۱ گزینه ۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۰

گام اول

داریم: $\sin^{2}x = 1 - \cos^{2}x$

گام دوم

با استفاده از رابطهٔ گام اول، معادلهٔ مثلثاتی داده‌شده را برحسب $\cos x$ مرتب می‌کنیم:

$$2\sin^{2}x - \cos x - 1 = 0 \xrightarrow{\sin^{2}x=1-\cos^{2}x} 2 - 2\cos^{2}x - \cos x - 1 = 0 \Rightarrow 2\cos^{2}x + \cos x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow (2\cos x - 1)(\cos x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ \cos x = -1 \end{cases}$$

چون $-1 \leq \cos x \leq 1$ است پس هر دو مقدار به‌دست‌آمده، قابل‌قبول است. باتوجه‌به آن‌ها جواب‌های معادله را در بازهٔ $[\pi, 2\pi]$ تعیین می‌کنیم:

$$\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \xrightarrow{x\in[\pi,2\pi]} x_1 = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$$

$$\cos x = -1 \Rightarrow \cos x = \cos\pi \Rightarrow x_2 = \pi$$

بنابراین مجموع جواب‌های معادله برابر است با:

$$x_1 + x_2 = \frac{5\pi}{3} + \pi = \frac{8\pi}{3}$$

۲ گزینه ۱

ابتدا با استفاده از اتحادهای مثلثاتی عبارت داده شده را خلاصه کرده و سپس با استفاده از فرمول کمان های 2α، حاصل تست را به دست می آوریم.

$$\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha)\sin(\pi + \alpha) - \sin(\pi - \alpha)\cos(-\alpha) = \cos\alpha(-\sin\alpha) - \sin\alpha\cos\alpha =$$
$$-\sin\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\cos\alpha = -2\sin\alpha\cos\alpha = -\sin 2\alpha$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۲

۳ گزینه ۲

$$۲\cos x(\cos x-\sin x)=۱ \Rightarrow ۲\cos^۲ x-۲\cos x\sin x-۱=۰$$
$$\Rightarrow ۲\cos x\sin x=۲\cos^۲ x-۱ \Rightarrow \sin ۲x=\cos ۲x \Rightarrow \tan ۲x=۱$$
$$\Rightarrow ۲x=k\pi+\frac{\pi}{۴} \xrightarrow{\div ۲} x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۸}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۳

۴ گزینه ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۳

گام اول

می‌دانیم: $\cos ۲x=۱-۲\sin^۲ x$

گام دوم

باتوجه‌به گام اول، معادله را برحسب $\sin x$ نوشته و حل می‌کنیم. جواب معادله را با $x=۲k\pi+\frac{i\pi}{۶}$ مطابقت داده و مقادیر i را مشخص می‌کنیم.

$$\cos ۲x=\sin x \Rightarrow ۱-۲\sin^۲ x=\sin x$$
$$\Rightarrow ۲\sin^۲ x+\sin x-۱=۰ \Rightarrow (۲\sin x-۱)(\sin x+۱)=۰$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \sin x=\sin\frac{\pi}{۶} \Rightarrow \begin{cases} x=۲k\pi+\frac{\pi}{۶} \\ x=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۶}=۲k\pi+\frac{۵\pi}{۶} \end{cases} \\ \sin x=-۱ \Rightarrow \sin x=\sin\frac{۳\pi}{۲} \Rightarrow x=۲k\pi+\frac{۳\pi}{۲}=۲k\pi+\frac{۹\pi}{۶} \end{cases}$$

باتوجه‌به جواب‌های به‌دست‌آمده مقادیر i برابر است با:

$$i=\{۱,۵,۹\}$$

۵

گزینه ۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۳

گام اول

مجموعه جواب‌های معادلهٔ $\cos x = \cos \alpha$ به‌صورت $x = ۲k\pi \pm \alpha$ است.

