarrow{\text{اثبات به کمک فرمول}}$ $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0! \times n!} = 1$

هر مجموعه n عضوی دارای n عضو دارد n زیر مجموعه r یک عضو است بنابراین: $\binom{n}{1} = n$ $\xrightarrow{\text{اثبات به کمک فرمول}}$ $\binom{n}{1} = \frac{n!}{1! \times (n-1)!} = \frac{n!}{1 \times (n-1)!} = n$

۲ الف) یک مری قصد دارد از بین بازیکنان شماره های ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ سه نفر را برای رفتن به زمین بازی انتخاب کند. چند حالت برای این کار امکان دارد؟ **۱۰ حالت امکان پذیر است.** با پر کردن جدول مقابل تمام حالات را نمایش دهید.
ب) این بار این مری قصد دارد از بین همان بازیکنان دو بازیکن انتخاب کند که روی نیمکت بنشینند. چه انتخاب هایی دارد؟
جواب: برعکس حالت الف) . سطوح مست راست من با هم ۰ به همراه این در این مورد نیز ۱۰ انتخاب دارد
پ) بین تعداد انتخاب های $\binom{5}{3}$ و $\binom{5}{2}$ چه رابطه ای هست...؟ چگونه این رابطه را توجیه می کنید؟
این دو انتخاب با هم برابرند زیرا تعداد حالات انتخاب ۳ نفر از ۵ نفر به این معنایست که ۲ نفر از ۵ نفر انتخاب شوند.

به زمین می روند	به زمین نمی روند
۱، ۲، ۳	۴، ۵
۱، ۲، ۴	۳، ۵
۱، ۳، ۵	۲، ۴
۱، ۴، ۵	۲، ۳
۱، ۲، ۵	۳، ۴
۱، ۳، ۴	۲، ۵
۱، ۴، ۳	۲، ۵
۱، ۵، ۳	۲، ۴
۱، ۵، ۴	۲، ۳
۲، ۳، ۴	۱، ۵
۲، ۴، ۵	۱، ۳
۳، ۴، ۵	۱، ۲

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه استان خوزستان

ت) درستی تساوی $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ را یک بار با استفاده از توجه بالا با یک مثال اثبات کنید. از فرمول بررسی کنید.
تعداد انتخاب ۳ نفر از n نفر به این معنایست که بقیه (یعنی $n-3$ نفر) را انتخاب نکنیم پس $\binom{n}{3} = \binom{n}{n-3}$

اثبات به کمک فرمول: $\binom{n}{n-r} = \frac{n!}{(n-r)! \times r!} = \frac{n!}{r! \times (n-(n-r))!} = \frac{n!}{r! \times (n-r)!} = \binom{n}{r}$

۳ جاهای خالی را پر کنید.

الف) تعداد زیر مجموعه های ۵ عضوی از مجموعه حروف انگلیسی برابر است با: $\binom{26}{5}$
ب) تعداد زیر مجموعه های ۵ عضوی از مجموعه حروف انگلیسی که حرف a در آنها هست برابر است با: $\binom{25}{4}$
پ) تعداد زیر مجموعه های ۵ عضوی از مجموعه حروف انگلیسی که حرف a در آنها نیست برابر است با: $\binom{25}{5}$

ت) بنابراین: $\binom{26}{5} = \binom{25}{4} + \binom{25}{5}$

۴ فرض کنیم A یک مجموعه n عضوی و a یکی از اعضای آن باشد. ($a \in A$)

الف) تعداد زیر مجموعه های r عضوی A برابر است با: $\binom{n}{r}$
ب) تعداد زیر مجموعه های r عضوی A که a در آنها هست، برابر است با: $\binom{n-1}{r-1}$
پ) تعداد زیر مجموعه های r عضوی A که a در آنها نیست، برابر است با: $\binom{n-1}{r}$

ت) بنابراین: $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$

تجیه کننده: گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

$$\binom{7}{5} + \binom{7}{6} + \binom{7}{7} = 28 + 7 + 1 = 36$$

۱ یک فروشنده تنقلات در فروشگاه خود، پسته، بادام، گردو، نخمه کدو، نخمه زاینه، نخودچی و کشمش دارد. از نظر او در یک آجیل حداقل پنج نوع از تنقلات فوق باید وجود داشته باشد. او با تنقلات موجود در فروشگاهش چند نوع آجیل می‌تواند درست کند؟

