۱ گزینه ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۰

گام اول

وقتی باقی‌ماندهٔ تقسیم عبارت $P(x) = x^۴ - ax^۳ + x^۲ + ۲ax + ۱$ بر $x + ۱$ برابر ۴ باشد، یعنی حاصل $P(-۱)$ برابر ۴ است.

گام دوم

$$x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = -۱ \Rightarrow P(-۱) = ۴$$

$$P(-۱) = (-۱)^۴ - a(-۱)^۳ + (-۱)^۲ + ۲a(-۱) + ۱ = ۴ \Rightarrow ۱ + a + ۱ - ۲a + ۱ = ۴ \Rightarrow -a + ۳ = ۴$$
$$\Rightarrow a = ۳ - ۴ = -۱ \Rightarrow a = -۱$$

۲ گزینه ۱

ضابطهٔ دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ به ما داده شده است و ضابطهٔ تابع $g^{-۱}of^{-۱}$ را می‌خواهند. برای این کار ابتدا ضابطهٔ دو تابع $f^{-۱}(x)$ و $g^{-۱}(x)$ را به دست می‌آوریم، سپس برای تعیین ضابطهٔ $g^{-۱}of^{-۱}$ یا همان $g^{-۱}(f^{-۱}(x))$ در ضابطهٔ $g^{-۱}(x)$ به‌جای متغیر x، ضابطهٔ $f^{-۱}(x)$ را قرار می‌دهیم:

$$f(x) = ۱ + \sqrt{x} \Rightarrow y = ۱ + \sqrt{x} \Rightarrow y - ۱ = \sqrt{x} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} (y-۱)^۲ = x$$
$$\Rightarrow f^{-۱}(x) = (x-۱)^۲ \;;\; x > ۱$$
$$g(x) = x^۲ \Rightarrow y = x^۲ \Rightarrow x = \sqrt{y} \Rightarrow g^{-۱}(x) = \sqrt{x} \;;\; x > ۰$$

بنابراین ضابطهٔ تابع $g^{-۱}of^{-۱}(x)$ برابر است با:

$$g^{-۱}of^{-۱}(x) = g^{-۱}(f^{-۱}(x)) = \sqrt{f^{-۱}(x)} = \sqrt{(x-۱)^۲} = |x-۱|$$
$$\xrightarrow[x-۱>۰]{x>۱} g^{-۱}of^{-۱}(x) = x - ۱$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۱

۳ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۲

گام اول

معکوس تابع نمایی $y = ۲^x$، تابع لگاریتمی $y = \log_۲^x$ است. نقطهٔ برخورد این دو تابع با محورها را A و B نام گذاری کرده و فاصلهٔ دو نقطه را محاسبه می کنیم.

گام دوم

روش اول:

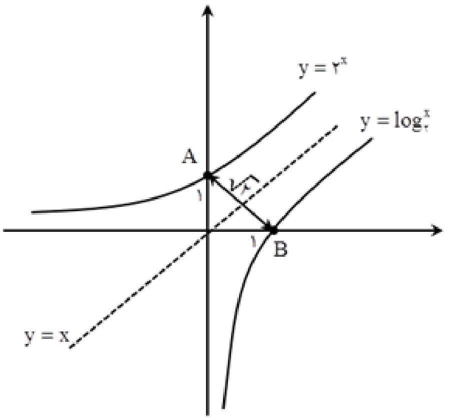
$$y = ۲^x \xrightarrow[x=۰]{\text{برخورد با محور } y} y = ۲^۰ = ۱$$

پس نقطهٔ برخورد تابع $y = ۲^x$ با محور yها نقطهٔ $A(۰, ۱)$ است. نقطهٔ برخورد تابع معکوس یا همان $y = \log_۲^x$ با محور xها نقطهٔ $B(۱, ۰)$ است. فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B برابر است با:

$$AB = \sqrt{(۱-۰)^۲ + (۰-۱)^۲} = \sqrt{۱+۱} = \sqrt{۲}$$

روش دوم:

با توجه به اینکه معکوس هر نمودار را می‌توانیم با رسم تقارن آن نسبت به خط $y = x$ به دست آوریم، نمودار تابع $y = ۲^x$ را رسم کرده و با ترسیم وارون آن نسبت به خط $y = x$ نمودار تابع معکوس را به‌دست می‌آوریم.



۴

گزینه ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۲

گام اول

اگر ضابطهٔ اول که بر روی ورودی اعمال می شود را $f(x)$ و ضابطهٔ دوم را $g(x)$ نام گذاری کنیم، شکل داده شده به صورت زیر در می آید:

$$\underbrace{\text{ورودی}}_{x} \longrightarrow \underbrace{۲x+A}_{f(x)} \longrightarrow \underbrace{\sqrt{x}-۲x-۴}_{g(x)} \longrightarrow \underbrace{\text{خروجی}}_{g(f(x))}$$

ورودی یا همان x برابر ۲ و خروجی یا همان $g(f(x))$ برابر ۵- است. با توجه به ضابطهٔ دو تابع $f(x)$ و $g(x)$، ضابطهٔ تابع $g(f(x))$ را تشکیل می دهیم و مقدار A را محاسبه می کنیم.

گام دوم

به ازای $x=۲$، معادلهٔ $gof(x)=-۵$ برقرار است. A را حساب می کنیم:

$$f(x)=۲x+A\ ,\ g(x)=\sqrt{x}-۲x-۴$$

$$gof(x)=g(f(x))=\sqrt{۲x+A}-۲(۲x+A)-۴=-۵\xrightarrow{x=۲}$$

$$\sqrt{۴+A}-۲(۴+A)-۴=-۵\xrightarrow{\sqrt{۴+A}=t}t-۲t^۲+۱=۰$$

$$\Rightarrow ۲t^۲-t-۱=۰\Rightarrow(۲t+۱)(t-۱)=۰\Rightarrow\begin{cases}t=-\frac{۱}{۲}\ \ \text{غ ق ق}\\ t=۱\Rightarrow ۴+A=۱\Rightarrow A=-۳\end{cases}$$

۵

گزینه ۳

با توجه به اعضای مجموعهٔ A، ابتدا تابع $f(x)$ را با مشخص کردن زوج مرتب های آن تشکیل می دهیم. برای تشکیل تابع $f(f(x))$ یا همان $fof(x)$، مقدار تابع fof را در نقاط دامنه اش حساب می کنیم. دقت کنید که اگر $x\in D_f$ باشد اما $f(x)\notin D_f$، آن گاه x در ترکیب شرکت نمی کند. حالا تابع $f(x)$ را با زوج مرتب هایش تشکیل می دهیم:

$$\left.\begin{array}{c}f=\{(x,۲x-۱),x\in A\}\\ A=\{۱,۲,۳,۴,۵\}\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}x=۱\Rightarrow ۲x-۱=۲-۱=۱\\ x=۲\Rightarrow ۲x-۱=۴-۱=۳\\ x=۳\Rightarrow ۲x-۱=۶-۱=۵\\ x=۴\Rightarrow ۲x-۱=۸-۱=۷\\ x=۵\Rightarrow ۲x-۱=۱۰-۱=۹\end{cases}$$

$$\Rightarrow f=\{(۱,۱),(۲,۳),(۳,۵),(۴,۷),(۵,۹)\}$$

تابع $f(f(x))$ را با رعایت شرط گفته شده تشکیل می دهیم:

$$x=۱:f(f(۱))=f(۱)=۱\quad,\quad x=۲:f(f(۲))=f(۳)=۵$$

$$x=۳:f(f(۳))=f(۵)=۹\quad,\quad x=۴:f(f(۴))=f(۷)\rightarrow\text{تعریف نشده}$$

$$x=۵:f(f(۵))=f(۹)\rightarrow\text{تعریف نشده}$$

$$fof(x)=f(f(x))=\{(۱,۱),(۲,۵),(۳,۹)\}$$

بنابراین تابع $f(f(x))$ دارای ۳ عضو دوتایی (زوج مرتب) است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

۶ گزینه ۴

ابتدا ضابطهٔ $f(x)$ را برای دو حالت $x \geq ۰$ و $x < ۰$ تعیین می کنیم. برای هر کدام از این دو حالت ضابطهٔ $fof(x)$ را به دست می آوریم.

$$f(x) = |x| - x \Rightarrow \begin{cases} x \geq ۰ \Rightarrow |x| = x \Rightarrow f(x) = x - x = ۰ \\ x < ۰ \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow f(x) = -x - x = -۲x \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} ۰ & ; x \geq ۰ \\ -۲x & ; x < ۰ \end{cases}$$

$$۱)\ x \geq ۰ : f(x) = ۰ \Rightarrow fof(x) = f(f(x)) = f(۰) = ۰$$

$$۲)\ x < ۰ : f(x) = -۲x \Rightarrow fof(x) = f(f(x)) = f(-۲x)$$

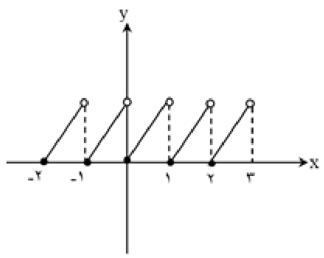
$$\xrightarrow{x<۰ \Rightarrow -۲x>۰} f(-۲x) = ۰ \Rightarrow fof(x) = ۰$$

بنابراین تابع $fof(x)$ به ازای تمام مقادیر x برابر صفر می شود.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

۷ گزینه ۴

برای رسم نمودار تابع، محدودهٔ اولیهٔ x را به پنج زیربازهٔ زیر تقسیم می کنیم:



$$-۲ \leq x < -۱, -۱ \leq x < ۰, ۰ \leq x < ۱, ۱ \leq x < ۲, ۲ \leq x < ۳$$

$$-۲ \leq x < -۱ \Rightarrow [x] = -۲ \Rightarrow y = x - (-۲) = x + ۲$$

$$-۱ \leq x < ۰ \Rightarrow [x] = -۱ \Rightarrow y = x - (-۱) = x + ۱$$

$$۰ \leq x < ۱ \Rightarrow [x] = ۰ \Rightarrow y = x$$

$$۱ \leq x < ۲ \Rightarrow [x] = ۱ \Rightarrow y = x - (۱) = x - ۱$$

$$۲ \leq x < ۳ \Rightarrow [x] = ۲ \Rightarrow y = x - (۲) = x - ۲$$

در این بازه تابع از پنج پاره خط به اندازهٔ $\sqrt{۲}$ تشکیل‌شده است. پس دوتایی مرتب (n , L) به صورت $(۵ , \sqrt{۲})$ می شود.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

۸ گزینه ۳

دامنه تابع معکوس ($D_{f^{-1}}$) همان برد تابع اصلی (R_f) است. بنابراین برای تعیین دامنه تعریف تابع معکوس ، باید برد تابع اصلی را به دست آوریم. بعد از تعیین $D_{f^{-1}}$، ضابطهٔ تابع معکوس را مشخص می کنیم. برای یافتن ضابطهٔ تابع معکوس از رابطهٔ $y = f(x)$، x را برحسب y به دست آورده و در نهایت جای x و y را عوض کنیم بنابراین ضابطهٔ تابع معکوس به صورت $y = f^{-1}(x)$ به دست می آید.

$$x^۲ + ۱ > x^۲ \Rightarrow \sqrt{x^۲ + ۱} > \sqrt{x^۲} \Rightarrow \sqrt{x^۲ + ۱} > |x|$$
$$\xrightarrow{|x|=\pm x} \sqrt{x^۲ + ۱} > -x \Rightarrow \sqrt{x^۲ + ۱} + x > ۰ \xrightarrow{f(x)=x+\sqrt{x^۲+۱}} f(x) > ۰$$
$$\Rightarrow R_f = (۰, +\infty) \Rightarrow D_{f^{-1}} = (۰, +\infty)$$

دامنهٔ تابع معکوس به صورت $x > ۰$ در می آید.

$$f(x) = x + \sqrt{x^۲ + ۱} \Rightarrow y = x + \sqrt{x^۲ + ۱} \Rightarrow y - x = \sqrt{x^۲ + ۱}$$
$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} (y - x)^۲ = x^۲ + ۱ \Rightarrow y^۲ - ۲xy + x^۲ = x^۲ + ۱ \Rightarrow y^۲ - ۲xy = ۱$$
$$\Rightarrow ۲xy = y^۲ - ۱ \Rightarrow x = \frac{y^۲ - ۱}{۲y} \Rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{x^۲ - ۱}{۲x}$$
$$\Rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{۱}{۲}(x - \frac{۱}{x}), x > ۰$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۳

۹ گزینه ۴

اصلاً نیازی به تعیین ضابطهٔ $g(x)$ نداریم. با داشتن ضابطهٔ دو تابع $f(x)$ و $f(g(x))$، ضابطهٔ تابع $f(g(x))$ را بر حسب $g(x)$ تشکیل می دهیم. سپس x را برابر ۱ قرار داده و مقدار $g(۱)$ را محاسبه می کنیم.

$$f(x) = \frac{x + ۱}{x - ۱}\ ,\ fog(x) = f(g(x)) = \frac{x^۲ + ۲}{x^۲ + ۱} \Rightarrow \frac{g(x) + ۱}{g(x) - ۱} = \frac{x^۲ + ۲}{x^۲ + ۱}$$
$$\xrightarrow{x=۱} \frac{g(۱) + ۱}{g(۱) - ۱} = \frac{۱ + ۲}{۱ + ۱} \Rightarrow \frac{g(۱) + ۱}{g(۱) - ۱} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow ۲g(۱) + ۲ = ۳g(۱) - ۳$$
$$\Rightarrow g(۱) = ۳ + ۲ = ۵ \Rightarrow g(۱) = ۵$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۴

۱۰ گزینه ۱

با توجه به ضابطه های $f(x)$ و $f(g(x))$، تابع $f(g(x))$ را بر حسب تابع $g(x)$ تشکیل می دهیم. سپس بدون این که ضابطهٔ تابع $g(x)$ را به صورت مستقل تعیین کنیم، x را برابر ۲- در نظر گرفته و مقدار $g(-۲)$ را حساب می کنیم.

$$f(x) = ۲x^۲ + ۴\ ,\ f(g(x)) = ۴x^۲ + ۶x \Rightarrow ۲(g(x))^۲ + ۴ = ۴x^۲ + ۶x$$
$$\xrightarrow{x=-۲} ۲(g(-۲))^۲ + ۴ = ۴(-۲)^۲ + ۶(-۲) = ۴(۴) + ۶(-۲) = ۱۶ - ۱۲ = ۴$$
$$\Rightarrow ۲(g(-۲))^۲ + ۴ = ۴ \Rightarrow ۲(g(-۲))^۲ = ۰ \Rightarrow (g(-۲))^۲ = ۰ \Rightarrow g(-۲) = ۰$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

۱۱ گزینه ۱

ضابطهٔ $f(x)$ و ضابطهٔ $gof(x)$ یا همان $g(f(x))$ به ما داده شده است و ضابطهٔ $g(x)$ را می خواهد. در این حالت برای پاسخ گویی به تست از تغییر متغیری به صورت زیر استفاده می کنیم. $f(x)$ را برابر t در نظر گرفته، x را بر حسب t به دست آورده و سپس $g(t)$ را بر حسب t تشکیل می دهیم. در نهایت برای تعیین ضابطهٔ $g(x)$، x را به جای t جای گزین می کنیم.

$$gof(x) = \frac{۱}{۲}x \ , \ f(x) = \frac{x}{۲-x} \Rightarrow g(f(x)) = g(\frac{x}{۲-x}) = \frac{۱}{۲}x$$

طبق توضیحات گفته شده $\frac{x}{۲-x}$ را برابر t فرض می کنیم:

$$\frac{x}{۲-x} = t \Rightarrow x = ۲t - tx \Rightarrow x + tx = ۲t \Rightarrow x(۱+t) = ۲t \Rightarrow x = \frac{۲t}{۱+t}$$

پس $g(t)$ برابر است با:

$$g(t) = \frac{۱}{۲}(\frac{۲t}{۱+t}) = \frac{t}{۱+t} \Rightarrow g(x) = \frac{x}{۱+x}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۴

۱۲ گزینه ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵

گام اول

در تابع f و g به‌صورت مجموعه‌ای از زوج مرتب‌ها به ما داده شده و تابع $gof^{-۱}$ را می‌خواهند، پس ابتدا باید تابع $f^{-۱}$ را با زوج مرتب‌هایش تشکیل دهیم. برای این کار کافی است در تمامی زوج مرتب‌های تابع f، جای مؤلفه های اول و دوم را باهم عوض کنیم. پس باتوجه‌به دامنه تعریف تابع $f^{-۱}(x)$ و زوج مرتب‌های تابع $g(x)$ تابع $gof^{-۱}$ را به دست می‌آوریم.

گام دوم

برای حل تست اول باید $f^{-۱}$ را مشخص کنیم:

$$f = \{(۱,۲),(۲,۵),(۰,۳),(۴,-۱)\} \Rightarrow f^{-۱} = \{(۲,۱),(۵,۲),(۳,۰),(-۱,۴)\}$$
$$\Rightarrow D_{f^{-۱}} = \{۲,۵,۳,-۱\}$$

حالا بررسی می‌کنیم برای هریک از اعضای $D_{f^{-۱}}$، تابع $gof^{-۱}$ تعریف می‌شود یا خیر:

$x = ۲ \Rightarrow f^{-۱}(۲) = ۱ \Rightarrow g(f^{-۱}(۲)) = g(۱) \rightarrow$ تعریف نمی شود

$x = ۵ \Rightarrow f^{-۱}(۵) = ۲ \Rightarrow g(f^{-۱}(۵)) = g(۲) = ۳ \Rightarrow (۵,۳) \in gof^{-۱}$

$x = ۳ \Rightarrow f^{-۱}(۳) = ۰ \Rightarrow g(f^{-۱}(۳)) = g(۰) \rightarrow$ تعریف نمی شود

$x = -۱ \Rightarrow f^{-۱}(-۱) = ۴ \Rightarrow g(f^{-۱}(-۱)) = g(۴) = ۱ \Rightarrow (-۱,۱) \in gof^{-۱}$

بنابراین تابع $gof^{-۱}$ به‌صورت $\{(۵,۳),(-۱,۱)\}$ درمی‌آید.

۱۳ گزینه ۱

ابتدا با توجه به ضابطهٔ تابع $f(x)$، ضابطهٔ دو تابع $f(۱+x)$ و $f(۱-x)$ را تشکیل می دهیم. یعنی یک بار در ضابطهٔ $f(x)$ به جای متغیر x، متغیر $(۱+x)$ و یک بار متغیر $(۱-x)$ را قرار داده و ضابطهٔ هر یک را تعیین می کنیم.

$$f(۱+x) = (۱+x)^۲(۲-۱-x)^۲ = (۱+x)^۲(۱-x)^۲ = [(۱+x)(۱-x)]^۲ = (۱-x^۲)^۲$$
$$f(۱-x) = (۱-x)^۲(۲-۱+x)^۲ = (۱-x)^۲(۱+x)^۲ = [(۱-x)(۱+x)]^۲ = (۱-x^۲)^۲$$

با داشتن ضوابط دو تابع $f(۱+x)$ و $f(۱-x)$، حاصل $f(۱+x) - f(۱-x)$ را به دست می آوریم:

$$f(۱+x) - f(۱-x) = (۱-x^۲)^۲ - (۱-x^۲)^۲ = ۰$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵

۱۴

گزینه ۲

شرط تابع بودن یک رابطه این است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی نباید مؤلفهٔ اول برابر داشته باشند و اگر مؤلفهٔ اول آن‌ها باهم برابر بود مؤلفه‌های دوم هم باهم برابر باشند.

$$A = \{(۳, m^۲), (۲, ۱), (-۳, m), (-۲, m), (۳, m+۲), (m, ۴)\}$$

$$(۳, m^۲), (۳, m+۲) \in A \xrightarrow{\text{شرط تابع بودن}} m^۲ = m + ۲ \Rightarrow m^۲ - m - ۲ = ۰$$

$$\Rightarrow (m-۲)(m+۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} m = ۲ \\ m = -۱ \end{cases}$$

مقادیر به‌دست‌آمده برای m را بررسی می‌کنیم تا مطمئن شویم رابطه به تابع تبدیل شده است.

$$m = ۲ \Rightarrow A = \{(۳, ۴), (۲, ۱), (-۳, ۲), (-۲, ۲), (۳, ۴), (۲, ۴)\}$$

به ازای $m = ۲$ دو زوج مرتب $(۲, ۱)$ و $(۲, ۴)$ در رابطه وجود دارد، پس تابع نیست.

$$m = -۱ \Rightarrow A = \{(۳, ۱), (۲, ۱), (-۳, -۱), (-۲, -۱), (۳, ۱), (-۱, ۴)\}$$

شرایط تابع بودن برقرار است، پس $m = -۱$ تنها مقدار قابل‌قبول برای m است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

۱۵

گزینه ۱

اگر دو تابع f و g که به صورت مجموعه‌ای از زوج مرتب‌ها بیان شده‌اند را داشته باشیم، پس $f \cap g$ زیرمجموعه ای از این توابع خواهد بود، بنابراین تابع است. همچنین $f - g$ نیز تابع خواهد بود. ترکیب دو تابع f و g یعنی fog نیز تابع است.
رابطهٔ $f \cup g$ ممکن است تابع نباشد. به مثال زیر دقت کنید:

$f = \{(۲, ۳)\}$ تابع است

$g = \{(۲, ۴)\}$ تابع است

$f \cup g = \{(۲, ۳), (۲, ۴)\}$ تابع نیست

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۵

۱۶ گزینه ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۶

گام اول

به شکل ماشین داده‌شده خوب دقت کنید:

$$\text{ورودی} \longrightarrow ۲x - ۲ \longrightarrow \frac{x}{\sqrt{x}+۱} \longrightarrow \text{خروجی}$$

متغیر ورودی را x در نظر می‌گیریم. وارد دستگاهی می‌شود که این متغیر را دو برابر کرده و از آن دو واحد کم می‌کند. ما این دستگاه را $f(x)$ فرض می‌کنیم. دستگاه بعدی را هم $g(x)$ در نظر می‌گیریم. بنابراین شکل دستگاه را به‌صورت زیر تکمیل می‌کنیم:

$$\underbrace{\text{ورودی}}_{x} \longrightarrow \underbrace{۲x - ۲}_{f(x)} \longrightarrow \underbrace{\frac{x}{\sqrt{x}+۱}}_{g(x)} \longrightarrow \underbrace{\text{خروجی}}_{g(f(x))}$$

خروجی به ازای متغیر ورودی x برابر $\frac{۴}{۳}$ شده است، یعنی $g(f(x)) = \frac{۴}{۳}$ است.

گام دوم

حالا با داشتن $f(x)$ و $g(x)$ می‌توانیم $g(f(x))$ را تعیین کرده و درنهایت مقدار x را محاسبه کنیم:

$$f(x) = ۲x - ۲\ ,\ \ g(x) = \frac{x}{\sqrt{x}+۱}$$

$$g(f(x)) = \frac{f(x)}{\sqrt{f(x)}+۱} = \frac{۲x-۲}{\sqrt{۲x-۲}+۱} = \frac{۴}{۳} \Rightarrow ۳(۲x-۲) = ۴\sqrt{۲x-۲}+۴$$

$$\xrightarrow{\sqrt{۲x-۲}=t} ۳t^۲ = ۴t + ۴ \Rightarrow ۳t^۲ - ۴t - ۴ = ۰ \Rightarrow (۳t+۲)(t-۲) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = ۲ \Rightarrow \sqrt{۲x-۲} = ۲ \Rightarrow ۲x - ۲ = ۴ \Rightarrow ۲x = ۶ \Rightarrow x = ۳ \\ t = -\frac{۲}{۳} \Rightarrow \sqrt{۲x-۲} = -\frac{۲}{۳} \quad \text{غ.ق.ق} \end{cases}$$

بنابراین ورودی این ماشین $x = ۳$ به دست آمد.

۱۷ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

گام اول

ساده تر از این امکان ندارد. ضابطهٔ $f(x)$ به ما داده شده است. برای محاسبهٔ $f(۸)$ کافی است در ضابطهٔ داده شده به جای x عدد ۸ را قرار دهیم .

گام دوم

$$f(x) = ۳ + \sqrt{۲x} \Rightarrow f(۸) = ۳ + \sqrt{۲ \times ۸} = ۳ + \sqrt{۱۶} = ۳ + ۴ = ۷ \Rightarrow f(۸) = ۷$$

۱۸ گزینه ۴

یک تابع به صورت مجموعه ای از زوج مرتب‌ها نمایش داده شده است، برای این که تابع یک به یک شود، باید هیچ دو زوج مرتب متمایزی مؤلفهٔ دوم برابر نداشته باشند. اگر مؤلفه‌های دوم دو زوج مرتب با هم برابر بود باید مؤلفه های اول آن‌ها هم برابر باشد. هم چنین شرط تابع‌بودن در حل این گونه سؤال ها فراموش نشود. این که زوج مرتب‌ها نباید مؤلفهٔ اول تکراری داشته باشند و اگر تکراری بود باید مؤلفه های دوم هم برابر شود.

در رابطهٔ داده شده دو زوج مرتب $(۳,۲)$ و $(۳, a^۲ - a)$ مشاهده می شود. برای این که رابطه در وهلهٔ اول یک تابع باشد، باید مؤلفه های دوم با هم برابر باشند:

$$a^۲ - a = ۲ \Rightarrow a^۲ - a - ۲ = ۰ \Rightarrow (a-۲)(a+۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} a = ۲ \\ a = -۱ \end{cases}$$

حالا باید بررسی کنیم به ازای کدام یک از این مقادیر تابع یک به یک می شود:

$$a = -۱ \Rightarrow (-۱,۵) \in f \ , \ (-۱,۴) \in f \Rightarrow \text{تابع یک به یک نیست}$$

بنابراین فقط $a = ۲$ قابل قبول است. حالا مقدار b را به دست می آوریم:

$$(۳,۲) \in f \ , \ (b,۲) \in f \xrightarrow{\text{تابع f یک به یک است}} b = ۳$$

پس دوتایی (a,b) به صورت $(۲,۳)$ درمی آید.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۶

علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۴ ۱۴۰۱

۱۹ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

گام اول

با توجه به ضابطهٔ تابع که به صورت $y = ۲\left[\frac{x}{۲}\right] + ۱$ است، محدودهٔ اولیهٔ x را به زیربازه های زیر تقسیم کرده و در هر زیربازه مقدار y را تعیین می کنیم.

$$-۲ \leq x < ۰, ۰ \leq x < ۲, ۲ \leq x < ۴, ۴ \leq x < ۶$$

گام دوم

برای پاسخ گویی به تست نیازی به رسم نمودار تابع نیست. به تعداد ضابطه های به دست آمده، پاره خط در نمودار تابع وجود دارد.

$$-۲ \leq x < ۰ \Rightarrow -۱ \leq \frac{x}{۲} < ۰ \Rightarrow \left[\frac{x}{۲}\right] = -۱ \Rightarrow y = ۲(-۱) + ۱ = -۲ + ۱ = -۱$$
$$۰ \leq x < ۲ \Rightarrow ۰ \leq \frac{x}{۲} < ۱ \Rightarrow \left[\frac{x}{۲}\right] = ۰ \Rightarrow y = ۱$$
$$۲ \leq x < ۴ \Rightarrow ۱ \leq \frac{x}{۲} < ۲ \Rightarrow \left[\frac{x}{۲}\right] = ۱ \Rightarrow y = ۲(۱) + ۱ = ۲ + ۱ = ۳$$
$$۴ \leq x < ۶ \Rightarrow ۲ \leq \frac{x}{۲} < ۳ \Rightarrow \left[\frac{x}{۲}\right] = ۲ \Rightarrow y = ۲(۲) + ۱ = ۴ + ۱ = ۵$$

پس نمودار تابع از چهار پاره خط مساوی به طول ۲ تشکیل‌شده است.

