

منبع: کنکور سراسری

گزینه ۴

۱

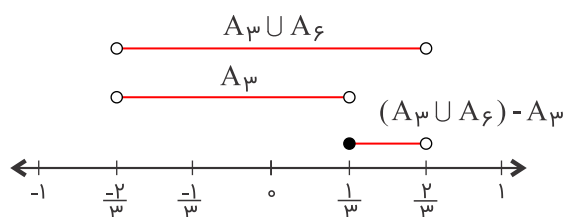
ابتدا با توجه به رابطه $A_n = \left(-\frac{2}{n}, \frac{n-2}{n}\right)$ ، مجموعه‌های A_3 ، A_6 را به صورت بازه‌ای تعیین می‌کنیم. (برای بدست آوردن A_3 ، $n = 3$ و برای به دست آوردن A_6 ، $n = 6$ در نظر گرفته می‌شود). در ادامه برای تعیین بازه $A_3 \cup A_6$ ، ابتدای بازه کوچک‌ترین عضو ابتدای A_3 و A_6 و انتهای آن بزرگ‌ترین عضو انتهای A_3 و A_6 در نظر گرفته می‌شود.

$$A_n = \left(-\frac{2}{n}, \frac{n-2}{n}\right) \Rightarrow \begin{cases} A_3 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{3-2}{3}\right) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \\ A_6 = \left(-\frac{2}{6}, \frac{6-2}{6}\right) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \end{cases}$$

$$A_3 \cup A_6 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$(A_3 \cup A_6) - A_3 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) - \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

در صورتی که تعیین اجتماع و اشتراک بازه‌ها برای شما دشوار بود می‌توانید از رسم نمودار هم به شکل زیر استفاده کنید:



کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۶

گزینه ۲

۲

در دسته اول ۱، دسته دوم ۲ و ... و در دسته بیستم، ۲۰ عدد داریم پس در کل به اندازه $1 + 2 + 3 + \dots + 20 = \frac{20}{2}(1 + 20) = 210$ عدد فرد داریم؛ بنابراین جمله آخر در دسته بیستم، ۲۱۰ امین عدد فرد طبیعی $(2n - 1)$ است.

$$2 \times 210 - 1 = 419$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۱

ابتدا با توجه به تعریف مجموعه A_i ، مجموعه‌های A_1 ، A_2 و A_5 و A_7 را به صورت بازه‌ای مشخص می‌کنیم. برای به دست آوردن اشتراک دو مجموعه که به صورت بازه‌ای مشخص شده‌اند، ابتدای بازه، بزرگ‌ترین عدد ابتدای دو مجموعه و انتهای بازه، کوچک‌ترین عدد انتهای دو مجموعه در نظر گرفته می‌شود. تست را با استفاده از رسم نمودار هم حل می‌کنیم تا اگر در مشخص کردن مجموعه‌ها به مشکل برخوردید، مشکلاتان به راحتی حل شود.

$$A_i = \left[-i, \frac{9-i}{2}\right]$$

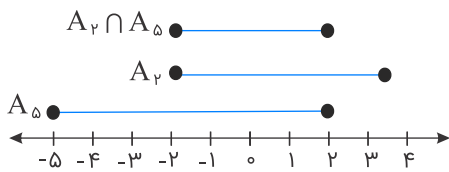
$$A_1 = \left[-1, \frac{9-1}{2}\right] = [-1, 4]$$

$$A_2 = \left[-2, \frac{9-2}{2}\right] = \left[-2, \frac{7}{2}\right]$$

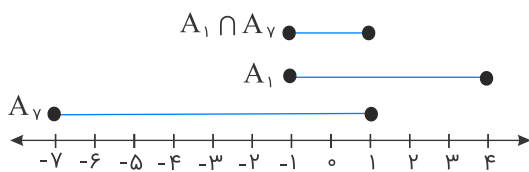
$$A_5 = \left[-5, \frac{9-5}{2}\right] = [-5, 2]$$

$$A_7 = \left[-7, \frac{9-7}{2}\right] = [-7, 1]$$

$$A_2 \cap A_5 = \left[-2, \frac{7}{2}\right] \cap [-5, 2] = [-2, 2]$$



$$A_1 \cap A_7 = [-1, 4] \cap [-7, 1] = [-1, 1]$$



$$(A_2 \cap A_5) - (A_1 \cap A_7) = [-2, 2] - [-1, 1] = [-2, -1) \cup (1, 2]$$

جمله اول دنباله حسابی مفروض را a_1 و قدر نسبت آن را d در نظر می‌گیریم. در این صورت، باتوجه به اینکه $a_n = a_1 + (n - 1)d$ داریم $a_2 = a_1 + d$ ، $a_5 = a_1 + 4d$ و $a_{12} = a_1 + 11d$.
از طرفی می‌دانیم که اگر x ، y و z به ترتیب جمله‌های متوالی یک دنباله هندسی باشند، آنگاه $x \cdot z = y^2$ ؛ پس باتوجه به فرض سؤال داریم:

$$a_5^2 = a_2 \cdot a_{12} \Rightarrow (a_1 + 4d)^2 = (a_1 + d) \times (a_1 + 11d)$$

$$\Rightarrow a_1^2 + 8a_1d + 16d^2 = a_1^2 + 12a_1d + 11d^2 \Rightarrow 5d^2 = 4a_1d \xrightarrow{d \neq 0} a_1 = \frac{5}{4}d (*)$$

$$\begin{cases} a_2 = a_1 + d \\ a_5 = a_1 + 4d \end{cases} \xrightarrow{(*)} \begin{cases} a_2 = \frac{5}{4}d + d = \frac{9}{4}d \\ a_5 = \frac{5}{4}d + 4d = \frac{21}{4}d \end{cases}$$

قدر نسبت دنباله هندسی، از تقسیم دو جمله متوالی آن به دست می‌آید، یعنی اگر قدر نسبت دنباله هندسی مورد نظر سؤال را q در نظر بگیریم، آنگاه:

$$q = \frac{a_5}{a_2} = \frac{\frac{21}{4}d}{\frac{9}{4}d} = \frac{21}{9} = \frac{7}{3}$$

در حل تست به نکات زیر توجه کنید:

الف) با توجه به مجموعه A_n ، ابتدا مجموعه‌های A_1 ، A_f و A_e را با اعضای آن مشخص می‌کنیم.