۲ یک اداره دارای ۱۸ عضو است. این اداره دارای ۱ رئیس، ۳ معاون، ۲ حسابدار، ۶ کارشناس اداری، ۲ کارمند نگهبانی و ۳ کارشناس امور حقوقی است. این اداره ماهانه باید جلسه‌ای ۵ نفره جهت بررسی و تصویب آخرین طرح‌های پیشنهادی برگزار کند. به چند طریق این گروه ۵ نفره می‌تواند انتخاب شود، هرگاه:

$$\binom{18}{1} \times \binom{17}{3} \times \binom{14}{2} = 1 \times 3 \times 364 = 1092 \text{ (الف)}$$

$$\binom{18}{1} \times \binom{17}{3} \times \binom{14}{1} \times \binom{11}{2} = 1 \times 3 \times 3 \times 55 = 495 \text{ (ب)}$$

$$\binom{18}{1} \times \binom{17}{2} \times \binom{14}{1} \times \binom{11}{1} \times \binom{9}{1} = 1 \times 3 \times 3 \times 2 \times 9 = 162 \text{ (پ)}$$

الف) رئیس و دقیقاً یک کارشناس امور حقوقی در جلسه باشند؟

ب) رئیس و دقیقاً یک معاون و یک کارشناس امور حقوقی در جلسه باشند؟

پ) رئیس و دقیقاً یک معاون، یک حسابدار و یک کارشناس امور حقوقی در جلسه باشند؟

۳ در یک کلاس تعدادی از دانش‌آموزان که همگی دارای شرایط علمی خوبی‌اند، داوطلب حضور در مسابقات علمی مدرسه هستند. معلم قصد دارد ۲ نفر را به تصادف انتخاب کند. او این دو نفر را به ۲۸ روش می‌تواند از بین داوطلبان انتخاب کند. تعداد داوطلبان چند نفر بوده است؟ **فرمول کنیم تعداد داوطلبان = ۱۱ نفر با هم به هم داریم:**

$$\binom{n}{2} = 28 \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 28 \Rightarrow n(n-1) = 56 = 8 \times 7 \Rightarrow n = 8$$

۴ گل فروشی در فروشگاه خود ۱۰ نوع گل مختلف دارد. او در هر دسته گل از ۳ تا ۵ شاخه گل متمایز قرار می‌دهد. او چند دسته گل مختلف می‌تواند درست کند؟

$$\binom{10}{2} + \binom{10}{3} + \binom{10}{4} + \binom{10}{5} = 45 + 120 + 210 + 252 = 587$$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه
استان خوزستان

۵ یک تقانس فوطی‌های از ۴ رنگ قرمز، آبی، زرد و مشکی دارد. اگر او با ترکیب دو یا چند فوطی از رنگ‌های متمایز بتواند دقیقاً یک رنگ جدید به دست آورد، او چند رنگ می‌تواند داشته باشد؟

$$\binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 6 + 4 + 1 = 11$$

چرا با اینکه در کارهای هنری فقط از همین ۴ رنگ استفاده می‌شود، اما تعداد رنگ‌های حاصل بیشتر از جواب شماست؟

پوینت مهم است میزبان ترکیب رنگ‌ها یکسان نباشد به طور مثال یکبار ۱۰۰٪ از یک رنگ و ۱۰۰٪ از رنگ دیگر استفاده شود و بار دیگر ۶۰٪ از یک رنگ و ۴۰٪ از دیگر استفاده شود در همین دو حالت دو رنگ متفاوت به دست می‌آید.