۲۰ گزینه ۱

برای به دست آوردن برد تابع gof ابتدا باید ضابطهٔ آن را تشکیل دهیم.

$$f(x) = x - [x] \ , \ g(x) = \frac{۱-x}{x} \Rightarrow gof(x) = g(f(x)) = \frac{۱-f(x)}{f(x)}$$
$$= \frac{۱-x+[x]}{x-[x]} = \frac{۱}{x-[x]} - ۱$$

می‌دانیم $۰ \leq x - [x] < ۱$، ازطرفی $x - [x]$ نمی‌تواند برابر صفر باشد، زیرا مخرج کسر تعریف نمی‌شود، لذا:

$$۰ < x - [x] < ۱ \Rightarrow \frac{۱}{x-[x]} > ۱ \Rightarrow \frac{۱}{x-[x]} - ۱ > ۰$$
$$\Rightarrow (gof)(x) > ۰ \Rightarrow R_{gof} = (۰, +\infty)$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۶

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

۲۱ گزینه ۳

هریک از توابع $f+g$، f، fof، gof و fog را تعیین کرده و در مورد پیوستگی آن در $x=0$ بحث می‌کنیم.

بررسی گزینهٔ اول:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}-2x & ;x<0\\ 1+2x & ;x\geq 0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^-}(f+g)(x)=-\frac{1}{2}\ ,\ \lim_{x\to 0^+}(f+g)(x)=1$$

بنابراین تابع $f+g$ در $x=0$ ناپیوسته است.

بررسی گزینهٔ دوم:

$$fof(x)=f(f(x))=\begin{cases}-\frac{1}{2} & ;f(x)<0\\ 2f(x) & ;f(x)\geq 0\end{cases}=\begin{cases}-\frac{1}{2} & ;x<0\\ 4x & ;x\geq 0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^-}fof(x)=-\frac{1}{2}\ ,\ \lim_{x\to 0^+}fof(x)=0$$

بنابراین تابع fof در $x=0$ ناپیوسته است.

بررسی گزینهٔ سوم:

$$gof(x)=g(f(x))=\begin{cases}-2f(x) & ;f(x)<0\\ 1 & ;f(x)\geq 0\end{cases}$$
$$=\begin{cases}-2(-\frac{1}{2}) & ;x<0\\ 1 & ;x\geq 0\end{cases}=\begin{cases}1 & ;x<0\\ 1 & ;x\geq 0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^-}gof(x)=\lim_{x\to 0^+}gof(x)=gof(0)=1$$

پس تابع gof در $x=0$ پیوسته است.

بررسی گزینهٔ چهارم:

$$fog(x)=f(g(x))=\begin{cases}-\frac{1}{2} & ;g(x)<0\\ 2g(x) & ;g(x)\geq 0\end{cases}$$

با توجه به ضابطهٔ تابع $g(x)$ این تابع همواره نامنفی است، پس تابع fog برای ضابطهٔ بالا تشکیل نشده و داریم:

$$fog(x)=\begin{cases}-4x & ;x<0\\ 2 & ;x\geq 0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^-}fog(x)=0\ ,\ \lim_{x\to 0^+}fog(x)=2$$

بنابراین تابع fog در $x=0$ ناپیوسته است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۶

۲۲ گزینه ۴

$$\begin{cases}f(-2)=\left|(-2)^2-5\right|=|4-5|=|-1|=1\\ g(2)=\frac{2}{1+2^2}=\frac{2}{1+4}=\frac{2}{5}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1+f(-2)}{g(2)}=\frac{1+1}{\frac{2}{5}}=\frac{2}{\frac{2}{5}}=5$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۳۸۷

۲۳ گزینه ۱

طبق تعریف، دامنهٔ تابع gof از رابطهٔ زیر به دست می آید:

$$D_{gof} = \{x \in D_f | f(x) \in D_g\}$$

بنابراین لازم است برای حل تست دامنهٔ تعریف دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ تعیین شود، سپس با استفاده از تعریف گفته شده D_{gof} را مشخص کنیم.

$$f(x) = \sqrt{x+|x|} = \begin{cases} x \geq ۰ : |x| = x \Rightarrow f(x) = \sqrt{۲x} \\ x < ۰ : |x| = -x \Rightarrow f(x) = \sqrt{x-x} = ۰ \end{cases} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$g(x) = \frac{۱}{x^۲ - ۴x} = \frac{۱}{x(x-۴)} \Rightarrow x(x-۴) = ۰ \Rightarrow x = ۰, x = ۴$$

$$\Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{۰, ۴\}$$

حالا دامنهٔ تعریف تابع gof را به دست می آوریم:

$$D_{gof} = \{x \in D_f | f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} | \sqrt{x+|x|} \in \mathbb{R} - \{۰, ۴\}\}$$

$$\sqrt{x+|x|} = ۴ \xrightarrow{x \geq ۰} \sqrt{۲x} = ۴ \xrightarrow{\text{به توان ۲}} ۲x = ۱۶ \Rightarrow x = ۸$$

$$\sqrt{x+|x|} = ۰ \Rightarrow x \in (-\infty, ۰]$$

پس دامنهٔ gof برابر است با: $D_{gof} = (۰, ۸) \cup (۸, +\infty)$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

۲۴ گزینه ۲

با توجه به ضابطهٔ $f(x)$، ابتدا $f(-۱۴۴)$ و سپس $f(f(-۱۴۴))$ را حساب می کنیم.

$$f(x) = \sqrt{x+۲|x|} \Rightarrow f(-۱۴۴) = \sqrt{-۱۴۴+۲|-۱۴۴|}$$
$$= \sqrt{-۱۴۴+۲۸۸} = \sqrt{۱۴۴} = ۱۲ \Rightarrow f(-۱۴۴) = ۱۲$$

حالا $f(۱۲)$را محاسبه می کنیم:

$$f(f(-۱۴۴)) = f(۱۲) = \sqrt{۱۲+۲|۱۲|} = \sqrt{۱۲+۲۴} = \sqrt{۳۶} = ۶$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

۲۵ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

گام اول

با توجه به‌صورت سؤال $[x^۲+x] = -۱$ بوده و با توجه به ویژگی های جزء صحیح محدودهٔ قابل‌قبول برای $x^۲+x$ به صورت $-۱ \leq x^۲+x < ۰$ است.

گام دوم

$$[x^۲+x] = -۱ \Rightarrow -۱ \leq x^۲+x < ۰$$

هر یک از طرفین نامعادله را به صورت جداگانه بررسی می کنیم.

$$۱)\ \ x^۲+x \geq -۱ \Rightarrow x^۲+x+۱ \geq ۰ \Rightarrow \begin{cases} \Delta = ۱-۴ = -۳ < ۰ \\ x^۲ \text{ ضریب } = ۱ > ۰ \end{cases}$$

با توجه به این که $\Delta < ۰$ و ضریب $x^۲$ مثبت است، عبارت $x^۲+x+۱$ همواره مثبت و نامعادله همواره برقرار است.

$$۲)\ \ x^۲+x < ۰ \Rightarrow x(x+۱) < ۰ \Rightarrow -۱ < x < ۰$$

پس $-۱ < x < ۰$ جواب نامعادله است و داریم:

$$-۱ < x < ۰ \Rightarrow ۰ < x^{۲۰} < ۱ \Rightarrow [x^{۲۰}] = ۰$$

۲۶ گزینه ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۸

گام اول

دقت کنید که x و y فقط باید مقادیر صحیح بپذیرند.

گام دوم

با توجه به این که $|x|$ و $|y|$ مقادیر نامنفی هستند، حالت های زیر برای $|x|$ و $|y|$ می تواند رخ دهد:

$$
\begin{aligned}
&۱)|x| = ۲\ ,\ \ |y| = ۰ \Rightarrow x = \pm ۲\ ,\ y = ۰ \Rightarrow (۲, ۰), (-۲, ۰) \in R\\
&۲)|x| = ۰\ ,\ \ |y| = ۲ \Rightarrow x = ۰\ ,\ y = \pm ۲ \Rightarrow (۰, ۲), (۰, -۲) \in R\\
&۳)|x| = ۱\ ,\ \ |y| = ۱ \Rightarrow x = \pm ۱\ ,\ y = \pm ۱ \Rightarrow (۱, ۱), (۱, -۱), (-۱, ۱), (-۱, -۱) \in R
\end{aligned}
$$

بنابراین رابطهٔ R با اعضایش به صورت زیر در می آید:

$$R = \{(۲, ۰), (۰, ۲), (-۲, ۰), (۰, -۲), (۱, ۱), (۱, -۱), (-۱, ۱), (-۱, -۱)\}$$

پس رابطهٔ R دارای ۸ عضو به صورت زوج مرتب است.

۲۷ گزینه ۲

$$
\begin{aligned}
&f(۲) = \sqrt{-(۲)^۲ + ۴(۲) + ۱۲} = \sqrt{-۴ + ۸ + ۱۲} = \sqrt{۱۶} = ۴\\
&f(۲ + \sqrt{۷}) = \sqrt{-\underbrace{(۲ + \sqrt{۷})^۲}_{\text{اتحاد مربع}} + ۴(۲ + \sqrt{۷}) + ۱۲}\\
&= \sqrt{-(۴ + ۴\sqrt{۷} + ۷) + ۸ + ۴\sqrt{۷} + ۱۲} = \sqrt{۹} = ۳\\
&f(۲ + \sqrt{۷}) - f(۲) = ۳ - ۴ = -۱
\end{aligned}
$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۳۸۸

۲۸ گزینه ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۸

گام اول

از ویژگی های تابع وارون (معکوس) برای حل تست استفاده می کنیم. اگر نقطهٔ $A(\alpha, \beta)$ در ضابطهٔ تابع f صدق کند، نقطهٔ $B(\beta, \alpha)$ در ضابطهٔ تابع معکوس یا همان f^{-1} صدق می کند. سؤال از ما $f^{-1}(۴)$ را می خواهد. فرض کنیم مقدار $f^{-1}(۴)$ برابر α شود، در این صورت $(۴, \alpha)$ در ضابطهٔ f^{-1} صدق می کند پس نقطه ای به مختصات $(\alpha, ۴)$ باید در ضابطهٔ تابع $f(x)$ صدق کند. این نقطه را در ضابطهٔ تابع اصلی جای گذاری کرده و مقدار α را محاسبه می کنیم.

گام دوم

معادلهٔ $f(\alpha) = ۴$ را حل کرده و مقدار α را به دست می آوریم:

$$f(x) = -x + \sqrt{-۲x} \xrightarrow{f(\alpha)=۴} ۴ = -\alpha + \sqrt{-۲\alpha} \Rightarrow \sqrt{-۲\alpha} = \alpha + ۴$$

عبارت زیر رادیکال با فرجهٔ زوج باید نامنفی باشد پس داریم:

$$-۲\alpha \geq ۰ \Rightarrow \alpha \leq ۰\ ,\ \ \alpha + ۴ \geq ۰ \Rightarrow \alpha \geq -۴$$

پس $\alpha \in [-۴, ۰]$. حالا طرفین تساوی بالا را به توان ۲ می رسانیم:

$$
\begin{aligned}
&-۲\alpha = (\alpha + ۴)^۲ \Rightarrow -۲\alpha = \alpha^۲ + ۸\alpha + ۱۶ \Rightarrow \alpha^۲ + ۱۰\alpha + ۱۶ = ۰\\
&\Rightarrow (\alpha + ۸)(\alpha + ۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -۲ \\ \alpha = -۸ \end{cases}
\end{aligned}
$$

باتوجه‌به اینکه $\alpha \in [-۴, ۰]$ است، فقط $\alpha = -۲$ قابل قبول خواهد بود.

۲۹

گزینه ۱

ابتدا $f(-۱)$ و سپس با داشتن مقدار آن $f(\sqrt{۲})$ را محاسبه می‌کنیم.

$$f(x)=\sqrt{۲-x-x^۲}\Rightarrow f(-۱)=\sqrt{۲-(-۱)-(-۱)^۲}=\sqrt{۲+۱-۱}=\sqrt{۲}$$

برای رسیدن به جواب تست باید حاصل $f(\sqrt{۲})$ را محاسبه کنیم:

$$f(f(-۱))=f(\sqrt{۲})=\sqrt{۲-\sqrt{۲}-(\sqrt{۲})^۲}=\sqrt{۲-\sqrt{۲}-۲}=\sqrt{-\sqrt{۲}}$$

می‌دانیم عبارت زیر رادیکال با فرجهٔ زوج نباید منفی باشد، پس حاصل $f(f(-۱))$ تعریف‌نشده است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

۳۰

گزینه ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۸

گام اول

به شرط‌های اشاره شده در سؤال خوب دقت کنید. هر دو مقدار x و y باید عضو اعداد طبیعی باشند. حالت‌هایی که $۲x+y\le ۷$ می شود را تعیین می‌کنیم.

گام دوم

برای حل مرتب مسأله به x از یک مقدار می‌دهیم و مقادیر قابل‌قبول برای y را مشخص می‌کنیم.

$$۱)\ \ x=۱\Rightarrow ۲x=۲\xrightarrow{۲x+y\le ۷}۲+y\le ۷\Rightarrow y\le ۵\xrightarrow{y\in N}y=۱,۲,۳,۴,۵$$

در این حالت ۵ زوج مرتب زیر ویژگی موردنظر را دارند:

$$(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۱,۴),(۱,۵)$$

$$۲)x=۲\Rightarrow ۲x=۴\xrightarrow{۲x+y\le ۷}۴+y\le ۷\Rightarrow y\le ۳$$
$$\xrightarrow{y\in N}y=۱,۲,۳\Rightarrow (۲,۱),(۲,۲),(۲,۳)\in R$$
$$۳)x=۳\Rightarrow ۲x=۶\xrightarrow{۲x+y\le ۷}۶+y\le ۷\Rightarrow y\le ۱\xrightarrow{y\in N}y=۱$$

در این حالت تنها زوج مرتب $(۳,۱)$ عضو رابطهٔ R است.
به ازای مقادیر $x\ge ۴$، هیچ مقدار طبیعی برای y یافت نمی‌شود. بنابراین رابطهٔ R با زوج مرتب‌های تشکیل‌دهندهٔ آن به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$R=\{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۱,۴),(۱,۵),(۲,۱),(۲,۲),(۲,۳),(۳,۱)\}$$

پس مجموعهٔ R دارای ۹ عضو به‌صورت زوج مرتب است.

۳۱

گزینه ۱

اگر $x^۲+x<۰$ باشد، $-۱<x<۰$ خواهد بود، بنابراین:

$$-۱<x<۰\Rightarrow [x]=-۱$$
$$-۱<x<۰\Rightarrow ۰<x^۲<۱\Rightarrow [x^۲]=۰$$
$$-۱<x<۰\Rightarrow -۱<x^۳<۰\Rightarrow [x^۳]=-۱$$
$$-۱<x<۰\Rightarrow ۰<x^۴<۱\Rightarrow [x^۴]=۰$$
$$\Rightarrow [x]+[x^۲]+[x^۳]+[x^۴]=-۱+۰-۱+۰=-۲$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۸ ۱۳۹۸
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

۳۲ گزینه ۳

مقدار $[x]+[-x]$ برای اعداد صحیح و غیرصحیح متفاوت است. بنابراین حواستان باشد که برای $f(x)$ دو مقدار به دست می آید، یک مقدار به ازای $x\in\mathbb{Z}$ است و مقدار دیگر به ازای $x\notin\mathbb{Z}$. یعنی:

$$f(x)=[x]+[-x]=\begin{cases}0 & ;x\in\mathbb{Z}\\ -1 & ;x\notin\mathbb{Z}\ (x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z})\end{cases}$$

ضابطهٔ $g(f(x))$ را برای هر یک از این حالت ها تعیین می کنیم:

$$x\in\mathbb{Z}\Rightarrow f(x)=0\Rightarrow g(f(x))=g(0)\xrightarrow{g(x)=x^2+x-2}g(0)=0+0-2=-2$$

بنابراین به ازای $x\in\mathbb{Z}$ رابطهٔ $g(f(x))=-2$ برقرار است.

$$x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}\Rightarrow f(x)=-1\Rightarrow g(f(x))=g(-1)$$
$$\xrightarrow{g(x)=x^2+x-2}g(-1)=(-1)^2+(-1)-2=1-1-2=-2\Rightarrow g(f(x))=-2$$

پس رابطهٔ $g(f(x))=-2$ به ازای تمام xهای صحیح و غیرصحیح یعنی به ازای $\mathbb{R}$ برقرار است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

۳۳ گزینه ۱

در تست حاصل مقادیری از دو تابع fog و gof از ما خواسته شده است. بنابراین با توجه به دو ضابطهٔ $f(x)$ و $g(x)$، ابتدا ضابطهٔ توابع $fog(x)$ و $gof(x)$ را تعیین کرده، سپس حاصل عبارت داده شده را محاسبه می کنیم.

$$f(x)=|x|\ ,\ g(x)=x^2+2x+1=(x+1)^2$$
$$(fog)(x)=f(g(x))=|(x+1)^2|\xrightarrow{(x+1)^2\geq 0}(fog)(x)=(x+1)^2$$
$$(gof)(x)=g(f(x))=(|x|+1)^2$$

$$(fog)(1-\sqrt{2})-(gof)(1-\sqrt{2})=(1-\sqrt{2}+1)^2-(|1-\sqrt{2}|+1)^2=$$
$$(2-\sqrt{2})^2-(\sqrt{2}-1+1)^2=4-4\sqrt{2}+2-(\sqrt{2})^2=6-4\sqrt{2}-2=4-4\sqrt{2}=4(1-\sqrt{2})$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۹

۳۴ گزینه ۱

در سه مرحله مقدار $f(2x+1)+\frac{1}{3}f(0)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(0)=\frac{0^2+3}{0^2-1}=\frac{3}{-1}=-3$$
$$f(2x+1)=\frac{(2x+1)^2+3}{(2x+1)^2-1}=\frac{(4x^2+4x+1)+3}{(4x^2+4x+1)-1}$$
$$=\frac{4x^2+4x+4}{4x^2+4x}=\frac{4(x^2+x+1)}{4(x^2+x)}=\frac{x^2+x+1}{x^2+x}$$
$$f(2x+1)+\frac{1}{3}f(0)=\frac{x^2+x+1}{x^2+x}+\frac{1}{3}(-3)$$
$$=\frac{x^2+x+1}{x^2+x}-1=\frac{x^2+x+1-(x^2+x)}{x^2+x}=\frac{1}{x^2+x}$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۳۸۹

۳۵ گزینه ۴

راه‌حل اول: ابتدا وارون تابع $g(x)$ را بر حسب وارون تابع $f(x)$ تعیین کرده، سپس مقدار $g^{-1}(۱۶)$ را محاسبه می کنیم. تابع $g(x)$ را برابر y در نظر می گیریم. داریم:

$$g(x) = f(۳x - ۴) \Rightarrow y = f(۳x - ۴)$$

اگر تساوی $g(x) = y$ را داشته باشیم، می توان نتیجه گرفت $g^{-1}(y) = x$ است. با استفاده از همین نتیجه و وارون کردن دو طرف تساوی ضابطهٔ تابع $g^{-1}(x)$ را به دست می آوریم:

$$y = f(۳x - ۴) \Rightarrow f^{-1}(y) = f^{-1}(f(۳x - ۴)) = f^{-1}(y) = ۳x - ۴$$
$$\Rightarrow ۳x = f^{-1}(y) + ۴ \Rightarrow x = \frac{f^{-1}(y) + ۴}{۳} \Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{f^{-1}(x) + ۴}{۳}$$

حالا برای به دست آوردن مقدار $g^{-1}(۱۶)$ ابتدا مقدار $f^{-1}(۱۶)$ را حساب می کنیم:

$$f^{-1}(x) = x + \sqrt{x} \xrightarrow{x=۱۶} f^{-1}(۱۶) = ۱۶ + \sqrt{۱۶} = ۱۶ + ۴ = ۲۰$$
$$g^{-1}(۱۶) = \frac{۲۰ + ۴}{۳} = \frac{۲۴}{۳} = ۸$$

راه‌حل دوم: فرض می‌کنیم $g^{-1}(۱۶) = a$، پس داریم: $g(a) = ۱۶$

$$g(x) = f(۳x - ۴) \Rightarrow g(a) = f(۳a - ۴) = ۱۶ \Rightarrow f^{-1}(۱۶) = ۳a - ۴$$

$$f^{-1}(۱۶) = ۱۶ + \sqrt{۱۶} = ۲۰ = ۳a - ۴ \Rightarrow a = \frac{۲۴}{۳} = ۸$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

۳۶ گزینه ۳

$$f(x^۲) - ۲f(x) + ۱ = \frac{x^۲}{x^۲ - ۱} - \frac{۲x}{x - ۱} + ۱$$
$$= \frac{x^۲ - ۲x(x + ۱) + x^۲ - ۱}{x^۲ - ۱} = \frac{-۲x - ۱}{x^۲ - ۱} = \frac{۲x + ۱}{۱ - x^۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۹

۳۷ گزینه ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۹

گام اول

ابتدا با استفاده از ضابطهٔ تابع $f^{-1}(x)$، ضابطهٔ $f(x)$ را به دست می آوریم. سپس ضابطهٔ $g(x)$ را تعیین می کنیم و در نهایت برای این که مقدار $g^{-1}(۶)$ را محاسبه کنیم، کافی است $g(x)$ را برابر ۶ قرار داده و مقدار x را حساب کنیم.

گام دوم

توضیحات گفته شده را مرحله به مرحله پیاده می کنیم:

$$f^{-1}(x) = \sqrt[۳]{۲x} \Rightarrow y = \sqrt[۳]{۲x} \xrightarrow{\text{به توان ۳}} y^۳ = ۲x \Rightarrow x = \frac{y^۳}{۲} \Rightarrow f(x) = \frac{x^۳}{۲}$$
$$g(x) = f(x) + \sqrt{f(x)} \Rightarrow g(x) = \frac{x^۳}{۲} + \sqrt{\frac{x^۳}{۲}}$$

$g(x)$ را برابر ۶ قرار داده و مقدار x را تعیین می کنیم:

$$۶ = \frac{x^۳}{۲} + \sqrt{\frac{x^۳}{۲}} \Rightarrow ۴ + ۲ = \frac{x^۳}{۲} + \sqrt{\frac{x^۳}{۲}} \Rightarrow \frac{x^۳}{۲} = ۴ \Rightarrow x^۳ = ۸ \Rightarrow x = ۲$$

نقطهٔ $(۲, ۶)$ در ضابطهٔ $g(x)$ صدق می کند، پس نقطهٔ $(۶, ۲)$ متعلق به تابع $g^{-1}(x)$ است. بنابراین $g^{-1}(۶) = ۲$ است.

۳۸ گزینه ۱

محور xها را در نقطه‌ای به طول ۱ قطع کرده است پس $f(۱) = ۰$ است. محور عرض‌ها را در -۶ قطع کرده است پس $f(۰) = -۶$ و از نقطهٔ $(-۲, -۶)$ عبور کرده است پس $f(-۲) = -۶$، حال داریم:

$$f(۰) = -۶ \Rightarrow ۰ + ۰ + c = -۶ \Rightarrow c = -۶$$
$$f(۱) = ۰ \Rightarrow a + b - ۶ = ۰ \Rightarrow a + b = ۶ \quad (۱)$$
$$f(-۲) = -۶ \Rightarrow ۴a - ۲b + c = -۶ \xrightarrow{c=-۶} ۴a - ۲b = ۰ \xrightarrow{\div ۲} ۲a = b$$
$$\xrightarrow{(۱)} a + ۲a = ۶ \Rightarrow ۳a = ۶$$
$$\Rightarrow a = ۲, b = ۴ \Rightarrow f(x) = ۲x^۲ + ۴x - ۶ \Rightarrow f(-۱) = ۲ - ۴ - ۶ = ۲ - ۱۰ = -۸$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۹

۳۹ گزینه ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

گام اول

تابع دوضابطه‌ای است. برای محاسبهٔ $f(۱)$ از ضابطهٔ پایین و برای محاسبهٔ $f(۵)$ از ضابطهٔ بالا استفاده می‌کنیم.

گام دوم

$$x > ۳ : f(x) = x - \sqrt{x + ۴} \Rightarrow f(۵) = ۵ - \sqrt{۵ + ۴} = ۵ - \sqrt{۹} = ۵ - ۳ = ۲$$
$$x \leq ۳ : f(x) = ۲x + ۳ \Rightarrow f(۱) = ۲(۱) + ۳ = ۲ + ۳ = ۵$$

پس مقدار $f(f(۵)) + f(f(۱))$ برابر است با:

$$f(f(۵)) + f(f(۱)) = f(۲) + f(۵) = ۲(۲) + ۳ + ۲ = ۴ + ۳ + ۲ = ۹$$

۴۰ گزینه ۴

روش اول:

با استفاده از تغییر متغیر $x - ۳ = t$، x را برحسب t به دست آورده و ضابطهٔ $f(x)$ را به صورت مستقل تعیین می کنیم.

$$f(x - ۳) = x^۲ - ۴x + ۵ \xrightarrow[x=t+۳]{x-۳=t} f(t) = (t + ۳)^۲ - ۴(t + ۳) + ۵$$
$$= t^۲ + ۶t + ۹ - ۴t - ۱۲ + ۵ \Rightarrow f(t) = t^۲ + ۲t + ۲ \Rightarrow f(x) = x^۲ + ۲x + ۲$$

ضابطهٔ $f(x)$ به صورت مستقل تعیین شد. حالا ضابطهٔ $f(۱ - x)$ را مشخص می کنیم:

$$f(۱ - x) = (۱ - x)^۲ + ۲(۱ - x) + ۲ = ۱ - ۲x + x^۲ + ۲ - ۲x + ۲$$
$$= x^۲ - ۴x + ۵ \Rightarrow f(۱ - x) = x^۲ - ۴x + ۵$$

روش دوم:روش دیگر برای به دست آوردن $f(۱ - x)$ از روی ضابطهٔ $f(x - ۳)$ این است که به جای x متغیر $۴ - x$ را جای گذاری کنیم.

$$f(x - ۳) = x^۲ - ۴x + ۵ \xrightarrow{x \to ۴-x} f(۴ - x - ۳) = (۴ - x)^۲ - ۴(۴ - x) + ۵$$
$$\Rightarrow f(۱ - x) = ۱۶ - ۸x + x^۲ - ۱۶ + ۴x + ۵ = x^۲ - ۴x + ۵$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۴۱

گزینه ۱

ابتدا ضابطهٔ تابع gof را به دست می‌آوریم. سپس با استفاده از آن برد تابع gof را تعیین می‌کنیم.

$$gof(x) = g(f(x)) = ۲^{-x+[x]}$$

می‌دانیم به ازای هر x، $۰ \leq x-[x] < ۱$ است، بنابراین:

$$۰ \leq x-[x] < ۱ \Rightarrow -۱ < -x+[x] \leq ۰$$

برد تابع gof برابر است با:

$$-x+[x] = -۱ \Rightarrow ۲^{-x+[x]} = ۲^{-۱} = \frac{۱}{۲}$$
$$-x+[x] = ۰ \Rightarrow ۲^{-x+[x]} = ۲^{۰} = ۱ \Rightarrow R_{gof} = (\frac{۱}{۲}, ۱]$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

۴۲

گزینه ۴

ضابطهٔ $f^{-۱}(\sin x)$ از ما خواسته شده است. ابتدا باید ضابطهٔ $f^{-۱}(x)$ را تعیین کنیم، سپس به جای متغیر x نسبت مثلثاتی $\sin x$ را قرار داده و در پایان ضابطهٔ $f^{-۱}(\sin x)$ را به دست آوریم.