ب) نامعادله قدر مطلق $|x| \leq a$ ، به صورت $-a \leq x \leq a$ در نظر گرفته می‌شود.

ج) در تعیین اعضا حواستان باشد که هر دو نامعادله $2^m \leq 2n$ و $|m| \leq n$ باید هم‌زمان برقرار باشد.

$$A_1 = \{m \in \mathbb{Z} : |m| \leq 1, 2^m \leq 2\}$$

$$|m| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq m \leq 1 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m = \{-1, 0, 1\}$$

$$2^m \leq 2 \Rightarrow m \leq 1 \Rightarrow A_1 = \{-1, 0, 1\}$$

$$A_f = \{m \in \mathbb{Z} : |m| \leq f, 2^m \leq 8\}$$

$$|m| \leq f \Rightarrow -f \leq m \leq f \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m = \{-f, -f+1, \dots, f-1, f\}$$

$$2^m \leq 8 \Rightarrow 2^m \leq 2^3 \Rightarrow m \leq 3 \Rightarrow A_f = \{-f, -f+1, \dots, 2, 3\}$$

$$A_e = \{m \in \mathbb{Z} : |m| \leq e, 2^m \leq 12\}$$

$$|m| \leq e \Rightarrow -e \leq m \leq e \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m = \{-e, -e+1, \dots, e-1, e\}$$

$$2^m \leq 12 \Rightarrow m \leq 3 \Rightarrow A_e = \{-e, -e+1, \dots, 1, 2, 3\}$$

تعیین اعضای مجموعه $(A_e - A_f) \cup A_1$:

$$A_e - A_f = \{-e, -e+1, \dots, 1, 2, 3\} - \{-f, -f+1, \dots, 1, 2, 3\} = \{-e, -e+1, \dots, 1, 2, 3\}$$

$$(A_e - A_f) \cup A_1 = \{-e, -e+1, \dots, 1, 2, 3\} \cup \{-1, 0, 1\} = \{-e, -e+1, \dots, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

بنابراین مجموعه $(A_e - A_f) \cup A_1$ دارای ۵ عضو است.

دسته سوم دسته دوم دسته اول
 \downarrow \downarrow \downarrow
 ۱ ۲ ۳ , ...

پس تعداد کل جملات ۲۹ دسته اول برابر است با:

$$\begin{aligned} \text{تعداد کل جملات ۲۹ دسته اول} &= 1 + 2 + 3 + \dots + 29 \\ &= \frac{29(29+1)}{2} = \frac{29 \times 30}{2} = 435 \end{aligned}$$

پس اولین جمله دسته سی ام، برابر با جمله ۴۳۶ام دنباله اعداد طبیعی فرد است. دنباله اعداد طبیعی فرد، یک دنباله خطی با جمله عمومی $a_n = 2n - 1$ است، بنابراین:

$$a_{436} = 2 \times 436 - 1 = 871 = b_1$$

دسته سی ام، ۳۰ جمله دارد، بنابراین جمله آخر این دسته برابر است با:

$$b_{30} = b_1 + 29d \xrightarrow[d=2]{b_1=871} 871 + 29 \times 2 = 929$$

(توجه کنید که جملات هر دسته، یک دنباله حسابی با قدر نسبت ۲ هستند)، بنابراین:

$$b_1 + b_{30} = 871 + 929 = 1800$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

$$\begin{cases} 2, 7, 12, 17, \dots & d_1 = 5 \\ 8, 11, 14, 17, \dots & d_2 = 3 \end{cases}$$

اولین جمله مشترک دو دنباله ۱۷ است. همچنین قدر نسبت دنباله جملات مشترک ک.م.م d_1 و d_2 یعنی $15 = 3 \times 5$ است؛ بنابراین جمله عمومی دنباله جملات مشترک عبارت است از:

$$a_n = 17 + 15(n-1) = 15n + 2$$

حال باید تعداد nهایی را بیابیم که به ازای آنها $100 \leq a_n \leq 999$:

$$\begin{aligned} 100 \leq 15n + 2 \leq 999 &\Rightarrow 98 \leq 15n \leq 997 \\ \Rightarrow 6/\dots \leq n \leq 66/\dots &\xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n \in \{7, 8, \dots, 66\} \end{aligned}$$

بنابراین تعداد جملات مورد نظر برابر است با:

$$66 - 7 + 1 = 60$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

با نوشتن چند جمله اول دنباله، رابطه جمله عمومی دنباله را به دست می‌آوریم.

$$a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 7, \dots \Rightarrow a_n = 2^n - 1 \xrightarrow{n=8} a_8 = 2^8 - 1 = 255$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

گام اول

این دنباله، بازگشتی است. در دنباله‌های بازگشتی بین هر جمله و جملات قبل از آن، یک رابطه وجود دارد. در این سؤال هر جمله از دنباله، دو واحد کمتر از دو برابر جمله قبلی است.