۶ هفت نقطه A و B و C و D و E و F و G روی محیط یک دایره قرار دارند. چند مثلث مختلف می‌توان کشید که رئوس آن از این هفت نقطه انتخاب شده باشند؟

$$\binom{7}{3} = 35$$

درست می‌کند. این آسبیز چند طعم می‌تواند درست کند هرگاه

$$\binom{10}{3} = 120 \text{ (الف) هیچ محدودیتی در استفاده از ادویه‌ها نداشته باشد؟}$$

ب) دو نوع ادویه هستند که با هم نمی‌توانند استفاده شوند؟

اگر این دو ادویه استفاده شوند، ادویه سوم از ۸ ادویه باقی‌مانده انتخاب خواهد شد و در نتیجه:

$$\text{تعداد حالات وجود دو ادویه با هم} = \binom{8}{1}$$

$$\text{تعداد حالات که دو ادویه با هم استفاده می‌شوند} = \text{تعداد کل حالات} - \text{تعداد حالات که دو ادویه با هم استفاده نشوند} = \binom{10}{3} - \binom{8}{1} = 120 - 8 = 112$$

پ) سه ادویه هستند که نباید هر سه با هم استفاده شوند؟

$$\text{تعداد حالات که هر سه استفاده شده} = \text{تعداد کل حالات} - \text{تعداد حالات که هر سه نباید استفاده شوند} = \binom{10}{3} - \binom{3}{3} = 120 - 1 = 119$$

ت) ادویه‌ها به ۲ دسته ۵ تایی تقسیم می‌شوند که هیچ یک از ادویه‌های دسته اول با هیچ یک از

ادویه‌های دسته دوم سازگاری ندارند؟

$$\text{هر سه ادویه باید از دسته اول انتخاب شده یا هر سه ادویه از دسته دوم انتخاب شوند. بنابراین:} \binom{5}{3} + \binom{5}{3} = 10 + 10 = 20$$

۸ مسئله‌ای طرح کنید که جواب آن برابر باشد با:

$$\text{الف) } \binom{5}{3} \times \binom{6}{2} \text{ مسئله: به چند طریق می‌توان از بین ۵ مرد و ۶ زن، ۵ نفر انتخاب کرد به طوری که در این انتخاب ۳ زن و ۲ مرد وجود داشته باشد؟}$$

مسئله: اصحاب مر فواهد با پول‌ها شرکت کنند؟ مدار یا ۳ یک کم (نقطه یکبار از

این دو نوع) را در هر بار می‌کند، اگر در شماره می‌توانیم انحصار فروش نقطه ۶

نوع مدار و ۵ نوع یک کم موجود باشد، اصحاب چند انتخاب برادر خرید دارند؟

$$\text{ب) } \binom{5}{3} + \binom{6}{2}$$

فصل ہفتم

۱ اگر دو تاس آبی و قرمز را با هم بیندازیم، همه حالت‌های ممکن را می‌توان در جدول زیر مشاهده کرد. ابتدا این جدول را کامل کنید و از طریق اصل ضرب درستی تعداد کل حالت‌های موجود در جدول را بررسی کنید؛ سپس به سؤال‌ها پاسخ دهید:

	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	(۱,۱)	(۱,۲)	(۱,۳)	(۱,۴)	(۱,۵)	(۱,۶)
۲	(۲,۱)	(۲,۲)	(۲,۳)	(۲,۴)	(۲,۵)	(۲,۶)
۳	(۳,۱)	(۳,۲)	(۳,۳)	(۳,۴)	(۳,۵)	(۳,۶)
۴	(۴,۱)	(۴,۲)	(۴,۳)	(۴,۴)	(۴,۵)	(۴,۶)
۵	(۵,۱)	(۵,۲)	(۵,۳)	(۵,۴)	(۵,۵)	(۵,۶)
۶	(۶,۱)	(۶,۲)	(۶,۳)	(۶,۴)	(۶,۵)	(۶,۶)

قطر آبی

تهیه کننده:

دکتران محترم ریاضی هانور

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه

۲ قطر آبی رنگ چه پیشامدی را نشان می‌دهد؟ **پیشامدهایی که در آن مجموع دو عدد رو شده برابر ۷ است**

۳ خانه‌های مربوط به حالت‌هایی را که هر دو عدد رو شده زوج و هر دو عدد رو شده فردند

هانور بزنید؛ چه الگویی به دست می‌آید؟ **هر دو حالت ۱۸ مورد هم‌پایه هستند. ۹ مورد هر دو عدد رو شده زوج و ۹ مورد هر دو عدد رو شده فرد هم‌پایه هستند.**