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{۱+x^۲}} \Rightarrow y = \frac{x}{\sqrt{۱+x^۲}} \Rightarrow y\sqrt{۱+x^۲} = x$$
$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} y^۲(۱+x^۲) = x^۲ \Rightarrow y^۲ + y^۲x^۲ = x^۲ \Rightarrow x^۲ - y^۲x^۲ = y^۲$$
$$\Rightarrow x^۲(۱-y^۲) = y^۲ \Rightarrow x^۲ = \frac{y^۲}{۱-y^۲} \xrightarrow{\text{y,x هم علامت}} x = \frac{y}{\sqrt{۱-y^۲}}$$
$$\Rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{x}{\sqrt{۱-x^۲}} \quad ; -۱ < x < ۱$$

ضابطهٔ $f^{-۱}(\sin x)$ را به دست می‌آوریم:

$$f^{-۱}(\sin x) = \frac{\sin x}{\sqrt{۱-\sin^۲ x}} \xrightarrow{۱-\sin^۲ x=\cos^۲ x} f^{-۱}(\sin x) = \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^۲ x}}$$
$$\Rightarrow f^{-۱}(\sin x) = \frac{\sin x}{|\cos x|}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

۴۳

گزینه ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۶ ۱۴۰۱

گام اول

دو فرض در مسئله در نظر گرفته شده است، یعنی اینکه $(۴,۲) \in fog$ و $(۴,۱) \in gof$ است. $(۴,۲) \in fog$ است، یعنی $f(g(۴)) = ۲$ و $(۴,۱) \in gof$ است. یعنی $g(f(۴)) = ۱$. حال این دو شرط را بررسی می کنیم.

گام دوم

تعیین a و b با استفاده از دو شرط $f(g(۴)) = ۲$ و $g(f(۴)) = ۱$:

$$f(g(۴)) = ۲ \xrightarrow{f(۳)=۲} g(۴) = ۳ \xrightarrow{(a,۳)\in g} a = ۴$$
$$g(f(۴)) = ۱ \xrightarrow{f(۴)=۵} g(۵) = ۱ \xrightarrow{(b,۱)\in g} b = ۵$$

پس دوتایی مرتب (a,b) به صورت $(۴,۵)$ درمی‌آید.

۴۴ گزینه ۱

$$f(۲-\sqrt{۳}) = \frac{۲(۲-\sqrt{۳})^۲+۲}{(۲-\sqrt{۳})^۲-۳} = \frac{۲(۴-۴\sqrt{۳}+۳)+۲}{(۴-۴\sqrt{۳}+۳)-۳} = \frac{۸-۸\sqrt{۳}+۶+۲}{۴-۴\sqrt{۳}}$$
$$= \frac{۱۶-۸\sqrt{۳}}{۴-۴\sqrt{۳}} = \frac{۸(۲-\sqrt{۳})}{۴(۱-\sqrt{۳})} = \frac{۲(۲-\sqrt{۳})}{۱-\sqrt{۳}}$$
$$\xrightarrow{\text{گویا می‌کنیم}} \frac{۲(۲-\sqrt{۳})}{۱-\sqrt{۳}} \times \frac{۱+\sqrt{۳}}{۱+\sqrt{۳}} = \frac{۲(۲-\sqrt{۳})(۱+\sqrt{۳})}{\underbrace{(۱-\sqrt{۳})(۱+\sqrt{۳})}_{\text{اتحاد مزدوج}}}$$
$$= \frac{۲[۲+۲\sqrt{۳}-\sqrt{۳}-۳]}{۱^۲-\sqrt{۳}^۲} = \frac{۲(-۱+\sqrt{۳})}{-۲} = -(-۱+\sqrt{۳}) = ۱-\sqrt{۳}$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۳۹۰

۴۵ گزینه ۴

با جابه‌جا کردن مؤلفه‌های اول و دوم هریک از زوج مرتب‌های تشکیل‌دهندهٔ دو تابع f و g، توابع f^{-1} و g^{-1} را به‌صورت مجموعه‌ای از زوج مرتب‌ها مشخص می‌کنیم، سپس تابع $g^{-1}of^{-1}$ را به دست می‌آوریم. برای این کار ابتدا به سراغ تابع f^{-1} می‌رویم، سپس با خروجی‌هایی که به ما می‌دهد بررسی می‌کنیم که تابع $g^{-1}of^{-1}$ تشکیل می‌شود یا خیر.

$$f = \{(۱,۲),(۲,۳),(۴,۵),(۳,۴)\} \Rightarrow f^{-1} = \{(۲,۱),(۳,۲),(۵,۴),(۴,۳)\}$$
$$g = \{(۲,۱),(۳,۲),(۵,۴)\} \Rightarrow g^{-1} = \{(۱,۲),(۲,۳),(۴,۵)\}$$
$$D_{f^{-1}} = \{۲,۳,۵,۴\}$$
$$x = ۲ \Rightarrow f^{-1}(۲) = ۱ \Rightarrow g^{-1}(f^{-1}(۲)) = g^{-1}(۱) = ۲ \Rightarrow (۲,۲) \in g^{-1}of^{-1}$$
$$x = ۳ \Rightarrow f^{-1}(۳) = ۲ \Rightarrow g^{-1}(f^{-1}(۳)) = g^{-1}(۲) = ۳ \Rightarrow (۳,۳) \in g^{-1}of^{-1}$$
$$x = ۵ \Rightarrow f^{-1}(۵) = ۴ \Rightarrow g^{-1}(f^{-1}(۵)) = g^{-1}(۴) = ۵ \Rightarrow (۵,۵) \in g^{-1}of^{-1}$$
$$x = ۴ \Rightarrow f^{-1}(۴) = ۳ \Rightarrow g^{-1}(f^{-1}(۴)) = g^{-1}(۳) \Rightarrow \text{تعریف نمی‌شود}$$

بنابراین تابع $g^{-1}of^{-1}$ به‌صورت $\{(۲,۲),(۳,۳),(۵,۵)\}$ درمی‌آید.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۰

۴۶ گزینه ۲

ابتدا توجه کنید که $\sqrt{۳} \approx ۱/۷$، پس:

$$f(x) = x^۲ - ۲[x] \Rightarrow f(\sqrt{۳}) = (\sqrt{۳})^۲ - ۲[\sqrt{۳}] = ۳ - ۲\times۱ = ۱ \Rightarrow -\frac{۱}{۲}f(\sqrt{۳}) = -\frac{۱}{۲}\times۱ = -۰/۵$$
$$\Rightarrow f(-\frac{۱}{۲}f(\sqrt{۳})) = (-۰/۵)^۲ - ۲[-۰/۵] = ۰/۲۵ - ۲(-۱) = ۲/۲۵$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

۴۷ گزینه ۳

تست ضابطهٔ $f(f(x))$ یا همان $fof(x)$ را از ما می خواهد. برای به دست آوردن ضابطهٔ $f(f(x))$، ابتدا باید ضابطهٔ $f(x)$ را به صورت مشخص و دقیق داشته باشیم، سپس باتوجه‌به آن، ضابطهٔ $fof(x)$ را تعیین کنیم.

ضابطهٔ $f(x)$ را به دست می آوریم:

$$f(x) = ۲ - |x - ۲| = \begin{cases} x \geq ۲ : x - ۲ \geq ۰ \Rightarrow f(x) = ۲ - x + ۲ = ۴ - x \\ x < ۲ : x - ۲ < ۰ \Rightarrow f(x) = ۲ + x - ۲ = x \end{cases}$$

ضابطهٔ $f(f(x))$ را در هریک از این حالات مشخص می کنیم:

$$x \geq ۲ : f(f(x)) = ۲ - |۴ - x - ۲| = ۲ - |۲ - x|$$
$$\xrightarrow[۲-x<۰]{x\geq ۲} f(f(x)) = ۲ + ۲ - x = ۴ - x = f(x)$$
$$x < ۲ : f(f(x)) = ۲ - |x - ۲| \xrightarrow[x-۲<۰]{x<۲} ۲ + x - ۲ = x \Rightarrow f(f(x)) = f(x)$$

در هر دو حالت ضابطهٔ $f(f(x))$ برابر ضابطهٔ $f(x)$ شد.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۰

۴۸ گزینه ۱

ضابطهٔ $f(x)$ و $f(g(x))$ برای ما مشخص شده است. ابتدا با توجه به این دو ضابطه، ضابطهٔ تابع $g(x)$ را به صورت مستقل تعیین می کنیم، سپس ضابطهٔ تابع $(f + g)(x)$ را به دست می آوریم.

$$f(x) = x^۲ - x - ۲ \ , \ f(g(x)) = x^۲ + x - ۲$$
$$\Rightarrow (g(x))^۲ - g(x) - ۲ = x^۲ + x - ۲ \Rightarrow (g(x))^۲ - g(x) = x^۲ + x$$

برای این که بتوانیم راحت تر ضابطهٔ $g(x)$ را تعیین کنیم، سعی می کنیم دو طرف را به دو عبارت مربع کامل تبدیل کنیم:

$$(g(x))^۲ - g(x) = x^۲ + x \xrightarrow{\text{به دو طرف } \frac{۱}{۴} \text{ اضافه می کنیم}} (g(x))^۲ - g(x) + \frac{۱}{۴} = x^۲ + x + \frac{۱}{۴}$$
$$\Rightarrow (g(x)) - \frac{۱}{۲})^۲ = (x + \frac{۱}{۲})^۲ \Rightarrow g(x) - \frac{۱}{۲} = \pm(x + \frac{۱}{۲})$$

پس برای ضابطهٔ $g(x)$ دو حالت ممکن است رخ دهد:

$$۱) \ g(x) - \frac{۱}{۲} = x + \frac{۱}{۲} \Rightarrow g(x) = x + ۱$$
$$\Rightarrow (f + g)(x) = f(x) + g(x) = x^۲ - x - ۲ + x + ۱ = x^۲ - ۱$$
$$۲) \ g(x) - \frac{۱}{۲} = -x - \frac{۱}{۲} \Rightarrow g(x) = -x$$
$$\Rightarrow (f + g)(x) = f(x) + g(x) = x^۲ - x - ۲ - x = x^۲ - ۲x - ۲$$

با توجه به گزینه های موجود، گزینهٔ ۱ قابل قبول است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

۴۹ گزینه ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

گام اول

وقتی تست اشاره کرده $g(f(a)) = ۵$ است، یعنی این که باید از تابع g زوج مرتبی را انتخاب کنیم که در آن مؤلفهٔ دوم برابر ۵ است. در این صورت مؤلفهٔ اول برابر $f(a)$ بوده و با داشتن ضابطهٔ تابع $f(x)$ مقدار a به راحتی محاسبه می شود.

گام دوم

$g(f(a)) = ۵$ است. در بین زوج مرتب های تشکیل دهندهٔ تابع g، زوج مرتب $(۶, ۵)$ دارای مؤلفهٔ دوم ۵ است، بنابراین می توان نتیجه گرفت: $f(a) = ۶$. حال با داشتن ضابطهٔ $f(x)$، مقدار a را به دست می آوریم:

$$f(x) = x + \sqrt{x} \Rightarrow f(a) = a + \sqrt{a} \xrightarrow{f(a)=۶} a + \sqrt{a} = ۶$$

برای حل این معادله می توانیم با تغییر متغیر $t = \sqrt{a}$، معادله را به یک معادلهٔ درجه دو تبدیل کرده و آن را حل کنیم. (فقط حواستان باشد t باید مثبت شود.)

$$a + \sqrt{a} = ۶ \xrightarrow{\sqrt{a}=t} t^۲ + t = ۶ \Rightarrow t^۲ + t - ۶ = ۰ \Rightarrow (t + ۳)(t - ۲) = ۰$$
$$\Rightarrow \begin{cases} t = -۳ \quad \text{غ ق ق} \\ t = ۲ \Rightarrow \sqrt{a} = ۲ \Rightarrow a = ۴ \end{cases}$$

اما راه سریع تر و راحت تر برای رسیدن به جواب امتحان گزینه هاست. در این صورت هم، $a = ۴$ جواب تست می شود.

۵۰ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

گام اول

برای پاسخ گویی به این تست داشتن ضابطهٔ تابع $gof(x)$ الزامی است. برای رسیدن به این منظور کافی است در ضابطهٔ تابع $g(x)$ به جای متغیر x، ضابطهٔ تابع $f(x)$ را قرار دهیم. حالا ببینیم منظور تابع از جملهٔ "مجموعهٔ طول نقاطی از منحنی تابع gof که در بالای محور xها قرار می گیرند" چیست؟ اگر قرار باشد تابع gof بالای محورxها قرار بگیرد باید مقدارy تابع بزرگ تر از صفر باشد. بنابراین باید مجموعه جواب نامعادلهٔ $gof(x) > ۰$ را تعیین کنیم.

گام دوم

تعیین ضابطهٔ $gof(x)$ و حل نامعادلهٔ $gof(x) > ۰$:

$$g(x) = -\frac{۱}{۲}x + ۲\ ,\ \ f(x) = x^۲ + ۳x$$
$$gof(x) = g(f(x)) = -\frac{۱}{۲}(x^۲ + ۳x) + ۲ = -\frac{۱}{۲}x^۲ - \frac{۳}{۲}x + ۲$$
$$gof(x) > ۰ \Rightarrow -\frac{۱}{۲}x^۲ - \frac{۳}{۲}x + ۲ > ۰ \xrightarrow{\times(-۲)} x^۲ + ۳x - ۴ < ۰$$
$$\Rightarrow (x + ۴)(x - ۱) < ۰ \Rightarrow -۴ < x < ۱$$

بنابراین در بازهٔ $(-۴, ۱)$ مقادیر تابع $gof(x)$ بزرگ تر از صفر بوده و در نتیجه نمودار این تابع روی این بازه بالای محور xها قرار می گیرد.

۵۱ گزینه ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

گام اول

برای حل این تست اصلاً نیازی نیست ضابطهٔ تابع $f(x)$ را به‌صورت مستقل به دست آورده و بعد مقدار $f(۳)$ را حساب کنید. (البته این کار را هم انجام دهید درست است ولی زمان حل مسئله طولانی‌تر می‌شود.) ضابطهٔ $g(x)$ و $f(g(x))$ به ما داده شده است. حال ما مقدار $f(۳)$ را می‌خواهیم. کافی است $g(x)$ را برابر ۳ قرار داده و معادله را حل کنیم. به ازای x به‌دست‌آمده، مقدار $f(۳)$ محاسبه می‌شود.

گام دوم

$$g(x) = ۲x - ۱\ ,\ \ fog(x) = \frac{x}{x - ۳} \Rightarrow f(۲x - ۱) = \frac{x}{x - ۳}$$
$$۲x - ۱ = ۳ \Rightarrow ۲x = ۴ \Rightarrow x = ۲ \xrightarrow[x=۲]{f(۲x-۱)=\frac{x}{x-۳}} f(۳) = \frac{۲}{۲ - ۳} = \frac{۲}{-۱} = -۲$$

۵۲ گزینه ۱

برای حل این تست از دو روش استفاده می کنیم. روش اول حل معمولی تست است، یعنی ابتدا ضابطهٔ تابع اصلی را ساده کرده، سپس با استفاده از آن ضابطهٔ تابع معکوس را به دست می آوریم. روش دوم یک روش بسیار ساده و در عین حال کوتاه برای حل این مدل تست ها است. اگر نقطهٔ $A(\alpha,\beta)$ در ضابطهٔ تابع اصلی صدق کند، در این صورت نقطهٔ $B(\beta,\alpha)$ در ضابطهٔ تابع وارون یا معکوس صدق خواهد کرد. با انتخاب یک نقطهٔ مناسب که متعلق به تابع $f(x)$ باشد، بررسی می کنیم آیا با جابه جایی مؤلفه های اول و دوم، نقطهٔ جدید در ضابطهٔ تابع معکوس صدق می کند یا خیر.

روش اول:

$$y=\frac{x}{1+|x|}=\begin{cases}\dfrac{x}{1+x} & x\geq 0 \;\Rightarrow\; 0\leq y<1\\[2mm] \dfrac{x}{1-x} & x<0 \;\Rightarrow\; -1<y<0\end{cases}$$

$$y=\frac{x}{1+x}\Rightarrow y+yx=x\Rightarrow x(1-y)=y\Rightarrow x=\frac{y}{1-y}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x}{1-x}$$

$$y=\frac{x}{1-x}\Rightarrow y-yx=x\Rightarrow x(1+y)=y\Rightarrow x=\frac{y}{1+y}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x}{1+x}$$

بنابراین ضابطهٔ تابع معکوس به صورت $|x|<1\;,\;f^{-1}(x)=\dfrac{x}{1-|x|}$ درمی‌آید

روش دوم:

نقطهٔ $(0,0)$ در ضابطهٔ تابع اصلی صدق می کند. از بین گزینه ها تنها معادله ای که $x=0$ عضو دامنه تعریفش باشد و نقطهٔ $(0,0)$ هم در ضابطهٔ آن صدق کند، ضابطهٔ $f^{-1}(x)=\dfrac{x}{1-|x|}$ است، به همین راحتی.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

۵۳ گزینه ۳

بعضی از تست های جزء صحیح را با یک عددگذاری ساده می توانیم حل کنیم. حال این تست را به دو روش اصلی و عددگذاری حل می کنیم.

روش اول:

به ازای هر عدد طبیعی n داریم:

$$4n^2-4n+1<4n^2-3n+1<4n^2\Rightarrow(2n-1)^2<4n^2-3n+1<(2n)^2$$

$$\xrightarrow{\text{از نامعادله جذر می گیریم}}2n-1<\sqrt{4n^2-3n+1}<2n\Rightarrow[\sqrt{4n^2-3n+1}]=2n-1$$

از طرف دیگر وقتی $n>2$ باشد، رابطهٔ زیر برقرار است:

$$n^2-4n+4<n^2-2n<n^2-2n+1\Rightarrow(n-2)^2<n^2-2n<(n-1)^2$$

$$\xrightarrow{\text{از نامعادله جذر می گیریم}}n-2<\sqrt{n^2-2n}<n-1\Rightarrow[\sqrt{n^2-2n}]=n-2$$

پس حاصل عبارت داده‌شده به ازای $n>2$ برابر است با:

$$[\sqrt{4n^2-3n+1}]-2[\sqrt{n^2-2n}]=2n-1-2(n-2)=2n-1-2n+4=3$$

روش دوم (روش عددگذاری):

در صورت تست به این نکته اشاره‌شده که به ازای هر عدد طبیعی بزرگ تر از ۲ حاصل عبارت یکسان است، کافی است یک عدد طبیعی بزرگ تر از ۲ را انتخاب کرده و حاصل عبارت داده‌شده را به ازای آن محاسبه کنیم. برای حل آسان‌تر، n را ۳ در نظر می گیریم:

$$A=[\sqrt{4n^2-3n+1}]-2[\sqrt{n^2-2n}]\xrightarrow{n=3}A=[\sqrt{36-9+1}]-2[\sqrt{9-6}]$$

$$=[\sqrt{28}]-2[\sqrt{3}]=5-2(1)=5-2=3$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

۵۴ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

گام اول

گاهی اوقات تابع مرکب را به صورت یک ماشین نمایش می‌دهند. به شکل رسم‌شده در این تست خوب دقت کنید:

$$\xrightarrow{x} \underline{f} \xrightarrow{f(x)} \underline{g} \xrightarrow{g(f(x))} ۲x$$

متغیر x به عنوان ورودی در نظر گرفته می‌شود. ابتدا وارد ضابطهٔ f می‌شود که خروجی آن $f(x)$ است. در مرحلهٔ دوم $f(x)$ وارد ضابطهٔ g می‌شود که در این صورت خروجی آن $g(f(x))$ است. بنابراین در این تست $g(f(x)) = ۲x$ است.

گام دوم

ضابطهٔ $g(f(x))$ و $g(x)$ مشخص است. اول ضابطهٔ $f(x)$ را تعیین کرده، سپس با استفاده از آن مقدار $f(۵)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$g(x) = ۳x + ۴\ ,\ g(f(x)) = ۲x \Rightarrow ۳f(x) + ۴ = ۲x \Rightarrow ۳f(x) = ۲x - ۴$$
$$\Rightarrow f(x) = \frac{۲}{۳}x - \frac{۴}{۳} \Rightarrow f(۵) = \frac{۲}{۳}(۵) - \frac{۴}{۳} = \frac{۱۰}{۳} - \frac{۴}{۳} = \frac{۶}{۳} = ۲$$

۵۵ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

گام اول

الف) ضابطهٔ تابع $fog(x)$ یعنی $f(g(x))$، با جایگذاری ضابطهٔ $g(x)$ در تابع $f(x)$ به دست می آید.

ب) می خواهیم نمودار تابع $fog(x)$ زیر محور xها قرار بگیرد پس باید مجموعه جواب نامعادلهٔ $fog(x) < ۰$ را به دست آوریم.

گام دوم

$$fog(x) = f(g(x)) = \left(\frac{۱}{۲}(x-۳)\right)^۲ + \frac{۱}{۲}(x-۳) - ۲ = \frac{۱}{۴}(x-۳)^۲ + \frac{۱}{۲}x - \frac{۳}{۲} - ۲$$
$$= \frac{۱}{۴}x^۲ - \frac{۳}{۲}x + \frac{۹}{۴} + \frac{۱}{۲}x - \frac{۷}{۲} = \frac{۱}{۴}x^۲ - x - \frac{۵}{۴}$$

حالا مجموعه جواب نامعادلهٔ $fog(x) < ۰$ را تعیین می کنیم:

$$fog(x) < ۰ \Rightarrow \frac{۱}{۴}x^۲ - x - \frac{۵}{۴} < ۰ \xrightarrow{\times ۴} x^۲ - ۴x - ۵ < ۰ \Rightarrow (x-۵)(x+۱) < ۰ \Rightarrow x \in (-۱, ۵)$$

۵۶ گزینه ۱

یک روش این است که از روی تابع اصلی، ضابطهٔ وارون تابع را پیدا کنیم. اما روش ساده تری هم برای حل تست وجود دارد: ابتدا بررسی کنیم در بین گزینه ها کدام گزینه می تواند به عنوان تابع در نظر گرفته شود. سپس با توجه به این که اگر نقطهٔ (α , β) در ضابطهٔ اصلی صدق کند، نقطهٔ (β , α) در وارون آن صدق می کند، گزینهٔ درست را پیدا کنیم.

روش اول:

$$۱)\ \ y = \sqrt{x}\ , x \geq ۰ , y \geq ۰ \xrightarrow{\text{به توان ۲}} y^۲ = x \Rightarrow f^{-۱}(x) = x^۲\ , x \geq ۰$$
$$۲)\ \ y = -\sqrt{-x}\ , x < ۰ \Rightarrow y < ۰ \xrightarrow{\text{به توان ۲}} y^۲ = -x$$
$$\Rightarrow x = -y^۲ \Rightarrow f^{-۱}(x) = -x^۲\ , x < ۰$$
$$f^{-۱}(x) = \begin{cases} x^۲ & ; x \geq ۰ \\ -x^۲ & ; x < ۰ \end{cases} \Rightarrow y = x|x|\ , x \in \mathbb{R}$$

روش دوم:

گزینه های ۳ و ۴ اصلاً تابع نیستند. نقطهٔ $(۴ , ۲)$ در ضابطهٔ تابع اصلی صدق می کند. فقط گزینهٔ ۱ است که نقطهٔ $(۲ , ۴)$ در آن صدق می کند و می تواند به عنوان ضابطهٔ وارون در نظر گرفته شود.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۵۷ گزینه ۱

اول ضابطهٔ $f(\sqrt{x})$ را تعیین می‌کنیم. در تعیین ضابطهٔ $f(\sqrt{x})$ حتماً به این نکته توجه داشته باشید که دامنهٔ آن متفاوت با دامنهٔ تابع $f(x)$ است.

$$f(x) = x^{۲} + \frac{۱}{x^{۲}} \Rightarrow f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^{۲} + \frac{۱}{(\sqrt{x})^{۲}} = x + \frac{۱}{x} \quad , \quad x \in (۰, +\infty)$$

حالا ضابطهٔ تابع $g(x)$ را به دست می‌آوریم:

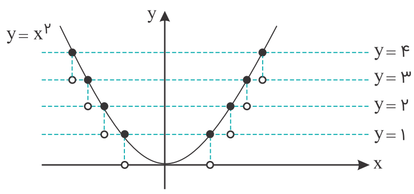
$$g(x) = (f(\sqrt{x}))^{۲} - f(x) = (x + \frac{۱}{x})^{۲} - (x^{۲} + \frac{۱}{x^{۲}}) = x^{۲} + ۲ + \frac{۱}{x^{۲}} - x^{۲} - \frac{۱}{x^{۲}}$$
$$\Rightarrow g(x) = ۲ \ , \ x \in (۰, +\infty)$$

بنابراین تابع $g(x)$ یک تابع ثابت است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۱

۵۸ گزینه ۴

اول نمودار تابع $y = x^{۲}$ را در بازهٔ $(-۲ \ , \ ۲)$ رسم می کنیم.
برای به دست آوردن نمودار تابع $y = [x^{۲}]$ از روی نمودار تابع $y = x^{۲}$ در بازهٔ $(-۲ \ , \ ۲)$ خطوطی به موازات محور x ها رسم کرده و قسمت هایی از نمودار که بین دو خط متوالی $y = k$ و $y = k + ۱$ $(k \in \mathbb{Z})$ قرار می گیرند را بر روی خط $y = k$ تصویر می کنیم. درنهایت نقاط تلاقی خط و نمودار توپر خواهد شد.



با توجه به شکل، نمودار تابع $y = [x^{۲}]$ در بازهٔ $x \in (-۲ \ , \ ۲)$ از هفت پاره خط تشکیل‌شده است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۵۹ گزینه ۱

ابتدا برد تابع اصلی که همان دامنه تعریف تابع وارون است را به دست می آوریم. برای به دست آوردن ضابطهٔ تابع وارون از روی ضابطهٔ تابع اصلی x را برحسب y به دست آورده و درنهایت به جای x عبارت $f^{-۱}(x)$ و به جای y ، x را جایگذاری کرده و ضابطه را تعیین می کنیم.

$$y = ۲ - \sqrt{x - ۱} \xrightarrow{\text{عدد زیر رادیکال با فرجهٔ زوج، مثبت است}} x \geq ۱$$
$$\Rightarrow x - ۱ \geq ۰ \Rightarrow \sqrt{x - ۱} \geq ۰ \Rightarrow -\sqrt{x - ۱} \leq ۰$$
$$\Rightarrow ۲ - \sqrt{x - ۱} \leq ۲ \Rightarrow y \leq ۲ \Rightarrow R_f = (-\infty \ , \ ۲] \Rightarrow D_{f^{-۱}} = (-\infty \ , \ ۲]$$

اکنون ضابطهٔ تابع وارون را به دست می‌آوریم:

$$y = ۲ - \sqrt{x - ۱} \Rightarrow \sqrt{x - ۱} = ۲ - y \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x - ۱ = (۲ - y)^{۲}$$
$$\Rightarrow x - ۱ = ۴ - ۴y + y^{۲} \Rightarrow x = ۵ - ۴y + y^{۲} \Rightarrow f^{-۱}(x) = x^{۲} - ۴x + ۵$$

پس ضابطهٔ تابع وارون به صورت $y = x^{۲} - ۴x + ۵ \ ; \ x \leq ۲$ است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

۶۰

گزینه ۲

برای تعیین نقطهٔ تلاقی دو تابع f و fog باید اول ضابطهٔ fog مشخص شود. سپس معادلهٔ $f(x)=fog(x)$ را حل کرده و نقطهٔ تلاقی دو تابع که در واقع ریشهٔ همین معادله است را به دست می‌آوریم.

$$f(x)=(۲x-۳)^۲\ ,\ g(x)=x+۲\Rightarrow fog(x)=f(g(x))=(۲g(x)-۳)^۲$$
$$=(۲(x+۲)-۳)^۲=(۲x+۴-۳)^۲=(۲x+۱)^۲=۴x^۲+۴x+۱$$

معادلهٔ $f(x)=fog(x)$ را حل می‌کنیم:

$$f(x)=fog(x)\Rightarrow(۲x-۳)^۲=(۲x+۱)^۲$$
$$\Rightarrow ۴x^۲-۱۲x+۹=۴x^۲+۴x+۱\Rightarrow ۱۶x=۸\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین نمودار دو تابع f و fog در نقطه‌ای به طول $x=\frac{۱}{۲}$ باهم متقاطع‌اند.