گام دوم

جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی را در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$ به دست می‌آوریم:

$$۲\cos^۲ x + \cos x = ۱ \Rightarrow ۲\cos^۲ x + \cos x - ۱ = ۰$$

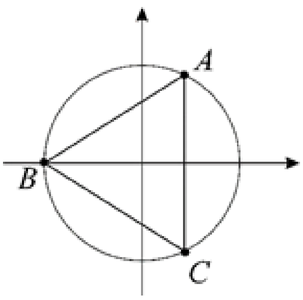
$$\Rightarrow (۲\cos x - ۱)(\cos x + ۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{۱}{۲} \\ \cos x = -۱ \end{cases}$$

$$\cos x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{۳} \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳} \xrightarrow{x \in [۰, ۲\pi]} x_۱ = \frac{\pi}{۳}, x_۲ = \frac{۵\pi}{۳}$$

$$\cos x = -۱ \Rightarrow \cos x = \cos x\pi \xrightarrow{x \in [۰, ۲\pi]} x_۳ = \pi$$

جواب‌ها را بر روی دایره مثلثاتی مشخص می‌کنیم:

$$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BC} = \frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = ۶۰^\circ$$



بنابراین مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ متساوی‌الاضلاع است.

۶ گزینه ۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۳

گام اول

می‌دانیم: $\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)=\sin\theta$

گام دوم

باتوجه‌به گام اول و باتوجه‌به اینکه $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ است عبارت داده‌شده را ساده می‌کنیم:

$$8\cos a\cos b\cos(\frac{\pi}{2}-a)\cos(\frac{\pi}{2}-b)=8\cos a\cos b\sin a\sin b$$

$$=2(2\sin a\cos a)(2\sin b\cos b)=2\sin 2a\sin 2b$$

داریم:

$$a+b=\frac{\pi}{4}\xrightarrow{\times 2}2a+2b=\frac{\pi}{2}\Rightarrow 2b=\frac{\pi}{2}-2a$$

بنابراین:

$$\sin 2b=\sin(\frac{\pi}{2}-2a)=\cos 2a$$

پس می‌توان نوشت:

$$2\sin 2a\sin 2b=2\sin 2a\cos 2a=\sin 2(2a)=\sin 4a$$

۷ گزینه ۴

با استفاده از رابطهٔ $\sin(\frac{\pi}{2}+x)=\cos x$ معادلهٔ مثلثاتی را ساده می‌کنیم و جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی را به دست می‌آوریم.

$$\cos^2 x+3\sin(\frac{\pi}{2}+x)+2=0\Rightarrow\cos^2 x+3\cos x+2=0$$

$$\Rightarrow(\cos x+1)(\cos x+2)=0\Rightarrow\begin{cases}\cos x=-1\Rightarrow x=2k\pi+\pi=(2k+1)\pi\\ \cos x=-2 \quad \text{غ.ق.ق}\end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

۸ گزینه ۳

با استفاده از روابط زیر معادلهٔ مثلثاتی را ساده می کنیم:

$$\sin(\frac{۵\pi}{۲}+x)=\sin(۲\pi+\frac{\pi}{۲}+x)=\sin(\frac{\pi}{۲}+x)=\cos x$$
$$\sin(\frac{\pi}{۴}-x)=\sin\frac{\pi}{۴}\cos x-\cos\frac{\pi}{۴}\sin x$$
$$\sqrt{۲}\sin(\frac{\pi}{۴}-x)=۱+\sin(\frac{۵\pi}{۲}+x)\Rightarrow\sqrt{۲}(\sin\frac{\pi}{۴}\cos x-\cos\frac{\pi}{۴}\sin x)=۱+\cos x$$
$$\Rightarrow\sqrt{۲}(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\cos x-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\sin x)=۱+\cos x$$
$$\Rightarrow\cos x-\sin x=۱+\cos x\Rightarrow\sin x=-۱\Rightarrow x=۲k\pi-\frac{\pi}{۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵

۹ گزینه ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۶

گام اول

می‌دانیم:

$$\cos ۲x=۱-۲\sin^۲ x\ ,\ \sin ۲x=۲\sin x\cos x$$

گام دوم

باتوجه‌به گام اول، کسر داده‌شده را ساده کرده و سپس حل می‌کنیم:

$$\frac{۱-\cos ۲x}{\sin ۲x}=\sqrt{۳}\Rightarrow\frac{۲\sin^۲ x}{۲\sin x\cos x}=\sqrt{۳}\Rightarrow\frac{\sin x}{\cos x}=\sqrt{۳}\Rightarrow\tan x=\sqrt{۳}$$
$$\Rightarrow\tan x=\tan\frac{\pi}{۳}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۳}$$

۱۰ گزینه ۴

در این گونه سؤال ها ابتدا تمام نسبت های مثلثاتی را به یک نسبت تبدیل می کنیم. با توجه به رابطهٔ $\sin^۲ x = ۱ - \cos^۲ x$، معادلهٔ مثلثاتی را برحسب $\cos x$ مرتب می کنیم.

$$۲\sin^۲ x = ۳\cos x \Rightarrow ۲(۱ - \cos^۲ x) = ۳\cos x$$
$$\Rightarrow ۲ - ۲\cos^۲ x = ۳\cos x \Rightarrow ۲\cos^۲ x + ۳\cos x - ۲ = ۰$$
$$\Rightarrow (۲\cos x - ۱)(\cos x + ۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{۱}{۲} \\ \cos x = -۲ \text{ غ.ق.ق} \end{cases}$$

معادلهٔ $\cos x = \cos\alpha$ دارای جواب $x = ۲k\pi \pm \alpha$ است. هم چنین توجه کنید که معادلهٔ $\cos x = A$ به ازای $A > ۱$ و $A < -۱$ فاقد جواب است.

پس جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\cos x = \frac{۱}{۲}$ برابر است با:

$$\cos x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{۳} \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

۱۱ گزینه ۲

با توجه به رابطهٔ $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ معادله را ساده می کنیم. هم چنین می دانیم $\sin ۲\alpha = ۲\sin\alpha\cos\alpha$ است.

$$۲\tan x\cos^۲ x = ۱ \Rightarrow ۲\frac{\sin x}{\cos x} \times \cos^۲ x = ۱ \xrightarrow{\cos x \neq ۰} ۲\sin x\cos x = ۱$$
$$\Rightarrow \sin ۲x = ۱ \xrightarrow{\sin\alpha = ۱ \Rightarrow \alpha = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲}} ۲x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \xrightarrow{\div ۲} x = k\pi + \frac{\pi}{۴}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

۱۲ گزینه ۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۷

گام اول

می‌دانیم:

$$\sin\frac{۵\pi}{۶} = \frac{۱}{۲},\ \sin(\frac{\pi}{۲} + x) = \cos x,\ \sin(\pi + x) = -\sin x$$

گام دوم

باتوجه‌به گام اول، معادله را ساده کرده سپس حل می‌کنیم:

$$\sin\frac{۵\pi}{۶} + \sin(\frac{\pi}{۲} + x)\sin(\pi + x) = \frac{۱}{۲} - \cos x\sin x = ۰$$
$$\Rightarrow \cos x\sin x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow ۲\cos x\sin x = ۱ \Rightarrow \sin ۲x = ۱ \Rightarrow ۲x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲}$$
$$\Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۴}$$

۱۳

گزینه ۳

برای ساده تر شدن معادلهٔ مثلثاتی از روابط زیر استفاده می کنیم:

$$\sin(\pi - x) = \sin x, \cos(\frac{۳\pi}{۲} + x) = \sin x, \sin(\pi + x) = -\sin x$$

اگر در حل معادلهٔ مثلثاتی دو نسبت مثلثاتی متفاوت داشتیم، آن ها را به یک نسبت تبدیل می کنیم. با استفاده از رابطهٔ $\sin^۲ x = ۱ - \cos^۲ x$، معادلهٔ مثلثاتی را برحسب $\cos x$ بازنویسی می کنیم.