گام دوم

جمله اول دنباله برابر ۳ است. با توجه به رابطه داده شده، جملات دوم به بعد را می‌نویسیم تا به جمله هفتم و هشتم برسیم، سپس اختلاف این دو جمله را محاسبه کنیم.

$$a_1 = 3$$

$$a_2 = 2a_1 - 2 = (2 \times 3) - 2 = 6 - 2 = 4$$

$$a_3 = 2a_2 - 2 = (2 \times 4) - 2 = 8 - 2 = 6$$

$$a_4 = 2a_3 - 2 = (2 \times 6) - 2 = 12 - 2 = 10$$

$$a_5 = 2a_4 - 2 = (2 \times 10) - 2 = 20 - 2 = 18$$

$$a_6 = 2a_5 - 2 = (2 \times 18) - 2 = 36 - 2 = 34$$

$$a_7 = 2a_6 - 2 = (2 \times 34) - 2 = 68 - 2 = 66$$

$$a_8 = 2a_7 - 2 = (2 \times 66) - 2 = 132 - 2 = 130$$

اختلاف دو جمله هفتم و هشتم برابر است با:

$$a_8 - a_7 = 130 - 66 = 64$$

جمله‌های مشترک تشکیل یک دنباله حسابی می‌دهند که قدر نسبت آن ک.م.م قدر نسبت دو دنباله است.

$$۲, ۹, ۱۶, ۲۳, ۳۰, ۳۷, \dots \Rightarrow d_1 = ۷$$

$$۱۲, ۱۷, ۲۲, ۲۷, ۳۲, ۳۷, \dots \Rightarrow d_2 = ۵$$

اولین جمله مشترک بین دو دنباله، ۳۷ است.

$$a_n = a_1 + (n-1)d \xrightarrow{d=[۷,۵]=۳۵} a_n = ۳۷ + ۳۵(n-1) = ۳۵n + ۲$$

$$۱۰۰ \leq a_n < ۳۰۰ \Rightarrow ۱۰۰ \leq ۳۵n + ۲ < ۳۰۰$$

$$\Rightarrow ۹۸ \leq ۳۵n < ۲۹۸ \Rightarrow ۲/\dots \leq n < ۸/\dots$$

$$۳ \leq n \leq ۸ \Rightarrow n \in \{۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸\}$$

پس ۶ عدد با این شرایط داریم.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

طبق تعریف مجموعه A_i داریم:

$$A_۴ = \left(-\frac{1}{۴}, \frac{1}{۴}\right), \quad A_۵ = \left(-\frac{۲}{۵}, \frac{۳}{۵}\right)$$

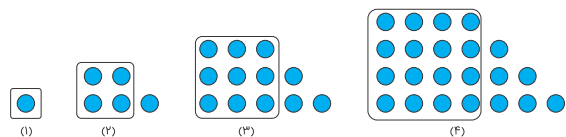
$$A_۶ = \left(-\frac{1}{۳}, \frac{۲}{۳}\right), \quad A_۷ = \left(-\frac{۲}{۷}, \frac{۵}{۷}\right), \quad A_۸ = \left(-\frac{1}{۴}, \frac{۳}{۴}\right)$$

بنابراین اشتراک این مجموعه‌ها به صورت زیر است:

$$\bigcap_{i=۴}^۸ A_i = \left(-\frac{1}{۴}, \frac{1}{۴}\right)$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

الگوی داده شده را به صورت زیر تقسیم بندی می کنیم:



طبق شکل داریم:

$$a_1 = 1^2 + 0, \quad a_2 = 2^2 + (0 + 1), \quad a_3 = 3^2 + (0 + 1 + 2), \quad \dots$$

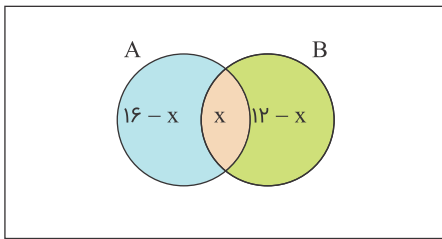
$$\Rightarrow a_n = n^2 + (0 + 1 + 2 + \dots + (n - 1))$$

بنابراین در شکل نهم تعداد دایره ها برابر است با:

$$9^2 + (0 + 1 + 2 + 3 + \dots + 8) = 81 + \frac{8 \times 9}{2} = 81 + 36 = 117$$

فرض کنید دانش‌آموزان گروه ورزش A و گروه روزنامه‌دیواری B است، معلومات مسئله چنین‌اند:

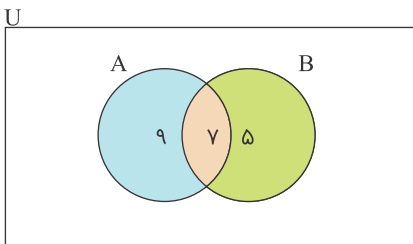
$$n(U) = ۳۹, \quad n(A) = ۱۶, \quad n(B) = ۱۲, \quad n(A - B) = ۹$$



می‌دانیم که:

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = ۱۶ - x = ۹ \Rightarrow x = ۷$$

بنابراین ۷ نفر در هر دو گروه قرار دارند:



در نتیجه:

$$\begin{aligned} \text{دانش‌آموزانی که عضو هیچ گروهی نیستند} &= n(U) - n(A \cup B) \\ &= ۳۹ - (n(A) + n(B) - n(A \cap B)) = ۳۹ - (۱۶ + ۱۲ - ۷) = ۱۸ \end{aligned}$$

راهحل اول:

$$1 \xrightarrow{+1} 2 \xrightarrow{+2} 4 \xrightarrow{+3} 7 \xrightarrow{+4} 11 \xrightarrow{+5} 16 \xrightarrow{+6} 22 \xrightarrow{+7} 29 \xrightarrow{+8} 37 \xrightarrow{+9} 46$$

جمله دهم

راهحل دوم:

$$a_1 = 1, a_2 = 1 + 1, a_3 = 1 + 1 + 2, a_4 = 1 + 1 + 2 + 3, \dots, a_{10} = 1 + 1 + \dots + 9$$

$$\Rightarrow a_{10} = 1 + \frac{9 \times 10}{2} = 46$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۳۹۸

راهحل اول:

شماره شکل	۱	۲	۳
تعداد دایره ها	۵	۸	۱۱

+۳ +۳

تعداد دایره‌ها تشکیل دنباله حسابی می‌دهند، بنابراین داریم:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d \Rightarrow a_{12} = 5 + 11 \times 3 = 38$$

راهحل دوم:

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= 1 + 2 \times 2 \\ a_2 &= 2 + 2 \times 3 \\ a_3 &= 3 + 2 \times 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a_n = n + 2 \times (n + 1) = 3n + 2$$

بنابراین با یک دنباله خطی با جمله عمومی $a_n = 3n + 2$ مواجه هستیم. جمله دوازدهم دنباله برابر است با:

$$a_{12} = 3(12) + 2 = 38$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

گروه آزمایشگاهی را A و گروه فوتبال را B فرض می‌کنیم. داریم:

$$n(S) = 42, n(A) = 15, n(B) = 12, n(A \cap B) = 7$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 15 + 12 - 7 = 20$$

$$\Rightarrow n((A \cup B)') = n(S) - n(A \cup B) = 42 - 20 = 22$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

$$S = \frac{1}{2 \times 5} + \frac{1}{5 \times 8} + \frac{1}{8 \times 11} + \dots + \frac{1}{17 \times 20}$$

$$3S = \frac{5-2}{2 \times 5} + \frac{8-5}{5 \times 8} + \frac{11-8}{8 \times 11} + \dots + \frac{20-17}{17 \times 20}$$

$$3S = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{11}\right) + \dots + \left(\frac{1}{17} - \frac{1}{20}\right)$$

دقت کنید که دومین عدد هر پرانتز با اولین عدد پرانتز بعدی ساده می‌شوند:

$$3S = \frac{1}{2} - \frac{1}{20} = \frac{9}{20} \Rightarrow S = \frac{3}{20} \Rightarrow S = \frac{3}{20} \times \frac{5}{5} = \frac{15}{100} = 0/15$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

جملات دنباله فیبوناتچی را تا جمله یازدهم می‌نویسیم. از جمله سوم به بعد، هر جمله از مجموع دو جمله قبل به دست می‌آید:

$$a_3 = 1 + 1 = 2$$

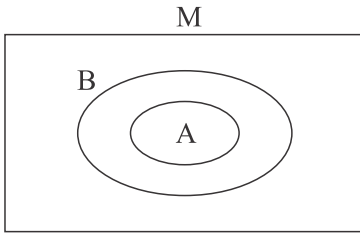
$$a_4 = 1 + 2 = 3$$

$$a_5 = 2 + 3 = 5$$

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89 \Rightarrow a_{11} = 89$$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۳۹۸

برای بررسی مسئله، بهتر است نمودار ون زیر را برای مجموعه‌های A و B فرض کنیم:



گزینه "۱" به صورت زیر ساده می‌شود:

$$B - A' = A \Rightarrow B \cap A = A$$

باتوجه به شکل کاملاً درست است.

گزینه "۲" عبارت است از:

$$A - B' = A \Rightarrow A \cap B = A$$

بنابراین این گزینه درست است.

گزینه "۳" به صورت زیر است:

$$A \cap B' = \emptyset \Rightarrow A - B = \emptyset$$

چون $A \subset B$ ، پس کاملاً درست است.

گزینه "۴" عبارت است از:

$$B \cap A' = \emptyset \Rightarrow B - A = \emptyset$$

نادرست می‌باشد، پس جواب مسئله گزینه "۴" است.

با جایگذاری a_1 در الگوی داده شده a_2 و به ترتیب تا a_5 را محاسبه می‌کنیم:

$$a_{n+1} = \frac{2}{1+a_n}, \quad a_1 = 2$$

$$a_2 = \frac{2}{1+a_1} = \frac{2}{1+2} = \frac{2}{3}$$

$$a_3 = \frac{2}{1+a_2} = \frac{2}{1+\frac{2}{3}} = \frac{2}{\frac{5}{3}} = \frac{6}{5}$$

$$a_4 = \frac{2}{1+a_3} = \frac{2}{1+\frac{6}{5}} = \frac{2}{\frac{11}{5}} = \frac{10}{11}$$

$$a_5 = \frac{2}{1+a_4} = \frac{2}{1+\frac{10}{11}} = \frac{2}{\frac{21}{11}} = \frac{22}{21}$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۳۹۹

{۱} : دسته اول

{ $\underbrace{2}_{1+1}$, ۳, $\underbrace{4}_{2^2}$ } : دسته دوم

{ $\underbrace{5}_{2^2+1}$, ۶, ۷, ۸, $\underbrace{9}_{3^2}$ } : دسته سوم

⋮

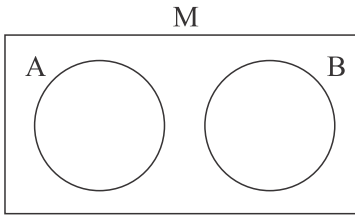
{ $\underbrace{50}_{7^2+1}$, ..., $\underbrace{64}_{8^2}$ } : دسته هشتم

{ $\underbrace{65}_{8^2+1}$, ..., $\underbrace{81}_{9^2}$ } : دسته نهم

$$\Rightarrow \text{واسطه حسابی} = \frac{81+65}{2} = \frac{146}{2} = 73$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

نمودار ون را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:



گزینه "۱" درست است، زیرا همان‌طور که در شکل دیده می‌شود، A زیرمجموعه B' است. گزینه "۲" را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$A - B' = \emptyset \Rightarrow A \cap B = \emptyset$$

که کاملاً درست است.

گزینه "۳" را به صورت زیر مرتب می‌کنیم:

$$A \cap B' = A \Rightarrow A - B = A$$

بنابراین باتوجه به شکل درست است.

