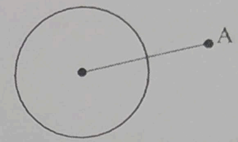
• **تعریف دایره:** مکان هندسی نقاطی از صفحه که از یک نقطه ثابت فاصله‌ای ثابت دارند.

• **نماد دایره:** $C(O,R) \leftarrow O$ مرکز و R شعاع

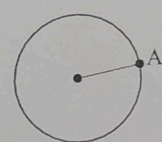
نکته: هر دایره صفحه را به سه قسمت افراز می‌کند.

۱) خارج از دایره



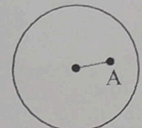
$OA > R$

۲) روی از دایره



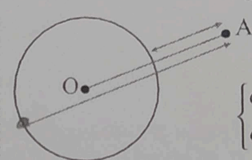
$OA = R$

۳) داخل دایره



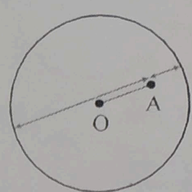
$OA < R$

• **کمترین و بیشترین فاصله نقطه تا دایره:**



اگر نقطه خارج دایره باشد

$$\begin{cases} d_{min} = OA - R \\ d_{max} = OA + R \end{cases}$$



اگر نقطه داخل دایره باشد

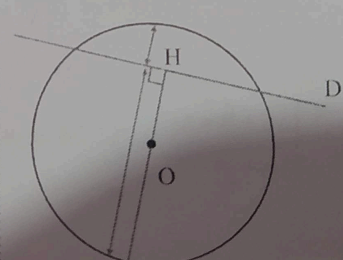
$$\begin{cases} d_{min} = R - OA \\ d_{max} = OA + R \end{cases}$$

نمونه: نقطه A تا دایره C کمترین و بیشترین فاصله‌ای برابر ۳ و ۷ دارد. شعاع را بیابید.

۲) خارج $\rightarrow \begin{cases} OA + R = 7 \\ OA - R = 3 \rightarrow OA = 5 ,\ R = 2 \end{cases}$

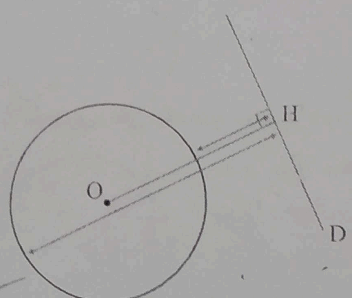
۱) داخل $A \rightarrow \begin{cases} R - OA = 3 \rightarrow R = 5 \\ R + OA = 7 \end{cases}$

• **کمترین و بیشترین فاصله خط تا دایره:**



اگر خط و دایره متقاطع باشند

$$\begin{cases} d_{min} = R - OA \\ d_{max} = R + OH \end{cases}$$



اگر خط و دایره متقاطع نباشند

$$\begin{cases} d_{min} = OH - R \\ d_{max} = OH + R \end{cases}$$

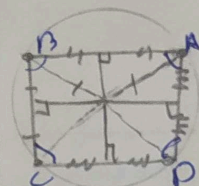
نمونه: فاصله مرکز دایره $C(0,4)$ تا خط d برابر ۵ است. حداقل فاصله نقاط دایره تا خط d را بیابید.

خارج دایره

$$\begin{cases} d_{min} = OA - R = 1 \\ d_{max} = OA + R = 9 \end{cases}$$

جمع بندی چندضلعی محاطی و محیطی و دایره‌ها

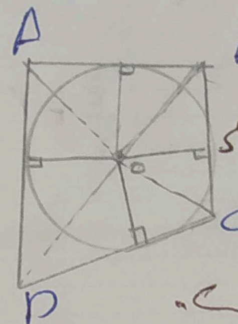
* چندضلعی محاطی



۱) محل تقاطع عمودمنصف‌های اضلاع چندضلعی، مرکز دایره است

۲) $\hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D}$

* چهارضلعی محیطی

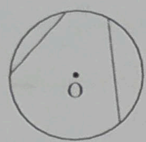


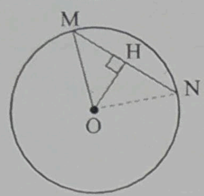
محل تقاطع نیمسازهای زاویه‌های چهارضلعی، مرکز دایره O محاطی است.

$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}$

$r = \frac{S}{P} \xrightarrow{\text{مثلث متساوی‌الاضلاع}} \frac{\sqrt{3}}{6}a$

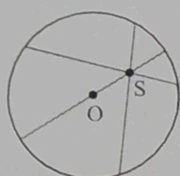
...ج است که بلندترین وتر دایره قطر آن است.

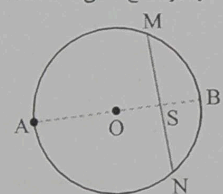




$$\begin{cases} OM = ON = R \\ MH = NH = \frac{MN}{2} \\ (OH)^2 + (MH)^2 = R^2 \end{cases}$$

...که بلندترین آن قطر است و کوتاه‌ترین آن عمود بر شعاع حامل OS است.

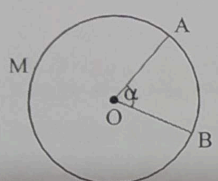


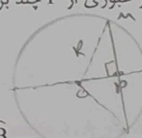


MN = کوتاه‌ترین وتر

AB = بلندترین وتر

...C(O,R قرار دارد. اندازه‌ی بلندترین وتر عبوری از P چند برابر اندازه کوتاه‌ترین وتر عبوری از P است؟





بلندترین $= 2R$

کوتاه‌ترین: $MP^2 + (\frac{1R}{4})^2 = R^2$

$\rightarrow MP^2 = \frac{15R^2}{16} \Rightarrow MP = \frac{\sqrt{15}R}{4} \rightarrow 2\frac{\sqrt{15}}{2}R \rightarrow 2R \times \frac{2}{\sqrt{15}R} = \boxed{\frac{4\sqrt{15}}{15}}$

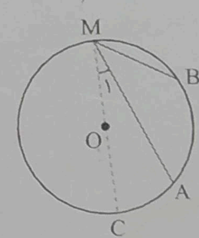
• **زوایای مختلف در دایره:**

تیپ اول) زاویه مرکزی: برابر کمان روبه‌رو است.