$$۲\sin(\pi - x)\cos(\frac{۳\pi}{۲} + x) + ۳\cot x \sin(\pi + x) = ۰$$
$$\Rightarrow ۲\sin x \sin x + ۳\cot x(-\sin x) = ۰$$
$$\Rightarrow ۲\sin^۲ x - ۳\cos x = ۰ \xrightarrow{\sin^۲ x = ۱ - \cos^۲ x} ۲(۱ - \cos^۲ x) - ۳\cos x = ۰$$
$$\Rightarrow ۲ - ۲\cos^۲ x - ۳\cos x = ۰ \Rightarrow ۲\cos^۲ x + ۳\cos x - ۲ = ۰ \Rightarrow (۲\cos x - ۱)(\cos x + ۲) = ۰$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{۳} \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳} \\ \cos x = -۲ \quad \text{غ.ق.ق} \end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

۱۴

گزینه ۱

دانستن روابط زیر به ساده شدن معادلهٔ مثلثاتی کمک بسیاری می کند:

$$\sin(۳\pi - x) = \sin x, \cos(\pi + x) = -\cos x, \cos\frac{۳\pi}{۲} = ۰$$
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos ۳x \sin(۳\pi - x) - \sin ۳x \cos(\pi + x) = \cos\frac{۳\pi}{۲} \Rightarrow \cos ۳x \sin x - \sin ۳x(-\cos x) = ۰$$
$$\Rightarrow \cos ۳x \sin x + \sin ۳x \cos x = ۰ \Rightarrow \sin(x + ۳x) = ۰ \Rightarrow \sin ۴x = ۰$$
$$\xrightarrow{\sin\alpha = ۰ \ \Rightarrow \alpha = k\pi} ۴x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۴}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

۱۵

گزینه ۲

می‌دانیم $\tan\frac{۲\pi}{۳}=-\sqrt{۳}$ و $\sin(\frac{۳\pi}{۲}-x)=-\cos x$ است. از رابطهٔ داده‌شده مقدار $\cos x$ را حساب کرده و با استفاده از فرمول $\cos ۲x=۲\cos^۲x-۱$، حاصل $\cos ۲x$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\tan\frac{۲\pi}{۳}\sin(\frac{۳\pi}{۲}-x)=۱\Rightarrow(-\sqrt{۳})(-\cos x)=۱\Rightarrow\sqrt{۳}\cos x=۱\Rightarrow\cos x=\frac{۱}{\sqrt{۳}}$$

حالا حاصل $\cos ۲x$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\cos ۲x=۲\cos^۲x-۱=۲(\frac{۱}{\sqrt{۳}})^۲-۱=۲(\frac{۱}{۳})-۱=\frac{۲}{۳}-۱=-\frac{۱}{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

۱۶

گزینه ۱

با استفاده از روابط زیر معادلهٔ مثلثاتی را ساده می کنیم:

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{۱+\tan\alpha\tan\beta}\ ,\ \tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{۱-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\tan(x+\frac{\pi}{۴})+\tan(x-\frac{\pi}{۴})=۲\sqrt{۳}\Rightarrow\frac{\tan x+\tan\frac{\pi}{۴}}{۱-\tan x\tan\frac{\pi}{۴}}+\frac{\tan x-\tan\frac{\pi}{۴}}{۱+\tan x\tan\frac{\pi}{۴}}=۲\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow\frac{\tan x+۱}{۱-\tan x}+\frac{\tan x-۱}{۱+\tan x}=۲\sqrt{۳}\Rightarrow\frac{(۱+\tan x)^۲-(۱-\tan x)^۲}{۱-\tan^۲x}=۲\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow\frac{۱+۲\tan x+\tan^۲x-۱+۲\tan x-\tan^۲x}{۱-\tan^۲x}=\frac{۴\tan x}{۱-\tan^۲x}=۲\sqrt{۳}\xrightarrow{\div۲}\frac{۲\tan x}{۱-\tan^۲x}=\sqrt{۳}$$

با توجه به رابطهٔ $\tan ۲\alpha=\frac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^۲\alpha}$، داریم:

$$\tan ۲x=\sqrt{۳}\Rightarrow\tan ۲x=\tan\frac{\pi}{۳}\Rightarrow ۲x=k\pi+\frac{\pi}{۳}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۶}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۹

۱۷ گزینه ۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۹

گام اول

تابع $\sqrt{\sin \pi x - ۱}$ در صورتی تعریف شده است که $\sin \pi x - ۱ \geq ۰$ باشد و چون همواره $\sin \pi x \leq ۱$ برقرار است پس باید $\sin \pi x = ۱$ باشد. در این حالت $x = ۲k + \frac{۱}{۲}$ می شود که یک عدد غیر صحیح است، بنابراین حاصل $[x] + [-x]$ برابر عدد ۱- می شود.