دقت کنید که:

$$D_f=\mathbb{R}\ ,\ D_{fog}=\mathbb{R}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

۶۱

گزینه ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲
قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۴

گام اول

عبارت زیر رادیکال با فرجهٔ زوج باید نامنفی باشد، پس داریم: $xf(x)\geq ۰$

گام دوم

حالا با استفاده از جدول تعیین علامت، مشخص می‌کنیم در چه بازه‌هایی $xf(x)\geq ۰$ برقرار است. داریم:

x	-۴		-۳		۰		۱		۲
x		−		−	۰	+		+	
f(x)		+	۰	−		−	۰	+	۰
xf(x)		−	۰	+	۰	−	۰	+	۰
				ج				ج	

دو بازهٔ مشخص‌شده مقادیر قابل‌قبول برای دامنهٔ تعریف تابع است، پس دامنهٔ تعریف تابع $\sqrt{xf(x)}$ به‌صورت $[-۳,۰]\cup[۱,۲]$ درمی‌آید.

۶۲

گزینه ۳

در صورت مسئله ضابطهٔ دو تابع $f(x)$ و $g(f(x))$ به ما داده شده است. ابتدا با استفاده از تغییر متغیر، ضابطهٔ تابع $g(x)$ را به دست می آوریم. برای به دست آوردن ضابطهٔ تابع fog کافی است در ضابطهٔ تابع $f(x)$ به جای متغیر x، ضابطهٔ $g(x)$ را قرار دهیم.

$$f(x)=۲x+۳\ ,\ g(f(x))=۸x^۲+۲۲x+۲۰\Rightarrow g(۲x+۳)=۸x^۲+۲۲x+۲۰$$
$$۲x+۳=t\Rightarrow ۲x=t-۳\Rightarrow x=\frac{t-۳}{۲}$$
$$g(t)=۸(\frac{t-۳}{۲})^۲+۲۲(\frac{t-۳}{۲})+۲۰\Rightarrow g(t)=۸(\frac{t^۲-۶t+۹}{۴})+۱۱(t-۳)+۲۰$$
$$\Rightarrow g(t)=۲t^۲-۱۲t+۱۸+۱۱t-۳۳+۲۰=۲t^۲-t+۵\Rightarrow g(x)=۲x^۲-x+۵$$

حالا ضابطهٔ تابع $fog(x)$ یا همان $f(g(x))$ را تعیین می کنیم:

$$f(x)=۲x+۳\ ,\ g(x)=۲x^۲-x+۵\Rightarrow fog(x)=f(g(x))=۲(۲x^۲-x+۵)+۳$$
$$\Rightarrow f(g(x))=۴x^۲-۲x+۱۰+۳=۴x^۲-۲x+۱۳$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

۶۳ گزینه ۴

روش اول:

ابتدا دامنه تعریف تابع $f(x)$ را به دست می‌آوریم. سپس باتوجه‌به محدودهٔ قابل قبول برای x، بازه‌ای که در آن تابع $f(۳-x)$ تعریف شده است را مشخص می‌کنیم.

$$f(x)=\sqrt{۲x-x^۲}\Rightarrow ۲x-x^۲\geq ۰\Rightarrow x(۲-x)\geq ۰\Rightarrow ۰\leq x\leq ۲$$

پس باید داشته باشیم: $۰\leq ۳-x\leq ۲$، بنابراین:

$$۰\leq ۳-x\leq ۲\Rightarrow -۳\leq -x\leq -۱\Rightarrow ۱\leq x\leq ۳\Rightarrow D_{f(۳-x)}=[۱,۳]$$

روش دوم:

ابتدا ضابطهٔ $f(۳-x)$ را تعیین کرده و از روی آن دامنه تعریف را به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned}&f(x)=\sqrt{۲x-x^۲}\Rightarrow f(۳-x)=\sqrt{۲(۳-x)-(۳-x)^۲}\\&=\sqrt{۶-۲x-۹+۶x-x^۲}=\sqrt{-x^۲+۴x-۳}\Rightarrow -x^۲+۴x-۳\geq ۰\\&\xrightarrow{\times(-۱)} x^۲-۴x+۳\leq ۰\Rightarrow (x-۳)(x-۱)\leq ۰\Rightarrow ۱\leq x\leq ۳\Rightarrow D_{f(۳-x)}=[۱,۳]\end{aligned}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

۶۴ گزینه ۴

روش اول:

ابتدا با تفکیک دامنه تعریف به دو قسمت $x>۰$ و $x<۰$، تکلیف قدرمطلق را روشن کرده و تابع را بازنویسی می کنیم. سپس برای هر یک از ضابطه های جدید، ضابطهٔ معکوس تابع را به دست می آوریم. داریم:

$$x=۰: y=\frac{|x|}{x}\sqrt{|x|}\Rightarrow\begin{cases}x>۰: |x|=x\Rightarrow y=\sqrt{x}\ ;\ y>۰\\ x<۰: |x|=-x\Rightarrow y=-\sqrt{-x}\ ;\ y<۰\end{cases}$$

$$y=\sqrt{x}\xrightarrow[\text{به توان ۲}]{x,y>۰} y^۲=x\Rightarrow f^{-۱}(x)=x^۲\ ,\ x>۰$$

$$y=-\sqrt{-x}\xrightarrow[\text{به توان ۲}]{x,y<۰} y^۲=-x\Rightarrow f^{-۱}(x)=-x^۲, x<۰$$

همچنین نقطهٔ $(۰,۰)$ باید در ضابطهٔ وارون تابع صدق کند. بنابراین ضابطهٔ معکوس تابع به صورت $y=x|x|\ ;\ x\in\mathbb{R}$ در می آید.

روش دوم:

اگر نقطهٔ $A(\alpha,\beta)$ در ضابطهٔ $f(x)$ صدق کند، در این صورت نقطهٔ $B(\beta,\alpha)$ در ضابطهٔ $f^{-۱}(x)$ صدق می کند. نقطهٔ $A(۴,۲)$ در ضابطهٔ $f(x)$ صدق می کند. پس نقطهٔ $B(۲,۴)$ باید عضو تابع وارون باشد. (رد گزینه های ۱ و ۲) هم چنین برد تابع $f(x)$ برابر $\mathbb{R}$ است. پس دامنه تعریف تابع $f^{-۱}(x)$ باید مجموعهٔ اعداد حقیقی یا همان $\mathbb{R}$ باشد. تنها گزینه ای که تمام این ویژگی ها را دارد، گزینهٔ $y=x|x|\ ;\ x\in\mathbb{R}$ است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۶۵ گزینه ۴

در توابع شامل قدر مطلق بهتر است ابتدا تکلیف قدرمطلق را مشخص کنیم. باتوجه‌به ریشهٔ عبارت داخل قدرمطلق، ضابطهٔ تابع را به صورت تفکیک‌شده به دست می‌آوریم. سپس هرکدام از ضابطه‌ها را که یک‌به‌یک و در نتیجه معکوس‌پذیر بود انتخاب کرده و ضابطهٔ تابع معکوس را مشخص می‌کنیم.

$$f(x) = ۲x - |۴ - ۲x|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x > ۲ \Rightarrow ۴ - ۲x < ۰ \Rightarrow |۴ - ۲x| = ۲x - ۴ \Rightarrow f(x) = ۲x - ۲x + ۴ = ۴ \\ x \leq ۲ \Rightarrow ۴ - ۲x \geq ۰ \Rightarrow |۴ - ۲x| = ۴ - ۲x \Rightarrow f(x) = ۲x - ۴ + ۲x = ۴x - ۴ \end{cases}$$

ضابطهٔ $f(x) = ۴$ یک‌به‌یک نیست، پس وارون ندارد؛ پس تابع فقط روی بازهٔ $(-\infty, ۲]$ معکوس‌پذیر است. معکوس تابع را در این بازه تعیین می‌کنیم:

$$x \in (-\infty, ۲] \Rightarrow x \leq ۲ \Rightarrow ۴x \leq ۸ \Rightarrow ۴x - ۴ \leq ۴ \Rightarrow f(x) \leq ۴$$

برد تابع f بازهٔ $(-\infty, ۴]$ به دست آمد. پس دامنهٔ f^{-1} نیز بازهٔ $(-\infty, ۴]$ خواهد بود.

$$y = ۴x - ۴ \Rightarrow y + ۴ = ۴x \Rightarrow x = \frac{y + ۴}{۴} \Rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{x + ۴}{۴}$$

$$\Rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{۱}{۴}x + ۱ \quad ; x \leq ۴$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۶۶ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۸

گام اول

وقتی دامنه تعریف تابع $f(-x)$ از ما خواسته شده است، پس ابتدا باید ضابطهٔ $f(-x)$ را از روی تابع $f(x)$ تشکیل دهیم. تابع داده شده یک تابع رادیکالی با فرجهٔ زوج است، پس عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد.

گام دوم

تشکیل ضابطهٔ $f(-x)$ و تعیین دامنه تعریف آن:

$$f(x) = \sqrt{x + |x + ۲|} \Rightarrow f(-x) = \sqrt{-x + |-x + ۲|} = \sqrt{|-x + ۲| - x}$$

$$|-x + ۲| - x \geq ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x > ۲ : -x + ۲ < ۰ \Rightarrow |-x + ۲| - x \geq ۰ \Rightarrow x - ۲ - x \geq ۰ \Rightarrow -۲ \geq ۰ \quad \text{غ.ق.ق} \\ x \leq ۲ : -x + ۲ \geq ۰ \Rightarrow |-x + ۲| - x \geq ۰ \Rightarrow -x + ۲ - x \geq ۰ \Rightarrow -۲x + ۲ \geq ۰ \\ \Rightarrow ۲x \leq ۲ \Rightarrow x \leq ۱ \end{cases}$$

با توجه به بازهٔ اولیه دامنه تعریف تابع $f(-x)$، به صورت $x \leq ۱$ در می آید.

۶۷ گزینه ۳

ضابطهٔ $f(x)$ را داریم. باتوجه‌به آن حاصل $f(2x-3)$ را به دست می‌آوریم؛ سپس تابع $g(x)$ را تشکیل داده و با استفاده از ویژگی‌های جزء صحیح، برد آن را به دست می‌آوریم.

$$f(x) = x - [x] \Rightarrow f(2x-3) = 2x - 3 - [2x-3]$$
$$\xrightarrow[k\in\mathbb{Z}]{[x+k]=[x]+k} f(2x-3) = 2x - 3 - [2x] + 3 = 2x - [2x]$$
$$g(x) = f(2x-3) - 2f(x) = 2x - [2x] - 2(x - [x])$$
$$= 2x - [2x] - 2x + 2[x] = 2[x] - [2x]$$

از ویژگی های جزء صحیح به خاطر داشته باشید: $[2x] = [x] + [x + \frac{1}{2}]$

بنابراین تابع $g(x)$ برابر است با:

$$g(x) = 2[x] - [x] - [x + \frac{1}{2}] = [x] - [x + \frac{1}{2}]$$

قسمت اعشاری عدد x را با p نشان می‌دهیم. باتوجه‌به مقدار p، دو حالت برای $g(x)$ اتفاق می‌افتد:

$$g(x) = [x] - [x + \frac{1}{2}] = \begin{cases} 0 & ; 0 \le p < \frac{1}{2} \\ -1 & ; \frac{1}{2} \le p < 1 \end{cases}$$

بنابراین برد تابع $g(x)$ برابر $\{-1, 0\}$ می‌شود.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۶۸ گزینه ۴

با استفاده از ضابطهٔ $f(x)$، ضابطهٔ تابع $f^{-1}(x)$ را به دست می آوریم (x را بر حسب y به دست آورده و در نهایت جای x و y را عوض می کنیم). سپس معادلهٔ $f^{-1}(g(a)) = 6$ را حل کرده و مقدار a را محاسبه می کنیم.

$$f(x) = 2x - 5 \Rightarrow y = 2x - 5 \Rightarrow y + 5 = 2x \Rightarrow x = \frac{y+5}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+5}{2}$$
$$f^{-1}(g(a)) = 6 \Rightarrow \frac{g(a)+5}{2} = 6 \Rightarrow g(a) + 5 = 12 \Rightarrow g(a) = 7 \xrightarrow{(4,7)\in g} a = 4$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۳

۶۹ گزینه ۳

دو ضابطهٔ $g(x)$ و $f(g(x))$ به ما داده شده است. برای به دست آوردن ضابطهٔ $f(x)$ از تغییر متغیر استفاده می کنیم. فرض می کنیم $g(x)$ برابر t باشد. در این صورت x را بر حسب t به دست آورده و در نهایت $f(t)$ را مشخص می کنیم. حالا تابع $f(x)$ به صورت مستقل به دست آمده است.

$$g(x) = 2x - 3 = t \Rightarrow 2x = t + 3 \Rightarrow x = \frac{t+3}{2}$$
$$f(g(x)) = 4(x^2 - 4x + 5) \Rightarrow f(t) = 4(\frac{(t+3)^2}{4} - 2(t+3) + 5)$$
$$\Rightarrow f(t) = (t+3)^2 - 8(t+3) + 20 = t^2 + 6t + 9 - 8t - 24 + 20$$
$$\Rightarrow f(t) = t^2 - 2t + 5 \Rightarrow f(x) = x^2 - 2x + 5$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۳

۷۰ گزینه ۱

تابع معکوس تابع g عبارت است از:

$$g^{-1} = \{(-1,2), (4,-1), (-2,3), (-3,-4)\}$$

تابع $f(x)$ به ازای مقادیر $x > 0$، مثبت و به ازای مقادیر $x < 0$، منفی است، پس a قطعاً عددی منفی است.

$$f(a) = -\sqrt{-a} = -2 \Rightarrow \sqrt{-a} = 2 \Rightarrow a = -4$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۳

۷۱ گزینه ۴

چون $f(x)$ بر $x+2$ بخش‌پذیر است، بنابراین $f(-2)=0$ است.

$$f(x)=x^4+ax^3-8x \Rightarrow f(-2)=16-8a+16=0$$

$$\Rightarrow 8a=32 \Rightarrow a=4 \Rightarrow f(x)=x^4+4x^3-8x$$

برای به دست آوردن سایر عامل‌های $f(x)$ کافی است $f(x)$ را بر $x+2$ تقسیم کنیم و ریشه‌های معادلهٔ $f(x)=0$ را به دست آوریم.

$$\begin{array}{l|l}
x^4+4x^3-8x & x+2 \\ \cline{2-2}
\underline{-(x^4+2x^3)} & x^3+2x^2-4x \\
2x^3-8x & \\
\underline{-(2x^3+4x^2)} & \\
-4x^2-8x & \\
\underline{-(-4x^2-8x)} & \\
0 &
\end{array}$$

$$f(x)=(x+2)(x^3+2x^2-4x)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+2=0 \Rightarrow x=-2 \\ x(x^2+2x-4)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=-1\pm\sqrt{5} \end{cases} \end{cases}$$

بنابراین کوچک‌ترین ریشهٔ معادلهٔ $f(x)=0$ برابر با $x=-1-\sqrt{5}$ است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۴

۷۲ گزینه ۴

برای به دست آوردن D_{fog} اول از همه باید D_f و D_g تعیین شود. سپس با استفاده از رابطهٔ $D_{fog}=\{x\in D_g | g(x)\in D_f\}$، دامنهٔ تابع fog را تعیین کنیم.

$$f(x)=\sqrt{3-x} \Rightarrow 3-x\geq 0 \Rightarrow x\leq 3 \Rightarrow D_f=(-\infty,3]$$

$$g(x)=\log_2^{(x^2+2x)} \Rightarrow x^2+2x>0 \Rightarrow x(x+2)>0 \Rightarrow x>0 \text{ یا } x<-2$$

$$\Rightarrow D_g=(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$$

حالا سراغ تعیین D_{fog} می رویم:

$$D_{fog}=\{x\in D_g | g(x)\in D_f\}$$
$$D_{fog}=\{x\in(-\infty,-2)\cup(0,+\infty) | \log_2^{(x^2+2x)}\leq 3\}$$
$$\log_2^{(x^2+2x)}\leq 3 \Rightarrow x^2+2x\leq 2^3 \Rightarrow x^2+2x\leq 8 \Rightarrow x^2+2x-8\leq 0 \Rightarrow (x+4)(x-2)\leq 0$$
$$\Rightarrow -4\leq x\leq 2 \Rightarrow D_{fog}=[-4,-2)\cup(0,2]$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

۷۳ گزینه ۴

در حل تست به نکات زیر توجه داشته باشید:

الف) در توابع شامل قدر مطلق ابتدا باتوجه‌به ریشه‌های عبارت درون قدر مطلق، ضابطهٔ تابع را به‌صورت ساده‌شده می‌نویسیم.

ب) تعیین می‌کنیم تابع در کدام بازه اکیداً نزولی است.

ج) برای تعیین ضابطهٔ تابع معکوس، x را برحسب y به دست آورده و درنهایت به جای x، $f^{-1}(x)$ و به جای y، x را جایگزین می‌کنیم. به این نکته توجه کنید که دامنهٔ تابع معکوس برابر برد تابع اصلی است.

$$f(x)=|2x-6|-|x+4|+x$$
$$=\begin{cases} x\le -4: -(2x-6)+(x+4)+x=10 \\ -4<x<3: -(2x-6)-(x+4)+x=-2x+2 \\ x\ge 3: (2x-6)-(x+4)+x=2x-10 \end{cases}$$

تابع در بازهٔ $(-4,3)$ اکیداً نزولی است. ضابطهٔ تابع معکوس را به دست می‌آوریم:

$$y=-2x+2 \Rightarrow y-2=-2x \Rightarrow x=-\frac{1}{2}y+1 \Rightarrow f^{-1}(x)=-\frac{1}{2}x+1$$

در ضابطهٔ تابع اصلی وقتی $-4<x<3$ باشد، $-4<y<10$ است. پس دامنهٔ تابع معکوس به‌صورت $(-4,10)$ درمی‌آید. بنابراین گزینهٔ ۴ درست است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۴

۷۴ گزینه ۳

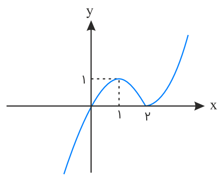
برای حل سؤال به صورت زیر عمل می‌کنیم:

الف) ابتدا قدرمطلق را ساده می‌کنیم و ضابطهٔ تابع را به صورت تفکیک‌شده می‌نویسیم. (یک بار فرض می کنیم $x\ge 2$ و بار دیگر فرض می‌کنیم $x<2$ باشد و ضابطهٔ تابع را تعیین می‌کنیم.)

ب) نمودار تابع را رسم کرده و بازه‌ای که در آن تابع نزولی است را مشخص می‌کنیم.

ج) باتوجه‌به این نکته که $D_{f^{-1}}=R_f$، دامنهٔ تعریف تابع معکوس را مشخص کرده و ضابطهٔ آن را نیز تعیین می‌کنیم.

$$f(x)=x|x-2|=\begin{cases} x\ge 2 \Rightarrow |x-2|=x-2 \Rightarrow y=x(x-2) \\ x<2 \Rightarrow |x-2|=-(x-2) \Rightarrow y=-x(x-2) \end{cases}$$
$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases} x^2-2x & ;x\ge 2 \\ -x^2+2x & ;x<2 \end{cases}$$



تنها بازه‌ای که در آن تابع نزولی باشد، بازهٔ $[1,2]$ است. برد تابع در این بازه $[0,1]$ است. پس $D_{f^{-1}}=[0,1]$ (رد گزینه های ۱ و ۲). حال در محدودهٔ مشخص‌شده ضابطهٔ $f^{-1}(x)$ را تعیین می‌کنیم:

$$1<x<2 \Rightarrow f(x)=-x^2+2x \Rightarrow y=-x^2+2x \Rightarrow -y=x^2-2x$$
$$\xrightarrow{+1} 1-y=x^2-2x+1 \Rightarrow 1-y=(x-1)^2 \Rightarrow x-1=\sqrt{1-y}$$
$$\Rightarrow x=1+\sqrt{1-y} \Rightarrow f^{-1}(x)=1+\sqrt{1-x}\ ;\ 0\le x\le 1$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۸

۷۵ گزینه ۴

در حل تست به نکات زیر توجه داشته باشید:

الف) عبارت زیر رادیکال با فرجهٔ زوج باید نامنفی باشد.

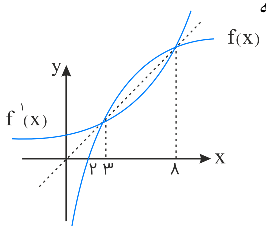
ب) نمودار دو تابع $y=f(x)$ و $y=f^{-1}(x)$ نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینهٔ یکدیگرند.

دامنهٔ تابع $\sqrt{x-f^{-1}(x)}$ محدوده‌ای است که عبارت $x-f^{-1}(x)$ نامنفی می‌شود. پس:

$$x-f^{-1}(x)\geq ۰ \Rightarrow x\geq f^{-1}(x)$$

چون دو نمودار $f(x)$ و $f^{-1}(x)$ نسبت به نیمساز ربع اول و سوم (همان خط $y=x$) قرینهٔ هم هستند، بنابراین در نقاطی که نمودار تابع $y=f(x)$ بالای خط $y=x$ قرار دارد، نمودار $y=f^{-1}(x)$ پایین خط $y=x$ قرار می گیرد و برعکس.

در بازهٔ $[۳,۸]$ نمودار تابع $y=f(x)$ بالای خط $y=x$ قرار دارد، بنابراین در همین بازه نمودار $y=f^{-1}(x)$ پایین خط $y=x$ قرار گرفته و درنتیجه $x-f^{-1}(x)$ مثبت می‌شود (به عبارت صحیح‌تر نامنفی می‌شود)، بنابراین بازهٔ $[۳,۸]$ دامنهٔ تعریف تابع داده‌شده است.



کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۸

۷۶ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

گام اول

دامنهٔ تابع fog از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$D_{fog}=\{x\in D_g | g(x)\in D_f\}$$

گام دوم

دامنهٔ دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ را تعیین کرده و با استفاده از رابطهٔ گفته‌شده در گام اول، D_{fog} را مشخص می‌کنیم.

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{-x^۲+x+۲}}$$

$$-x^۲+x+۲>۰ \xrightarrow{\times(-۱)} x^۲-x-۲<۰ \Rightarrow (x-۲)(x+۱)<۰$$

$$\Rightarrow -۱<x<۲ \Rightarrow D_f=(-۱,۲)$$

$$g(x)=\left(\frac{۱}{۴}\right)^x \Rightarrow D_g=\mathbb{R}$$

$$D_{fog}=\{x\in\mathbb{R} | -۱<\left(\frac{۱}{۴}\right)^x<۲\}$$

$$\xrightarrow{(\frac{۱}{۴})^x>۰} \left(\frac{۱}{۴}\right)^x<۲ \Rightarrow (۲^{-۲})^x<۲ \Rightarrow ۲^{-۲x}<۲ \Rightarrow -۲x<۱$$

$$\xrightarrow{\div -۲} x>-\frac{۱}{۲} \Rightarrow D_{fog}=(-\frac{۱}{۲},+\infty)$$

۷۷ گزینه ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

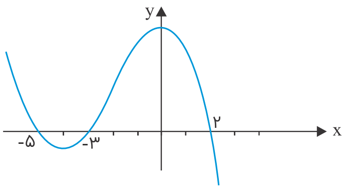
گام اول

الف) عبارت زیر رادیکال با فرجهٔ زوج همواره نامنفی است، پس باید $xf(x) \geq ۰$ باشد، پس x و $f(x)$ باید هر دو هم‌علامت باشند.

ب) برای به دست آوردن نمودار تابع $f(x)$ از روی نمودار تابع $f(x-۲)$، کافی است نمودار تابع $f(x-۲)$ را دو واحد به سمت چپ انتقال دهیم.

گام دوم

باتوجه‌به نمودار تابع $f(x-۲)$ و با انتقال دو واحدی آن به سمت چپ، نمودار تابع $f(x)$ را رسم می‌کنیم:



طبق گام اول، محدوده‌ای که در آن x و $f(x)$ هم‌علامت باشند، قابل‌قبول است پس دامنهٔ تعریف تابع $\sqrt{xf(x)}$ برابر است با:
$[-۵,-۳] \cup [۰,۲]$

۷۸ گزینه ۲

$$f(۶) = f(-\frac{۱}{۴}) = ۰$$

$$f(g(x)) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} g(x) = ۶ \\ g(x) = -\frac{۱}{۴} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - \sqrt{x} = ۶ \\ x - \sqrt{x} = -\frac{۱}{۴} \end{cases}$$

حال هریک از معادلات بالا را حل می‌کنیم:

$$x - \sqrt{x} - ۶ = ۰ \xrightarrow{t=\sqrt{x}>۰} t^۲ - t - ۶ = ۰ \Rightarrow (t-۳)(t+۲) = ۰ \xrightarrow{t>۰} t = ۳ \xrightarrow{x=t^۲} x = ۹$$
$$x - \sqrt{x} + \frac{۱}{۴} = ۰ \xrightarrow{t=\sqrt{x}>۰} t^۲ - t + \frac{۱}{۴} = ۰ \Rightarrow (t - \frac{۱}{۲})^۲ = ۰ \Rightarrow t = \frac{۱}{۲} \xrightarrow{x=t^۲} x = \frac{۱}{۴}$$

بنابراین نمودار تابع fog، محور xها را در نقاطی به طول ۹ و $\frac{۱}{۴}$ قطع می‌کند.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

۷۹ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

گام اول

الف) ابتدا ضابطهٔ تابع $f(x)$ را باتوجه‌به محدوده‌هایی که برای x در نظر می‌گیریم، ساده می‌کنیم. محدودهٔ x بر اساس ریشهٔ عبارت‌های داخل قدر مطلق تعیین می‌شود.

ب) بازه‌ای که در آن تابع $f(x)$ صعودی است (مقدار $f(x)$ به ازای افزایش x در حال افزایش است) را تعیین کرده و در آن بازه ضابطهٔ $f^{-۱}(x)$ را به دست می‌آوریم.