۴ با توجه به جدول، یک مسئله طرح کنید و پاسخ آن را توضیح دهید. **چون مجموع دو عدد رو شده X_i در حالت‌هایی را بنویسید که در آن اعداد رو شده برابر باشند. ((۶ حالت))**

۵ با توجه به جدول و قطرهای آن، تعداد حالت‌ها برای مجموع دو تاس، در چه اعدادی برابر است؟ (راه‌نمایی: به عنوان مثال، تعداد حالت‌ها برای مجموع ۵ و مجموع دو تاس ۹، برابر است) **مجموع اعداد رو شده X_i**

X_i	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۵	۴	۳	۲	۱

$$P(X_i) = \begin{cases} X_i - 1 & X_i = 2, 3, 4, 5, 6, 7 \\ -X_i + 13 & X_i = 8, 9, 10, 11, 12 \end{cases}$$

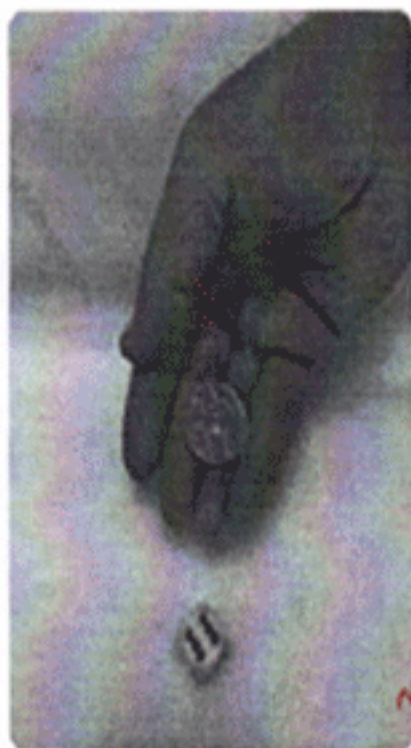
فرض کنید می‌خواهیم یک تاس و یک سکه را با هم بیندازیم:

آیا می‌توانید نتیجه حاصل را به صورت قطعی بیان کنید؟ **خیر**

۶ آیا این پدیده با آزمایش، تصادفی است؟ چرا؟ **بله، تصادفی است زیرا نتیجه آن قبل از وقوع قابل پیش‌بینی نیست.**

۷ همه حالت‌های ممکن را بنویسید (فضای نمونه‌ای را تشکیل دهید).

۸ تعداد این حالت‌ها را با استفاده از اصل ضرب به دست آورید. **۶ و ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ و ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و ۷ و ۸ و ۹ و ۱۰ و ۱۱ و ۱۲**



۹ جدول 2×6 یا 6×2 مربوط به این آزمایش را رسم کنید.

تاس	۱	۲	۳	۴	۵	۶
سکه	۱ پ	۲ پ	۳ پ	۴ پ	۵ پ	۶ پ
سکه	۱ ر	۲ ر	۳ ر	۴ ر	۵ ر	۶ ر

۱ با توجه به فعالیت ابتدای این درس (انداختن دو تاس) هر یک از پیشامدهای زیر را تشکیل دهید و جاهای خالی را پر کنید.

A = پیشامد آنکه هر دو تاس فرد باشند = $\{(1,1), (1,3), (1,5), (3,1), (3,3), (3,5), (5,1), (5,3), (5,5)\}$

B = پیشامد آنکه مجموع دو تاس ۶ باشد = $\{(1,5), (5,1), (2,4), (4,2), (3,3), (6,6)\}$

C = پیشامد آنکه تاس آبی مضرب ۳ بیاید = $\{(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$

الف) پیشامد اینکه «هر دو تاس فرد و مجموع آنها ۶ باشد»

$(A \cap B) = \{(1,5), (5,1), (3,3)\} \rightarrow n(A \cap B) = \dots 3 \dots$

ب) پیشامد آنکه «هر دو تاس فرد یا مجموع دو تاس ۶ باشد»

$A \cup B = \{(1,1), (1,3), (3,1), (1,5), (5,1), (2,4), (4,2), (3,3), (3,5), (5,3), (5,5)\}$

تهیه کننده:
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه
استان خوزستان

تاس ۶ باشد.