گام دوم

حالا سراغ محاسبهٔ مقدار $f(x)$ و هم چنین مقدار $f(-\frac{۱}{۲}f(x))$ می رویم:

$$f(x) = [x] + [-x] + \sqrt{\sin \pi x - ۱} = -۱ + ۰ = -۱$$

$$f(-\frac{۱}{۲}f(x)) = f(-\frac{۱}{۲}(-۱)) = f(\frac{۱}{۲}) = [\frac{۱}{۲}] + [-\frac{۱}{۲}] + \sqrt{\sin \frac{\pi}{۲} - ۱}$$

$$= ۰ - ۱ + \sqrt{۱ - ۱} = -۱ + ۰ = -۱$$

۱۸ گزینه ۳

ظاهر سؤال ممکن است کمی سخت به نظر برسد، ولی با انجام تغییرات زیر حل آن بسیار ساده می شود:

$$\sin(\pi + x) = -\sin x, \cos(\frac{\pi}{۲} + x) = -\sin x, \sin(\pi - x) = \sin x$$

$$\sin(\pi + x)\cos(\frac{\pi}{۲} + x) - ۲\sin(\pi - x) + ۱ = ۰$$

$$\Rightarrow (-\sin x)(-\sin x) - ۲\sin x + ۱ = ۰ \Rightarrow \sin^۲ x - ۲\sin x + ۱ = ۰$$

$$\Rightarrow (\sin x - ۱)^۲ = ۰ \Rightarrow \sin x - ۱ = ۰ \Rightarrow \sin x = ۱ \Rightarrow x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۱۹ گزینه ۳

برای حل معادلهٔ مثلثاتی از روابط زیر کمک می گیریم:

$$\tan(\frac{۳\pi}{۲} - x) = \cot x$$
$$\cos\frac{۴\pi}{۳} = \cos(\pi + \frac{\pi}{۳}) = -\cos\frac{\pi}{۳} = -\frac{۱}{۲}$$
$$(\sin x - \tan x)\tan(\frac{۳\pi}{۲} - x) = \cos\frac{۴\pi}{۳}$$
$$(\sin x - \tan x)\cot x = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow \sin x\cot x - \tan x\cot x = -\frac{۱}{۲}$$
$$\Rightarrow \sin x \times \frac{\cos x}{\sin x} - ۱ = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow \cos x - ۱ = -\frac{۱}{۲}$$

جواب های معادلهٔ $\cos x = \cos\alpha$ از رابطهٔ $x = ۲k\pi \pm \alpha$ به دست می آید.

$$\cos x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{۳} \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

۲۰ گزینه ۲

برای حل سؤال به دو رابطهٔ زیر توجه کنید:

$$\sin(\frac{۳\pi}{۲} + x) = -\cos x\ ,\ \cos ۲x = \cos^۲ x - \sin^۲ x$$
$$\sin^۲ x - \cos^۲ x = \sin(\frac{۳\pi}{۲} + x) \Rightarrow -\cos ۲x = -\cos x \Rightarrow \cos ۲x = \cos x$$
$$\Rightarrow ۲x = ۲k\pi \pm x \Rightarrow \begin{cases} ۲x = ۲k\pi + x \Rightarrow x = ۲k\pi \\ ۲x = ۲k\pi - x \Rightarrow ۳x = ۲k\pi \Rightarrow x = \frac{۲k\pi}{۳} \end{cases}$$

جواب کلی که هر دو جواب $x = ۲k\pi$ و $x = \frac{۲k\pi}{۳}$ را شامل شود به صورت $x = \frac{۲k\pi}{۳}$ است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