گام دوم

ریشهٔ عبارت‌های درون قدر مطلق، $x=-۱$ و $x=۳$ است. داریم:

$$x < -۱ : f(x) = -۲x + ۶ - (-x-۱) = -۲x + ۶ + x + ۱ = -x + ۷$$

$$-۱ \leq x \leq ۳ : f(x) = -۲x + ۶ - (x+۱) = -۳x + ۵$$

$$x > ۳ : f(x) = ۲x - ۶ - (x+۱) = x - ۷$$

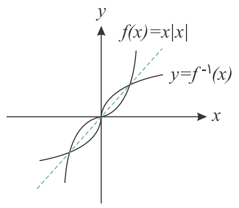
در بازهٔ $x > ۳$ تابع $f(x) = x - ۷$ یک تابع صعودی است. در این بازه ضابطهٔ $f^{-۱}(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$y = x - ۷ \Rightarrow x = y + ۷ \Rightarrow f^{-۱}(x) = x + ۷ \ , \ x > -۴$$

۸۰ گزینه ۳

ابتدا نمودار $f(x)$ را رسم می‌کنیم. نمودار f^{-1} قرینهٔ $f(x)$ نسبت به نیمساز ربع اول و سوم است.

$$f(x)=\begin{cases} x^{۲} & ; x\geq ۰ \\ -x^{۲} & ; x<۰ \end{cases}$$



کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

۸۱ گزینه ۳

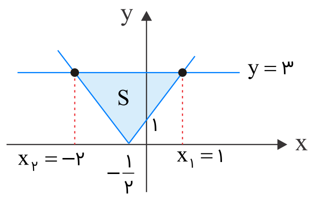
ابتدا تابع gof را به دست می‌آوریم:

$$(gof)(x)=g(f(x))=g(x^{۲}+x)=\sqrt{۴x^{۲}+۴x+۱}\Rightarrow (gof)(x)=|۲x+۱|$$

$$|۲x+۱|=\begin{cases} ۲x+۱ & ; x\geq -\frac{۱}{۲} \\ -۲x-۱ & ; x<-\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

نقاط برخورد تابع $|۲x+۱|$ و خط $y=۳$ را می‌یابیم.

$$۲x_{۱}+۱=۳\Rightarrow x_{۱}=۱\ ,\ -۲x_{۲}-۱=۳\Rightarrow x_{۲}=-۲$$

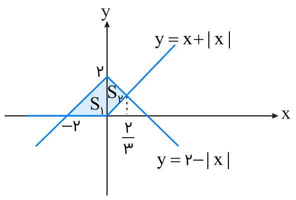


$$S=\frac{(|x_{۱}|+|x_{۲}|)\times ۳}{۲}=\frac{۹}{۲}=۴/۵$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۸۲ گزینه ۳

$$y=x+|x|=\begin{cases}۲x & ;x\geq ۰\\ ۰ & ;x<۰\end{cases}\quad ,\quad y=۲-|x|=\begin{cases}۲-x & ;x\geq ۰\\ x+۲ & ;x<۰\end{cases}$$



$$۲-x=۲x\Rightarrow x=\frac{۲}{۳}$$

$$S=S_۱+S_۲=\frac{۱}{۲}\times ۲\times ۲+\frac{۱}{۲}\times\frac{۲}{۳}\times ۲=۲+\frac{۲}{۳}=\frac{۸}{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۱۲ ۱۳۹۷

۸۳ گزینه ۴

با توجه به ضابطهٔ تابع $f(x)$، ضابطهٔ $f(-x)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$f(-x)=\frac{۱}{۲}\left(-x+\sqrt{x^۲+۴}\right)$$

حاصل‌ضرب دو تابع $f(x)$ و $f(-x)$ برابر است با:

$$f(x)\,f(-x)=\frac{۱}{۲}\left(x+\sqrt{x^۲+۴}\right)\frac{۱}{۲}\left(-x+\sqrt{x^۲+۴}\right)=\frac{۱}{۴}\left(x^۲+۴-x^۲\right)=\frac{۱}{۴}\times ۴=۱$$

$$\Rightarrow\quad f(x)\,f(-x)=۱$$

بنابراین اگر فرض کنیم $f(x)=\alpha$ باشد آنگاه داریم:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\alpha \quad\Rightarrow\quad f^{-۱}(\alpha)=x\\ f(-x)=\dfrac{۱}{\alpha}\quad\Rightarrow\quad f^{-۱}\left(\dfrac{۱}{\alpha}\right)=-x\end{array}\right\}\Rightarrow\quad f^{-۱}(\alpha)+f^{-۱}\left(\frac{۱}{\alpha}\right)=x-x=۰$$

روش دوم: با استفاده از به دست آوردن ضابطهٔ تابع وارون نیز می‌توان به جواب رسید.
ابتدا $f^{-۱}(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$y=\frac{۱}{۲}(x+\sqrt{x^۲+۴})\Rightarrow ۲y=x+\sqrt{x^۲+۴}\Rightarrow ۲y-x=\sqrt{x^۲+۴}$$

$$\xrightarrow{\text{توان دو}} ۴y^۲+x^۲-۴xy=x^۲+۴\Rightarrow ۴xy=۴y^۲-۴$$

$$\Rightarrow xy=y^۲-۱\Rightarrow x=\frac{y^۲-۱}{y}=y-\frac{۱}{y}$$

$$\Rightarrow f^{-۱}(x)=x-\frac{۱}{x}$$

همچنین داریم:

$$f^{-۱}(x)=x-\frac{۱}{x}\Rightarrow f^{-۱}(\frac{۱}{x})=\frac{۱}{x}-\frac{۱}{\frac{۱}{x}}=\frac{۱}{x}-x$$

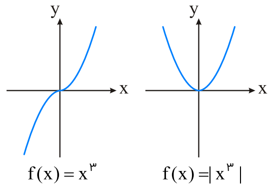
بنابراین:

$$f^{-۱}(x)+f^{-۱}(\frac{۱}{x})=x-\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x}-x=۰$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

۸۴ گزینه ۳

با رسم نمودار تابع $f(x) = |x^{۳}|$ به سؤال پاسخ می‌دهیم. ابتدا نمودار $y = x^{۳}$ را رسم و آن قسمت از منحنی که در پایین محور xها قرار دارد را نسبت به این محور قرینه می‌کنیم.



با توجه به نمودار رسم‌شده، این تابع نه صعودی است و نه نزولی. این تابع یک‌به‌یک هم نیست، درنتیجه وارون‌ناپذیر می‌شود؛ بنابراین فقط گزینهٔ ۳ می‌تواند درست باشد.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۸۵ گزینه ۳

دو تابع $g(x)$ و $(fog)(x)$ را داریم. می‌دانیم:

$$(fog)(x) = f(g(x)) = ۸x^{۲} + ۶x + ۵ \Rightarrow f(۲x+۱) = ۸x^{۲} + ۶x + ۵ \qquad (I)$$

با استفاده از تغییر متغیر، ضابطهٔ تابع $f(x)$ را به‌دست می‌آوریم. فرض می‌کنیم $۲x + ۱ = t$ باشد، x را برحسب t به‌دست آورده و در ضابطهٔ (I) جایگذاری می‌کنیم؛ داریم:

$$۲x + ۱ = t \Rightarrow ۲x = t - ۱ \Rightarrow x = \frac{t-۱}{۲}$$

$$f(۲x+۱) = ۸x^{۲} + ۶x + ۵ \Rightarrow f(t) = ۸\left(\frac{t-۱}{۲}\right)^{۲} + ۶\left(\frac{t-۱}{۲}\right) + ۵$$

$$= ۲(t-۱)^{۲} + ۳t - ۳ + ۵$$

$$\Rightarrow f(t) = ۲\left(t^{۲} - ۲t + ۱\right) + ۳t + ۲ = ۲t^{۲} - ۴t + ۲ + ۳t + ۲ = ۲t^{۲} - t + ۴$$

بنابراین ضابطهٔ $f(x)$ به‌صورت $f(x) = ۲x^{۲} - x + ۴$ است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۸۶ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

گام اول

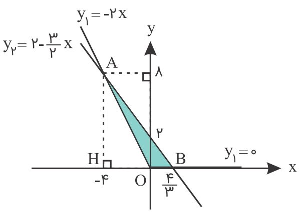
هر تابع شامل قدر مطلق را می‌توان به‌صورت یک تابع دو ضابطه‌ای نوشت. می‌دانیم: $|x| = \begin{cases} x & ; x \geq 0 \\ -x & ; x < 0 \end{cases}$

گام دوم

ابتدا ضابطهٔ تابع $y = |x| - x$ را برای مقادیر $x \geq 0$ و $x < 0$ به دست می‌آوریم:

$$y = |x| - x = \begin{cases} x - x = 0 & ; x \geq 0 \\ -x - x = -2x & ; x < 0 \end{cases}$$

نمودار هر دو تابع $y = |x| - x$ و $y = 2 - \frac{3}{2}x$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:



برای محاسبهٔ مساحت ناحیهٔ محصور بین دو منحنی ابتدا مختصات محل تلاقی؛ یعنی نقطهٔ A را با مساوی قرار دادن ضابطه‌ها تعیین می‌کنیم:

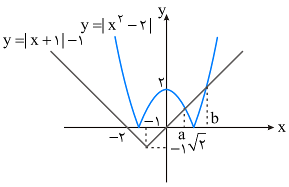
$$2 - \frac{3}{2}x = -2x \Rightarrow -2x + \frac{3}{2}x = 2 \Rightarrow -\frac{1}{2}x = 2 \Rightarrow x = -4$$
$$\xrightarrow{y=-2x} y = 8 \Rightarrow A(-4, 8)$$

بنابراین ارتفاع مثلث $A\overset{\Delta}{B}O$ برابر ۸ است و مساحتش به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$S_{A\overset{\Delta}{B}O} = \frac{1}{2} \times 8 \times \frac{4}{3} = \frac{16}{3}$$

۸۷ گزینه ۳

دو منحنی $y_1 = |x+1| - 1$ و $y_2 = |x^2 - 2|$ را رسم می‌کنیم.



مجموعه جواب نامعادله (a, b) است. برای یافتن a، $0 < x < \sqrt{2}$ را در نظر می‌گیریم:

$$|x^2 - 2| = |x+1| - 1 \Rightarrow -(x^2 - 2) = x + 1 - 1 \Rightarrow -x^2 + 2 = x \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (x+2)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases} \xrightarrow{0<x<\sqrt{2}} x = a = 1$$

برای یافتن b , $x > \sqrt{2}$ را در نظر می‌گیریم:

$$x^2 - 2 = x + 1 - 1 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) = 0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases} \xrightarrow{x>\sqrt{2}} x = b = 2$$

$$\text{مجموعهٔ جواب} = (a, b) = (1, 2) \Rightarrow \frac{a+b}{2} = \frac{2+1}{2} = 1/5$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۸۸ گزینه ۲

$$۲ - x \geq ۰ \Rightarrow x \leq ۲ \Rightarrow D_f = (-\infty, ۲]$$
$$x^۲ - ۱۵x > ۰ \Rightarrow x(x - ۱۵) > ۰ \Rightarrow D_g = (-\infty, ۰) \cup (۱۵, +\infty)$$
$$D_{fog} = \{x | x \in D_g, g(x) \in D_f\}$$
$$= \left\{ x | \underbrace{x \in (-\infty, ۰) \cup (۱۵, +\infty)}_{(*)}, \log(x^۲ - ۱۵x) \leq ۲ \right\}$$
$$\log(x^۲ - ۱۵x) \leq \log_{۱۰}^{۱۰۰} \Rightarrow x^۲ - ۱۵x \leq ۱۰۰ \Rightarrow x^۲ - ۱۵x - ۱۰۰ \leq ۰$$
$$\Rightarrow (x - ۲۰)(x + ۵) \leq ۰ \Rightarrow x \in [-۵, ۲۰] \; (**)$$

باید از (*) و (**) اشتراک گرفت؛ بنابراین مجموعهٔ جواب برابر است با:

$$\xrightarrow{(**),(*)} x \in [-۵, ۰) \cup (۱۵, ۲۰]$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۸۹ گزینه ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

گام اول

در ضابطهٔ $g(x)$، به‌جای x ضابطهٔ $f(x)$ را جایگذاری می‌کنیم.

گام دوم

$$g(f(x)) = g\left(\frac{۲x - ۱}{x + ۱}\right) = \frac{۲ \times \frac{۲x - ۱}{x + ۱} + ۲}{۲ - \frac{۲x - ۱}{x + ۱}}$$
$$= \frac{\frac{۴x - ۲ + ۲x + ۲}{x + ۱}}{\frac{۲x + ۲ - ۲x + ۱}{x + ۱}} = \frac{۶x}{۳} = ۲x \Rightarrow g(f(x)) = ۲x$$

۹۰ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

گام اول

باتوجه‌به اینکه $f^{-۱}(g(۲a)) = ۶$ است، می‌توان نتیجه گرفت: $g(۲a) = f(۶)$

گام دوم

$$g(x) = \frac{x}{x - ۱} \Rightarrow g(۲a) = \frac{۲a}{۲a - ۱} = f(۶) = ۳$$
$$\Rightarrow ۲a = ۳(۲a - ۱) \Rightarrow ۲a = ۶a - ۳ \Rightarrow ۴a = ۳ \Rightarrow a = \frac{۳}{۴}$$

۹۱ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

گام اول

می‌دانیم اگر نقطهٔ $A(\alpha, \beta)$ در ضابطهٔ تابع صدق کند، نقطه به مختصات $A'(\beta, \alpha)$ در ضابطهٔ وارون تابع صدق می‌کند.

گام دوم

$$x = ۴ \Rightarrow f(۴) = \sqrt{۴} = ۲ \Rightarrow (۴, ۲) \in f \Rightarrow (۲, ۴) \in f^{-۱}$$

با استفاده از این نقطه گزینه‌های ۱ و ۴ نمی‌توانند جواب تست باشند.

$$x = -۴ \Rightarrow f(-۴) = -\sqrt{۴} = -۲ \Rightarrow (-۴, -۲) \in f \Rightarrow (-۲, -۴) \in f^{-۱}$$

باتوجه‌به این دو مثال ضابطهٔ وارون تابع به صورت $f^{-۱}(x) = x\,|x|$ خواهد بود.

۹۲ گزینه ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

گام اول

دامنهٔ تابع gof از رابطهٔ $\{x \in D_f \,|\, f(x) \in D_g\}$ $D_{gof} =$ به دست می‌آید.

گام دوم

$$f(x) = \frac{۱ + x^۲}{۱ - x^۲} \Rightarrow ۱ - x^۲ = ۰ \Rightarrow x^۲ = ۱ \Rightarrow x = \pm ۱$$

$$\Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{\pm ۱\}$$

$$g(x) = \sqrt{x - x^۲} \Rightarrow x - x^۲ \geq ۰ \Rightarrow x(۱ - x) \geq ۰ \Rightarrow ۰ \leq x \leq ۱$$

$$\Rightarrow D_g = [۰, ۱]$$

$$D_{gof} = \{x \in \mathbb{R} - \{\pm ۱\} \,|\, \frac{۱ + x^۲}{۱ - x^۲} \in [۰, ۱]\}$$

$$۰ \leq \frac{۱ + x^۲}{۱ - x^۲} \leq ۱ \Rightarrow \begin{cases} \frac{۱ + x^۲}{۱ - x^۲} \geq ۰ \Rightarrow ۱ - x^۲ > ۰ \Rightarrow x^۲ < ۱ \Rightarrow -۱ < x < ۱ \quad (۱) \\ \frac{۱ + x^۲}{۱ - x^۲} \leq ۱ \Rightarrow \frac{۱ + x^۲}{۱ - x^۲} - ۱ \leq ۰ \Rightarrow \frac{۱ + x^۲ - ۱ + x^۲}{۱ - x^۲} \leq ۰ \\ \Rightarrow \frac{۲x^۲}{۱ - x^۲} \leq ۰ \Rightarrow ۱ - x^۲ < ۰ \Rightarrow x^۲ > ۱ \\ \Rightarrow x \in (-\infty, -۱) \cup (۱, +\infty) \cup \{۰\} \quad (۲) \end{cases}$$

$$(۱) \cap (۲) : x \in \{۰\}$$

۹۳ گزینه ۳

$$g(x) = \frac{۱ - ۳x}{x + ۲} \quad , \quad f(x) = \frac{۲x + ۳}{۲ - x}$$

$$g(f(x)) = \frac{۱ - ۳(\frac{۲x + ۳}{۲ - x})}{(\frac{۲x + ۳}{۲ - x}) + ۲} \Rightarrow g(f(x)) = \frac{۱ - \frac{۶x + ۹}{۲ - x}}{\frac{۲x + ۳}{۲ - x} + ۲}$$

$$\Rightarrow g(f(x)) = \frac{\frac{۲ - x - ۶x - ۹}{\cancel{۲ - x}}}{\frac{\cancel{۲x} + ۳ + ۴ - \cancel{۲x}}{\cancel{۲ - x}}} \Rightarrow g(f(x)) = \frac{-۷x - ۷}{۷} \Rightarrow g(f(x)) = -x - ۱$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۹۴ گزینه ۲

$$f(x)=\frac{۱-x^۲}{۱+x^۲}\Rightarrow ۱+x^۲=۰\Rightarrow x^۲=-۱\quad \text{غ.ق.ق}\Rightarrow D_f=\mathbb{R}$$

$$g(x)=\sqrt{x-x^۲}\Rightarrow x-x^۲\geq ۰\Rightarrow x(۱-x)\geq ۰\Rightarrow ۰\leq x\leq ۱\Rightarrow D_g:[۰,۱]$$

$$D_{gof}:\{x\in D_f|f(x)\in D_g\}=\{x\in\mathbb{R}|۰\leq\frac{۱-x^۲}{۱+x^۲}\leq ۱\}$$

همواره داریم $\frac{۱-x^۲}{۱+x^۲}\leq ۱$، درنتیجه:

$$\frac{۱-x^۲}{۱+x^۲}\geq ۰\xrightarrow{۱+x^۲>۰}۱-x^۲\geq ۰\Rightarrow x\in[-۱,۱]$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

۹۵ گزینه ۲

ضابطهٔ تابع وارون را به دست می‌آوریم:

$$y=\frac{x+۴}{x-۲}\Rightarrow yx-۲y=x+۴\Rightarrow yx-x=۲y+۴$$

$$\Rightarrow x(y-۱)=۲y+۴\Rightarrow x=\frac{۲y+۴}{y-۱}\Rightarrow y^{-۱}=\frac{۲x+۴}{x-۱}$$

با مساوی قرار دادن ضابطهٔ تابع با وارون آن نقطهٔ تقاطع را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{x+۴}{x-۲}=\frac{۲x+۴}{x-۱}\Rightarrow x^۲+۳x-۴=۲x^۲+\cancel{۴x}-\cancel{۴x}-۸$$

$$\Rightarrow x^۲-۳x-۴=۰\Rightarrow (x-۴)(x+۱)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=-۱\\x=+۴\end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۹۶ گزینه ۲

$$g^{-۱}of^{-۱}(a)=g^{-۱}(f^{-۱}(a))=۸\Rightarrow(f^{-۱}(a),۸)\in g^{-۱}$$
$$\Rightarrow(۸,f^{-۱}(a))\in g\Rightarrow g(۸)=f^{-۱}(a)\quad(*)$$
$$g(x)=\sqrt{۵x+۹}\Rightarrow g(۸)=\sqrt{۴۹}\Rightarrow g(۸)=۷$$
$$\xrightarrow{(*)}f^{-۱}(a)=۷\Rightarrow(a,۷)\in f^{-۱}\Rightarrow(۷,a)\in f\Rightarrow a=۳$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۹۷ گزینه ۴

راه‌حل تستی:

می‌توانیم از روش رد گزینه استفاده نماییم:

$x=۰$ ⇐ غ.ق.ق ⇐ گزینهٔ (۲) حذف می‌شود.

$x=۱$ ⇐ غ.ق.ق ⇐ گزینهٔ (۱) و (۳) حذف می‌شوند.

راه‌حل تشریحی:

$$\frac{۲}{x^۲}-\frac{۹}{۲}\geq ۰\Rightarrow\frac{۴-۹x^۲}{۲x^۲}\geq ۰\Rightarrow ۴-۹x^۲\geq ۰\xrightarrow{x\neq ۰}x^۲\leq\frac{۴}{۹}\xrightarrow{x\neq ۰}-\frac{۲}{۳}\leq x\leq\frac{۲}{۳}$$

ازطرفی چون $x=۰$ است، پس گزینهٔ (۴) قابل‌قبول است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۹۸

گزینهٔ ۱

اگر خط $۳y - ۲x = ۴$ را به‌صورت یک تابع در نظر بگیریم، قرینهٔ خط $۳y - ۲x = ۴$ نسبت به خط $y = x$ همان وارون تابع است، بنابراین داریم:

$$۳y - ۴ = ۲x \Rightarrow x = \frac{۳y - ۴}{۲}$$

$$\Rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{۳x - ۴}{۲} = \frac{۳}{۲}x - ۲ \Rightarrow \text{عرض از مبدأ} = -۲$$

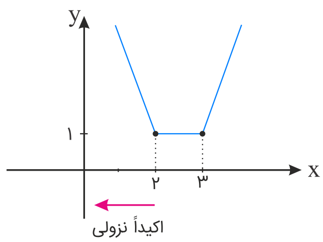
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۴ ۱۴۰۱

۹۹

گزینهٔ ۱

$$x \le ۲ \Rightarrow f(x) = -(x - ۲) - (x - ۳) = -۲x + ۵$$
$$۲ < x < ۳ \Rightarrow f(x) = (x - ۲) - (x - ۳) = ۱$$
$$x \ge ۳ \Rightarrow f(x) = x - ۲ + x - ۳ = ۲x - ۵$$



بنابراین:

$$x \le ۲ \Rightarrow -۲x + ۵ = ۲x^۲ - x - ۱۰ \Rightarrow ۲x^۲ + x - ۱۵ = ۰$$

$$(۲x - ۵)(x + ۳) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۳ & \checkmark \\ x = \frac{۵}{۲} & \times \end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

۱۰۰

گزینهٔ ۴

راه‌حل اول:

$$f(۲x - ۳) = ۴x^۲ - ۱۴x + ۱۳$$

$$x = ۱ :\ f(-۱) = ۴ - ۱۴ + ۱۳ = ۳$$

فقط در گزینهٔ "۴"، $f(-۱) = ۳$ است.

راه‌حل دوم:

$$۲x - ۳ = t \Rightarrow x = \frac{t + ۳}{۲}$$

$$f(t) = ۴(\frac{t + ۳}{۲})^۲ - ۱۴(\frac{t + ۳}{۲}) + ۱۳$$

$$= t^۲ + ۶t + ۹ - ۷t - ۲۱ + ۱۳ = t^۲ - t + ۱$$

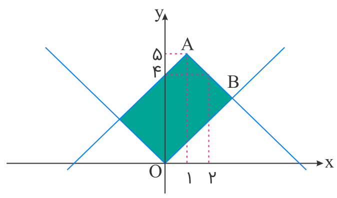
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

۱۰۱ گزینه ۴

نمودار دو تابع را رسم می‌کنیم.

x	۰	۱	۲
$y = ۵ - \lvert x - ۱\rvert$	۴	۵	۴

x	-۱	۰	۱
$y = \lvert x\rvert$	۱	۰	۱



نقاط برخورد دو تابع را محاسبه می‌کنیم.

$$۵ - \lvert x-۱\rvert = \lvert x\rvert \Rightarrow \lvert x\rvert + \lvert x-۱\rvert = ۵ \Rightarrow \begin{cases} x + x - ۱ = ۵ \Rightarrow x = ۳ \\ -x - x + ۱ = ۵ \Rightarrow x = -۲ \end{cases}$$

خطوط بر هم عمودند، پس شکل موردنظر یک مستطیل است. فقط مختصات یکی از نقاط برخورد (مانند $B(۳,۳)$) را لازم داریم تا مساحت مستطیل به دست آید. طول و عرض برابر است با:

$$\lvert AB\rvert = \sqrt{(۳-۱)^۲ + (۳-۵)^۲} = \sqrt{۴+۴} = ۲\sqrt{۲}$$

$$\lvert BO\rvert = \sqrt{۳^۲ + ۳^۲} = \sqrt{۱۸} = ۳\sqrt{۲}$$

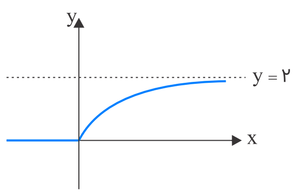
$$S = \lvert AB\rvert \times \lvert BO\rvert = ۳\sqrt{۲} \times ۲\sqrt{۲} = ۱۲$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

۱۰۲ گزینه ۲

$$(\frac{f}{g})(x) = \frac{x + \lvert x\rvert}{\lvert x+۱\rvert + ۱} = \begin{cases} ۰ & ; x \le ۰ \\ \dfrac{۲x}{x+۲} & ; x > ۰ \end{cases}$$

به کمک نمودار برد تابع راحت‌تر محاسبه می‌شود.



پس برد تابع $\frac{f}{g}(x)$ برابر $[۰, ۲)$ خواهد بود.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

۱۰۳ گزینه ۳

$$f(x)=\sqrt{x}\xrightarrow[\text{محور yها}]{\text{قرینه نسبت به}}y=\sqrt{-x}$$

$$\xrightarrow{\text{۲ واحد به راست}}y=\sqrt{-(x-۲)}=\sqrt{-x+۲}$$

برای یافتن نقاط تلاقی نمودار توابع $y=\sqrt{-x+۲}$ و $y=x$ (نیمساز ناحیهٔ اول و سوم)، آن‌ها را مساوی هم قرار می‌دهیم:

$$\sqrt{-x+۲}=x\quad(*)\xrightarrow{\text{به توان ۲}}-x+۲=x^۲\Rightarrow x^۲+x-۲=۰$$

$$\Rightarrow(x+۲)(x-۱)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۱\\ x=-۲\quad\text{غ.ق.ق}\end{cases}$$

$x=-۲$ غیرقابل‌قبول است، زیرا در معادلهٔ $(*)$ صدق نمی‌کند.