$\alpha = \widehat{AB}$

بدیهی است که $\widehat{AB} + \widehat{AMB} = 360°$

تیپ دوم) زاویه‌ی محاطی: نصف کمان روبه‌رو است.



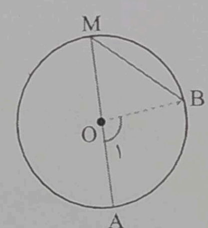
اثبات:

$\hat{M} = B\hat{M}C - \hat{M}_1$

$\hat{M} = \frac{\widehat{BC}}{2} - \frac{\widehat{CA}}{2}$

$\hat{M} = \frac{\widehat{BC} - \widehat{CA}}{2}$

$\hat{M} = \frac{\widehat{AB}}{2}$

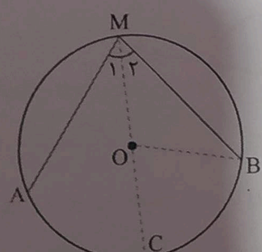


اثبات:

$\hat{O}_1 = \hat{M} + \hat{B}$

$\widehat{AB} = \hat{M} + \hat{M}$

$\widehat{AB} = 2\hat{M} \Rightarrow \hat{M} = \frac{\widehat{AB}}{2}$



اثبات:

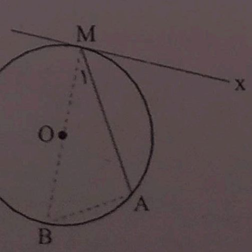
$\hat{M} = \hat{M}_1 + \hat{M}_2$

$\hat{M} = \frac{\widehat{AC}}{2} + \frac{\widehat{CB}}{2}$

$\hat{M} = \frac{\widehat{AC} + \widehat{CB}}{2}$

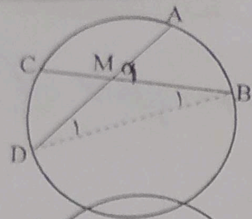
$\hat{M} = \frac{\widehat{AB}}{2}$

تیپ سوم) زاویه ظلی: یک ضلع مماس بر دایره دارد و نصف کمان روبه‌رو است $\hat{M} = \frac{\widehat{MA}}{2}$



$$\begin{cases} \hat{M}_1 + \hat{B} = 90° \\ \hat{M}_1 + \hat{M} = 90° \end{cases} \Rightarrow \hat{M} = \hat{B} \Rightarrow \hat{M} = \frac{\widehat{MA}}{2}$$

تیپ چهارم) زاویه بین دو وتر در داخل: $\widehat{M} = \alpha = \frac{\widehat{AB} + \widehat{CD}}{2}$



خارجی

اثبات: $\widehat{M} = \alpha = \widehat{B}_1 + \widehat{D}_1 = \frac{\widehat{CD}}{2} + \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{\widehat{CD} + \widehat{AB}}{2}$

تیپ پنجم) زاویه بین دو وتر در خارج یا مماس و وتر:

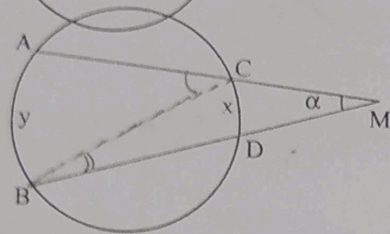
$B = \frac{CD}{2}$

$C = \frac{AB}{2}$

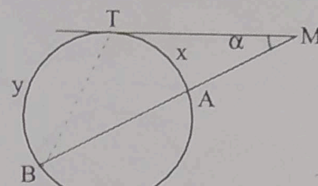
$C = \alpha + B$

$\frac{AB}{2} = \alpha + \frac{CD}{2}$

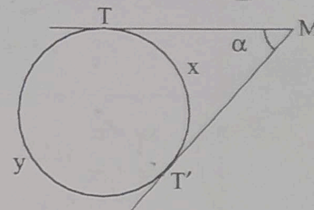
$\boxed{\alpha = \frac{y-x}{2}}$



$a = \frac{y-x}{2}$ (اثبات)

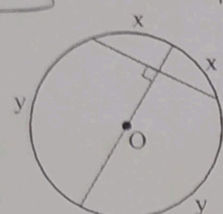


$a = \frac{y-x}{2}$

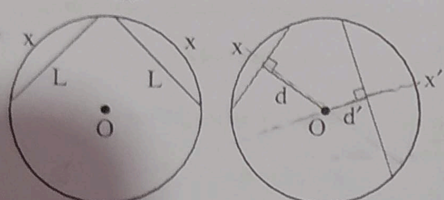


$a = \frac{y-x}{2}$

تیپ ششم) قطر عمود بر وتر: کمان‌های یکسان ایجاد می‌کند.



(تیپ هفتم): وترهای برابر کمان‌های برابر دارند.

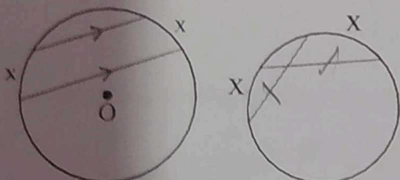


هرچه وتر به مرکز دایره نزدیک‌تر شود اندازه وتر بزرگ‌تر و اندازه کمان نیز بیشتر می‌شود.

