



## آموزشگاه آلاء

ریاضی تجربی دانش آموز

کنکور ۴۰۲

تجربی

۵۰ دقیقه

بناؤ



۱. معادله‌ی درجه‌ی دومی با ضرایب گویا که یکی از ریشه‌های آن  $\sqrt{5} - 3$  باشد کدام است؟

$x^2 - 6x + 4 = 0$  (۱)     
  $x^2 - 6x + 5 = 0$  (۳)     
  $x^2 - 3x + 1 = 0$  (۴)     
  $x^2 - 6x - 4 = 0$  (۲)

۲. علی کاری را ۲۰ روز زودتر از حسین تمام می‌کند. اگر علی و حسین، باهم کار کنند همین کار ۲۴ روز طول می‌کشد. حسین این کار را به تنهایی چند روزه تمام می‌کند؟

۲۴ (۱)      ۶۰ (۲)      ۴۰ (۳)      ۱۶ (۴)

۳. اگر  $x_1$  و  $x_2$  جواب‌های معادله  $x^2 - 3x + 1 = 0$  باشند حاصل  $\sqrt{x_1^2(3x_2 - 1)}$  کدام است؟

$\sqrt{2}$  (۱)       $\sqrt{3}$  (۲)      ۱ (۳)      ۲ (۴)

۴. به ازای چه مقادیری از  $m$  و  $n$ ، معادله  $7x^2 + (m + 2n + 1)x + (m - 2n + 5) = 0$  دارای ریشه‌ی مضاعف صفر است؟

$n = 3, m = -1$  (۴)     
 $n = -3, m = 1$  (۳)     
 $n = 1, m = -3$  (۲)     
 $n = -1, m = 3$  (۱)

۵. عبارت  $P(x) = 6mx^2 + 2x - 1$  همواره منفی است. حدود  $m$  کدام است؟

$m < 0$  (۱)     
 $m < -\frac{1}{6}$  (۲)     
 $-\frac{1}{6} < m < 0$  (۳)     
 $m > -\frac{1}{6}$  (۴)

۶. معادله  $(x^4 - x^2)^2 - 7(x^4 - x^2) - 8 = 0$  چند ریشه‌ی حقیقی دارد؟

۴ (۱)      ۸ (۲)      ۱ (۳)      ۲ (۴)

۷. معادله  $\sqrt{x-7} + \sqrt{9+\sqrt{7-x}} = 3$  چند جواب حقیقی دارد؟

۰ (۱)      ۱ (۲)      ۲ (۳)      ۳ (۴)

۸. معادله  $x^4 + 3x^2 = \sqrt{m-1} + 2$  دارای چند ریشه‌ی حقیقی است؟

۴ (۱)      ۲ (۲)      ۱ (۳)      ریشه‌ی حقیقی ندارد (۴)

۹. جواب‌های کدام معادله، قرینه و معکوس جواب‌های معادله  $2x^2 - 3x - 1 = 0$  است؟

$x^2 - 3x + 2 = 0$  (۱)     
 $x^2 + 3x + 2 = 0$  (۲)     
 $x^2 + 3x - 2 = 0$  (۳)     
 $x^2 - 3x - 2 = 0$  (۴)

۱۰. معادله  $\frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} = 1 - x$  چند جواب دارد؟

۳ (۱)      ۱ (۲)      ۲ (۳)      جواب ندارد (۴)

۱۱. معادله  $4 - \sqrt{x} + x^2 = 4x$  چند جواب دارد؟

۱) دو جواب بزرگ‌تر از ۲      ۲) فقط یک جواب بزرگ‌تر از ۲  
 ۳) فقط یک جواب کوچک‌تر از ۲      ۴) یک جواب بزرگ‌تر و یک جواب کوچک‌تر از ۲

۱۲. مجموعه‌ی جواب‌های نامعادله  $3x^2 - 4x \leq -2 + x$  شامل چند عدد صحیح است؟

۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      صفر (۴)

۱۳. به ازای کدام مقدار  $m$  معادله  $mx^2 + 4x + m - 3 = 0$  ریشه‌ی مضاعف منفی دارد؟

۴ (۱)      -۱ (۲)      -۴ (۳)      ۱ (۴)