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۸
قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۸
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

۱۰۴ گزینه ۴

$$(x+۱)f(x)\geq ۰$$

$$(x+۱)f(x)=۰\Rightarrow\begin{cases}x+۱=۰\Rightarrow x=-۱\\ f(x)=۰\Rightarrow x=-۳,-۱,۲\end{cases}$$

x	$-\infty$		-۳		-۱		۲		$+\infty$
(x+۱)f(x)		+	۰	-	۰	-	۰	+	

دامنهٔ تابع به‌صورت $(-\infty,-۳]\cup[۲,+\infty)\cup\{-۱\}$ است که طبق گفتهٔ مسئله، دامنهٔ تابع غیرنقطه‌ای به‌صورت $\mathbb{R}-(-۳,۲)$ خواهد بود.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

۱۰۵ گزینه ۱

توابع $fog(x)$ و $gof(x)$ را تشکیل می‌دهیم و آن‌ها را برابر می‌گذاریم:

$$fog(x)=f(x+۴)=\frac{۲(x+۴)-۱}{(x+۴)+۲}=\frac{۲x+۷}{x+۶}$$

$$gof(x)=g(\frac{۲x-۱}{x+۲})=\frac{۲x-۱}{x+۲}+۴=\frac{۲x-۱+۴x+۸}{x+۲}=\frac{۶x+۷}{x+۲}$$

$$\xrightarrow{\text{تساوی}}\frac{۲x+۷}{x+۶}=\frac{۶x+۷}{x+۲}\Rightarrow(۲x+۷)(x+۲)=(۶x+۷)(x+۶)$$

$$\Rightarrow ۲x^۲+۴x+۷x+۱۴=۶x^۲+۳۶x+۷x+۴۲$$

$$\Rightarrow ۴x^۲+۳۲x+۲۸=۰\xrightarrow{\div۴}x^۲+۸x+۷=۰$$

$$\Rightarrow(x+۷)(x+۱)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=-۷\\ x=-۱\end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

۱۰۶ گزینه ۳

$$f(x) = ۲ - |x+۱| = \begin{cases} x+۳ & ; x \leq -۱ \\ -x+۱ & ; x > -۱ \end{cases}$$

$$g(x) = x + |x| = \begin{cases} ۰ & ; x \leq ۰ \\ ۲x & ; x > ۰ \end{cases}$$

$$y = (\frac{f}{g})(x) = \frac{۲ - |x+۱|}{x+|x|} = \begin{cases} \text{ت.ن} & ; x \leq ۰ \\ \frac{۱-x}{۲x} & ; x > ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = \frac{۱}{۲x} - \frac{۱}{۲} \quad ; x > ۰$$

$$x > ۰ \Rightarrow \frac{۱}{x} > ۰ \Rightarrow \frac{۱}{۲x} > ۰ \Rightarrow \frac{۱}{۲x} - \frac{۱}{۲} > -\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow y > -\frac{۱}{۲} \Rightarrow R_y = (-\frac{۱}{۲}, +\infty)$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

۱۰۷ گزینه ۴

$$[x-۲] = ۱ \Rightarrow ۱ \leq x-۲ < ۲ \Rightarrow ۳ \leq x < ۴$$

اگر $۳ \leq x < ۴$ باشد، پس $x - ۳ \geq ۰$ و $x - ۴ < ۰$ خواهد بود.

$$f(x) = |\underbrace{x-۳}_{\text{مثبت}}| - |\underbrace{x-۴}_{\text{منفی}}| = x - ۳ + (x-۴) = ۲x - ۷$$

$$f(x) = g(x) \Rightarrow ۲x - ۷ = ۲x^۲ + x - ۱۷ \Rightarrow ۲x^۲ - x - ۱۰ = ۰$$

$$\Rightarrow (۲x-۵)(x+۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{۵}{۲} & \times \\ x = -۲ & \times \end{cases}$$

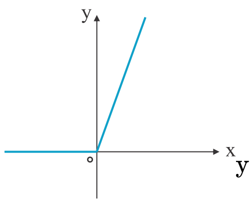
هیچ‌کدام از جواب‌های به‌دست‌آمده در فاصلهٔ $۳ \leq x < ۴$ نیستند؛ پس معادلهٔ $f(x) = g(x)$ هیچ جوابی ندارد.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

۱۰۸ گزینه ۲

$$y = x + |x| = \begin{cases} x + x & ; x \geq ۰ \\ x - x & ; x < ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = \begin{cases} ۲x & ; x \geq ۰ \\ ۰ & ; x < ۰ \end{cases}$$



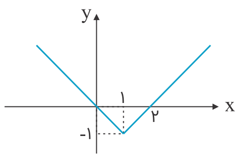
بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ ۱:

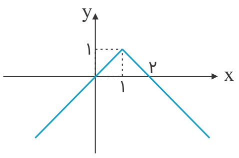
$$y = x - |x| = \begin{cases} x - x & ; x \geq ۰ \\ x + x & ; x < ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = \begin{cases} ۰ & ; x \geq ۰ \\ ۲x & ; x < ۰ \end{cases}$$

گزینه‌های ۳ و ۴ نیز به‌صورت زیر می‌باشند:



گزینهٔ ۳



گزینهٔ ۴

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۳۹۸

۱۰۹ گزینه ۱

$$f^{-۱} = \{(۲,۱), (۵,۲), (۴,۳), (۶,۴)\}$$
$$g = \{(۲,۳), (۴,۲), (۵,۶), (۳,۱)\}$$

$$\left.\begin{array}{l} ۲ \xrightarrow{f^{-۱}} ۱ \xrightarrow{g} \times \\ ۵ \xrightarrow{f^{-۱}} ۲ \xrightarrow{g} ۳ \\ ۴ \xrightarrow{f^{-۱}} ۳ \xrightarrow{g} ۱ \\ ۶ \xrightarrow{f^{-۱}} ۴ \xrightarrow{g} ۲ \end{array}\right\} \Rightarrow gof^{-۱} = \{(۵,۳), (۴,۱), (۶,۲)\}$$

حال اگر فرض کنیم $h = gof^{-۱}$ باشد، خواستهٔ مسئله $\frac{g}{h}$ است که باید دامنه‌های مشترک را در نظر بگیریم و بردها را بر هم تقسیم کنیم:

$$D_h \cap D_g = \{۵,۴\}$$

$$\frac{g}{h} = \left\{(۵, \frac{۶}{۳}), (۴, \frac{۲}{۱})\right\} = \{(۵,۲), (۴,۲)\}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

۱۱۰ گزینه ۴

تابع ثابت است، پس عضوهای دوم زوج مرتب‌ها همگی برابرند:

$$\begin{cases} 3m+2=8 \Rightarrow 3m=6 \Rightarrow m=2 \\ t=8 \\ n^2-2n=8 \Rightarrow n^2-2n-8=0 \Rightarrow (n-4)(n+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} n=4 & \text{ق.ق} \\ n=-2 & \text{غ.ق.ق} \end{cases} \end{cases}$$

توجه کنید که اگر $n=-2$ باشد، تابع چهار عضوی می‌شود. بنابراین $n=-2$ قابل‌قبول نیست.

$$\Rightarrow m+n+t=2+4+8=14$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۳۹۸

۱۱۱ گزینه ۱

$$D_{g-f}=D_g \cap D_f=\{1,4,2\}$$

$$g-f=\{(1,3-7),(2,6-5),(4,9-6)\}$$

$$=\{(1,-4),(2,1),(4,3)\} \Rightarrow \text{برد}=\{-4,1,3\}$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۳۹۸

۱۱۲ گزینه ۴

$$f(\frac{9}{4})=[\frac{9}{4}+\frac{3}{2}]-[-\frac{9}{4}]=[\frac{15}{4}]-[-\frac{9}{4}]=3-(-3)=6$$

$$f(-\frac{1}{2})=[-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}]-[+\frac{1}{2}]=[1]-[\frac{1}{2}]=1-0=1$$

$$\Rightarrow f(\frac{9}{4})+f(-\frac{1}{2})=6+1=7$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۳۹۸

۱۱۳ گزینه ۳

$$\begin{cases} (3,a+2b)\in f \\ (3,7)\in f \end{cases} \xrightarrow{\text{تابع است } f} a+2b=7$$

$$\begin{cases} (5,4)\in f \\ (5,2a-b)\in f \end{cases} \xrightarrow{\text{تابع است } f} 2a-b=4$$

حال برای به دست آوردن a و b ، دستگاه $\begin{cases} a+2b=7 \\ 2a-b=4 \end{cases}$ را حل می‌کنیم:

$$\times(-2)\begin{cases} a+2b=7 \\ 2a-b=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{-2a}-4b=-14 \\ \cancel{2a}-b=4 \end{cases}$$

$$-5b=-10 \Rightarrow b=2$$

$$a+2b=7 \xrightarrow{b=2} a+4=7 \Rightarrow a=3$$

$$\Rightarrow a^2-b^2=9-4=5$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۳۹۸

۱۱۴ گزینه ۴

$$f(x)=x^{۲}-۲x-۳=y\Rightarrow x^{۲}-۲x+۱=y+۴$$
$$\Rightarrow (x-۱)^{۲}=y+۴\xrightarrow{\text{جذر}}|x-۱|=\sqrt{y+۴}$$
$$\xrightarrow{x\geq ۱} x-۱=\sqrt{y+۴}\Rightarrow x=\sqrt{y+۴}+۱\Rightarrow f^{-۱}(x)=\sqrt{x+۴}+۱$$

حال $f^{-۱}$ را با g قطع می‌دهیم:

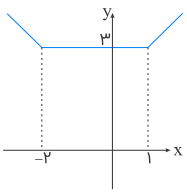
$$\sqrt{x+۴}+۱=\frac{x-۹}{۲}\Rightarrow ۲\sqrt{x+۴}=x-۱۱\quad (۱)$$

با امتحان کردن گزینه‌ها به راحتی معلوم می‌شود که $x=۲۱$ در معادلهٔ (۱) صدق می‌کند.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۱۱۵ گزینه ۱

$$f(x)=|x+۲|+|x-۱|=\begin{cases}۲x+۱ & ;x>۱\\ ۳ & ;-۲\leq x\leq ۱\\ -۲x-۱ & ;x<-۲\end{cases}$$



باتوجه‌به نمودار تابع گلدانی $y=|x+۲|+|x-۱|$، در فاصلهٔ $(-\infty,-۲)$ تابع نزولی اکید است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۱۱۶ گزینه ۱

راه‌حل اول:

اگر تابع $y=-x^{۲}+۲x+۵$ را ۳ واحد به طرف xهای مثبت انتقال دهیم، تابع به فرم $f(x)=-(x-۳)^{۲}+۲(x-۳)+۵$ تبدیل می‌شود و اگر تابع $f(x)$ را دو واحد به سمت yهای منفی انتقال دهیم، نمودار جدید با ضابطهٔ $g(x)=f(x)-۲$ خواهد بود.

$$g(x)=f(x)-۲=-(x-۳)^{۲}+۲(x-۳)+۵-۲=-\left(x^{۲}-۶x+۹\right)+۲x-۶+۵-۲$$
$$\Rightarrow g(x)=-x^{۲}+۶x-۹+۲x-۳=-x^{۲}+۸x-۱۲$$

حال باید $g(x)$ بالای نیمساز ربع اول و سوم، یعنی $y=x$ قرار گیرد.

$$g(x)>x\Rightarrow -x^{۲}+۸x-۱۲>x$$
$$\Rightarrow x^{۲}-۷x+۱۲<۰\Rightarrow \underbrace{(x-۳)(x-۴)}_{h(x)}<۰\quad (*)$$

x	$-\infty$		۳		۴		$+\infty$
h(x)		+	۰	−	۰	+	

$$h(x)<۰\Rightarrow x\in(۳,۴)$$

راه‌حل دوم: (عدد گذاری)

در صورتی که در (*) قرار دهیم: $x=۴$ ، داریم: $۰<۰$ که غیرقابل‌قبول است، بنابراین گزینه‌های ۲، ۳ و ۴ نادرست است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

۱۱۷ گزینه ۴

$$g^{-1}=\{(۳,۲),(۲,۴),(۶,۵),(۱,۳)\}$$
$$f=\{(۱,۲),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۶)\}$$

حال $g^{-1}of$ را حساب می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} ۱\xrightarrow{f}۲\xrightarrow{g^{-1}}۴ \\ ۲\xrightarrow{f}۵\xrightarrow{g^{-1}}\times \\ ۳\xrightarrow{f}۴\xrightarrow{g^{-1}}\times \\ ۴\xrightarrow{f}۶\xrightarrow{g^{-1}}۵ \end{array}\right\}\Rightarrow g^{-1}of=\{(۱,۴),(۴,۵)\}$$

فرض می‌کنیم که $h=g^{-1}of$ باشد. خواستهٔ مسئله $h-f$ است که باید در دامنهٔ مشترک، عرض‌ها را از هم کم کنیم.

$$D_{h-f}=D_h\cap D_f=\{۱,۴\}$$
$$h-f=\{(۱,۴-۲),(۴,۵-۶)\}=\{(۱,۲),(۴,-۱)\}$$

پس برد تابع $h-f$ برابر $\{۲,-۱\}$ است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

۱۱۸ گزینه ۱

اگر نمودار $y=x^۲-x-۳$ را ۲ واحد به‌طرف xهای منفی انتقال دهیم، $f(x)=(x+۲)^۲-(x+۲)-۳$ به دست می‌آید. حال $f(x)$ را ۹ واحد به‌طرف yهای منفی منتقل می‌کنیم، $g(x)=f(x)-۹$ به دست می‌آید.

$$g(x)=x^۲+۴x+۴-x-۲-۳-۹=x^۲+۳x-۱۰$$

حال $g(x)$ را کوچک‌تر از صفر قرار می‌دهیم.

$$x^۲+۳x-۱۰<۰\Rightarrow(x-۲)(x+۵)<۰\Rightarrow-۵<x<۲$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

۱۱۹ گزینه ۳

ابتدا دامنهٔ تابع $g\times f$ را به دست می‌آوریم:

$$D_{g\times f}=D_f\cap D_g=\{۱,۲,۴,۳\}\cap\{۳,۲,۶,۱\}=\{۱,۲,۳\}$$

مقادیر تابع $g\times f$ را به ازای دامنهٔ به‌دست‌آمده باتوجه‌به رابطهٔ $(g\times f)(x)=g(x)\times f(x)$ به دست می‌آوریم:

$$\Rightarrow g\times f=\{(۱,۸\times۲),(۲,۳\times۴),(۳,۲\times۳)\}$$
$$\Rightarrow g\times f=\{(۱,۱۶),(۲,۱۲),(۳,۶)\}$$
$$\Rightarrow \text{برد } g\times f=\{۱۶,۱۲,۶\}$$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۳۹۸

۱۲۰ گزینه ۱

برای زوج‌های مرتب که روی نیمساز ناحیهٔ اول و سوم قرار دارند، مؤلفه‌های اول و دوم برابرند:

$$n^2 - 3n = 4 \Rightarrow n^2 - 3n - 4 = 0 \Rightarrow (n+1)(n-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = -1 \\ n = 4 \end{cases} \quad (I)$$

$$\Rightarrow n^2 + n = 20 \Rightarrow n^2 + n - 20 = 0 \Rightarrow (n-4)(n+5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = 4 \\ n = -5 \end{cases} \quad (II)$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک } (II),(I)} n = 4$$

$$m + n = 1 \xrightarrow{n=4} m + 4 = 1 \Rightarrow m = -3$$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۳۹۸

۱۲۱ گزینه ۱

اعداد داده‌شده را در ضابطهٔ تابع قرار می‌دهیم:

$$f(x) = 2[x] + [-x]$$

$$\Rightarrow f(-\frac{1}{2}) + f(\frac{3}{2}) = (2[-\frac{1}{2}] + [-(-\frac{1}{2})]) + (2[\frac{3}{2}] + [-\frac{3}{2}])$$

$$-1 < -\frac{1}{2} < 0 \Rightarrow [-\frac{1}{2}] = -1 \ , \ \ 0 < \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow [\frac{1}{2}] = 0$$

$$-2 < -\frac{3}{2} < -1 \Rightarrow [-\frac{3}{2}] = -2 \ , \ \ 1 < \frac{3}{2} < 2 \Rightarrow [\frac{3}{2}] = 1$$

$$\Rightarrow f(-\frac{1}{2}) + f(\frac{3}{2}) = (2 \times (-1) + 0) + (2 \times 1 + (-2)) = -2 + 0 = -2$$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۳۹۸

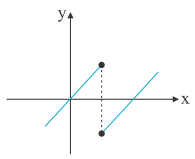
۱۲۲ گزینه ۴

اگر نمودار $y = |x|$ را دو واحد به سمت راست در راستای محور xها انتقال دهیم، نمودار $y_1 = |x-2|$ به دست می‌آید و اگر نمودار y_1 را دو واحد به سمت پایین در راستای محور yها انتقال دهیم، نمودار $y = |x-2| - 2$ به دست می‌آید. پس ضابطهٔ نمودار رسم‌شده به‌صورت $y = |x-2| - 2$ است.

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۳۹۸

۱۲۳ گزینه ۴

نمودار یک رابطه، زمانی تابع است که هر خط عمودی (موازی محور yها) نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند. در گزینهٔ ۴، هر خط عمودی (موازی محور yها) نمودار داده‌شده را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند، بنابراین تابع است. دقت کنید که در گزینهٔ ۱، خطی عمودی از روی خط‌چین می‌توان رسم کرد که نمودار را در دو نقطه قطع کند.



کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۳۹۸

۱۲۴ گزینه ۴

$$g\left(x\right)=x^{۳}+x \quad , \quad f\left(x\right)=\frac{۲}{۵}x-۴$$

اول $f^{-۱}\left(۸\right)$ را پیدا می‌کنیم:

$$f\left(x\right)=۸\Rightarrow\frac{۲}{۵}x-۴=۸\Rightarrow\frac{۲}{۵}x=۱۲\Rightarrow x=۳۰\Rightarrow f^{-۱}\left(۸\right)=۳۰$$

حال داریم:

$$g^{-۱}\left(f^{-۱}\left(۸\right)\right)=g^{-۱}\left(۳۰\right)$$
$$g\left(x\right)=۳۰\Rightarrow x^{۳}+x=۳۰\Rightarrow x=۳\Rightarrow g^{-۱}\left(۳۰\right)=۳$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۱۲۵ گزینه ۴

دامنهٔ تابع $[-۳,۳]-\{۱\}$ است. اگر $(k-۲,۳k+۲)$ زیرمجموعهٔ دامنهٔ تابع باشد، دو حالت رخ می‌دهد:

$$(۱):(k-۲,۳k+۲)\subseteq[-۳,۱)\Rightarrow\begin{cases}۳k+۲<۱\Rightarrow k<-\frac{۱}{۳}\\ k-۲\geq-۳\Rightarrow k\geq-۱\end{cases}\xrightarrow{\cap}k\in[-۱,\frac{-۱}{۳})$$

$$(۲):(k-۲,۳k+۲)\subseteq(۱,۳]\Rightarrow\begin{cases}۳k+۲\leq۳\Rightarrow k\leq\frac{۱}{۳}\\ k-۲>۱\Rightarrow k>۳\end{cases}\xrightarrow{\cap}\varnothing$$

پس گزینهٔ ۴ صحیح است.

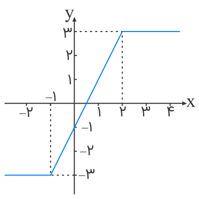
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

۱۲۶ گزینه ۳

x		-۱		۲	
x+۱	-	۰	+		+
x-۲	-		-	۰	+

$$x\leq-۱:f(x)=-x-۱+x-۲=-۳$$
$$-۱<x\leq۲:f(x)=x+۱+x-۲=۲x-۱$$
$$x>۲:f(x)=x+۱-x+۲=۳$$

نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



مطابق شکل در فاصلهٔ $(-۱,۲)$ اکیداً صعودی است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۱۲۷ گزینه ۱

سه نقطهٔ داده‌شده را در معادلهٔ سهمی جایگذاری می‌کنیم:

$$\begin{cases} (۰,۵) : c = ۵ \\ (-۲,۵) : ۴a - ۲b + ۵ = ۵ \Rightarrow ۴a - ۲b = ۰ \Rightarrow ۲a - b = ۰ \\ (۱,۱۱) : a + b + ۵ = ۱۱ \Rightarrow a + b = ۶ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲a - b = ۰ \\ a + b = ۶ \end{cases} \Rightarrow a = ۲, b = ۴$$

بنابراین معادلهٔ سهمی به‌صورت $y = ۲x^۲ + ۴x + ۵$ است. هرکدام از گزینه‌ها که در معادلهٔ سهمی صدق کند جواب مسئله است:

$$\text{گزینهٔ ۱} : (-۱,۳) \Rightarrow ۲(-۱)^۲ + ۴(-۱) + ۵ = ۳ \quad \checkmark$$

$$\text{گزینهٔ ۲} : (-۱,۴) \Rightarrow ۲(-۱)^۲ + ۴(-۱) + ۵ \neq ۴ \quad \times$$

$$\text{گزینهٔ ۳} : (۲,۹) \Rightarrow ۲(۲)^۲ + ۴(۲) + ۵ \neq ۹ \quad \times$$

$$\text{گزینهٔ ۴} : (۲,۱۵) \Rightarrow ۲(۲)^۲ + ۴(۲) + ۵ \neq ۱۵ \quad \times$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۱۲۸ گزینه ۴

مقدار تابع را به ازای مقادیر خواسته‌شده محاسبه کرده و حاصل را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = [۲x - ۱]$$

$$f(-\frac{۳}{۴}) = \left[۲(-\frac{۳}{۴}) - ۱\right] = \left[-\frac{۳}{۲} - ۱\right] = \left[-\frac{۵}{۲}\right] = -۳$$

$$f(\frac{\sqrt{۵}}{۲}) = \left[۲(\frac{\sqrt{۵}}{۲}) - ۱\right] = \left[\sqrt{۵} - ۱\right] = ۱$$

$$\Rightarrow f(-\frac{۳}{۴}) + f(\frac{\sqrt{۵}}{۲}) = -۳ + ۱ = -۲$$

نکته: برای محاسبهٔ $[\sqrt{۵} - ۱]$، می‌دانیم $\sqrt{۴} < \sqrt{۵} < \sqrt{۹}$. بنابراین:

$$۲ < \sqrt{۵} < ۳ \Rightarrow ۱ < \sqrt{۵} - ۱ < ۲ \Rightarrow \left[\sqrt{۵} - ۱\right] = ۱$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۳۹۹

۱۲۹ گزینه ۱

نکته: در صورتی دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ در نقطه‌ای به طول a مشترک‌اند که رابطهٔ $f(a)=g(a)$ برقرار باشد.
ابتدا ضابطهٔ تابع $g(x)$ را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم.

$$g(x)=\frac{|x|}{x}=\begin{cases}1 & ;x>0\\ -1 & ;x<0\end{cases}$$

بنابراین مقادیری که به ازای آن‌ها $f(x)=g(x)$ می‌باشد را به دست می‌آوریم.

$$x>0:\ f(x)=g(x)\Rightarrow x^2-2x-2=1\Rightarrow x^2-2x-3=0$$

$$(x+1)(x-3)=0\Rightarrow\begin{cases}x=-1 & \text{غ ق ق}\\ x=3 & \text{ق ق}\end{cases}$$

$$x<0: f(x)=g(x)\Rightarrow x^2-2x-2=-1\Rightarrow x^2-2x-1=0$$

$$\Delta=4-4(1)(-1)=8\Rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{2+2\sqrt{2}}{2}=1+\sqrt{2} & \text{غ ق ق}\\ x_2=\dfrac{2-2\sqrt{2}}{2}=1-\sqrt{2} & \text{ق ق}\end{cases}$$

بنابراین دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ در نقاط به طول $x=3$ و $x=1-\sqrt{2}$ با یکدیگر برابرند.

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۳۹۹

۱۳۰ گزینه ۲

نکته: عمل‌های جمع و تفریق و تقسیم روی دو تابع به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$$

همچنین دامنهٔ تعریف این توابع هم به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$D_{f\pm g}=D_f\cap D_g\quad D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x\,|g(x)=0\}$$

با استفاده از رابطهٔ بالا ابتدا دامنهٔ تعریف توابع $f+g$، $f-g$ و $\frac{f+g}{f-g}$ را به دست آورده و سپس برد تابع $\frac{f+g}{f-g}$ را به دست می‌آوریم.

$$f=\{(3,4),(2,6),(5,3),(1,5)\}\Rightarrow D_f=\{1,2,3,5\}$$

$$g=\{(5,6),(1,2),(3,2),(4,1)\}\Rightarrow D_g=\{1,3,4,5\}$$

$$\Rightarrow D_{f\pm g}=\{1,3,5\}$$

$$D_{\frac{f+g}{f-g}}=D_{f+g}\cap D_{f-g}\ -\{x\,|(f-g)(x)=0\}=D_{f\pm g}$$

$$f+g=\{(1,5+2),(3,4+2),(5,3+6)\}$$

$$=\{(1,7),(3,6),(5,9)\}$$

$$f-g=\{(1,5-2),(3,4-2),(5,3-6)\}$$

$$=\{(1,3),(3,2),(5,-3)\}$$

$$\frac{f+g}{f-g}=\left\{(1,\frac{7}{3}),(3,\frac{6}{2}),(5,\frac{9}{-3})\right\}$$

$$=\left\{(1,\frac{7}{3}),(3,3),(5,-3)\right\}$$

$$\Rightarrow R_{\frac{f+g}{f-g}}=\left\{\frac{7}{3},3,-3\right\}$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۳۹۹

۱۳۱ گزینه ۳

طبق سؤال نتیجه می‌گیریم که $P(۱) = ۸$ و $P(-\frac{۱}{۲}) = ۵$ است. همچنین داریم:

$$P(x) = (۲x^۲ - x - ۱)Q(x) + R(x) = ((x-۱)(۲x+۱))Q(x) + R(x) \quad ; R(x) = ax + b$$

بنابراین:

$$P(۱) = R(۱) = a + b = ۸$$
$$P(-\frac{۱}{۲}) = R(-\frac{۱}{۲}) = -\frac{۱}{۲}a + b = ۵$$
$$\begin{cases} a + b = ۸ \\ -\frac{۱}{۲}a + b = ۵ \end{cases} \Rightarrow \frac{۳}{۲}a = ۳ \Rightarrow a = ۲ \ , \ b = ۸ - ۲ = ۶$$

پس: $R(x) = ۲x + ۶$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۱۳۲ گزینه ۳

$g(x)$ وارون تابع $f(x)$ است، بنابراین:

$$g(x) = f^{-۱}(x)$$
$$g(۶) = f^{-۱}(۶) = a \Rightarrow f(a) = ۶ \Rightarrow a + \sqrt{a} = ۶ \Rightarrow a + \sqrt{a} - ۶ = ۰$$
$$\Rightarrow (\sqrt{a} - ۲)(\sqrt{a} + ۳) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{a} = ۲ \Rightarrow a = ۴ \\ \sqrt{a} = -۳ \quad \text{غ ق ق} \end{cases} \Rightarrow g(۶) = ۴$$
$$g(۱۲) = f^{-۱}(۱۲) = b \Rightarrow f(b) = ۱۲ \Rightarrow b + \sqrt{b} = ۱۲ \Rightarrow b + \sqrt{b} - ۱۲ = ۰$$
$$\Rightarrow (\sqrt{b} + ۴)(\sqrt{b} - ۳) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{b} = -۴ \quad \text{غ ق ق} \\ \sqrt{b} = ۳ \quad \Rightarrow b = ۹ \end{cases} \Rightarrow g(۱۲) = ۹$$

بنابراین داریم:

$$g(۶) + g(۱۲) = ۴ + ۹ = ۱۳$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۱۳۳ گزینه ۲

$$\text{نیمساز ناحیهٔ چهارم} : y = -x \ ; \ x > ۰$$

نمودار $f^{-۱}$ نیمساز ناحیهٔ چهارم را قطع می‌کند، بنابراین:

$$f^{-۱}(x) = -x \Rightarrow f(-x) = x \Rightarrow -x + \frac{۲}{x} = x \Rightarrow ۲x = \frac{۲}{x}$$
$$\Rightarrow x^۲ = ۱ \Rightarrow x = \pm ۱ \xrightarrow{x>۰} x = ۱$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۱۳۴ گزینه ۳

$$y=\sqrt{x}\xrightarrow[\text{مثبت محور x ها}]{\text{۱۲ واحد در جهت}}y=\sqrt{x-۱۲}\xrightarrow[\text{مثبت محور y ها}]{\text{۲ واحد در جهت}}y=\sqrt{x-۱۲}+۲$$

حال منحنی حاصل را با $f(x)=\sqrt{x}$ برابر قرار می‌دهیم تا محل برخورد به دست آید.

$$\sqrt{x-۱۲}+۲=\sqrt{x}\Rightarrow\sqrt{x-۱۲}=\sqrt{x}-۲$$

$$\xrightarrow{\text{توان}۲}\cancel{x}-۱۲=\cancel{x}+۴-۴\sqrt{x}\Rightarrow ۴\sqrt{x}=۱۶\Rightarrow x=۱۶$$

$x=۱۶$ را در $f(x)=\sqrt{x}$ جایگذاری می‌کنیم تا عرض محل برخورد نیز به دست آید:

$$f(۱۶)=\sqrt{۱۶}=۴\quad\Rightarrow A(۱۶,۴)$$

فاصلهٔ نقطهٔ A از مبدأ مختصات برابر است با:

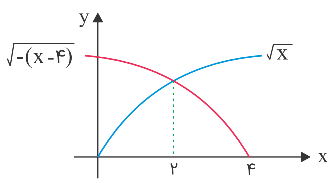
$$OA=\sqrt{۱۶^۲+۴^۲}=\sqrt{۱۶(۱۶+۱)}=۴\sqrt{۱۷}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۱۳۵ گزینه ۳

$$f(x)=\sqrt{x}\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور yها}}\sqrt{-x}\xrightarrow{\text{۴ واحد به راست}}\sqrt{-(x-۴)}$$