$x < x', L < L' \Leftrightarrow d > d'$

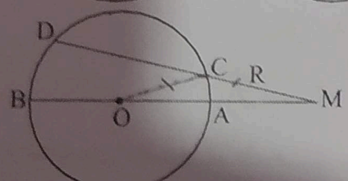
(تیپ هشتم): کمان‌های بین دو وتر موازی، برابرند:

اما الزاماً دو کمان برابر میان دو وتر موازی نیست!

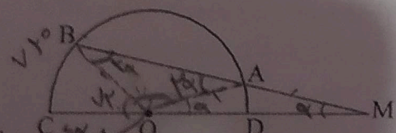


(تیپ نهم): پاره‌خط مساوی شعاع: ایجاد مثلث متساوی‌الساقین

با وصل کردن نقاط به مرکز دایره



نمونه: در شکل روبه‌رو MA با شعاع نیم‌دایره برابر است. اندازه‌ی زاویه‌ی M را بیابید. ($\widehat{BC} = 72^\circ$)

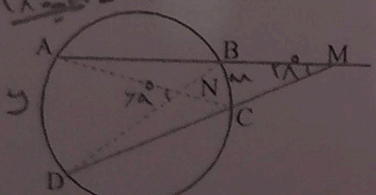


نمونه: در شکل رو به رو $\widehat{M} = 28^\circ$ و $\widehat{N} = 69^\circ$ اندازه‌ی کمان $\widehat{AD}$ را بیابید.

$28 = \frac{y-x}{2} \rightarrow y - x = 56$

$\frac{y+x}{2} = 69 \rightarrow y + x = 138 \rightarrow 2y = 194 \rightarrow y = 97$

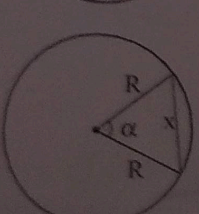
$x = 41$



• اندازه‌ها در دایره:

(تیپ اول): وترهای خاص دو دایره: در حالت کلی داریم

طبق قضیه‌ی کسینوس‌ها:



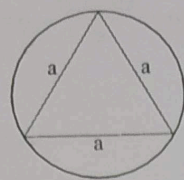
$\Rightarrow x^2 = R^2 + R^2 - 2(R)(R)\cos\alpha$

$\Rightarrow x^2 = 2R^2(1 - \cos\alpha)$

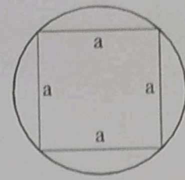
$\Rightarrow x^2 = 2R^2 \times \sin^2\frac{\alpha}{2}$

$\Rightarrow x = 2R\sin\frac{\alpha}{2}$

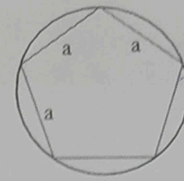
و الگوی مختلف زیر ایجاد می‌شود:



$a = \sqrt{3}R$



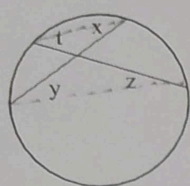
$a = \sqrt{2}R$



$a = 1R$

۶ ضلعی

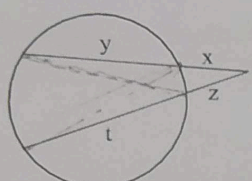
(تیپ دوم): تقاطع دو وتر در داخل دایره:



$xy = zt$ (اثبات)

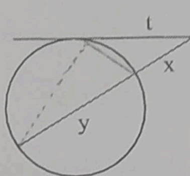
جج = جج

(تیپ سوم): تقاطع دو وتر در خارج دایره یا وتر و مماس:



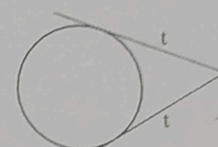
$x(x+y) = z(z+t)$ (اثبات)

ک ج = ک ج



(اثبات)

$t.t = x(x+y) \Rightarrow t^2 = x(x+y)$

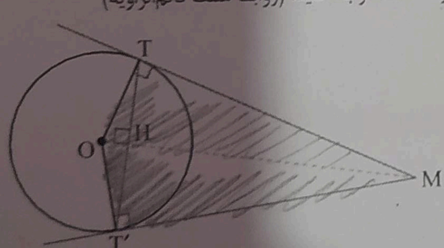


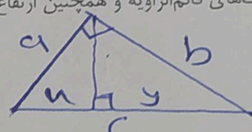
و در حالت خاص دو مماس، اندازه دو قطعه‌ی مماس برابر است.

نمونه: در شکل روبه‌رو x را بیابید.

$\boxed{x = 2\sqrt{6}}$

(تیپ چهارم): رسم دو مماس از نقطه‌ای خارج دایره به مثلث‌های قائم‌الزاویه و همچنین ارتفاع وارد بر وتر مثلث‌ها توجه کنید. (روابط مثلث قائم‌الزاویه)

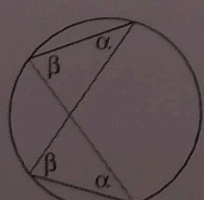


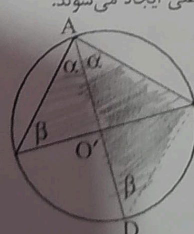


$$\begin{cases} a^2 = xc \\ b^2 = yc \\ h^2 = xy \end{cases}$$

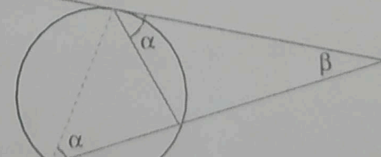
• **تشابه‌های مثلث‌ها در دایره**

در اکثر مواقع تساوی دو زاویه نظیر از مثلث‌ها گره‌گشا است که از خواص زاویه محاطی یا ظلی ایجاد می‌شوند.