۱۴. به ازای کدام مقدار  $m$ ، هر یک از ریشه‌های معادله درجه‌ی دوم  $8x^2 - mx - 8 = 0$ ، توان سوم ریشه‌های معادله  $2x^2 - x - 2 = 0$  می‌باشد؟

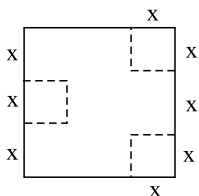
۹ (۱)      ۱۱ (۲)      ۱۳ (۳)      ۱۵ (۴)



۱۵. فرض کنید مجموعه جواب نامعادله  $\frac{((m^2 - 1)x^2 - 4mx + 4)(x - 3\sqrt{x} + 2)}{2x - 3} > 0$  به ازای  $x > \frac{3}{2}$  بازه  $[2, 4]$  باشد مقدار  $m$  کدام است؟

- ۱) -۲      ۲) صفر      ۳) ۱      ۴) ۲

۱۶. در مربع شکل زیر، سه مربع کوچک تر مطابق شکل جدا می کنیم. اگر محیط و مساحت شکل باقی مانده با هم برابر باشند، طول ضلع مربع جدا شده



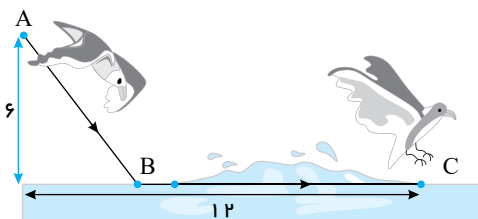
$(x)$  کدام است؟

- ۱)  $\frac{7}{3}$       ۲)  $\frac{8}{3}$       ۳)  $\frac{11}{2}$       ۴)  $\frac{7}{2}$

۱۷. معادله  $x^4 + mx^2 + n = 0$  دارای سه ریشه متمایز حقیقی است. در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

- ۱)  $m > 0, n = 0$       ۲)  $m < 0, n = 0$       ۳)  $m < 0, n > 0$       ۴)  $m = 0, n < 0$

۱۸. معمولاً مرغ های دریایی برای شکار ماهی ها، بخشی از مسیر خود را در هوا و بخشی را به موازات سطح آب طی می کنند. این مرغ دریایی، ابتدا از نقطه  $A$  به نقطه  $B$  می آید و سپس در سطح آب از  $B$  به  $C$  می رود و ماهی را شکار می کند. اگر مرغ دریایی برای طی هر متر در هوا ۱۴ کیلوکالری و برای طی هر متر در سطح آب ۱۰ کیلوکالری انرژی مصرف کند، نقطه  $B$  در چه فاصله ای از  $C$  باید باشد تا مرغ دریایی روی هم ۱۸۰ کیلوکالری انرژی مصرف کند؟



- ۱) ۴٫۵ یا ۸      ۲) ۴ یا ۷٫۵      ۳) ۴٫۵ یا ۷٫۵      ۴) ۸ یا ۴

۱۹. مجموعه جواب های نامعادله  $3x^2 - 16x + 10 \leq 2x^2 - 10x + 2 \leq x - 3$  بازه  $[a, b]$  است. مقدار  $\frac{b}{a}$  کدام است؟

- ۱) ۲      ۲)  $\frac{5}{2}$       ۳) ۸      ۴) ۱۰

۲۰. یک از صفرهای تابع  $f(x) = x^4 - 15x^2 + ax + 24$  برابر  $-2$  است. اختلاف بزرگ ترین و کوچک ترین صفر این تابع کدام است؟

- ۱) ۷      ۲) ۶      ۳) ۵      ۴) ۴

۲۱. تعداد جواب های معادله  $\frac{x-2}{x+2} + \frac{x}{x-2} = \frac{8}{x^2-4}$  کدام است؟

- ۱) ۰      ۲) ۱      ۳) ۲      ۴) ۳

۲۲. به ازای چه مقدار  $m$  دو معادله  $2mx^2 - 5x + 1 = 0$  و  $mx^2 + 3x - 5 = 0$  دارای یک ریشه ی مشترک هستند؟

- ۱) ۱      ۲) -۲      ۳) ۲      ۴) -۱

۲۳. تعداد جواب های معادله  $\frac{2-\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} = 4-x$  کدام است؟

- ۱) ۳      ۲) ۲      ۳) ۱      ۴) صفر

۲۴. در معادله درجه دوم  $7x^2 + 6x + 1 = 0$  حاصل  $[x_1] + [x_2] + [x_1 + x_2]$  چقدر است؟ ( [ ]، نماد جزء صحیح است.)