ب) پیشامد آنکه $(A-C)$ رخ بدهد؛ یعنی «هر دو تاس فرد باشند، ولی مجموع آنها...» پس

داریم:

$A-C = \{(1,1), (1,3), (1,5), (3,3), (3,5), (5,5)\}$

ت) پیشامد $(C-B)$ را توصیف کنید و آن را تشکیل دهید.
 $C-B = \{(3,2), (3,4), (3,5), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$

ث) اگر پیشامد D را «مجموع دو تاس، عدد ۷ باشد» و پیشامد E را «هر دو تاس زوج باشند» تعریف کنیم، آیا D و E ناسازگارند؟ چرا؟

$D \cap E = \emptyset$ بله ناسازگارند زیرا

۲ تاسی را می اندازیم، روی فضای نمونه ای حاصل، پیشامدهای A و B و C را طوری

تعریف کنید که:

$A = \{1, 2, 3\}$ $B = \{4, 5\}$

الف) A و B ناسازگار باشند.

ب) A و B و C دو به دو ناسازگار باشند. $A = \{1\}$ $B = \{2, 4\}$ $C = \{5, 6\}$

ب) $(A \cap B)$ و C ناسازگار باشند.

$A = \{1, 2, 3\}$

$B = \{3, 4\}$

$C = \{5, 6\}$

مثال ۵

یک تاس و ۲ سکه را با هم می اندازیم:

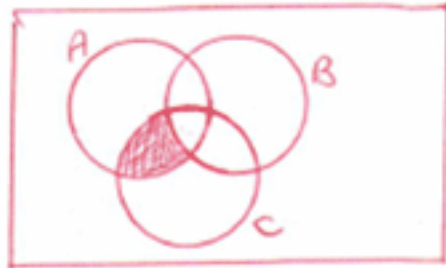
$$2^5 = 32$$

$$S = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

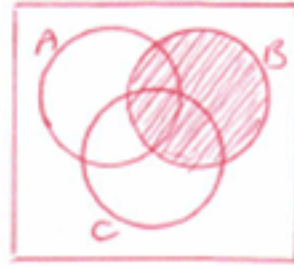
(الف) ۱

$$A = \{4, 8\}$$

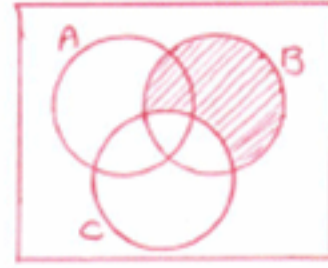
(ب) ۲



الف



ب



ب

نمونه فضای $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

۳

$$A = \{2, 4, 6, 8\}$$

$$B = \{2, 3, 5, 7\}$$

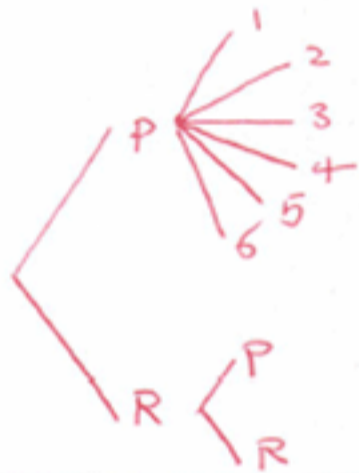
$$C = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$n(S) = 2^3 = 8$$

۴

فضای نمونه $S = \{PPP, PPD, PDP, DPP, PDD, DPD, DDP, DDD\}$

فضای مشاهده $E = \{PPD, PDP, DPP, PDD, DPD, DDP, DDD\}$



الف $S = \{P1, P2, P3, P4, P5, P6, RP, RR\}$

$$A = \{P2, P4, P6\}$$

$$B = \{RR\}$$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

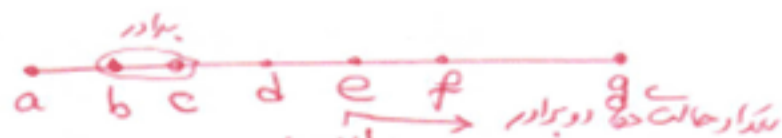
$$الف) P(A) = \frac{\binom{3}{2} \binom{2}{0}}{\binom{5}{2}} = \frac{3 \times 1}{10} = \frac{3}{10}$$

$$ب) P(B) = \frac{\binom{3}{2} \binom{2}{0} + \binom{3}{0} \binom{2}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{3+1}{10} = \frac{4}{10}$$

$$ب) P(C) = \frac{\binom{3}{1} \binom{2}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{3 \times 2}{10} = \frac{3}{5}$$