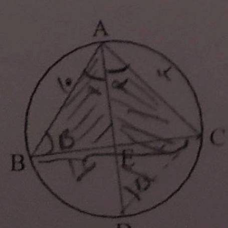




AD نیمساز است.

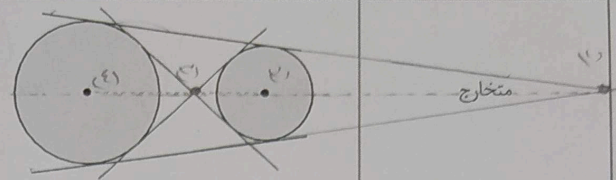
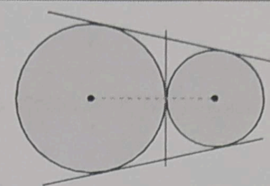
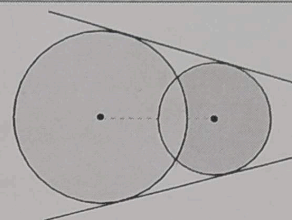
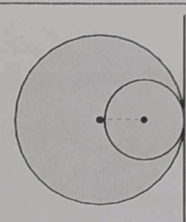
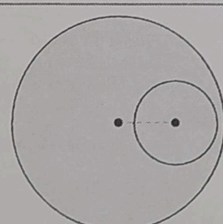


نمونه: در شکل روبه‌رو AD نیمساز زاویه A است و AB = ۱۰ و AC = ۱۲ و BC = ۱۶ حاصل AD × AE را بیابید.



$$\frac{10}{AD} = \frac{BE}{EC} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow \frac{10}{AD} = \frac{AE}{12} \rightarrow AD \times AE = 120$$

• **اوضاع نسبی دو دایره نسبت به هم:** پنج وضع اصلی داریم:

وضعیت	شکل	رابطه
متخارج		$d > R_1 + R_2$
مماس خارج		$d = R_1 + R_2$
متقاطع		$\|R_1 - R_2\| < d < R_1 + R_2$
مماس داخل		$d = \|R_1 - R_2\|$
متداخل		$d < \|R_1 - R_2\|$

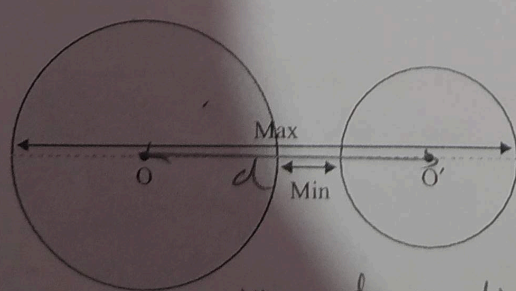
• **فاصله دایره‌ها از هم**

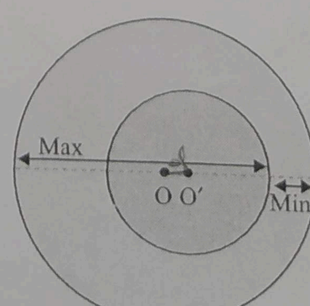
اگر دو دایره‌ی $C(O,R)$ و $C'(O',r)$ طول خط‌المرکزین برابر d باشد و بدانیم $r < R$ است، در این صورت کمترین و بیشترین فاصله‌ی نقاط دو دایره از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

هر دو مثبت ← Max

$|d \pm R| \pm r$

هر دو منفی ← Min



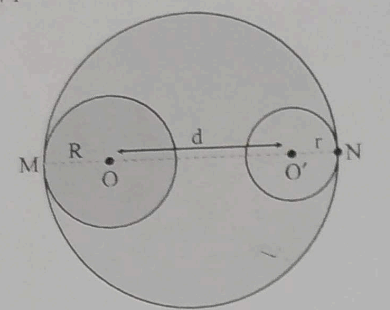


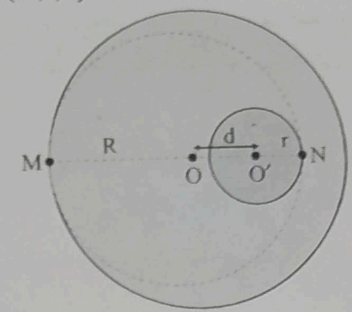
$\begin{cases} min = d-(R+R') \\ max = d+(R+R') \end{cases}$

$\begin{cases} max = d+(R'+R) \\ min = R-(d+R') \end{cases}$

قطر بزرگ‌ترین دایره‌ای که بر دو دایره‌ی $C(O,R)$ و $C'(O',r)$ مماس می‌باشد، برابر است با:

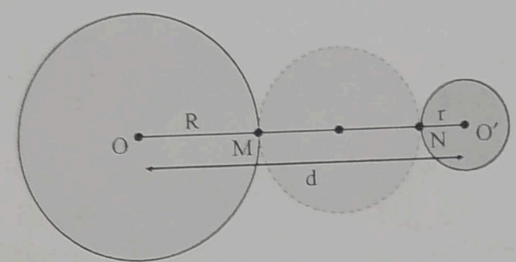
$MN = d + R + r$



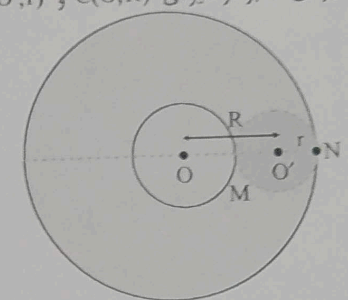


قطر کوچک‌ترین دایره‌ای که بر دو دایره‌ی $C(O,R)$ و $C'(O',r)$ مماس می‌باشد، برابر است با:

$MN = |d + R| - r$



$MN = d - R - r$



$MN = R - d - r$

متخارج

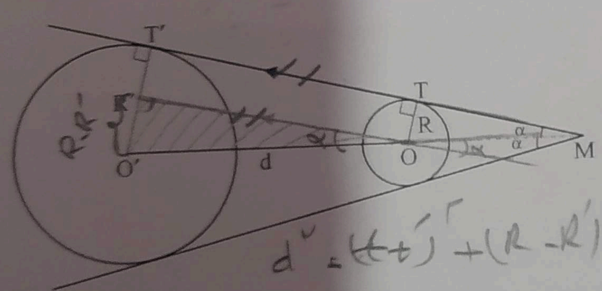
نمونه: دو دایره‌ی $C(O,۵)$ و $C'(O',۳)$ اندازه‌ی خط‌المرکزین ۱۰ است. حداقل فاصله میان نقاط دو دایره را بیابید.