- ۱) -۱      ۲) صفر      ۳) -۳      ۴) -۲

۲۵. اگر نابرابری های  $2x + 3y > 10$  و  $3x + 2y < 5$  برقرار باشند، کدام نابرابری حتماً برقرار است؟

- ۱)  $x < -1$       ۲)  $x > -1$       ۳)  $y > 5$       ۴)  $y < 5$



۲۶. اگر حاصل ضرب ریشه‌های معادله  $2mx^2 + 7x + m^2 + 3 = 0$  برابر ۲ باشد. در این صورت مقدار (یا مقادیر)  $m$  کدام است؟

- ۱ (۱) ۳ (۲) ۱ و ۳ (۳) ۴ (۴) مقداری برای  $m$  وجود ندارد.

۲۷. سه مخزن مکعب تودرتو هم‌مرکز هستند. حجم بزرگ‌ترین مخزن برابر ۱۰۰۰ واحد مکعب و حجم کوچک‌ترین مخزن برابر ۱۰۰ واحد مکعب است. مساحت کف مخزن میانی کدام یک از اعداد زیر نی‌تواند باشد؟

- ۱۹ (۱) ۲۹ (۲) ۳۹ (۳) ۴۹ (۴)

۲۸. جواب‌های معادله  $\sqrt{\frac{3+x}{1-2x}} + \sqrt{\frac{1-2x}{3+x}} = 2$  چگونه است؟

- ۱ (۱) فقط یک جواب منفی ۲ (۲) فقط یک جواب مثبت ۳ (۳) یک جواب مثبت و یک جواب منفی ۴ (۴) معادله جواب ندارد

۲۹. بعد از بارش برف سنگین، علی می‌تواند تمام مسیرهای جاده را در مدت زمان ۳۰ دقیقه باز کند اگر برادر کوچک‌ترش محمد به او کمک کند این کار تنها ۲۰ دقیقه طول خواهد کشید. چه مدت طول می‌کشد تا محمد خودش به تنهایی این کار را انجام دهد؟

- ۴۰ دقیقه (۱) ۱۰ دقیقه (۲) ۶۰ دقیقه (۳) ۱۲۰ دقیقه (۴)

۳۰. اگر محمود و رضا به ترتیب و به تنهایی در ۶ و ۱۲ روز اتاقی را رنگ بزنند و در صورتی که با کمک محسن، هر سه اتاق را در ۲ روز رنگ کنند، محسن به تنهایی اتاق را در چند روز رنگ می‌زند؟

- ۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)



## پاسخنامه تشریحی

۱. گزینه ۲ در یک معادله‌ی درجه‌ی دوم با ضرایب گویا اگر یک ریشه‌ی معادله،  $\alpha + \sqrt{\beta}$  باشد ریشه‌ی دیگر  $\alpha - \sqrt{\beta}$  است پس ریشه‌ی دیگر معادله  $\alpha + \sqrt{\beta}$  می‌باشد. در نتیجه:

$$x_1 = 3 - \sqrt{5}, x_2 = 3 + \sqrt{5} \Rightarrow \begin{cases} S = x_1 + x_2 = 6 \\ P = x_1 \times x_2 = (3 - \sqrt{5}) \times (3 + \sqrt{5}) = 9 - 5 = 4 \end{cases}$$

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 4 = 0$$

۲. گزینه ۲ فرض کنیم حسین در  $x$  روز تمام کند. پس علی در  $x - 20$  روز کار را تمام کند. بنابراین در یک روز حسین  $\frac{1}{x}$  و علی  $\frac{1}{x-20}$  از کار را انجام می‌دهند. چون طبق صورت سؤال باهم در ۲۴ روز تمام کرده‌اند. در هر روز  $\frac{1}{24}$  کار انجام شده است. یعنی:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-20} = \frac{1}{24} \Rightarrow 24(x-20) + 24x = x(x-20)$$

$$\Rightarrow 24x - 480 + 24x = x^2 - 20x \Rightarrow x^2 - 68x + 480 = 0$$

$$(x-8)(x-60) = 0 \Rightarrow x = 8 \text{ یا } x = 60$$

دقت کنید که حسین نمی‌تواند ۸ روزه تمام کند چون ۲ روز زودتر از ۸ روز امکان ندارد. پس حسین به تنهایی ۶۰ روزه تمام می‌کند.