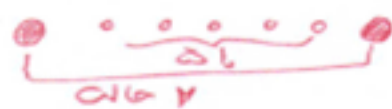
مدار حالت ها ۷، ۸ و ۹

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{34}{100} + \frac{22}{100} - \frac{15}{100} = \frac{41}{100}$$



$$الف) P(A) = \frac{4! \times 2!}{7!} = \frac{2}{7}$$

$$ب) P(B) = \frac{5! \times 2}{7!} = \frac{2}{7 \times 6} = \frac{1}{21}$$



$$A \subseteq B \Rightarrow n(A) \leq n(B)$$

$$\div n(S) \Rightarrow \frac{n(A)}{n(S)} \leq \frac{n(B)}{n(S)} \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

۷

۸

۹

- ۱ در پیرامون خود، مثال هایی را از تصمیم گیری یا پیش بینی بر اساس اعداد و ارقام بیاورید. **تصمیم گیری بر اساس انواع نخل با توجه به میزان محصول آنها / تصمیم گیری برای انتخاب در تشخیص گونه**
- ۲ مراحل علم آمار را در شکل زیر کامل کنید.



۳ با در نظر گرفتن اخبار هواشناسی مراحل علم آمار را در شکل زیر کامل کنید.



۴ تفاوت آمار و علم آمار در چیست؟ **علم آمار؛ مجموعه ای از روش ها است که برای بررسی و تفسیر داده ها استفاده می شود... (پارکراف ص ۱۵۲)**

۵ مدیر کارخانه ای برای پیدا کردن تعداد کل لامپ های معیوب در یک ماه آینده، می خواهد یک تحقیق آماری انجام دهد. برای این منظور تعداد لامپ های معیوب را در چند روز کاری به صورت زیر جمع آوری کرده است.



کارخانه لامپ سازی

روز کاری	روز کاری پنجم	روز کاری چهارم	روز کاری سوم	روز کاری دوم	روز کاری اول	روزهای کاری
۱۸۰	۱۲۰	۹۰	۷۰	۵۰	تعداد لامپ های معیوب	

بر اساس داده های به دست آمده، به سؤالات زیر پاسخ دهید:

الف) روند تغییر اعداد و ارقام در این تمرین نشان دهنده چه چیزی است؟ **افزایش تعداد لامپ های معیوب**

ب) در این تمرین چه چیزی به عنوان آمار محسوب می شود؟ **داده ها (۱۸۰، ۱۲۰، ۹۰، ۷۰، ۵۰)**

۶ کدام جمله درست و کدام جمله نادرست است:

- الف) اولین قدم در استفاده از «علم آمار»، جمع آوری داده هاست. **درست**
- ب) پیش بینی و تصمیم گیری برای آینده، نتیجه استفاده از «علم آمار» است. **درست**
- ب) «علم آمار»، همان اعداد و ارقام است... **نادرست**

۷ به شکل روبه رو توجه کنید: آیا این شکل را می توان به اعداد و ارقام تبدیل کرد؟ اعداد و ارقام آن چگونه اند؟ برای پاسخ به این سؤالات، کاربرد علم آمار در مهندسی کامپیوتر را مطالعه کنید. **بله، کیفیت تصویر به یک مقدار معکوس دمای آن**

۸ جدول سمت راست، جدول عددی شکل سمت چپ نامیده می شود. اگر رنگ سبز را با عدد ۳، رنگ زرد را با عدد ۲، رنگ قرمز را با عدد ۱ و رنگ مشکی را با عدد صفر نشان دهیم. جدول عددی و شکل زیر را کامل کنید.