حال دو نمودار را رسم می‌کنیم:



$$\sqrt{x}=\sqrt{-(x-۴)}\xrightarrow{\text{به توان ۲}}|x|=|-(x-۴)|=|x-۴|$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=x-۴\Rightarrow ۰=-۴ & \times\\ x=-x+۴\Rightarrow ۲x=۴\Rightarrow x=۲ & \text{ق.ق}\end{cases}$$

بنابراین $x=۲$ محور تقارن دو نمودار است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۱۳۶ گزینه ۲

چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x^۲-۱$ بخش‌پذیر است، بنابراین $p(x)$ به ازای ریشه‌های $x^۲-۱$ برابر صفر است.

$$x^۲-۱=۰\Rightarrow x^۲=۱\Rightarrow x=۱,-۱$$

بنابراین داریم:

$$p(۱)=۰\,,p(-۱)=۰\quad(*)$$

اکنون باقی‌ماندهٔ تقسیم $Q(x)$ بر $x-۲$ را می‌خواهیم؛ یعنی باید $Q(۲)$ را محاسبه کنیم.

$$Q(x)=p(x-۱)+p(۱-x)$$

$$\xrightarrow{x=۲}Q(۲)=p(۲-۱)+p(۱-۲)=p(۱)+p(-۱)$$

$$\xrightarrow{(*)}Q(۲)=۰+۰=۰$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۱۳۷ گزینه ۱

داریم: $(g^{-1}of^{-1})(۲۰) = g^{-1}(f^{-1}(۲۰))$، پس کافی است $f^{-1}(۲۰)$ را یافته و در تابع g^{-1} قرار دهیم.
فرض کنیم $f^{-1}(۲۰) = a$ باشد، پس $f(a) = ۲۰$ است و داریم:

$$f(x) = x + \sqrt{x} \Rightarrow f(a) = a + \sqrt{a} = ۲۰ \Rightarrow a = ۱۶$$
$$\Rightarrow f^{-1}(۲۰) = ۱۶$$

بنابراین $g^{-1}(f^{-1}(۲۰)) = g^{-1}(۱۶)$. حال فرض می‌کنیم $g^{-1}(۱۶) = b$، پس $g(b) = ۱۶$ است. درنتیجه:

$$g(x) = \frac{۹x + ۶}{۱ - x} \Rightarrow g(b) = \frac{۹b + ۶}{۱ - b} = ۱۶ \Rightarrow ۹b + ۶ = ۱۶ - ۱۶b$$
$$\Rightarrow ۲۵b = ۱۰ \Rightarrow b = \frac{۱۰}{۲۵} = \frac{۲}{۵}$$
$$\Rightarrow g^{-1}(f^{-1}(۲۰)) = g^{-1}(۱۶) = \frac{۲}{۵}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۱۳۸ گزینه ۲

نکته: $۰ \leq x - [x] < ۱$
ابتدا تابع $g(x)$ را ساده می‌کنیم:

$$g(x) = -x^۲ + ۴x = -x^۲ + ۴x - ۴ + ۴$$
$$= -(x^۲ - ۴x + ۴) + ۴ = -(x - ۲)^۲ + ۴$$

اکنون تابع gof را تشکیل می‌دهیم:

$$g(f(x)) = -(۲x - [۲x] - ۲)^۲ + ۴$$

طبق نکته داریم:

$$۰ \leq ۲x - [۲x] < ۱ \xrightarrow{-۲} -۲ \leq ۲x - [۲x] - ۲ < -۱$$
$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} ۱ < (۲x - [۲x] - ۲)^۲ \leq ۴$$
$$\xrightarrow{\times(-۱)} -۴ \leq -(۲x - [۲x] - ۲)^۲ < -۱$$
$$\xrightarrow{+۴} ۰ \leq -(۲x - [۲x] - ۲)^۲ + ۴ < ۳$$
$$\Rightarrow ۰ \leq gof(x) < ۳ \Rightarrow R_{gof} = [۰, ۳)$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۱۳۹ گزینه ۴

مقدار تابع را به ازای مقادیر خواسته‌شده محاسبه کرده و سپس مجموع را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \left[1 - \frac{x}{2}\right] \Rightarrow f(\sqrt{2}) = \left[1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right] = 0$$

توجه کنید که:

$$1 < \sqrt{2} < 2 \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1 \Rightarrow -1 < -\frac{\sqrt{2}}{2} < -\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow 0 < 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{1}{2} \Rightarrow \left[1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right] = 0$$

$$f(-\frac{3}{2}) = \left[1 - \frac{(-\frac{3}{2})}{2}\right] = \left[1 + \frac{3}{4}\right] = \left[\frac{7}{4}\right] = 1$$

$$\Rightarrow f(\sqrt{2}) + f(-\frac{3}{2}) = 0 + 1 = 1$$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۴۰ گزینه ۱

نکته: اعمال جمع و تفریق و تقسیم روی توابع به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$$
$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

همچنین دامنهٔ تعریف این توابع هم به‌صورت زیر است:

$$D_{f\pm g} = D_f \cap D_g \quad , \quad D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \,|\, g(x) = 0\}$$

با استفاده از روابط بالا ابتدا دامنهٔ تعریف توابع $f+g$ و $\frac{f+g}{f}$ را مشخص کرده، سپس برد تابع موردنظر را به دست می‌آوریم:

$$f = \{(5,3), (1,5), (3,4), (6,2)\} \Rightarrow D_f = \{1, 3, 5, 6\}$$
$$g = \{(3,2), (5,6), (1,2), (2,1)\} \Rightarrow D_g = \{1, 2, 3, 5\}$$
$$\Rightarrow D_{f+g} = \{1, 3, 5\} \quad , \quad D_{\frac{f+g}{f}} = \{1, 3, 5\}$$
$$f + g = \{(1, 5+2), (3, 4+2), (5, 3+6)\} = \{(1,7), (3,6), (5,9)\}$$
$$\Rightarrow \frac{f+g}{f} = \left\{(1, \frac{7}{5}), (3, \frac{6}{4}), (5, \frac{9}{3})\right\} = \{(1, 1/4), (3, 1/5), (5, 3)\}$$
$$\Rightarrow R_{\frac{f+g}{f}} = \{1/4, 1/5, 3\}$$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۴۱ گزینه ۱

$$y = x^2 - 2x \xrightarrow[\text{محور x ها}]{\text{قرینه نسبت به}} y = -(x^2 - 2x) = -x^2 + 2x$$

$$\xrightarrow[\text{مثبت محور y ها}]{\text{۱۶ واحد انتقال در جهت}} y_1 = -x^2 + 2x + 16$$

حال معادلهٔ جدید را با معادلهٔ قبلی مساوی قرار می‌دهیم تا نقطهٔ برخورد را به دست آوریم:

$$y = y_1 \Rightarrow x^2 - 2x = -x^2 + 2x + 16 \Rightarrow 2x^2 - 4x - 16 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow (x-4)(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 & \text{ق.ق} \\ x = -2 & (\text{غ.ق.ق زیرا } x > 1) \end{cases}$$

$$x = 4 \Rightarrow y = 8 \Rightarrow A(4, 8)$$

فاصلهٔ نقطهٔ A از مبدأ مختصات را به دست می‌آوریم:

$$OA = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{16(1+4)} = 4\sqrt{5}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۴۲ گزینه ۳

$g(x)$ وارون تابع $f(x)$ است، بنابراین:

$$g(x) = f^{-1}(x)$$

$$g(3) = f^{-1}(3) = a \Rightarrow f(a) = 3 \Rightarrow a + 2\sqrt{a} = 3 \Rightarrow a + 2\sqrt{a} - 3 = 0$$

$$\Rightarrow (\sqrt{a} - 1)(\sqrt{a} + 3) = 0 \begin{cases} \sqrt{a} = 1 \Rightarrow a = 1 \\ \sqrt{a} = -3 \quad \text{غ ق ق} \end{cases} \Rightarrow g(3) = 1$$

$$g(15) = f^{-1}(15) = b \Rightarrow f(b) = 15 \Rightarrow b + 2\sqrt{b} = 15 \Rightarrow b + 2\sqrt{b} - 15 = 0$$

$$\Rightarrow (\sqrt{b} - 3)(\sqrt{b} + 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{b} = 3 \Rightarrow b = 9 \\ \sqrt{b} = -5 \quad \text{غ ق ق} \end{cases} \Rightarrow g(15) = 9$$

بنابراین داریم:

$$g(3) + g(15) = 1 + 9 = 10$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۴۳ گزینه ۴

داریم $(f^{-1}og^{-1})(-9) = f^{-1}(g^{-1}(-9))$. ابتدا $g^{-1}(-9)$ را می‌یابیم. فرض می‌کنیم $g^{-1}(-9) = a$ باشد، پس $g(a) = -9$ و داریم:

$$g(x) = \frac{3 - x}{2} \Rightarrow g(a) = \frac{3 - a}{2} = -9 \Rightarrow 3 - a = -18 \Rightarrow a = 21$$

پس کافی است $f^{-1}(21)$ را حساب کنیم. فرض می‌کنیم $f^{-1}(21) = b$ باشد، پس $f(b) = 21$ است و داریم:

$$f(x) = x^2 - 4x + 9 \Rightarrow f(b) = b^2 - 4b + 9 = 21 \Rightarrow b^2 - 4b - 12 = 0$$

$$\Rightarrow (b - 6)(b + 2) = 0 \xrightarrow{b \geq 2} b = 6$$

پس $(f^{-1}og^{-1})(-9) = 6$ است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۴۴ گزینه ۴

نیمساز ناحیهٔ دوم : $y = -x \;;\; x < ۰$

نمودار تابع f^{-1} نیمساز ناحیهٔ دوم را قطع می‌کند، پس:

$$f^{-1}(x) = -x \Rightarrow f(-x) = x$$
$$\Rightarrow -x + \frac{۱}{۲x} = x \Rightarrow \frac{۱}{۲x} = ۲x \Rightarrow ۴x^۲ = ۱ \Rightarrow x^۲ = \frac{۱}{۴}$$
$$\Rightarrow x = \pm\frac{۱}{۲} \xrightarrow{x<۰} x = -\frac{۱}{۲}$$

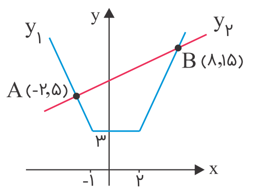
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۴۵ گزینه ۴

$$y_۱ = |x-۲| + |x+۱| \quad , \quad y_۲ = x + ۷$$
$$y_۱ = \begin{cases} -x+۲-x-۱ & ; x \le -۱ \\ -x+۲+x+۱ & ; -۱ < x \le ۲ \\ x-۲+x+۱ & ; x > ۲ \end{cases} \Rightarrow y_۱ = \begin{cases} -۲x+۱ & ; x \le -۱ \\ ۳ & ; -۱ < x \le ۲ \\ ۲x-۱ & ; x > ۲ \end{cases}$$

حال نمودار دو تابع $y_۱$ و $y_۲$ را رسم می‌کنیم:

$$x > ۲ : ۲x - ۱ = x + ۷ \Rightarrow x = ۸$$
$$x < -۱ : -۲x + ۱ = x + ۷ \Rightarrow x = -۲$$



$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^۲ + (y_B - y_A)^۲} = \sqrt{(۸-(-۲))^۲ + (۱۵-۵)^۲}$$
$$= \sqrt{۱۰۰ + ۱۰۰} = ۱۰\sqrt{۲}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۴۶ گزینه ۲

$$f(x) = (x-۱)^۲ \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به مبدأ}} -(-x-۱)^۲ = -(x+۱)^۲$$
$$\xrightarrow{\text{۴ واحد به بالا}} -(x+۱)^۲ + ۴$$

حال باید طول نقطهٔ تلاقی این دو منحنی را به دست آوریم؛ پس داریم:

$$(x-۱)^۲ = -(x+۱)^۲ + ۴ \Rightarrow x^۲ - ۲x + ۱ = -(x^۲ + ۲x + ۱) + ۴$$
$$\Rightarrow ۲x^۲ = ۲ \Rightarrow x = \pm ۱$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۴۷ گزینه ۳

باتوجه‌به اطلاعات صورت تست نمودار و خط در دو نقطهٔ A و B متقاطع‌اند، بنابراین در این نقاط با یکدیگر برابرند.

ابتدا ضابطهٔ نمودار $y = \frac{|۲x|}{x}$ را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$y = \frac{|۲x|}{x} = \begin{cases} \frac{۲x}{x} = ۲ & ; x > ۰ \\ \frac{-۲x}{x} = -۲ & ; x < ۰ \end{cases}$$

نقاطی که ضابطهٔ دو تابع با یکدیگر برابر است را به دست می‌آوریم. داریم:

$$x > ۰ : ۲x - ۱ = ۲ \Rightarrow ۲x = ۳ \Rightarrow x = \frac{۳}{۲} \; ; y = ۲ \; ; \; A(\frac{۳}{۲}, ۲)$$

$$x < ۰ : \; ۲x - ۱ = -۲ \Rightarrow ۲x = -۱ \Rightarrow x = \frac{-۱}{۲} \; ; y = -۲ \; ; \; B(-\frac{۱}{۲}, -۲)$$

بنابراین دو نمودار و خط در نقاط A و B با مختصات ذکرشده متقاطع‌اند. میانگین طول نقاط A و B برابر است با:

$$\frac{\frac{۳}{۲} - \frac{۱}{۲}}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۴۸ گزینه ۱

طبق صورت سؤال نتیجه می‌گیریم که $P\left(\frac{۱}{۲}\right) = ۰$، بنابراین:

$$۲(\frac{۱}{۲})^۴ + a(\frac{۱}{۲})^۳ + ۲(\frac{۱}{۲})^۲ - ۳(\frac{۱}{۲}) = ۰ \Rightarrow ۲(\frac{۱}{۱۶}) + a(\frac{۱}{۸}) + \frac{۱}{۲} - \frac{۳}{۲} = ۰$$
$$\Rightarrow \frac{۱}{۸} + \frac{a}{۸} - ۱ = ۰ \Rightarrow a = ۷$$

باقی‌ماندهٔ تقسیم $P\left(x\right)$ بر $x + ۲$ برابر با $P\left(-۲\right)$ است، پس داریم:

$$P\left(x\right) = ۲x^۴ + ۷x^۳ + ۲x^۲ - ۳x$$
$$\Rightarrow P\left(-۲\right) = ۲(-۲)^۴ + ۷(-۲)^۳ + ۲(-۲)^۲ - ۳(-۲) = ۳۲ - ۵۶ + ۸ + ۶ = -۱۰$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۴۹ گزینه ۱

باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x)$ بر $x - ۴$ برابر ۳ است، پس $p(۴) = ۳$.

باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x)$ بر $x + ۲$ برابر ۱ است، پس $p(-۲) = ۱$.

حال باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x^۲) + ۴p(-x)$ بر $x - ۲$ را می‌خواهیم، بنابراین $x = ۲$ را در آن جایگذاری می‌کنیم:

$$p(x^۲) + ۴p(-x) = p(۲^۲) + ۴p(-۲)$$
$$= p(۴) + ۴p(-۲) = ۳ + ۴ \times ۱ = ۷$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۵۰ گزینه ۳

نکته:

$$۰ \le x - [x] < ۱$$

ابتدا $g(x)$ را ساده می‌کنیم:

$$g(x) = \frac{۱ - ۲x}{x + ۱} = \frac{۱ - ۲x + ۲ - ۲}{x + ۱} = \frac{-۲x - ۲}{x + ۱} + \frac{۱ + ۲}{x + ۱} = -۲ + \frac{۳}{x + ۱}$$

اکنون تابع gof را تشکیل می‌دهیم:

$$g(f(x)) = -۲ + \frac{۳}{[x] - x + ۱}$$

طبق نکته داریم:

$$۰ \le x - [x] < ۱ \xrightarrow{\text{در } (-۱) \text{ ضرب می‌کنیم}} -۱ < [x] - x \le ۰$$
$$\xrightarrow{+۱} ۰ < [x] - x + ۱ \le ۱ \xrightarrow{\text{معکوس می‌کنیم}} ۱ \le \frac{۱}{[x] - x + ۱}$$
$$\xrightarrow{\times ۳} ۳ \le \frac{۳}{[x] - x + ۱} \xrightarrow{-۲} ۱ \le \frac{۳}{[x] - x + ۱} - ۲$$
$$\Rightarrow g(f(x)) \ge ۱ \Rightarrow R_{gof} = [۱, +\infty)$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۵۱ گزینه ۳

$$y = \sqrt{۴ - (x - k + ۲)} + k = \sqrt{-x + k + ۲} + k$$
$$A(۱, ۱) \in y \Rightarrow \sqrt{۱ + k} + k = ۱ \Rightarrow k = ۰$$
$$g(x) = y - ۱ \Rightarrow \sqrt{-x + ۲} - ۱ = ۰ \Rightarrow x = ۱$$

بهتر بود که جهت حرکت را اعلام می‌کرد.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

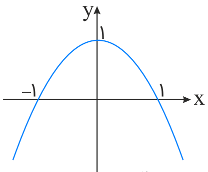
۱۵۲ گزینه ۲

$$f = \{(۰, ۰), (۱, ۱), (۲, ۴)\} \cup \{(۰, ۰ + ۰), (۰, ۰ + ۱), (۰, ۰ + ۲), (۱, ۱ + ۰), (۱, ۱ + ۱), (۱, ۱ + ۲), (۲, ۲ + ۰), (۲, ۲ + ۱), (۲, ۲ + ۲)\}$$
$$f = \{(۰, ۰), (۰, ۱), (۰, ۲), (۱, ۱), (۱, ۲), (۱, ۳), (۲, ۲), (۲, ۳), (۲, ۴)\}$$

زوج مرتب f دارای ۹ عضو است.

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۰

۱۵۳ گزینه ۳



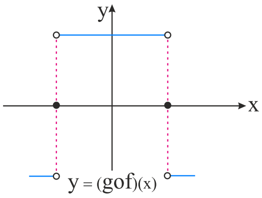
$f(x) = ۱ - x^۲$

$$-۱ < x < ۱ \Rightarrow f(x) > ۰ \Rightarrow g(f(x)) = ۱$$

$$|x| > ۱ \Rightarrow f(x) < ۰ \Rightarrow g(f(x)) = -۱$$

$$\begin{cases} x = ۱ \\ x = -۱ \end{cases} \Rightarrow f(x) = ۰ \Rightarrow g(f(x)) = ۰$$

$$(gof)(x) = \begin{cases} ۱ & ; |x| < ۱ \\ -۱ & ; |x| > ۱ \\ ۰ & ; |x| = ۱ \end{cases}$$



gof در دو نقطهٔ $x = ۱$ و $x = -۱$ ناپیوسته است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۱۵۴ گزینه ۲

$$-\frac{۱}{۲} \le x < -\frac{۱}{۳} \Rightarrow -\frac{۳}{۲} \le ۳x < -۱ \Rightarrow [۳x] = -۲ \Rightarrow y = ۳$$

$$-\frac{۱}{۳} \le x < ۰ \Rightarrow -۱ \le ۳x < ۰ \Rightarrow [۳x] = -۱ \Rightarrow y = ۱$$

$$۰ \le x < \frac{۱}{۳} \Rightarrow ۰ \le ۳x < ۱ \Rightarrow [۳x] = ۰ \Rightarrow y = -۱$$

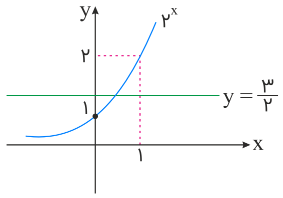
$$\frac{۱}{۳} \le x < \frac{۱}{۲} \Rightarrow ۱ \le ۳x < \frac{۳}{۲} \Rightarrow [۳x] = ۱ \Rightarrow y = ۱$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۱۵۵ گزینه ۳

$$۲^{|\sin x|} \xrightarrow{\text{سمت راست } \frac{\pi}{۲}} ۲^{\left|\sin\left(x-\frac{\pi}{۲}\right)\right|} = ۲^{|\cos x|} \xrightarrow{\text{به پایین } \frac{۳}{۲}} ۲^{|\cos x|} - \frac{۳}{۲} = ۰ \Rightarrow ۲^{|\cos x|} = \frac{۳}{۲}$$

نمودار ۲^x و $y = \frac{۳}{۲}$ را رسم می‌کنیم:



مطابق شکل به ازای یک مقدار x در فاصلهٔ $(۰, ۱)$، $۲^x = \frac{۳}{۲}$ می‌شود.

پس معادلهٔ $۲^{|\cos x|} = \frac{۳}{۲}$ در فاصلهٔ $[۰, \pi]$ دو جواب دارد، یکی در ناحیهٔ اول و یکی در ناحیهٔ دوم، چراکه در این نواحی $۰ \le |\cos x| \le ۱$ است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۱۵۶ گزینه ۲

روش اول: تشریحی

طبق تعریف تابع قدرمطلق، در فاصلهٔ $-\frac{۲}{۳} < x < -\frac{۱}{۳}$ تابع $|x| = -x$ است.

$$y = [-۲x + (-x)] + x = [-۳x] + x$$

برای تعیین $[-۳x]$ باید محدودهٔ تغییرات $-۳x$ را مشخص کنیم.

$$-\frac{۲}{۳} < x < -\frac{۱}{۳} \xrightarrow{\times(-۳)} ۱ < -۳x < ۲ \Rightarrow [-۳x] = ۱$$

بنابراین ضابطهٔ تابع در دامنهٔ موردنظر به‌صورت زیر است:

$$y = [-۲x + |x|] + x = [-۳x] + x = ۱ + x$$

روش دوم : تستی (عددگذاری)

عدد $x = -\frac{۱}{۲} = -۰/۵$ را که در دامنهٔ تابع قرار دارد، در ضابطهٔ تابع و هریک از گزینه‌ها جایگذاری می‌کنیم.

$$y = [-۲(-۰/۵) + |-۰/۵|] + (-۰/۵) = [۱ + ۰/۵] - ۰/۵$$
$$= [۱/۵] - ۰/۵ = ۱ - ۰/۵ = ۰/۵$$

(گزینهٔ ۱) $-۲(-۰/۵) = ۱$

(گزینهٔ ۲) $-۰/۵ + ۱ = ۰/۵$

(گزینهٔ ۳) $-۰/۵ - ۲ = -۲/۵$

(گزینهٔ ۴) $۲(-۰/۵) + \frac{۸}{۳} = -۱ + \frac{۸}{۳} = \frac{۵}{۳}$

فقط مقدار به‌دست‌آمده از گزینهٔ "۲" با مقدار تابع برابر است.

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۰

۱۵۷ گزینه ۳

منظور سوال از قرینهٔ نمودار تابع نسبت به خط $y = x$ وارون تابع است:

$$y = ۲ + \sqrt{x-۱} \Rightarrow y - ۲ = \sqrt{x-۱} \Rightarrow (y-۲)^۲ = x - ۱ \Rightarrow x = (y-۲)^۲ + ۱$$
$$f^{-۱}(x) = (x-۲)^۲ + ۱ \xrightarrow{\text{۲ واحد به راست}} (x-۴)^۲ + ۱ \xrightarrow{\text{۳ واحد پایین}} (x-۴)^۲ + ۱ - ۳ = (x-۴)^۲ - ۲$$
$$g(۴) = -۲$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۱۵۸ گزینه ۴

اگر نمودار تابع $y=-x^2$ را یک واحد در جهت مثبت محور xها و یک واحد در جهت مثبت محور yها انتقال دهیم، نمودار تابع $y=f(x)$ رسم می‌شود. طبق قوانین انتقال، ضابطه تابع $y=f(x)$ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$y=-(x-1)^2+1=-x^2+2x-1+1 \Rightarrow f(x)=-x^2+2x$$

اگر نمودار تابع $y=-x$ را یک واحد به موازات محور xها و در جهت مثبت انتقال دهیم، نمودار تابع $y=g(x)$ رسم می‌شود. بنابراین ضابطه تابع $g(x)$ به صورت $g(x)=-x+1$ می‌باشد.

اکنون می‌توانیم معادله موردنظر را تشکیل داده و مجموع جواب‌های آن را به دست آوریم.

$$f(x)=g^2(x) \Rightarrow -x^2+2x=(-x+1)^2 \Rightarrow -x^2+2x=x^2-2x+1 \Rightarrow 2x^2-4x+1=0$$
$$S=x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{-4}{2}=2$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۰

۱۵۹ گزینه ۴

فرض می‌کنیم $\sqrt[3]{9\cos^2(x)-1}=A$ باشد.

$$0\le \cos^2 x\le 1 \Rightarrow -1\le 9\cos^2(x)-1\le 8 \Rightarrow -1\le A\le 2$$

تابع موردنظر به صورت $g(A)=2^A-2^{-A}$ است. هر دو تابع 2^A و -2^{-A} صعودی اکیدند، پس مجموع آن‌ها صعودی اکید خواهد بود.

$$b=g(2)=2^2-2^{-2}=4-\frac{1}{4}=\frac{15}{4}$$
$$a=g(-1)=2^{-1}-2^1=\frac{1}{2}-2=-\frac{3}{2} \Rightarrow b-a=\frac{15}{4}+\frac{3}{2}=\frac{21}{4}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

۱۶۰ گزینه ۳

$$g(x)=\sqrt{\sqrt{x}+3}+k \xrightarrow{g(1)=1} \sqrt{1+3}+k=1 \Rightarrow k=-1$$
$$g(x)=\sqrt{\sqrt{x}+3}-1 \Rightarrow -g(x)=1-\sqrt{\sqrt{x}+3} \Rightarrow -g(x+4)=1-\sqrt{\sqrt{x+4}+3}$$
$$\xrightarrow{x=0} y=1-\sqrt{2+3}=1-\sqrt{5}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

۱۶۱ گزینه ۲

$$\sqrt{x+3}-1=x \Rightarrow \sqrt{x+3}=x+1 \Rightarrow x+3=x^2+2x+1$$
$$\Rightarrow x^2+x-2=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1\in D \\ x=-2\notin D \end{cases}$$

پس نقطهٔ تلاقی f و f^{-1} نقطهٔ $(1,1)$ است و فاصلهٔ آن از مبدأ $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ خواهد شد.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۱۶۲ گزینه ۱

$$2^{x+3+|x+3|}-2=0 \Rightarrow 2^{x+3+|x+3|}=2$$
$$\Rightarrow x+3+|x+3|=1 \Rightarrow |x+3|=-x-2$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x+3=-x-2 \Rightarrow x=\frac{-5}{2} \\ x+3=x+2 \Rightarrow \text{فاقد جواب} \end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۱۶۳ گزینه ۲

ضابطهٔ $\frac{g}{f}(x)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$y = \frac{g}{f}(x) = \frac{x^3}{x^2}$$

به‌ازای $x = 0$ مخرج کسر تابع $\frac{g}{f}(x)$ صفر می‌شود، بنابراین $x = 0$ عضو دامنهٔ تابع $\frac{g}{f}(x)$ نمی‌باشد، پس می‌توانیم x^2 را از صورت و مخرج کسر ساده کنیم.

$$\frac{g}{f}(x) = x \ , \ (x \neq 0)$$

می‌دانیم عملیات روی توابع در دامنهٔ مشترک انجام می‌شود. با شرط $x \neq 0$ تعداد عضوهای مشترک دامنهٔ تابع f و g ده‌تا است.

$$D_{\frac{g}{f}} = D_f \cap D_g - \{0\} = \{\pm 5, \pm 4, \pm 3, \pm 2, \pm 1\}$$

از آنجایی که دامنه و برد تابع $y = x$ برابر است، پس تعداد اعضای مجموعهٔ برد این تابع نیز ۱۰تا می‌باشد.