۳. گزینه ۳

اگر  $x_1$  و  $x_2$  جواب‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  باشند، در خود معادله صدق می‌کنند و  $\frac{c}{a} = x_1 \cdot x_2$  است.

$$x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow x_1^2 - 3x_1 + 1 = 0 \Rightarrow 3x_1 - 1 = x_1^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{x_1^2(3x_1 - 1)} = \sqrt{x_1^2 x_1^2} = |x_1 x_1| = \frac{c}{a} = 1$$

۴. گزینه ۲ شرط آنکه یک معادله‌ی درجه‌ی دوم دارای ریشه‌ی مضاعف صفر باشد آن است که  $c$  و  $b$  هر دو صفر باشند.

$$\begin{cases} b = 0 \Rightarrow m + 2n + 1 = 0 \\ c = 0 \Rightarrow m - 2n + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow m = -3, n = 1$$

۵. گزینه ۲ برای این که عبارت درجه دوم همواره منفی باشد، باید ضریب  $x^2$  منفی و  $\Delta$  هم منفی باشد. پس:

$$6m < 0 \Rightarrow m < 0$$

$$\Delta = 4 + 24m < 0 \Rightarrow 24m < -4 \Rightarrow m < -\frac{1}{6}$$

بنابراین به ازای  $m < -\frac{1}{6}$  عبارت موردنظر همواره منفی است.

۶. گزینه ۴

این یک معادله‌ی دو مجذوری است که با تغییر متغیر  $x^f - x^g = A$  به یک معادله‌ی درجه‌ی دوم تبدیل می‌شود.

$$x^f - x^g = A \Rightarrow A^2 - 7A - 8 = 0 \Rightarrow (A-8)(A+1) = 0 \Rightarrow A_1 = -1, A_2 = 8$$

$$A_1 = x^f - x^g = -1 \Rightarrow x^f - x^g + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 - 4 < 0 \Rightarrow \text{ریشه ندارد}$$

$$A_2 = x^f - x^g = 8 \Rightarrow x^f - x^g - 8 = 0 \Rightarrow \text{است پس معادله دو ریشه قرینه دارد}$$

نکته: در معادله  $ax^2 + bx + c = 0$  اگر  $\frac{c}{a} < 0$  باشد معادله دو ریشه قرینه دارد، اگر  $\frac{c}{a} > 0$  و  $\Delta > 0$  باشد معادله چهار ریشه دارد که دو به دو قرینه اند و اگر

$(\frac{c}{a} > 0, \Delta > 0, -\frac{b}{a} < 0)$  یا  $(\frac{c}{a} < 0, \Delta < 0)$  باشد معادله ریشه ندارد.

۷. گزینه ۲

ابتدا دامنه معادله را تعیین می‌کنیم.

$$\begin{cases} \sqrt{x-7} \Rightarrow x-7 \geq 0 \Rightarrow x \geq 7 \\ \sqrt{7-x} \Rightarrow 7-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 7 \end{cases} \cap \rightarrow x = 7$$

$$x = 7 \Rightarrow \sqrt{x-7} + \sqrt{9+\sqrt{7-x}} = 3 \Rightarrow 0 + \sqrt{9+0} = 3 \Rightarrow 3 = 3 \text{ برقرار است}$$

بنابراین  $x = 7$  جواب معادله است.

۸. گزینه ۲

$$x^f + 3x^g - \sqrt{m-1} - 2 = 0$$

در معادله‌ی دو مجذوری فوق چون  $a$  و  $c$  یعنی  $1$  و  $-(\sqrt{m-1} + 2)$  مختلف‌العلامت‌اند، در نتیجه  $\frac{c}{a} < 0$  بوده و معادله‌ی دو مجذوری دو ریشه‌ی حقیقی قرینه هم خواهد داشت.

۹. گزینه ۴ ریشه‌های معادله  $cx^2 - bx + a = 0$ ، عکس و قرینه ریشه‌های معادله  $ax^2 + bx + c = 0$  است.