$\min = d - (R + r) = ۱۰ - (۵ + ۳) = \boxed{۲}$

$\max = (d + r + R) = ۱۸$

• مماس مشترک خارجی دو دایره

همرس بودن دو مماس مشترک خارجی و خط‌المرکزین



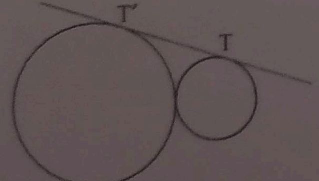
$$TT' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2}$$

$$\sin\alpha = \frac{R - R'}{d}$$

(2α زاویه‌ی میان دو مماس مشترک خارجی)

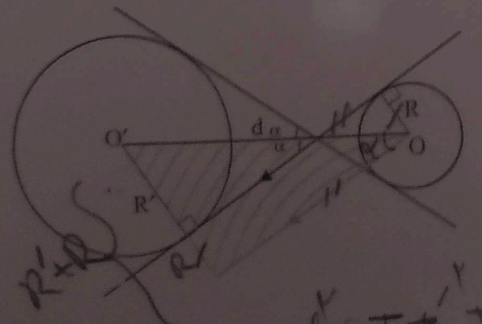
$d^2 = tt'^2 + (R - R')^2 \longrightarrow tt' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2}$

در حالت خاص که دو دایره با هم مماس خارج هستند. $TT' = 2\sqrt{RR'}$



• مماس مشترک داخلی دو دایره

همرس بودن دو مماس مشترک داخلی و خط‌المرکزین



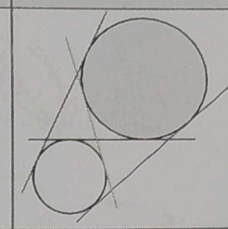
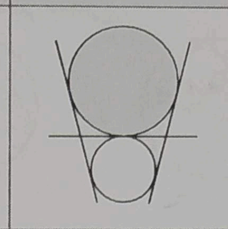
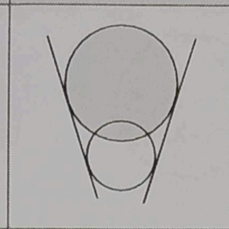
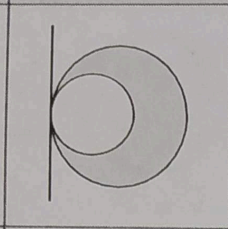
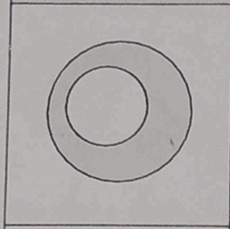
$$TT' = \sqrt{d^2 - (R + R')^2}$$

$$\sin\alpha = \frac{R + R'}{d}$$

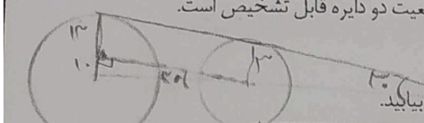
(2α زاویه‌ی میان دو مماس مشترک داخلی)

$d^2 = tt'^2 + (R + R')^2 \longrightarrow tt' = \sqrt{d^2 - (R + R')^2}$

تعداد مماس مشترک‌های دو دایره

وضعیت	متخارج	مماس خارج	متقاطع	مماس داخل	متداخل
شکل					
تعداد	۲+۲	۲+۱	۲+۰	۱+۰	۰+۰

تعداد مماس مشترک‌ها در هر وضعیت یک عدد صحیح منحصر به فرد در بازه‌ی [۰,۴] است. بنابراین از روی تعداد مماس مشترک‌ها وضعیت دو دایره قابل تشخیص است.

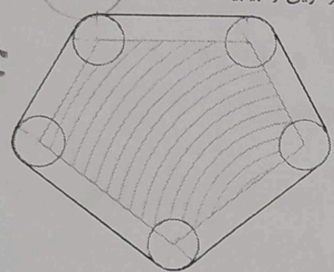


وقتی تعداد مماس مشترک‌های دو دایره برابر یک است، یعنی دو دایره مماس داخل‌اند.

نمونه: اگر زاویه مماس مشترک‌های خارجی دو دایره $C(O,13)$ و $C'(O',3)$ برابر 60° باشد. اندازه‌ی خط‌المرکزین را بیابید.

$d=20$

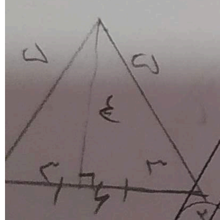
- **سیستم‌های تسمه نقاله**

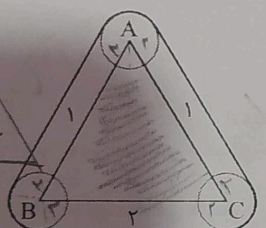


$+2\pi R$ محیط n ضلعی = اندازه‌ی طول نخ در شکل روبه‌رو دایره‌ها حتی می‌توانند مماس و یا حتی متقاطع باشند.