شکل

؟	■	■
■	■	■
■	■	■

جدول عددی

۱	؟	؟
؟	؟	؟
؟	؟	۳

ویژگی مورد بررسی	اندازه نمونه	اندازه جامعه	جامعه
کیفیت محصول تولیدی	۱۰۰	۱۰۰۰۰	کل قطعات تولید شده

۲ کدام جمله درست و کدام جمله نادرست است:

الف) اندازه جامعه کمتر از اندازه نمونه است... *نادرست*

ب) اعضای نمونه، همان اعضای جامعه اند... *نادرست* ..

پ) نمونه زیر مجموعه‌ای از جامعه است... *درست*

۳ در شکل زیر، دانش‌آموزان یک مدرسه در صف صبحگاهی مشاهده می‌شوند.

هر صف افقی نشان‌دهنده تعداد دانش‌آموزان یک کلاس است. جامعه و اعضای آن را مشخص کنید و دو نمونه دلخواه از این جامعه را ارائه کنید.

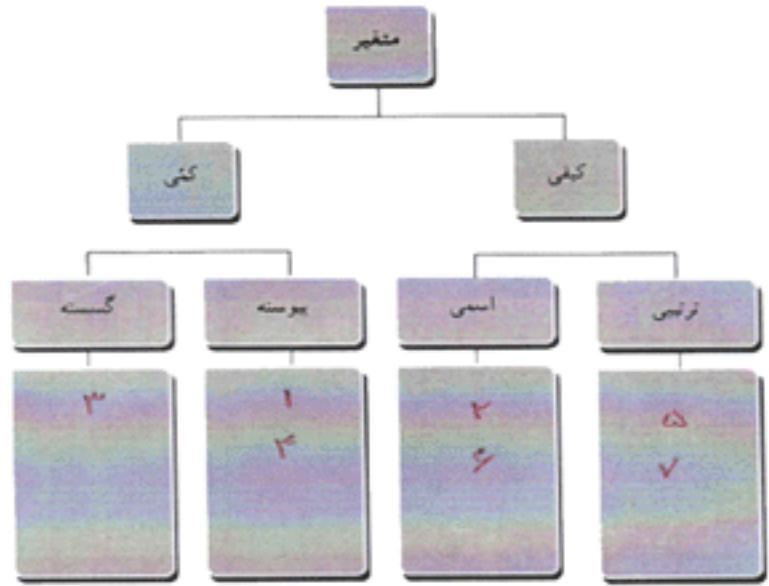
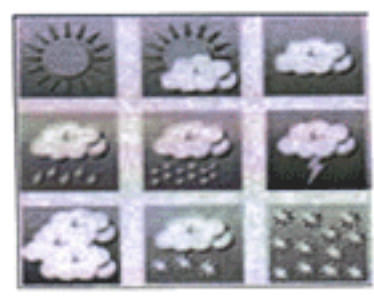


جامعه: کل دانش‌آموزان مدرسه
 اعضای جامعه: هر یک از دانش‌آموزان مدرسه
 نمونه: الف) دانش‌آموزانی که یکبار کد ملی آنها مقرب ۳ باشد.
 ب) دانش‌آموزانی که ماه تولد آنها زوج باشد.

- ترتیبی اسمی
- ترتیبی اسمی
- ترتیبی اسمی
- ترتیبی اسمی

۱ با بر کردن جاهای خالی، اسمی با ترتیبی بودن متغیرهای زیر را مشخص کنید.
 الف) مراحل رشد یک انسان (نوزاد، کودک، نونهال، بوجوان، جوان، میان سال، کهن سال)
 ب) نژاد افراد (سفید پوست، زرد پوست، سیاه پوست)
 ب) رنگ موی افراد (مشکی، قهوه‌ای، طلایی)
 ت) کیفیت میوه هلو (درجه ۱ - درجه ۲ - درجه ۳)
 ۲ نوع متغیرها را در نمودار زیر، دسته بندی کنید.