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۰

۱۶۴ گزینه ۳

نمودار تابع $g(x)$ نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم یعنی $g(x) = -x$ است. اگر نمودار تابع $y = x$ را در یک واحد به سمت چپ در راستای محور xها منتقل کنیم نمودار تابع $f(x)$ به دست می‌آید بنابراین ضابطه آن $f(x) = x + 1$ می‌باشد.

$$\frac{f^2(x)}{g(x)} = 2 \Rightarrow f^2(x) = 2g(x) \Rightarrow (x+1)^2 = 2(-x)$$
$$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 = -2x \Rightarrow x^2 + 4x + 1 = 0$$
$$\Rightarrow |x_2 - x_1| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{4^2 - 4(1)(1)}}{1} = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3}$$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۰

۱۶۵ گزینه ۲

روش اول: ضابطهٔ هر کدام از توابع را در دامنهٔ داده‌شده تنظیم می‌کنیم:

$$-\frac{۳}{۲} < x < -۱ \xrightarrow{-۱} -\frac{۵}{۲} < x-۱ < -۲ \Rightarrow |x-۱| = -(x-۱) \Rightarrow f(x) = -x+۱$$
$$-\frac{۳}{۲} < x < -۱ \xrightarrow{\times ۲} -۳ < ۲x < -۲ \Rightarrow [۲x] = -۳ \Rightarrow g(x) = -۳$$
$$-\frac{۳}{۲} < x < -۱ \xrightarrow{\times(-۱)} ۱ < -x < \frac{۳}{۲} \Rightarrow \operatorname{sign}(-x) = ۱ \Rightarrow h(x) = ۱$$
$$y = ۲f(x) - h(x)g(x) = ۲(-x+۱) - (۱)(-۳) \Rightarrow y = -۲x+۲+۳ = -۲x+۵ = ۵-۲x$$

روش دوم: عددی در بازه داده‌شده انتخاب می‌کنیم و مقدار تابع (y) و هریک از گزینه‌ها را به‌ازای آن عدد محاسبه می‌کنیم. عدد $-۱/۲$ را انتخاب می‌کنیم:

$$f(-۱/۲) = |-۱/۲-۱| = ۲/۲$$
$$g(-۱/۲) = [۲(-۱/۲)] = [-۲/۴] = -۳$$
$$h(-۱/۲) = \operatorname{sign}(۱/۲) = ۱$$
$$y = ۲(۲/۲) - (۱)(-۳) = ۴/۴ + ۳ = ۷/۴$$

(گزینهٔ ۱) $۳(-۱/۲) - ۲ = -۳/۶ - ۲ = -۵/۶$

(گزینهٔ ۲) $۵ - ۲(-۱/۲) = ۵ + ۲/۴ = ۷/۴$

(گزینهٔ ۳) $-۲(-۱/۲) + ۲ = ۲/۴ + ۲ = ۴/۴$

(گزینهٔ ۴) $-۸(-۱/۲) - ۴ = ۹/۶ - ۴ = ۵/۶$

فقط مقدار به‌دست‌آمده در گزینهٔ "۲" با مقدار به‌دست‌آمده در تابع برابر است.

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۰

۱۶۶ گزینه ۱

به راحتی می‌توانیم $(fof)og$ را بسازیم، کافی است ورودی و خروجی‌ها را کنترل کنیم.

$$(x > ۰) \xrightarrow{g} ۱ \xrightarrow{f} ۰ \xrightarrow{f} ۰$$
$$(x = ۰) \xrightarrow{g} ۰ \xrightarrow{f} ۰ \xrightarrow{f} ۰$$
$$(x < ۰) \xrightarrow{g} -۱ \xrightarrow{f} ۰ \xrightarrow{f} ۰$$

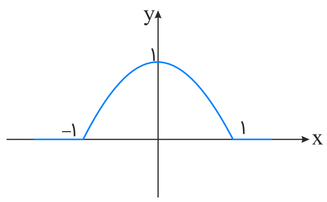
در واقع $((fof)og)(x) = ۰$ است و همواره پیوسته خواهد بود.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۱۶۷ گزینه ۴

$$(gof)(x) = g(f(x))$$
$$x < -۱ \Rightarrow f(x) = -۱ \Rightarrow (gof)(x) = g(-۱) = ۰$$
$$-۱ < x \leq ۱ \Rightarrow f(x) = x \Rightarrow (gof)(x) = g(x) = ۱ - x^۲$$
$$x > ۱ \Rightarrow f(x) = ۱ \Rightarrow (gof)(x) = g(۱) = ۰$$

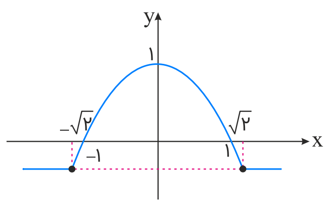
نمودار gof به صورت زیر است:



$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(۱ - x^۲) = \begin{cases} -۱;\ ۱ - x^۲ < -۱ \\ ۱ - x^۲;\ -۱ \leq ۱ - x^۲ \leq ۱ \\ ۱;\ ۱ - x^۲ > ۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow (fog)(x) = \begin{cases} -۱;\ |x| > \sqrt{۲} \\ ۱ - x^۲;\ |x| \leq \sqrt{۲} \end{cases}$$

نمودار fog به‌صورت زیر است:



ماکزیمم در نقطه‌ای به طول $\sqrt{۲}$ رخ می‌دهد:

$$x = \sqrt{۲} \Rightarrow \max(gof - fog) = ۰ - (-۱) = ۱$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

۱۶۸ گزینه ۳

ابتدا $f(-۰/۷)$ را می‌یابیم؛ به این منظور در تابع $f(x)$، به جای x، $-۰/۷$ را قرار می‌دهیم:

$$f(-۰/۷) = [۱ - ۳(-۰/۷)] = [۱ + ۲/۱] = [۳/۱] = ۳$$

به‌طورمشابه برای $f(-۰/۰۷)$ داریم:

$$f(-۰/۰۷) = [۱ - ۳(-۰/۰۷)] = [۱ + ۰/۲۱] = [۱/۲۱] = ۱$$

پس داریم:

$$f(-۰/۷) - f(-۰/۰۷) = ۳ - ۱ = ۲$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۱

۱۶۹ گزینه ۲

$(a, b) \in f(x) \Rightarrow (b, a) \in f^{-1}(x)$

بنابراین کافی است مؤلفه‌های هر نقطه را جابه‌جا کنیم و در تابع $y = x^۳ - x + ۱$ صدق دهیم.

گزینهٔ ۱ : $(-۲)^۳ - (-۲) + ۱ \neq -۱$ ×

گزینهٔ ۲ : $(\frac{۱}{۲})^۳ - (\frac{۱}{۲}) + ۱ = \frac{۵}{۸}$ ✓

گزینهٔ ۳ : $۲^۳ - ۲ + ۱ \neq ۱$ ×

گزینهٔ ۴ : $(-\frac{۱۱}{۸})^۳ - (-\frac{۱۱}{۸}) + ۱ \neq -\frac{۱}{۲}$ ×

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۱۷۰ گزینه ۱

از داخلی‌ترین تابع شروع می‌کنیم:

$$fofof(\sqrt{۲}) = f(f(f(\sqrt{۲})))$$
$$f(\sqrt{۲}) = \frac{(\sqrt{۲})(\sqrt{۲})}{۳\sqrt{۲} - \sqrt{۲}} = \frac{۲}{۲\sqrt{۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}}$$
$$f(\frac{۱}{\sqrt{۲}}) = \frac{(\sqrt{۲})(\frac{۱}{\sqrt{۲}})}{۳(\frac{۱}{\sqrt{۲}}) - \sqrt{۲}} = \frac{۱}{\frac{۱}{\sqrt{۲}}} = \sqrt{۲}$$
$$f(\sqrt{۲}) = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \Rightarrow fofof(\sqrt{۲}) = \frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

۱۷۱ گزینه ۴

$$x^۲\sqrt{x^۲} = x^۲|x| = \begin{cases} x^۳ & ; x \geq ۰ \quad \text{اکیداً صعودی} \\ -x^۳ & ; x < ۰ \quad \text{اکیداً نزولی} \end{cases}$$

پس باید وارون تابع ضابطهٔ پایینی را حساب کنیم:

$$y = -x^۳ \Rightarrow x^۳ = -y \Rightarrow x = \sqrt[۳]{-y} \Rightarrow f^{-۱}(x) = -\sqrt[۳]{x}$$
$$D_f = R_{f^{-۱}} \text{ , } D_{f^{-۱}} = R_f$$
$$R_f = [۰, +\infty] = D_{f^{-۱}} \Rightarrow D_{f^{-۱}} : x \geq ۰$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

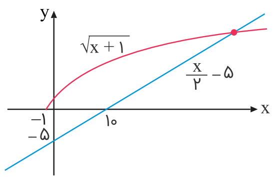
۱۷۲ گزینه ۲

$$\frac{\sqrt{x+۱}}{\sqrt{x-۱}+۳}-\frac{\sqrt{x+۱}}{۳-\sqrt{x-۱}}=\frac{x-۱}{\sqrt{x-۱}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{x+۱}(۳-\sqrt{x-۱}-\sqrt{x-۱}-۳)}{۳^۲-(\sqrt{x-۱})^۲}=\frac{x-۱}{\sqrt{x-۱}}$$

$$\Rightarrow \frac{-۲\sqrt{x-۱}\sqrt{x+۱}}{۱۰-x}=\sqrt{x-۱}\Rightarrow -۲\sqrt{x+۱}=۱۰-x$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+۱}=\frac{x}{۲}-۵$$



بنابراین تنها یک ریشهٔ مثبت دارد.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۱۷۳ گزینه ۴

$$\frac{۴-۲x}{۳x+۱}\geq ۰\Rightarrow \begin{cases}۴-۲x=۰\Rightarrow x=۲\\ ۳x+۱=۰\Rightarrow x=-\frac{۱}{۳}\end{cases}$$

x		$-\frac{۱}{۳}$		۲	
$۴-۲x$	+		+	۰	−
$۳x+۱$	−	۰	+		+
$\frac{۴-۲x}{۳x+۱}$	−	ت ن	+	۰	−

$$\Rightarrow -\frac{۱}{۳}<x\leq ۲\xrightarrow{\times ۳}-۱<۳x\leq ۶$$

$$\Rightarrow [۳x]=-۱,۰,۱,۲,۳,۴,۵,۶\Rightarrow \text{عضو } ۸$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۱۷۴ گزینه ۱

تابع f اکیداً نزولی می‌باشد، بنابراین کافی است ضریب $x^۳$ منفی باشد:

$$-۹+k^۲<۰\Rightarrow k^۲<۹\Rightarrow -۳<k<۳$$

$$\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k=۰,\pm۱,\pm۲\Rightarrow \text{مجموع مقادیر } k=۰$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۱۷۵ گزینه ۴

راه‌حل اول:

$$gof(x) = g(f(x)) = g(۲x) = ۵x^۲ + ۱۱$$

$$\Rightarrow g(x) = ۵(\frac{x}{۲})^۲ + ۱۱ = \frac{۵}{۴}x^۲ + ۱۱$$

$$\Rightarrow g(x-۷) = \frac{۵}{۴}(x-۷)^۲ + ۱۱ \Rightarrow g(x-۷)\text{ حداقل } = ۱۱$$

راه‌حل دوم: برای رسیدن از ضابطهٔ $g(۲x)$ به $g(x-۷)$، تنها دامنه تغییر می‌کند و برد ثابت می‌ماند. بنابراین کمترین مقدار $g(x-۷)$ برابر با کمترین مقدار $g(۲x) = ۵x^۲ + ۱۱$ است. پس برابر با ۱۱ می‌باشد.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۱۷۶ گزینه ۳

$$\begin{cases} f(x) = b - ۳ax \xrightarrow{f\text{ ثابت}} ۳a = ۰ \Rightarrow a = ۰ \\ g(x) = c - (۳b-۳)x \xrightarrow{g\text{ ثابت}} ۳b - ۳ = ۰ \Rightarrow b = ۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = ۱ \quad , \quad g(x) = c$$

$$f + g = ۵ \Rightarrow ۱ + c = ۵ \Rightarrow c = ۴$$

$$bc = ۱ \times ۴ = ۴$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۱۷۷ گزینه ۲

راه‌حل اول: با در دست داشتن دو نقطهٔ $(-۱, ۳)$ و $(۱, -۴)$ معادلهٔ خط را می‌نویسیم. ابتدا شیب خط را می‌یابیم:

$$m = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱} \Rightarrow m = \frac{۳-(-۴)}{-۱-۱} = \frac{-۷}{۲}$$

حال معادلهٔ خط را از رابطهٔ $y - y_۰ = m(x - x_۰)$ می‌نویسیم:

$$y - ۳ = -\frac{۷}{۲}(x+۱)$$

نقطهٔ $(-۲ , a)$ را صدق می‌دهیم:

$$a - ۳ = -\frac{۷}{۲}(-۱) \Rightarrow a = \frac{۷}{۲} + ۳ = \frac{۱۳}{۲} = ۶/۵$$

راه‌حل دوم: باتوجه‌به نقاط $(-۱, ۳)$ و $(۱, -۴)$ می‌توانیم نتیجه بگیریم که خط مذکور با افزایش ۲ واحدی x، ۷ واحد از y آن کاهش می‌یابد؛ پس به ازای افزایش هر واحد x، $\frac{۷}{۲}$ کاهش y داریم.
نقطهٔ $(-۲ , a)$ یک واحد x کمتری نسبت به $(-۱, ۳)$ دارد، پس y آن باید $\frac{۷}{۲}$ بیشتر باشد:

$$a = ۳ + \frac{۷}{۲} = \frac{۱۳}{۲} = ۶/۵$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۱

۱۷۸ گزینه ۲

تابع همانی به‌صورت $y=x$ است، پس داریم:

$$f(x)=(|a|-|b|)x=x\Rightarrow |a|-|b|=۱\quad (I)$$

تابع ثابت به‌صورت $y=k$ است، پس داریم:

$$g(x)=(b^۲-۱)x+(a^۲+۱)c=k\Rightarrow b^۲-۱=۰\Rightarrow b=\pm ۱$$

از قرار دادن این مقدار در رابطهٔ (I) داریم:

$$|a|-|b|=۱\Rightarrow |a|-|\pm۱|=۱\Rightarrow |a|-۱=۱\Rightarrow |a|=۲\Rightarrow a=\pm۲$$

از $(f-g)(x)=x+۵$ نتیجه می‌گیریم:

$$f(x)-g(x)=x-(a^۲+۱)c=x+۵\Rightarrow -(a^۲+۱)c=۵$$
$$\xrightarrow{a=\pm۲} -۵c=۵\Rightarrow c=-۱$$

اما $a=۲$ و $a=-۲$ هر دو پذیرفته هستند؛ پس داریم:

$$ac=-۲(-۱)=۲$$
$$ac=۲(-۱)=-۲$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۱

۱۷۹ گزینه ۳

زوج مرتب‌های $(۱,\ x-۲y)$ و $(۱,\ -۷)$ دارای مؤلفه‌های اول یکسان هستند، پس برای تابع بودن این رابطه، باید مؤلفه‌های دوم هم برابر باشند:

$$x-۲y=-۷$$

به همین ترتیب برای $(۹\,,\ x+y)$ و $(۹\,,\ ۵)$ داریم:

$$x+y=۵$$

از حل دو معادله دو مجهول فوق داریم:

$$\left.\begin{matrix}x-۲y=-۷\\ x+y=۵\end{matrix}\right\}\Rightarrow -۳y=-۱۲\Rightarrow y=۴\Rightarrow x=۱$$

خواستهٔ سؤال را می‌یابیم:

$$\frac{x^۲+y^۲}{-x-۴y}=\frac{۱+۱۶}{-۱-۱۶}=\frac{۱۷}{-۱۷}=-۱$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۱

۱۸۰ گزینه ۴

در سوال گفته‌شده به‌ازای هر n طبیعی $p(x)$ بر $x+۲$ بخش‌پذیر است، پس به دلخواه n را برابر یک قرار می‌دهیم:

$$p(x)=x^۴+۲x^۳+x^۶+۳x^۵+۱۶a$$
$$p(-۲)=۰:۱۶-۱۶+۶۴-۹۶+۱۶a=۰\Rightarrow a=۲$$
$$p(x)=x^۶+۳x^۵+x^۴+۲x^۳+۳۲=(x^۲+۲x-۳)Q(x)+\underbrace{R(x)}_{bx+c}$$

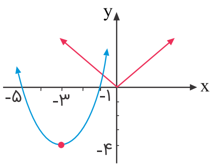
$$\Rightarrow p(x)=(x-۱)(x+۳)Q(x)+bx+c$$
$$\begin{cases}p(۱)=۳۹=b+c\\ p(-۳)=۵۹=-۳b+c\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=-۵\\ c=۴۴\end{cases}\Rightarrow R(x)=-۵x+۴۴$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

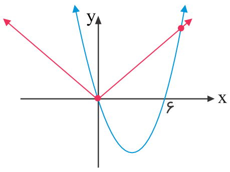
۱۸۱ گزینه ۴

$$y = x^{۲} + ۶x + ۵ \Rightarrow y = (x + ۳)^{۲} - ۴$$

هر دو نمودار را در یک دستگاه رسم می‌کنیم:



اگر ۵ واحد نمودار را به راست منتقل کنیم، دو تابع در $x = ۰$ برخورد می‌کنند و به مطلوب سؤال می‌رسیم.



کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۱

۱۸۲ گزینه ۱

اگر $(-۲, ۹)$ روی وارون تابع باشد، $(۹, -۲)$ روی خود تابع قرار دارد:

$$-۳(-۲)^{۳} + ۲(-۲) - ۱۱ = ۲۴ - ۴ - ۱۱ = ۹$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۸۳ گزینه ۱

$$f(۰/۷) = [۱ - \frac{۰/۷}{۳}] = [۱ - \frac{۷}{۳۰}] = [\frac{۲۳}{۳۰}] = ۰$$
$$f(\pi) = [۱ - \frac{\pi}{۳}] = -۱$$
$$f(۰/۷) + ۲f(\pi) = ۰ + ۲(-۱) = -۲$$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۸۴ گزینه ۲

$$gog(۰) = g(g(۰)) = g(۲) = ۳$$
$$gof^{-۱}(-۲) = g(f^{-۱}(-۲))$$

برای پیدا کردن $f^{-۱}(-۲)$، ابتدا باید ضابطهٔ تابع f را بیابیم:

$$\begin{cases} f(۰) = -۳ \\ f(۲) = ۰ \end{cases} \Rightarrow m = \frac{۰-(-۳)}{۲-۰} = \frac{۳}{۲}$$

$$y - ۰ = \frac{۳}{۲}(x-۲) \Rightarrow y = \frac{۳}{۲}x - ۳$$
$$f^{-۱}(-۲) = a \Rightarrow f(a) = -۲ \Rightarrow \frac{۳}{۲}a - ۳ = -۲ \Rightarrow \frac{۳}{۲}a = ۱ \Rightarrow a = \frac{۲}{۳}$$
$$\Rightarrow g(f^{-۱}(-۲)) = g(\frac{۲}{۳}) \quad (*)$$

حال به بررسی ضابطهٔ g برای $x \leq ۱$ میپردازیم:

$$g(۰) = ۲\,,\ g(۱) = ۱ \Rightarrow m = \frac{۱-۲}{۱-۰} = -۱$$
$$y - ۱ = -۱(x-۱) \Rightarrow y - ۱ = -x + ۱ \Rightarrow y = -x + ۲\,;\ x \leq ۱$$
$$\Rightarrow g(\frac{۲}{۳}) = -\frac{۲}{۳} + ۲ = \frac{۴}{۳} \quad (**)$$

بنابراین:

$$\xrightarrow{(*),(**)} gof^{-۱}(-۲) = g(f^{-۱}(-۲)) = g(\frac{۲}{۳}) = \frac{۴}{۳}$$

$$gof^{-۱}(-۲) \times gog(۰) = \frac{۴}{۳} \times ۳ = ۴$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۸۵ گزینه ۴

جدول تعیین علامت g به صورت زیر است.

x		۰		۳	
$x^۲$	+	۰	+		+
$f(x)$	+		+	۰	−
$\sqrt{x^۲f(x)}$	+		+		−

$$\Rightarrow D_{\sqrt{x^۲f(x)}} = (-\infty, ۳]$$

$$x = ۰, ۱, ۲, ۳$$

اعداد ۰، ۱، ۲ و ۳ پذیرفته هستند.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۸۶ گزینه ۲

$$\frac{۱-۳x}{x+۱}<۰$$

	-۱		$\frac{۱}{۳}$	
	−	+	−	

$$x\in(-\infty,-۱)\cup(\frac{۱}{۳},+\infty)$$

$$-۲<\frac{۱-۳x}{x+۱}\Rightarrow ۰<\frac{۱-۳x}{x+۱}+۲\Rightarrow ۰<\frac{۱-۳x+۲x+۲}{x+۱}\Rightarrow ۰<\frac{-x+۳}{x+۱}$$

	-۱		۳	
	−	+	−	

$$x\in(-۱,۳)$$

از اشتراک جواب‌ها به $x\in(\frac{۱}{۳},۳)$ می‌رسیم:

$$\frac{۱}{۳}<x<۳\Rightarrow\frac{۱}{۶}<\frac{x}{۲}<\frac{۳}{۲}\Rightarrow[\frac{x}{۲}]=\{۰,۱\}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۸۷ گزینه ۳

تابع داده‌شده اکیداً صعودی است و وارون خود را روی خط $y=x$ ملاقات می‌کند. بنابراین:

$$x^۳+۳x-۱۲=x\Rightarrow x^۳+۲x-۱۲=۰\Rightarrow x=۲$$

حقیقتاً ریشهٔ $x=۲$ را حدس زدیم!

$$x^۳+۳x-۱۲=(x-۲)(x^۲+۲x+۶)$$

نقطهٔ $(۲\ ,\ ۲)$ محل تقاطع است. فاصله تا مبدأ برابر است با:

$$\sqrt{(۲-۰)^۲+(۲-۰)^۲}=\sqrt{۸}=۲\sqrt{۲}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۸۸ گزینه ۲

$$y=|x+۱|-|۳x-۶|$$

$$\xrightarrow[\text{بازه‌بندی}]{\text{حذف قدرمطلق-}}y=\begin{cases}۲x-۷ & x<-۱\\ ۴x-۵ & -۱\le x<۲\\ -۲x+۷ & x\ge ۲\end{cases}\xrightarrow{\text{نزولی}}y=-۲x+۷\ ,\ x\ge ۲$$

وارون تابع را می‌یابیم:

$$y=-۲x+۷\Rightarrow ۲x=-y+۷\Rightarrow x=\frac{-y}{۲}+\frac{۷}{۲}$$
$$\Rightarrow y^{-۱}=\frac{-۱}{۲}x+\frac{۷}{۲}\ ,\ x\le ۳$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۸۹ گزینه ۲

$$\begin{cases} \text{ثابت}\ f(x) \Rightarrow ۳(b^۲ - ۱) = ۰ \Rightarrow b = \pm ۱ \\ \text{ثابت}\ g(x) \Rightarrow (b+۱) = ۰ \Rightarrow b = -۱ \end{cases} \Rightarrow b = -۱$$

توجه کنید که $g(x)$ به‌صورت $g(x) = (b+۱)x^۲ - ۲a$ است.

$$\begin{cases} f(x) = a \\ g(x) = -۲a \end{cases} \Rightarrow f \times g = -۲a^۲ = -۸ \Rightarrow a^۲ = ۴ \Rightarrow a = \pm ۲$$
$$\Rightarrow |ab| = ۲$$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۹۰ گزینه ۳

در تابع ثابت مؤلفه‌های دوم همگی باهم برابرند:

$$n^۲ + ۲n = ۸ \Rightarrow n^۲ + ۲n - ۸ = ۰$$
$$\Rightarrow (n-۲)(n+۴) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} n = ۲ \\ n = -۴ \end{cases}$$

n طبیعی است و $n = ۲$ را می‌پذیریم.

$$۲t^۲ = ۸ \Rightarrow t^۲ = ۴ \Rightarrow t = \pm ۲$$
$$f = \{(m+۶\,,\,۸)\,,\,(-۲\,,\,۸)\,,\,(۱-۳m\,,\,۸)\}$$

تابع دو عضوی است و m و n طبیعی‌اند:

$$m + ۶ = -۲ \Rightarrow m = -۸ \quad \text{غ.ق.ق}$$
$$۱ - ۳m = -۲ \Rightarrow m = ۱ \quad \text{ق.ق}$$
$$f = \{(۷\,,\,۸)\,,\,(-۲\,,\,۸)\} \Rightarrow ۷ - ۲ = ۵$$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۹۱ گزینه ۴

$$f(x) = ax + b$$
$$\begin{cases} f(۱) = ۵ \Rightarrow a + b = ۵ \\ f(۳) = -۹ \Rightarrow ۳a + b = -۹ \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} -a - b = -۵ \\ ۳a + b = -۹ \end{cases} \Rightarrow ۲a = -۱۴ \Rightarrow a = -۷$$

$$a + b = ۵ \xrightarrow{a=-۷} b = ۱۲$$
$$\Rightarrow f(x) = -۷x + ۱۲$$
$$۰ \le x \le ۵ \Rightarrow -۳۵ \le -۷x \le ۰ \Rightarrow -۲۳ \le -۷x + ۱۲ \le ۱۲$$
$$\Rightarrow -۲۳ \le y \le ۱۲$$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۹۲ گزینه ۴

$$\frac{۱}{x} \xrightarrow[\text{راست}]{\text{۱ واحد به سمت}} \frac{۱}{x-۱} \xrightarrow[\text{محور x ها}]{\text{قرینه نسبت به}} \frac{-۱}{x-۱} \xrightarrow[\text{پایین}]{\text{۲ واحد رو به}} \frac{-۱}{x-۱} - ۲$$

حالا : $\frac{۱}{x} = \frac{-۱}{x-۱} - ۲ \Rightarrow \frac{۱}{x} + \frac{۱}{x-۱} = -۲ \Rightarrow \frac{x-۱+x}{x^۲ - x} = -۲$

$$-۲x^۲ + ۲x = ۲x - ۱ \Rightarrow ۲x^۲ = ۱ \Rightarrow x^۲ = \frac{۱}{۲} \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\xrightarrow{\text{نقطه برخورد}} \begin{cases} (\frac{\sqrt{۲}}{۲}, \sqrt{۲}) \\ (-\frac{\sqrt{۲}}{۲}, -\sqrt{۲}) \end{cases} \xrightarrow{\text{فاصله تا مبدأ}} \sqrt{(\frac{\sqrt{۲}}{۲} - ۰)^۲ + (\sqrt{۲} - ۰)^۲}$$

$$= \sqrt{\frac{۱}{۲} + ۲} = \sqrt{\frac{۵}{۲}} = \frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۹۳ گزینه ۳

در تابع ثابت هر ورودی‌ای به x دهیم، خروجی یکسانی تحویل می‌گیریم:

$$f(۰) = ۲b$$

$$f(b) = -۷b^۲ \Rightarrow ۲b = -۷b^۲ \Rightarrow \begin{cases} b = ۰ \Rightarrow ۲b = ۰ \\ b = -\frac{۲}{۷} \Rightarrow ۲b = -\frac{۴}{۷} \end{cases}$$

برد تابع همان $f(۰)$ است و چون ۰ در گزینه‌ها نیست، پس $-\frac{۴}{۷}$ را می‌پذیریم.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