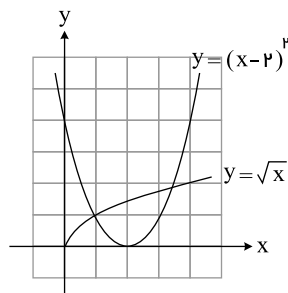
$$2x^2 - 3x - 1 = 0 \xrightarrow{\text{عکس و قرینه}} -x^2 + 3x + 2 = 0 \rightarrow x^2 - 3x - 2 = 0$$

۱۰. گزینه ۳ قرار می‌دهیم:  $\sqrt{x} = u$

$$\frac{1-u}{1+u} = 1-u^2 \Rightarrow 1-u^2+u-u^2=1-u \Rightarrow u^2+u^2-2u=0 \Rightarrow u(u^2+u-2)=0$$

$$\Rightarrow u(u+2)(u-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} u=0 \rightarrow \sqrt{x}=0 \rightarrow x=0 \\ u=-2 \rightarrow \sqrt{x}=-2 \\ u=1 \rightarrow \sqrt{x}=1 \rightarrow x=1 \end{cases}$$

۱۱. گزینه ۴



می‌توان با جابه‌جا کردن عبارت‌ها، معادله را به صورت  $\sqrt{x} = x^2 - 4x + 4$  درآورد. برای آن که ریشه‌های معادله اخیر را به دست آوریم، دو نمودار  $y = \sqrt{x}$  و  $y = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$  را در یک صفحه مختصات رسم می‌کنیم و داریم: همانطور که در شکل روبه‌رو می‌بینید ریشه‌های  $x_1$  و  $x_2$  معادله، یعنی محل برخورد نمودارها یکی قبل از ۲ و دیگری بعد از ۲ است.

۱۲. گزینه ۱ نامعادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$3x^2 - 4x \leq -2 + x \Rightarrow 3x^2 - 4x + 2 - x \leq 0 \Rightarrow 3x^2 - 5x + 2 \leq 0$$

با توجه به جدول تعیین علامت مقابل مجموعه جواب‌های نامعادله، بازه  $[\frac{2}{3}, 1]$  است که فقط شامل یک عدد صحیح است.

$x$	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	$1$	$+\infty$	
$3x^2 - 5x + 2$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$

۱۳. گزینه ۱

در معادله درجه دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  اگر  $\Delta = 0$  باشد، آنگاه  $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$  ریشه مضاعف معادله است.

$$mx^2 + 4x + m - 3 = 0 \Rightarrow \Delta = 16 - 4m(m-3) = 0 \Rightarrow m^2 - 3m - 4 = 0 \Rightarrow (m-4)(m+1) = 0 \Rightarrow m = -1, 4$$

اما مقدار  $m = -1$  قابل قبول نیست، زیرا:

$$-\frac{b}{2a} < 0 \Rightarrow -\frac{4}{2m} < 0 \Rightarrow m > 0 \Rightarrow m = 4 \text{ ق ق}$$

۱۴. گزینه ۳ فرض کنیم  $x_1$  و  $x_2$  ریشه‌های معادله  $8x^2 - mx - 8 = 0$  و  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $2x^2 - x - 2 = 0$  باشند.

$$x_1 = \alpha^2, \quad x_2 = \beta^2 \quad S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{1}{2}, \quad P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = -1$$

$$x_1 + x_2 = \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta(\alpha + \beta) = S^2 - 2PS = \frac{1}{4} + \frac{3}{2} = \frac{13}{4}$$

$$x_1 x_2 = \alpha^2 \beta^2 = (\alpha\beta)^2 = -1$$

$$x^2 - \frac{13}{4}x - 1 = 0 \xrightarrow{\times 4} 4x^2 - 13x - 4 = 0$$

با مقایسه این معادله و معادله صورت سؤال، مشخص می‌شود که  $m = 13$  است.