نوع متغیر	متغیر
کیفی	۱- میزان بارندگی برحسب سانتی متر در یک شهر
کیفی	۲- نوع بارندگی (باران، برف)
کیفی	۳- تعداد شهرهایی که در یک روز هوای آفتابی دارند
کیفی	۴- میزان دمای هوا
کیفی	۵- شدت آلودگی هوا (زیاد، متوسط، کم)
کیفی	۶- انواع وضعیت هوا (آفتابی، ابری، بارانی، برفی)
کیفی	۷- شدت بارندگی (زیاد، متوسط، کم)

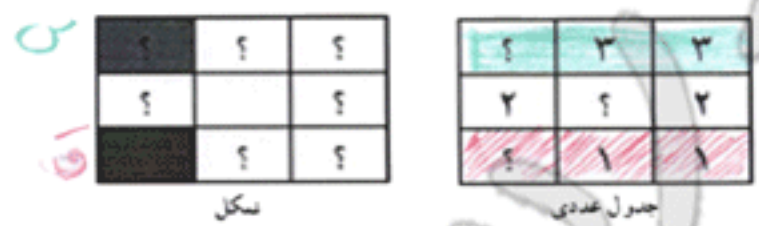


۳ جدول زیر متغیرهای دانش آموزان را نشان می دهد. انواع متغیرها از نظر کیفی، گسته، پیوسته، ترتیبی و اسمی را در جدول زیر کامل کنید.

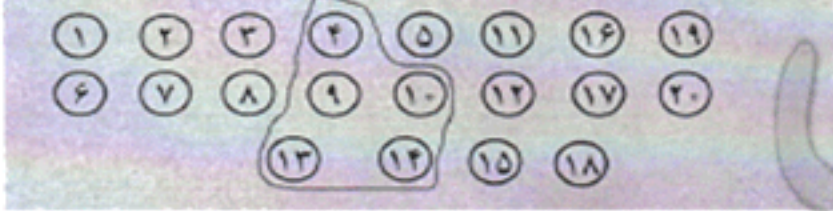
متغیرهای دانش آموزان	متغیر کیفی	متغیر گسته	متغیر پیوسته	متغیر ترتیبی	متغیر اسمی
سن	X		X		
نمره ریاضی نهم	X		X		
جنسیت (دختر و پسر)	X				X
قد	X		X		
وزن	X		X		
میزان هوش (هوش بالا، متوسط، پایین)	X			X	
میزان رضایت در مدرسه (بسیار، متوسط، ضعیف)	X			X	
شاخص توده بدن	X		X		

۴ فرض کنید وزن شخصی ۹۵ کیلوگرم و قد او ۱۶۰ سانتی متر باشد.
 الف) شاخص توده بدن این شخص را حساب کنید.
 ب) شاخص توده بدن شخص چه نوع متغیری از نظر کیفی، گسته، پیوسته، اسمی و ترتیبی است؟ کیفی پیوسته

۵ جدول سمت راست، جدول عددی شکل سمت چپ است. اگر رنگ سبز را با عدد ۳، رنگ سفید را با عدد ۲ و رنگ قرمز را با عدد ۱ نشان دهیم، جدول عددی و شکل زیر را کامل کنید. این شکل چه چیزی است؟



۶ جامعه و نمونه را تعریف کنید و برای هر یک مثال بزنید. متن متغیری ۱۵۷
 ۷ شکل زیر یک جامعه فرضی را نشان می دهد که اعضای آن را با شماره های ۱ تا ۲۰ مشخص کرده ایم. همچنین اعضای نمونه با خط سبز رنگ انتخاب شده اند. به سوالات زیر پاسخ دهید:



الف) اندازه جامعه چه عددی است؟ ۲۰ نفر
 ب) اندازه نمونه انتخابی چه عددی است؟ ۵ نفر
 ب) اعضای نمونه انتخابی را بنویسید.
 {۴، ۹، ۱۰، ۱۳، ۱۴}

نوع متغیر	متغیر
کیفی	وزن یک هلو
کیفی	کیفیت یک هلو
کیفی	اندازه طول بدن بوزن یک ایرانی
کیفی	انواع ایرانی
کیفی	وضعیت آب و هوا
کیفی	دمای هوا در فته
کیفی	فشار هوا در فته کوه