۲۱ گزینه ۴

با استفاده از اتحادهای مثلثاتی، عبارت‌های صورت و مخرج کسر را به ساده‌ترین شکل ممکن می‌نویسیم. می‌دانیم:

$$\cos\left(\frac{۳\pi}{۲}+\theta\right)=\sin\theta$$

$$\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$$

$$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$$

$$\sin(۳\pi+\theta)=\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$$

$$\frac{\cos\left(\frac{۳\pi}{۲}+\theta\right)-\cos(\pi+\theta)}{\sin(\pi-\theta)-\sin(۳\pi+\theta)}=\frac{\sin\theta-(-\cos\theta)}{\sin\theta-(-\sin\theta)}=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta+\sin\theta}$$

باتوجه‌به اینکه مقدار $\tan\theta$ در صورت سؤال داده شده است، صورت و مخرج کسر را بر $\cos\theta$ تقسیم می‌کنیم تا کسر داده‌شده برحسب $\tan\theta$ به دست آید.

$$\frac{\sin\theta+\cos\theta}{۲\sin\theta}=\frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\cos\theta}}{۲\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}=\frac{\tan\theta+۱}{۲\tan\theta}=\frac{۰/۲+۱}{۲(۰/۲)}=\frac{۱/۲}{۰/۴}=۳$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

۲۲ گزینه ۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

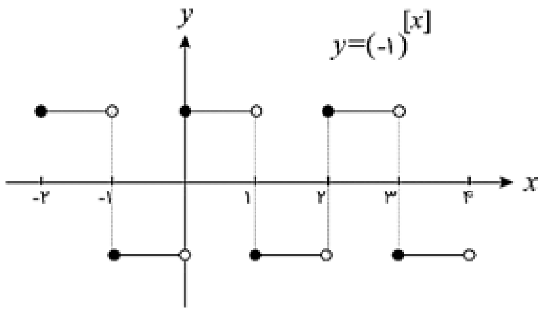
گام اول

الف) می‌دانیم به ازای هر x دلخواه $|f(x)| \geq ۰$ است.

ب) $xy \geq ۰$ همواره برقرار است هرگاه، x و y در بازه‌های مختلف هم‌علامت باشد.

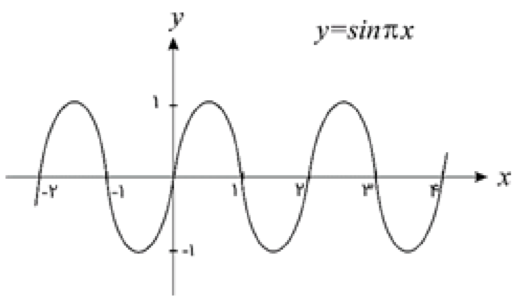
گام دوم

باتوجه‌به گام اول، نامساوی $(-۱)^{[x]}f(x) \geq ۰$ زمانی برقرار است که دو تابع $y = (-۱)^{[x]}$ و $y = f(x)$ در بازه‌های مختلف هم‌علامت باشند. ابتدا نمودار تابع $y = (-۱)^{[x]}$ را رسم می‌کنیم:



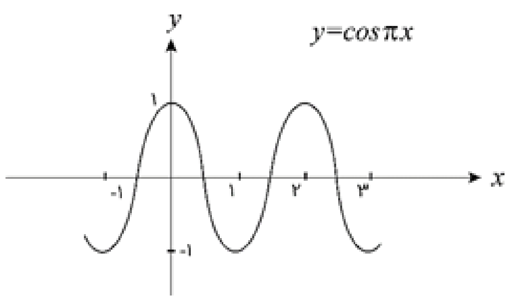
اکنون با رسم نمودار هریک از گزینه‌ها، بررسی می‌کنیم کدام‌یک از آن‌ها در بازه‌های مختلف با تابع $y = (-۱)^{[x]}$ هم‌علامت است.