۱۵. گزینه ۲ البته مجموعه نامعادله باید بازه  $(2, 4)$  باشد نه  $[2, 4]$  از طرفی مخرج کسر به ازای  $x > \frac{3}{2}$  همواره مثبت است.

$$x - 3\sqrt{x} + 2 = 0 \Rightarrow (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$$

در بازه  $(1, 4)$  عبارت فوق، منفی است و برای آن که جواب نامعادله  $(2, 4)$  باشد در این بازه پرانتز اول نیز باید منفی باشد. در ضمن  $x = 2$  ریشه این عبارت است.

$$x = 2 \Rightarrow 4m^2 - 4 - 8m + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \end{cases}$$

$$\text{if } m = 0 \Rightarrow (-x^2 + 4)$$

این عبارت در بازه  $(2, 4)$  همواره منفی است و قابل قبول است.

$$\text{if } m = 2 \Rightarrow (3x^2 - 8x + 4)$$

این عبارت در بازه  $(2, 4)$  مثبت است و قابل قبول نیست. بنابراین فقط  $m = 0$  مورد قبول است.

۱۶. گزینه ۱ با توجه به شکل باقی‌مانده داریم:



$$S = (3x)^2 - 3 \times x^2 = 9x^2 - 3x^2 = 6x^2$$

$$P = 2 \times 2x + 1 \times x = 14x \Rightarrow 6x^2 = 14x$$

$$\Rightarrow 6x^2 - 14x = 0 \Rightarrow 2x(3x - 7) = 0$$

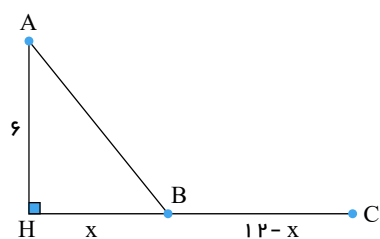
$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{غ ق ق} \\ x = \frac{7}{3} & \text{جواب} \end{cases}$$

۱۷. گزینه ۲ چون معادله دو مجذوری  $x^2 + mx^2 + n = 0$  دارای سه ریشه متمایز است، پس قطعاً یکی از ریشه‌ها برابر صفر است، یعنی  $x = 0$  باید در معادله صدق کند. بنابراین  $n = 0$  است.

$$n = 0 \Rightarrow x^2 + mx^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2 + m) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \\ x^2 + m = 0 \Rightarrow x^2 = -m \end{cases}$$

باید  $-m > 0$  باشد تا معادله دارای دو ریشه دیگر غیر از  $x = 0$  باشد، یعنی  $m < 0$ .

۱۸. گزینه ۲ برای درک بهتر صورت مسئله، شکل روبه‌رو را رسم می‌کنیم. فاصله  $B$  از تصویر مرغ بر روی آب ( $H$ ) را  $x$  در نظر می‌گیریم، در نتیجه فاصله میان  $B$  و  $C$  برابر  $12 - x$  است. با استفاده از رابطه فیثاغورس طول  $AB$  برابر  $\sqrt{36 + x^2}$  شود.



بنابراین میزان انرژی مصرف‌شده توسط مرغ دریایی برابر  $14\sqrt{36 + x^2} + 10(12 - x)$  است و چون قرار بود، مرغ دریایی ۱۸۰ کیلوکالری انرژی مصرف کند، داریم:

$$14\sqrt{36 + x^2} + 10(12 - x) = 180 \Rightarrow 7\sqrt{36 + x^2} = 5x + 30$$

حال با به توان ۲ رساندن تساوی بالا به معادله  $2x^2 - 25x + 72 = 0$  می‌رسیم:

$$\Delta = 49, x = \frac{25 \pm 7}{4} = 8, 4, 5$$

از آنجا که فاصله  $B$  تا  $C$  برابر  $12 - x$  است، لذا فاصله موردنظر برابر ۴ یا ۷٫۵ است.

۱۹. گزینه ۱ باید ابتدا نامعادله‌های  $x - 3 \leq 2x^2 - 10x + 2$  و  $3x^2 - 16x + 10 \leq 2x^2 - 10x + 2$  را حل کنیم. سپس مجموعه‌های جواب‌های آن‌ها را اشتراک بگیریم.

$$3x^2 - 16x + 10 \leq 2x^2 - 10x + 2 \Rightarrow x^2 - 6x + 8 \leq 0$$

$x$	$-\infty$	$2$	$4$	$+\infty$		
$x^2 - 6x + 8$		$+$	$0$	$-$	$0$	$+$

$$\Rightarrow 2 \leq x \leq 4 \Rightarrow x \in [2, 4]$$

$$2x^2 - 10x + 2 \leq x - 3 \Rightarrow 2x^2 - 11x + 5 \leq 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq 5 \Rightarrow x \in \left[\frac{1}{2}, 5\right]$$

$x$	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$5$	$+\infty$		
$2x^2 - 11x + 5$		$+$	$0$	$-$	$0$	$+$

بنابراین مجموعه جواب‌های نامعادله به صورت زیر است:

$$[2, 4] \cap \left[\frac{1}{2}, 5\right] = [2, 4]$$

بنابراین  $a = 2$  و  $b = 4$  و در نتیجه  $\frac{b}{a} = 2$ .