مساحت کل ناحیه = مساحت n ضلعی + (محیط n ضلعی)(R) + πR^2

مساحت هاشور = مساحت n ضلعی −$(n-2)\frac{\pi R^2}{2}$





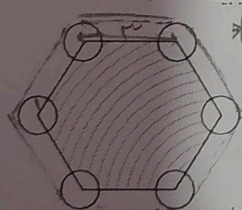
نمونه: در شکل مقابل مثلث ABC متساوی‌الساقین است و شعاع دایره‌ها ۲ است. محیط و مساحت ناحیه‌ای که توسط نخ محصور شده است را بیابید.

$P=12$ ، طول نخ $= P + 2\pi r = 12+4\pi$

$S = \frac{3\times4}{2}\times2 = 12$ ، $S = S_\triangle + (\text{محیط}\times2) + \pi r^2 = 12 + \dots$

$S_{\text{هاشور}} = S_\triangle - \frac{1}{2}\pi r^2 = 12-2\pi$

نمونه: در شش ضلعی روبه‌رو به اضلاع ۳ که در هر رأس آن یک دایره به شعاع ۱ رسم شده است. مساحت قسمت هاشور را بیابید.



$* \ S_{\text{هاشور}} = S_{\text{hex}} - \frac{(6-2)}{2}\pi r^2 = \frac{27\sqrt{3}}{2} - 2\pi$

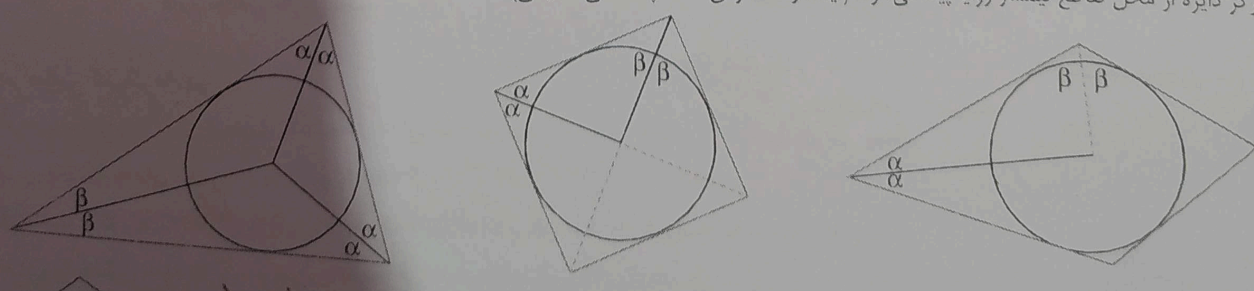
$S_{\text{hex}} = 6\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = 6\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times9 = \frac{27\sqrt{3}}{2}$

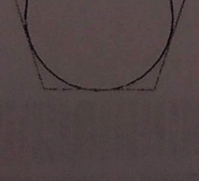
$*$ طول نخ $= P + 2\pi r = 18+2\pi$

- **چند ضلعی محیطی**

همه‌ی اضلاع بر دایره‌ای مماس هستند.

مرکز دایره از محل تقاطع نیمساز زوایا پیدا می‌شود. (نیمسازها همرس ⇔ چندضلعی محیطی)





$S = rP$ ← نصف محیط n ضلعی ؛ S ← مساحت n ضلعی

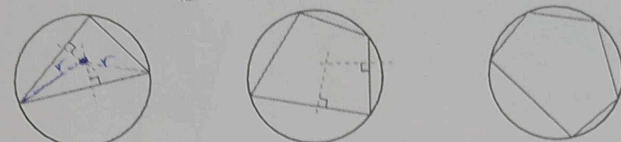
دایره محاط در چندضلعی است.

در مورد چندضلعی محیطی: $r = S/P$

• **چندضلعی محاطی**

دایره‌ای از همه رئوس عبور کند.

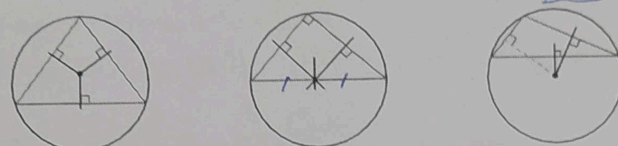
مرکز دایره: محل همرسی عمو منصف اضلاع است. (عمودمنصف‌ها همرس ⇔ چندضلعی محاطی)



دایره محیط بر چندضلعی است.

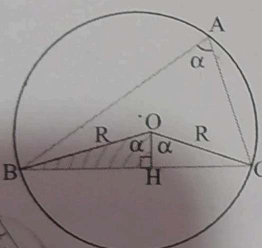
• **دایره‌ی محیطی مثلث**

۱) مرکز آن محل همرسی سه عمو منصف است



مثلث با زاویه‌ی منفرجه — مثلث قائم‌الزاویه — در مثلث با زوایای حاده

۲) شعاع دایره‌ی محیطی مثلث:

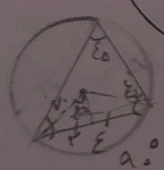


$$\frac{a}{\operatorname{Sin} A}=\frac{b}{\operatorname{Sin} B}=\frac{c}{\operatorname{Sin} C}=۲R$$

$R_{\text{دایره محیطی}} = \frac{abc}{4S_{\Delta}}$

و از دید دیگر:

$$\begin{cases}\operatorname{Sin}\alpha=\dfrac{BC}{۲R}\\[2mm] \tan\alpha=\dfrac{BC}{۲(OH)}\end{cases}$$

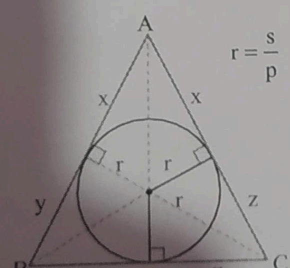


نمونه: در مثلثی با دو زاویه‌ی ۴۵° و ۷۵° و ضلع بین ۴، شعاع دایره‌ی محیطی را بیابید.