گزینه "۴" به صورت زیر است:

$$(A \cup B)' = \emptyset \Rightarrow A' \cap B' = \emptyset$$

باتوجه به شکل نادرست است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

دنباله داده شده یک دنباله بازگشتی است؛ بنابراین با مقداردهی به a_n ، n را به دست می‌آوریم:

$$a_1 = a_2 = 3$$

$$n = 1 : a_3 = a_2 + a_1 - 1 = 3 + 3 - 1 = 5$$

$$n = 2 : a_4 = a_3 + a_2 - 2 = 5 + 3 - 2 = 6$$

$$n = 3 : a_5 = a_4 + a_3 - 3 = 6 + 5 - 3 = 8$$

$$n = 4 : a_6 = a_5 + a_4 - 4 = 8 + 6 - 4 = 10$$

$$n = 5 : a_7 = a_6 + a_5 - 5 = 10 + 8 - 5 = 13$$

$$n = 6 : a_8 = a_7 + a_6 - 6 = 13 + 10 - 6 = 17$$

بنابراین $a_8 = 17$ است.

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۳۹۹

از آنجاکه تعداد جملات هر دسته، برابر با شماره آن دسته است، پس تعداد کل جملات ۴۰ دسته اول برابر است با:

$$1 + 2 + \dots + 40 = \frac{40 \times 41}{2} = 820$$

همچنین جمله عمومی اعداد طبیعی فرد متوالی به صورت $a_n = 2n - 1$ است، پس:

$$a_{820} = 2(820) - 1 = 1639$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

نکته: در دنباله حسابی جمله n ام دنباله از رابطه $a_n = a_1 + (n - 1)d$ محاسبه می‌شود.
باتوجه به اطلاعات صورت سؤال داریم:

$$a_3 + a_5 + a_{13} = 75$$

$$\Rightarrow a_1 + 2d + a_1 + 4d + a_1 + 12d = 75$$

$$\Rightarrow 3a_1 + 18d = 75$$

$$\Rightarrow 3(\underbrace{a_1 + 6d}_{a_7}) = 75 \Rightarrow 3a_7 = 75$$

$$\Rightarrow a_7 = \frac{75}{3} = 25$$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۳۹۹

راهحل اول:

جملات سوم، هفتم و شانزدهم یک دنباله حسابی با قدر نسبت (اختلاف مشترک) d و جمله اول a_1 برابر است با:

$$\underbrace{a_1 + 2d}_{t_1}, \underbrace{a_1 + 6d}_{t_2}, \underbrace{a_1 + 15d}_{t_3}$$

t_1, t_2, t_3 سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی هستند، پس داریم:

$$t_2^2 = t_1 t_3 \Rightarrow (a_1 + 6d)^2 = (a_1 + 2d)(a_1 + 15d)$$

$$\Rightarrow a_1^2 + 12a_1d + 36d^2 = a_1^2 + 17a_1d + 30d^2$$

$$\Rightarrow 6d^2 - 5a_1d = 0 \Rightarrow d(6d - 5a_1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d = 0 \Rightarrow r = 1 \text{ (در گزینه‌ها نیست)} \\ 6d - 5a_1 = 0 \Rightarrow d = \frac{5}{6}a_1 \text{ ق ق} \end{cases}$$

$$t_1 = a_1 + 2d = a_1 + 2\left(\frac{5}{6}a_1\right) = \frac{8}{3}a_1$$

$$t_2 = a_1 + 6d = a_1 + 6\left(\frac{5}{6}a_1\right) = 6a_1$$

در نتیجه قدر نسبت (اختلاف مشترک) دنباله هندسی برابر است با:

$$r = \frac{t_2}{t_1} = \frac{6a_1}{\frac{8}{3}a_1} = \frac{18}{8} = \frac{9}{4}$$

راهحل دوم:

نکته: اگر جملات a_n, a_m, a_k از یک دنباله حسابی غیرثابت، به ترتیب جملات متوالی یک دنباله هندسی باشند، قدر نسبت

$$r = \frac{k - m}{m - n} \text{ (نسبت مشترک) دنباله هندسی برابر است با:}$$

a_3, a_7, a_{16} جملات یک دنباله هندسی هستند، پس طبق نکته داریم:

$$r = \frac{16 - 7}{7 - 3} = \frac{9}{4}$$

$$a_{n+1} - 1 = \frac{1}{a_n} \Rightarrow a_n = \frac{1}{a_{n+1} - 1}$$

$$a_{15} = \frac{1}{a_{16} - 1} = \frac{1}{\frac{1597}{987} - 1} = \frac{1}{\frac{610}{987}} = \frac{987}{610}$$

$$a_{14} = \frac{1}{a_{15} - 1} = \frac{1}{\frac{987}{610} - 1} = \frac{1}{\frac{377}{610}} = \frac{610}{377}$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۰

اول جای nها، ۹۹ قرار می‌دهیم تا a_{99} به دست آید:

$$a_{100} = \frac{1}{a_{99}} + 1 \Rightarrow \frac{k}{m} = \frac{1}{a_{99}} + 1 \Rightarrow \frac{k-m}{m} = \frac{1}{a_{99}} \Rightarrow a_{99} = \frac{m}{k-m}$$

الان به جای nها، ۹۸ می‌گذاریم:

$$a_{99} = \frac{1}{a_{98}} + 1 \Rightarrow \frac{m}{k-m} = \frac{1}{a_{98}} + 1 \Rightarrow \frac{m - (k-m)}{k-m} = \frac{1}{a_{98}} \Rightarrow a_{98} = \frac{k-m}{2m-k}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

جمله سوم، واسطه هندسی بین جملات اول و پنجم است:

$$\underbrace{x - \frac{3}{2}}_a, y, \underbrace{x}_b, z, \underbrace{4x}_c, \quad b^2 = a \times c$$

$$x^2 = \left(x - \frac{3}{2}\right)4x \Rightarrow x^2 = 4x^2 - 6x \Rightarrow 3x^2 - 6x = 0$$

$$\Rightarrow 3x(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0, \quad x = 2$$