۲۰. گزینه ۱ عدد حقیقی  $-2$  صفر تابع است، پس:

$$f(-2) = 0 \Rightarrow 16 - 60 - 2a + 24 = 0 \Rightarrow -20 - 2a = 0 \Rightarrow a = -10 \Rightarrow f(x) = x^2 - 15x^2 - 10x + 24$$

حال برای به دست آوردن صفرهای دیگر تابع هم می‌توان مانند سؤال قبل تابع  $f(x)$  را بر عبارت  $x + 2$  تقسیم کنیم و هم می‌توان برای یافتن فاکتور  $x + 2$  به صورت زیر عمل کنیم:

$$f(x) = x^2 + 2x^2 - 2x^2 - 4x^2 - 11x^2 - 22x + 12x + 24 = x^2(x + 2) - 2x^2(x + 2) - 11x(x + 2) + 12(x + 2) = (x + 2)(x^2 - 2x^2 - 11x + 12)$$

مجموع ضرایب عبارت  $y(x)$  برابر صفر است، پس بر عبارت  $x - 1$  بخش پذیر است. برای یافتن فاکتور  $x - 1$  به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$y(x) = x^2 - x^2 - x^2 + x - 12x + 12 = x^2(x - 1) - x(x - 1) - 12(x - 1) = (x - 1)(x^2 - x - 12) = (x - 1)(x - 4)(x + 3)$$

بنابراین:

$$f(x) = (x + 2)(x - 1)(x - 4)(x + 3)$$

پس صفرهای تابع به ترتیب عبارتند از:

$$x_1 = -3, x_2 = -2, x_3 = 1, x_4 = 4 \Rightarrow x_4 - x_1 = 7$$





۲۱. گزینه ۲ ابتدا دامنه متغیر معادله را تعیین می‌کنیم:

$$\frac{x-2}{x+2} + \frac{x}{x-2} = \frac{8}{x^2-4} \quad \text{چون در مخرج است } x \neq 2, -2$$

$$\frac{(x-2)^2 + x(x+2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{8}{x^2-4} \Rightarrow x^2 - 4x + 4 + x^2 + 2x = 8$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{غ.ق. } x = 2 \\ \text{ق.ق. } x = -1 \end{cases}$$

۲۲. گزینه ۳

اگر دو معادله‌ی درجه دوم دارای یک ریشه‌ی مشترک باشند این ریشه را می‌توان با حذف قسمت درجه ۲ بین دو معادله به دست آورد. بدیهی است که در این ریشه در هر دو معادله صدق می‌کند.

$$\begin{cases} 2mx^2 - 5x + 1 = 0 \\ mx^2 + 3x - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2mx^2 - 5x + 1 = 0 \\ -2mx^2 - 6x + 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow -11x = -11 \Rightarrow x = 1$$

$$mx^2 + 3x - 5 = 0 \xrightarrow{x=1} m(1)^2 + 3(1) - 5 = 0 \Rightarrow m + 3 - 5 = 0 \Rightarrow m = 2$$

۲۳. گزینه ۳

$$\frac{2-\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} = (2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x}) \Rightarrow (2-\sqrt{x})\left[\frac{1}{2+\sqrt{x}} - (2+\sqrt{x})\right] = 0$$

از معادله بالا فقط حالت  $2 - \sqrt{x} = 0$  امکان پذیر است:

$$\Rightarrow \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4$$

۲۴. گزینه ۳

می‌دانیم اگر  $x_1$  و  $x_2$  ریشه‌های معادله درجه دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  باشند، آنگاه:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\left. \begin{aligned} x_1 + x_2 = \frac{-6}{5} &\rightarrow [x_1 + x_2] = -1 \\ x_1, x_2 = \frac{-3 \pm \sqrt{7}}{5} &\Rightarrow \begin{cases} [x_1] = -1 \\ [x_2] = -1 \end{cases} \end{aligned} \right\} \Rightarrow [x_1 + x_2] + [x_1] + [x_2] = -3$$