گزینهٔ ۱:



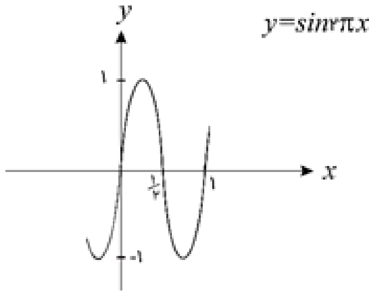
همان‌طور که مشاهده می‌شود، این تابع در بازه‌های مختلف با تابع $y = (-۱)^{[x]}$ هم‌علامت است، پس این گزینه جواب سؤال خواهد بود.

گزینهٔ ۲:



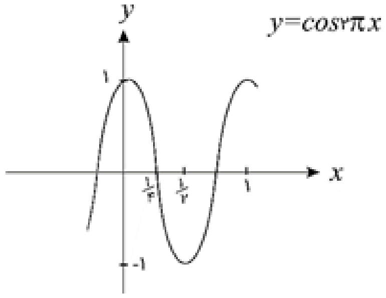
باتوجه‌به نمودار فوق، این تابع در بازه‌های زیادی ازجمله در بازهٔ $(\frac{۱}{۲}, ۱)$ با تابع $y = (-۱)^{[x]}$ هم‌علامت نیست.

گزینهٔ ۳:



مقدار تابع در بازهٔ $(\frac{۱}{۲}, ۱)$ منفی است درحالی‌که تابع $y = (-۱)^{[x]}$ در این بازه دارای علامت مثبت است.

گزینهٔ ۴:



با مقایسهٔ نمودار بالا با نمودار تابع $y = (-۱)^{[x]}$، این گزینه هم جواب سؤال نیست.

۲۳ گزینه ۳

اگر $x \in [-۱, ۱]$، آنگاه:

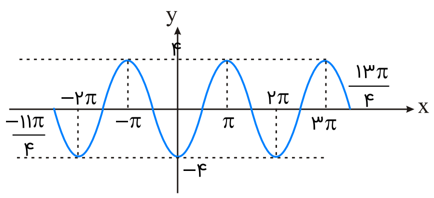
$$-۱ \leq x \leq ۱ \Rightarrow -۳\pi \leq -۳\pi x \leq ۳\pi$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{۴} - ۳\pi \leq \frac{\pi}{۴} - ۳\pi x \leq \frac{\pi}{۴} + ۳\pi \Rightarrow \frac{-۱۱\pi}{۴} \leq \frac{\pi}{۴} - ۳\pi x \leq \frac{۱۳\pi}{۴}$$

حال با در نظر گرفتن $\frac{\pi}{۴} - ۳\pi x = \theta$، ضابطهٔ تابع مفروض سؤال، به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$y = -۴\cos\theta \; ; \quad \frac{-۱۱\pi}{۴} \leq \theta \leq \frac{۱۳\pi}{۴}$$

که شکل آن به‌صورت زیر است:



ملاحظه می‌کنید که این تابع در سه نقطه با طول‌های $\theta = -\pi$، $\theta = \pi$ و $\theta = ۳\pi$، بیشترین مقدار خود را دارد.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

۲۴ گزینه ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

گام اول

الف) وقتی تعداد نقاط برخورد نمودار یک تابع با محور xها خواسته شده است، درواقع باید تعداد ریشه‌های معادلهٔ $y=0$ را تعیین کنیم.
پس باید تعداد ریشه‌های معادلهٔ $y=0$ را در بازهٔ $[-\pi, \frac{3\pi}{2}]$ به دست آوریم.
ب) معادلهٔ $\sin\alpha=0$ یک معادلهٔ خاص بوده و در آن $\alpha=k\pi$ است.
ج) مقادیر k را به نحوی تعیین می‌کنیم که ریشه‌های معادله حتماً در بازهٔ $[-\pi, \frac{3\pi}{2}]$ قرار بگیرند.