به‌ازای $x = 0$ دنباله هندسی ایجاد نخواهد شد. $x = 2$ را در دنباله جایگذاری می‌کنیم و بقیه جمله‌ها را نیز به دست می‌آوریم:

$$\frac{1}{2}, y, 2, z, 8 \Rightarrow \begin{cases} y^2 = \frac{1}{2} \times 2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1 \\ z^2 = 2 \times 8 = 16 \Rightarrow z = \pm 4 \end{cases}$$

اکنون می‌توانیم مقدار عبارت موردنظر را به دست می‌آوریم:

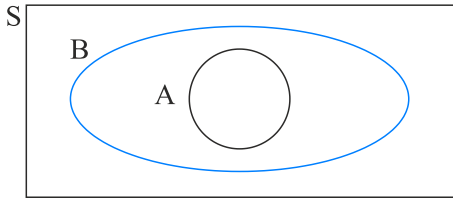
$$|x| + |y| + |z| = 2 + 1 + 4 = 7$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۰

درستی شرط $((A - B) \cup (B - A))' = A \cap B$ را در هریک از گزینه‌ها بررسی می‌کنیم.
گزینه ۱) اگر $A \subseteq B$ باشد، برابری ذکرشده برقرار نیست.

$$((A - B) \cup (B - A))' = (\emptyset \cup (B - A))' = (B - A)'$$

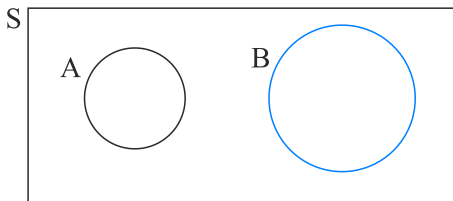
$$A \cap B = A$$



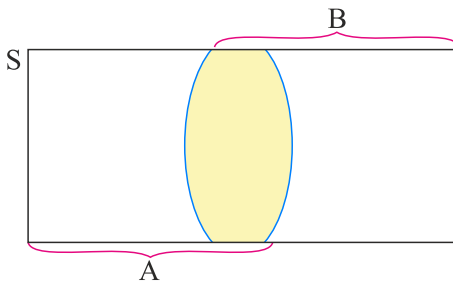
گزینه ۲) اگر $A \subseteq B'$ باشد، برابری ذکرشده برقرار نیست.

$$((A - B) \cup (B - A))' = (A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$A \cap B = \{ \}$$



گزینه ۳) اگر $A \cup B = S$ باشد، برابری ذکرشده همواره برقرار است.
باتوجه به نمودار زیر متمم مجموعه $(A - B) \cup (B - A)$ قسمت هاشورزده خواهد شد که با $A \cap B$ برابر است.



گزینه ۴) اگر $A = \emptyset$ ، برابری ذکرشده برقرار نیست.

$$((A - B) \cup (B - A))' = (\emptyset \cup B)' = B'$$

$$A \cap B = \emptyset \cap B = \emptyset$$

به طریق مشابه اگر $B = \emptyset$ ، برابری ذکرشده برقرار نیست.
راه حل دوم:

متمم مجموعه دلخواه A برابر است با: $S - A = A'$
اکنون متمم مجموعه داده شده برابر است با:

$$S - ((A - B) \cup (B - A)) = S - ((A \cup B) - (A \cap B)) = A \cap B$$

$$\Rightarrow S = A \cup B$$

اولاً باید حواستان باشد که مجموع ۱۰ جمله اول یعنی مجموع جملات a_0 تا a_9 !
* جملات a_0, a_3, a_6, a_9 را از ضابطه 2^k ، حساب می‌کنیم. باید جای k اعداد $0, 1, 2, 3$ را در 2^k قرار دهیم:

$$\begin{cases} a_0 = 2^0 = 1 \\ a_3 = 2^1 = 2 \\ a_6 = 2^2 = 4 \\ a_9 = 2^3 = 8 \end{cases}$$

* جملات a_1, a_4, a_7 را از ضابطه $4 - 2k$ ، حساب می‌کنیم. جای k اعداد $0, 1, 2$ را در $4 - 2k$ قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} a_1 = 0 + 4 = 4 \\ a_4 = -2 + 4 = 2 \\ a_7 = -4 + 4 = 0 \end{cases}$$

* جملات a_2, a_5, a_8 را از ضابطه $a + \left[\frac{n}{k+2} \right]$ ، حساب می‌کنیم. جای $n, 3k+2$ قرار می‌دهیم:

$$\left[\frac{3k+2}{k+2} \right] + a$$

جای k اعداد $0, 1, 2$ را قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} a_2 = \left[\frac{2}{0+2} \right] + a = a + 1 \\ a_5 = \left[\frac{5}{1+2} \right] + a = a + 1 \\ a_8 = \left[\frac{8}{2+2} \right] + a = a + 2 \end{cases}$$

مجموع ۱۰ جمله اول، ۱۹ شده، پس:

$$1 + 4 + (a + 1) + 2 + 2 + (a + 1) + 4 + 0 + (a + 2) + 8 = 19 \\ \Rightarrow 3a + 25 = 19 \Rightarrow a = -2$$

جملات $a_2, a_5, a_8, \dots, a_{29}, a_{32}$ همگی از ضابطه سوم یعنی $\left[\frac{3k+2}{k+2} \right] - 2$ هستند. اول ضابطه را کمی ساده می‌کنیم:

$$\left[\frac{3k+2}{k+2} \right] - 2 = \left[\frac{3k+2}{k+2} - 2 \right] = \left[\frac{k-2}{k+2} \right]$$