توجه:  $\sqrt{7} \approx 2,64$

۲۵. گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\begin{cases} 2x + 3y > 10 \rightarrow 4x + 6y > 20 \\ 3x + 2y < 5 \rightarrow -9x - 6y > -15 \end{cases}$$

اکنون طرفین دو نابرابری بالا را با هم جمع می‌کنیم.

$$4x + 6y - 9x - 6y > 20 - 15 \rightarrow -5x > 5 \rightarrow x < -1$$

۲۶. گزینه ۱ می‌دانیم ضرب ریشه‌های معادله  $0 = 3 + m^2 + 7x + 2mx^2$  برابر ۲ است. بنابراین:

$$\frac{m^2 + 3}{2m} = 2 \rightarrow m^2 + 3 = 4m \rightarrow m^2 - 4m + 3 = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} m = 1 & \text{جایگزاری } 2x^2 + 7x + 4 = 0 \rightarrow \Delta = 49 - 32 > 0 \checkmark \\ m = 3 & \text{در معادله } 6x^2 + 7x + 12 = 0 \rightarrow \Delta = 49 - 288 < 0 \times \end{cases}$$

پس  $m = 1$  قابل قبول است.

۲۷. گزینه ۱ فرض کنید طول ضلع مکعب میانی برابر  $a$  باشد. در این صورت حجم آن برابر  $a^3$  است. پس:

$$100 < a^3 < 1000 \Rightarrow \sqrt[3]{100} < a < 10$$

از طرف دیگر مساحت کف مکعب میانی برابر  $a^2$  است. پس:

$$\sqrt[3]{100^2} < a^2 < 10^2 \Rightarrow 10 \sqrt[3]{10} < a^2 < 100$$

چون  $\sqrt[3]{10} \approx 2,15$  تقریباً ۲ برابر است، پس  $\sqrt[3]{10} \approx 1,4$  تقریباً با ۲۰ برابر است. پس مساحت کف مخزن میانی بین ۱۰۰ و تقریباً ۲۰ است و نمی‌تواند ۱۹ باشد.

۲۸. گزینه ۱ با تغییر متغیر  $t = \sqrt{\frac{3+x}{1-2x}}$  خواهیم داشت:

$$t + \frac{1}{t} = 2 \Rightarrow t^2 + 1 = 2t$$

$$\Rightarrow (t-1)^2 = 0 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow \sqrt{\frac{3+x}{1-2x}} = 1 \Rightarrow 3+x = 1-2x \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$$



۲۹. گزینه ۳ علی در یک دقیقه  $\frac{1}{30}$  کار را انجام می‌دهد و اگر برای محمد  $x$  دقیقه طول بکشد او نیز در یک دقیقه  $\frac{1}{x}$  کار را انجام می‌دهد و باهم در یک دقیقه  $\frac{1}{20}$  کار را انجام می‌دهند. پس داریم:

$$\frac{1}{30} + \frac{1}{x} = \frac{1}{20} \rightarrow 2x + 60 = 3x \Rightarrow x = 60$$

۳۰. گزینه ۲ اگر محسن در  $a$  روز اتاق را رنگ بزند، داریم:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{2} \xrightarrow{\times(12a)} 12 + 2a + a = 6a \Rightarrow a = 4$$

پس محسن به تنهایی اتاق را در ۴ روز رنگ می‌زند.



### پاسخنامه کلیدی

۱ . ۲	۶ . ۴	۱۱ . ۴	۱۶ . ۱	۲۱ . ۲	۲۶ . ۱
۲ . ۲	۷ . ۲	۱۲ . ۱	۱۷ . ۲	۲۲ . ۳	۲۷ . ۱
۳ . ۳	۸ . ۲	۱۳ . ۱	۱۸ . ۲	۲۳ . ۳	۲۸ . ۱
۴ . ۲	۹ . ۴	۱۴ . ۳	۱۹ . ۱	۲۴ . ۳	۲۹ . ۳
۵ . ۲	۱۰ . ۳	۱۵ . ۲	۲۰ . ۱	۲۵ . ۱	۳۰ . ۲



آموزشگاه آلاء