$\operatorname{Sin}45 = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{R} \Rightarrow R = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

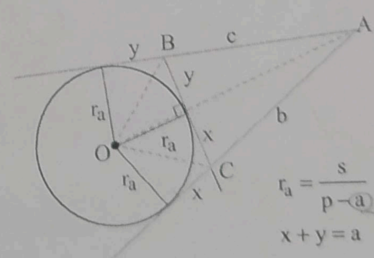
• **دایره‌های محاطی مثلث**

مرکز این دایره‌ها، محل تقاطع نیمسازهای (داخلی) و یا (داخلی و خارجی) است.



$r=\frac{s}{p}$

دایره محاطی داخلی



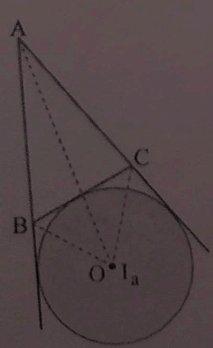
$r_a=\frac{s}{p-a}$

$x+y=a$

[illegible]

دایره محاطی خارجی نظیر رأس A

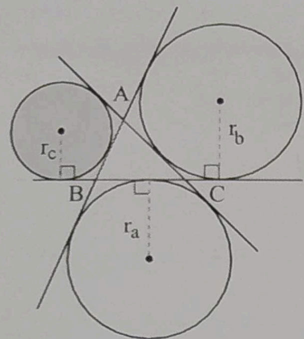
و در حالت کلی‌تر داریم:



در هر مثلث، هر دو نیمساز خارجی و یک نیمساز داخلی همرسند. در شکل مقابل، نقطه‌ی O نقطه‌ی همرسی نیمساز زاویه‌ی A و نیمسازهای زوایای خارجی B و C است.

نقطه از ضلع BC و امتداد اضلاع AB و AC به یک فاصله است، بر این مرکز دایره‌ای است که بر ضلع BC و امتداد دو ضلع دیگر مماس است. به این دایره، دایره‌ی محاطی خارجی نظیر رأس A می‌گویند.

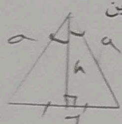
هر مثلث مطابق شکل، سه دایره‌ی محاطی خارجی دارد. در p نصف محیط مثلث باشد، شعاع این دایره‌ها به صورت‌های به دست می‌آید:



$$r_a=\frac{S}{p-a}$$
$$r_b=\frac{S}{p-b}$$
$$r_c=\frac{S}{p-c}$$

$\uparrow r_a=\frac{S}{p-a}\downarrow$

هرچه ضلع مثلث بزرگ‌تر باشد $p-a$ کوچک‌تر شده و شعاع دایره‌ی محاطی خارجی بزرگ‌تر می‌شود، پس بزرگ‌ترین دایره‌ی محاطی خارجی متناظر با بزرگ‌ترین ضلع یا روبه‌رو به بزرگ‌ترین زاویه از مثلث است و کوچک‌ترین دایره‌ی محاطی خارجی روبه‌رو به کوچک‌ترین زاویه‌ی مثلث است.



در مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a، شعاع دایره‌های محاطی خارجی با ارتفاع مثلث برابر است. (به عبارتی همه‌ی چیزهای اندیس‌دار در مثلث متساوی‌الاضلاع برابرند.)

$$r_a=r_b=r_c=h_a=m_a=d_a=\frac{\sqrt3}{2}a$$

$r_a=\frac{S}{p-a}=\frac{\frac{\sqrt3}{4}a^2}{\frac{a}{2}}=\frac{\sqrt3}{2}a$

$h=m=d=\frac{\sqrt3}{2}a$

نمونه: شعاع دایره‌ی محاطی خارجی روبه‌رو به بزرگ‌ترین زاویه در مثلث با اضلاع ۵ و ۵ و ۶ را بیابید.

$p=\frac{16}{2}=8$

$S=\frac{4\times3}{2}\times2=12$

$\max \rightarrow r_a=\frac{S}{p-a}=\frac{12}{8-6}=6$

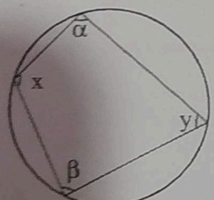
$\min \rightarrow \frac{S}{p-b}=\frac{12}{8-5}=4$

نکته: می‌توان ثابت کرد که:

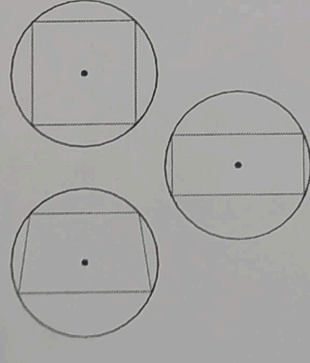
$$\begin{cases}\frac{1}{r}=\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\\ \frac{1}{r}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\end{cases}$$ (اثبات)

• **چهارضلعی محاطی**

مهم‌ترین ویژگی: زوایای روبه‌رو مکمل هستند و بالعکس!

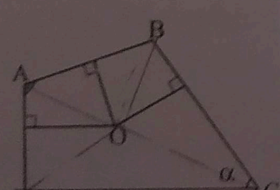


$$\underbrace{\alpha+\beta=x+y=180^\circ}_{\text{شرط}}$$



• **چهارضلعی‌های معروف محاطی:**
- مربع
- مستطیل
- ذوزنقه متساوی‌الساقین
- بعضی کایت‌ها

نمونه: عمودمنصف‌های چهارضلعی ABCD در زیر، در نقطه O همرسند. زاویه α را بیابید.