باید در $\left[\frac{k-2}{k+2} \right]$ ، جای k ، اعداد 0 تا 9 را قرار دهیم و مقدار به دست آمده را با هم جمع کنیم:

$$\underbrace{\left[\frac{-2}{2} \right] + \left[\frac{-1}{3} \right] + [0] + \left[\frac{1}{5} \right] + \left[\frac{2}{6} \right] + \left[\frac{3}{7} \right] + \left[\frac{4}{8} \right] + \left[\frac{5}{9} \right] + \left[\frac{6}{10} \right] + \left[\frac{7}{11} \right]}_{-1} = -2$$

$$a_1 = -1, a_2 = 2 + 1 = 3, a_3 = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}, a_4 = 2 - \frac{3}{5} = \frac{7}{5}, \dots$$

$$\text{دنباله مورد نظر به صورت } a_n = \begin{cases} -1 & ; n = 1 \\ \frac{2n-1}{2n-3} & ; n \geq 2 \end{cases} \text{ است}$$

$$a_1 \times a_2 \times a_3 \times \dots \times a_{100} = -1 \times 3 \times \frac{5}{3} \times \frac{7}{5} \times \dots \times \frac{199}{197} = -199$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

اگر b واسطه هندسی a و b باشد، آنگاه $b^2 = ac$ است. دنباله حسابی مسئله را a_n در نظر می‌گیریم. باتوجه به اطلاعات مسئله داریم:

$$\begin{aligned} a_5^2 &= a_3 a_9 \Rightarrow (a + 4d)^2 = (a + 2d)(a + 8d) \\ \Rightarrow a^2 + 8ad + 16d^2 &= a^2 + 10ad + 16d^2 \\ \Rightarrow 2ad &= 0 \xrightarrow{d=0} a = 0 \end{aligned}$$

با داشتن جمله پنجم و جمله اول، اختلاف مشترک را حساب می‌کنیم:

$$a_5 = 7 \Rightarrow a + 4d = 7 \Rightarrow 0 + 4d = 7 \Rightarrow d = \frac{7}{4}$$

$$a_{101} = a + 100d = 0 + 100 \times \frac{7}{4} = 175$$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۰

چند جمله ابتدایی دنباله را حساب می‌کنیم.

$$a_1 = 1 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{1} + 1 = 2 \Rightarrow a_3 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} \Rightarrow a_4 = \frac{1}{\frac{3}{2}} + 1 = \frac{5}{3}$$

به این ترتیب، دنباله به صورت زیر خواهد بود:

$$a_n : \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \frac{34}{21}, \frac{55}{34}, \frac{89}{55}$$

تذکر: می‌دانیم دنباله فیبوناتچی به صورت زیر است:

$$F_n : 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$$

بر این اساس دنباله a_n را می‌توانیم به صورت ضابطه $a_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$ نمایش دهیم و جمله دهم را به دست آوریم.

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۰

جمله سوم واسطه هندسی جملات دوم و چهارم است.

$$y, \underbrace{x-1}_a, \underbrace{x}_b, \underbrace{x+2}_c, z$$

$$b^2 = ac \Rightarrow x^2 = (x-1)(x+2) \Rightarrow x^2 = x^2 + x - 2 \Rightarrow x = 2$$

$$x = 2 \Rightarrow y, 1, 2, 4, z$$

باتوجه به جملات به دست آمده، نسبت مشترک دنباله هندسی $r = 2$ است، پس:

$$y = \frac{1}{r}, z = \lambda \Rightarrow xyz = 2 \times \frac{1}{r} \times \lambda = \lambda$$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۰

ده جمله اول را می‌نویسیم و مجموع آن‌ها را برابر ۱۹ قرار می‌دهیم تا مقدار a به دست آید.

k	۰	۱	۲	۳
n	۰ ۱ ۲	۳ ۴ ۵	۶ ۷ ۸	۹ ۱۰ ۱۱
a_n	۱ ۴ ۱+a	۲ ۲ ۱+a	۴ ۰ ۲+a	۸ -۲ ۲+a

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_9 = 19 \Rightarrow (6 + a) + (5 + a) + (6 + a) + 8 = 19$$

$$\Rightarrow 3a + 25 = 19 \Rightarrow 3a = -6 \Rightarrow a = -2$$

برای به دست آوردن جمله ۱۲۹ام باید a_{28} را حساب کنیم که در ضابطه دوم به جای k عدد ۹ قرار می‌دهیم.

$$k = 9 \Rightarrow a_{28} = -2(9) + 4 = -14$$

برای محاسبه جمله سی‌ام باید a_{29} را حساب کنیم که در ضابطه سوم به جای k عدد ۹ قرار می‌دهیم:

$$k = 9 \Rightarrow a_{29} = \left[\frac{29}{9+2} \right] - 2 = \left[\frac{29}{11} \right] - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{a_{29} + a_{30}}{2} = -7$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

مسلماً نمی‌توانیم تا جمله ۱۴۰۰ام را بنویسیم، پس جملات ابتدایی را می‌نویسیم و به دنبال الگو می‌گردیم:

$$n = 1 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{1+a_1} \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2}$$

$$n = 2 \Rightarrow a_3 = 1$$

$$n = 3 \Rightarrow a_4 = \frac{1}{1+a_3} \Rightarrow a_4 = \frac{1}{2}$$

پس دنباله به این صورت است:

$$1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \dots$$

همان‌طور که رؤیت می‌شود، جملات ردیف زوج برابر $\frac{1}{2}$ هستند، پس جمله ۱۴۰۰ام برابر $\frac{1}{2}$ است.