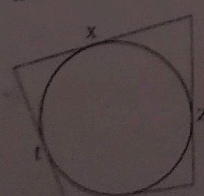


$\hat{A}=4\alpha+80^\circ$

$\rightarrow \alpha+(4\alpha+80)=180 \rightarrow \alpha=20^\circ$

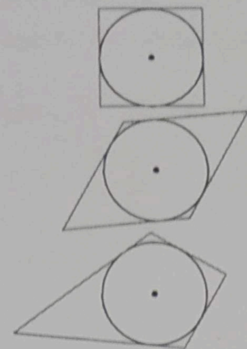
• **چهارضلعی محیطی**

جمع اضلاع روبه‌رو، برابر است و بالعکس!



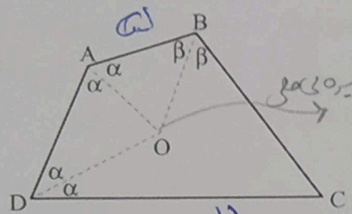
$$\underbrace{x+y=z+t}_{\text{شرط}}$$

• چهارضلعی‌های معروف محیطی:
- مربع
- لوزی
- کایت
- بعضی ذوزنقه‌ها



یادآوری: $r=\frac{s}{p}$ ← نصف محیط یا جمع دو ضلع مقابل

نمونه: در شکل روبه‌رو محیط چهارضلعی ABCD را بیابید.

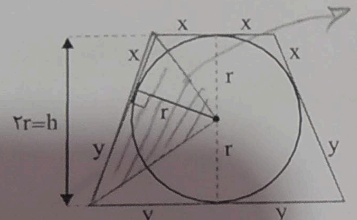


P = (۵+۱۱)+(۵+۱۱) = ۳۲

نکته: ذوزنقه متساوی‌الساقین محیطی دارای خاصیت جالبی است:

$r^2 = xy$, $h = 2r \to r = \frac{h}{2}$

$h^2 = 4xy$



$h^2=(2x)(2y)$

$\to h^2 = (2x)(2y)$

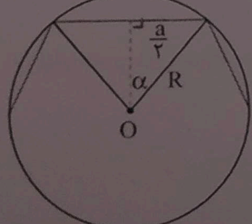
$S=\pi r^2$

نمونه: ذوزنقه متساوی‌الساقین با قاعده‌های ۴ و ۱۶ بر دایره‌ای محیط است، مساحت دایره را بیابید.

$h^2=(4)(16) \to h=8$

$h=2r \to r=4 \Rightarrow S=\pi(4)^2=16\pi$

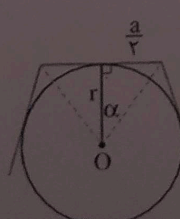
• n ضلعی منتظم محاطی



$$\begin{cases}\alpha=\frac{180^\circ}{n}\\ \sin\alpha=\frac{\frac{a}{2}}{R}\end{cases}$$

مساحت n ضلعی منتظم $S=n\times S_\Delta=\frac{1}{2}nR^2\sin(2\alpha)$

• n ضلعی منتظم محیطی

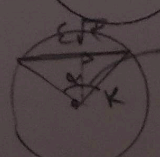


$$\begin{cases}\alpha=\frac{180^\circ}{n}\\ \tan\alpha=\frac{\frac{a}{2}}{R}\end{cases}$$

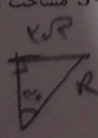
مساحت n ضلعی منتظم $S=n\times S_\Delta=n\times\frac{1}{2}aR$

نمونه: مساحت دایره‌ی محیطی شش‌ضلعی منتظم با ضلع $4\sqrt{3}$ را بیابید.

نمونه: مساحت شش‌ضلعی منتظم محیط بر دایره به شعاع ۴ را بیابید.



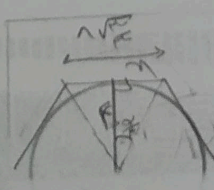
$\alpha=\frac{360}{6}=60$



$\to \sin 30 = \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{R} \to R=4\sqrt{3}$

$S_{\bigcirc}=\pi(4\sqrt{3})^2=48\pi$

$S=6(\frac{1}{2})(R)(R)\sin 60$



$\alpha=\frac{180}{6}=30$ $\to \tan 30=\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{a/2}{4}\to a=\frac{8\sqrt{3}}{3}$

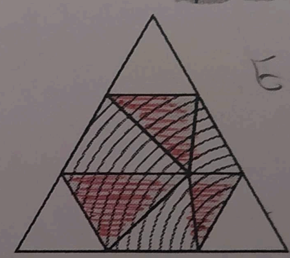
$S=6(\frac{1}{2}\times\frac{8\sqrt{3}}{3}\times 4)=32\sqrt{3}$

• **الگوی شش‌ضلعی در مثلث (۶ در ۳ منتظم)**

Ex) $S_{مثلث} = ۱۰$

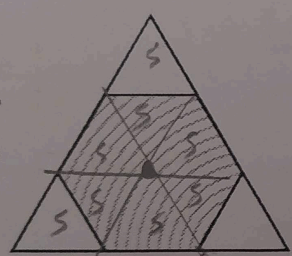
$S_{رنگی} = \frac{۱۰}{۲} = ۵$

$S_{سفید} = ۱۰ - ۵$



P نقطه دلخواه داخل شش ضلعی مجموع مساحت همرنگ‌ها برابر است.

$\frac{S_{۶ضلعی}}{S_{مثلث}} = \frac{۶}{۹} = \frac{۲}{۳}$



$S_۶ = \frac{۲}{۳} S_\Delta$

هندسه ۳

• **بیضی**

تعریف: مکان هندسی نقاطی از صفحه که مجموع فواصل آن‌ها از دو نقطه ثابت، مقداری ثابت است.

$MF + MF' =$ مقدار ثابت $= ۲a$