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۱

باتوجه به اطلاعات مسئله، داریم:

$$a_1 = ۳$$

$$a_۵ = ۱۱ \Rightarrow a_1 + ۴d = ۱۱ \Rightarrow ۳ + ۴d = ۱۱ \Rightarrow ۴d = ۸ \Rightarrow d = ۲$$

برای محاسبه جمله دهم داریم:

$$a_{۱۰} = a_1 + ۹d \Rightarrow a_{۱۰} = ۳ + ۹ \times ۲ = ۳ + ۱۸ = ۲۱$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۱

اطلاعات مسئله را به زبان ریاضی می‌نویسیم:

$$\frac{a_۸}{a_۴} = ۸۱ \Rightarrow \frac{a_1 r^7}{a_1 r^3} = ۸۱ \Rightarrow r^4 = ۸۱ \Rightarrow r = \pm ۳$$

جمله پنجم و هفتم را باتوجه به جمله سوم می‌یابیم:

$$a_۵ = a_۳ \times r^2 \Rightarrow a_۵ = -۱۸ \times ۹$$

$$a_۷ = a_۳ \times r^4 \Rightarrow a_۷ = -۱۸ \times ۸۱$$

حال داریم:

$$a_۵ - a_۷ = -۱۸ \times ۹ - (-۱۸ \times ۸۱) = ۱۸ \times ۸۱ - ۱۸ \times ۹ \\ = ۱۸(۸۱ - ۹) = ۱۸ \times ۷۲ = ۱۲۹۶$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۱

$$t_n = an + b$$

$$\begin{cases} t_۵ = ۸ \\ t_{۱۰} = ۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۵a + b = ۸ \\ ۱۰a + b = ۵ \end{cases} \Rightarrow ۵a = -۳ \Rightarrow a = -\frac{۳}{۵} = -۰/۶$$

$$۵a + b = ۸ \xrightarrow{a=-۰/۶} -۳ + b = ۸ \Rightarrow b = ۱۱$$

$$t_{۱۶} = ۱۶a + b = ۱۶(-۰/۶) + ۱۱ = ۱/۴$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

دنباله خواسته شده به صورت زیر است:

$$a_1, a_1q, a_1q^2, a_1q^3, a_1q^4$$

باتوجه به سوال اولاً $a_1 \geq 1$ و ثانیاً $a_1q^4 \leq 100$. همچنین $q > 1$:

$$a_1q^4 \leq 100 \xrightarrow{q=2} 16a_1 \leq 100 \Rightarrow a_1 = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

$$a_1q^4 \leq 100 \xrightarrow{q=3} 81a_1 \leq 100 \Rightarrow a_1 = 1$$

برای $q \geq 4$ هیچ دنباله‌ای یافت نمی‌شود؛ پس در مجموع ۷ دنباله با مشخصات داده شده وجود دارد.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

$$|C| = |A| + 2 \quad (*)$$

$$|D| = |B| - 3 \quad (**)$$

$$|C \times B| = 1/25 |A \times B| \Rightarrow |C| \times |B| = 1/25 |A| \times |B|$$

$$\Rightarrow |C| = 1/25 |A| \xrightarrow{(*)} \begin{cases} |C| = 10 \\ |A| = 250 \end{cases}$$

$$|C \times B| = 1/5 |A \times D| \Rightarrow |C| \times |B| = 1/5 |A| \times |D|$$

$$\Rightarrow 10 \times |B| = 1/5 \times 250 \times |D| \Rightarrow |B| = 10 |D|$$

$$\xrightarrow{(**)} \begin{cases} |B| = 18 \\ |D| = 15 \end{cases}$$

بنابراین اختلاف تعداد اعضای A و B، ۱۰ عدد است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

$\{1\}, \{2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \{7, 8, 9, 10, 11, 12\}, \{13, 14, \dots, 24\}, \dots$

آخرین و بزرگ‌ترین عضو دسته‌ها (به جز دسته اول) با هم تشکیل دنباله هندسی با جمله اول ۳ و قدرنسبت ۲ می‌دهند:

$$a_2 = 3$$

$$a_3 = 3 \times 2^1 = 6$$

$$a_4 = 3 \times 2^2 = 12$$

⋮

$$a_{12} = 3 \times 2^{10} = 3072$$

$$a_{13} = 3 \times 2^{11} = 6144$$

پس دسته سیزدهم به صورت زیر است:

$$\{3072, 3074, \dots, 6144\} \Rightarrow \bar{x} = \frac{3072 + 6144}{2} = 4608/5$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

$$a_n = an^2 + bn + c$$

$$a_5 = 14 \Rightarrow -5 + 5b + c = 14$$

$$a_7 = 17/2 \Rightarrow -\frac{49}{5} + 7b + c = 17/2$$

$$a = \frac{1}{70}(-a_5) = -\frac{1}{5}$$

از حل دو معادله دو مجهول داریم:

$$b = 4, c = -1$$

$$a_n = \frac{-1}{5}n^2 + 4n - 1$$

$$a_{15} = -45 + 60 - 1 = 14$$

$$a_1 = -\frac{1}{5} + 4 - 1 = \frac{14}{5}$$

$$\frac{a_{15}}{a_1} = \frac{14}{\frac{14}{5}} = 5$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

$$a_1 = \frac{4}{3}$$

$$a_5 = \frac{1}{3} \Rightarrow a_1 r^4 = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{4}{3} r^4 = \frac{1}{3} \Rightarrow r^4 = \frac{1}{4} \Rightarrow r = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

اگر $r = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ باشد، آنگاه $d < 0$ می‌شود که در تضاد با شرایط مسئله است. (هرچند علامت r تأثیری در خواسته سؤال ندارد)

$$e = a_7 = a_1 r^6 = a_1 r^4 r^2 = a_5 r^2 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۱

یکی از جملات در ضابطه بالا و دیگری در ضابطه پایین هستند، چون از بین دو عدد متوالی، یک عدد زوج و یک عدد فرد است. k مقداری صحیح است و $\frac{2}{15}n$ باید صحیح باشد، پس n مضرب ۱۵ است؛ خود ۱۵ را امتحان می‌کنیم:

$$\begin{cases} a_{15} = 2 \\ a_{14} = 100 - \frac{1}{2}(196) = 2 \Rightarrow k = 2 \end{cases}$$

$$a_{16} = 100 - \frac{1}{2}(256) = -28$$

$$k - a_{16} = 2 - (-28) = 30$$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۱