گام دوم

$$y=0 \Rightarrow 3\sin(\frac{\pi}{4}-2x)=0 \Rightarrow \sin(\frac{\pi}{4}-2x)=0 \xrightarrow[\alpha=k\pi]{\sin\alpha=0} \frac{\pi}{4}-2x=k\pi$$

$$\Rightarrow 2x=\frac{\pi}{4}-k\pi \Rightarrow x=\frac{\pi}{8}-\frac{k\pi}{2} \quad (k\in\mathbb{Z})$$

$$k=-2 \Rightarrow x=\frac{\pi}{8}+\pi=\frac{9\pi}{8}$$

$$k=-1 \Rightarrow x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}=\frac{5\pi}{8}$$

$$k=0 \Rightarrow x=\frac{\pi}{8}$$

$$k=1 \Rightarrow x=\frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{2}=-\frac{3\pi}{8}$$

$$k=2 \Rightarrow x=\frac{\pi}{8}-\pi=-\frac{7\pi}{8}$$

توجه داشته باشید که به ازای $k\geq 3$ یا $k\leq -3$ مقادیری که برای x به دست می‌آید در بازهٔ $[-\pi, \frac{3\pi}{2}]$ نیست. پس پنج مقدار برای x به دست آمده و نمودار تابع در پنج نقطه محور xها را قطع می‌کند.

۲۵ گزینه ۲

می دانیم $\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$ است. هم چنین جواب های کلی معادلهٔ $\tan x=\tan\alpha$ از رابطهٔ $x=k\pi+\alpha$ به دست می آید.

$$\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}=\sqrt{3} \Rightarrow \tan 2x=\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \tan 2x=\tan\frac{\pi}{3} \Rightarrow 2x=k\pi+\frac{\pi}{3} \Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۲۶ گزینه ۳

ابتدا معادلهٔ مثلثاتی را به حالت استاندارد $f(x)=0$ تبدیل و جواب‌ها را در بازهٔ $[0, 2\pi]$ تعیین می‌کنیم:

$$\frac{\sin x \cos x}{1-\cos x} = 1+\cos x \Rightarrow \sin x \cos x = (1-\cos x)(1+\cos x)$$

$$\Rightarrow \sin x \cos x = 1-\cos^2 x = \sin^2 x$$

$$\Rightarrow \sin x \cos x - \sin^2 x = 0 \Rightarrow \sin x(\cos x - \sin x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = \sin x \end{cases}$$

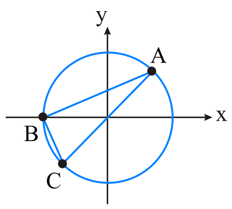
$$\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \xrightarrow{x\in[0,2\pi]} x=0,\ x=\pi,\ x=2\pi$$

$$\sin x = \cos x \Rightarrow \tan x = 1 \xrightarrow{x\in[0,2\pi]} x=\frac{\pi}{4}\ ,\ x=\frac{5\pi}{4}$$

به ازای $x=0$ و $x=2\pi$ عبارت $1-\cos x$ برابر صفر است پس کسر تعریف‌نشده خواهد بود.

مجموعه جواب‌های $x=\pi,\ x=\frac{\pi}{4},\ x=\frac{5\pi}{4}$ را بر روی دایرهٔ مثلثاتی مشخص می‌کنیم:

$$\overset{\frown}{AC} = \pi \Rightarrow \hat{B} = 90^\circ$$



بنابراین مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ قائم‌الزاویه است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۱

۲۷ گزینه ۴

راه‌حل اول:

ابتدا حاصل $1+\cot^2\theta$ و $1+\tan^2\theta$ را برحسب $\sin\theta$ و $\cos\theta$ به دست می‌آوریم:

$$1+\tan^2\theta = 1+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$1+\cot^2\theta = 1+\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta}$$

می‌دانیم $1-\sin^2\theta=\cos^2\theta$ و $1-\cos^2\theta=\sin^2\theta$ است پس:

$$\frac{(1+\tan^2\theta)(1+\cot^2\theta)}{1-\sin^2\theta-\cos^4\theta} = \frac{\frac{1}{\cos^2\theta}\times\frac{1}{\sin^2\theta}}{\cos^2\theta-\cos^4\theta} = \frac{\frac{1}{\cos^2\theta\sin^2\theta}}{\cos^2\theta(1-\cos^2\theta)} = \frac{\frac{1}{\cos^2\theta\sin^2\theta}}{\cos^2\theta\sin^2\theta}$$

$$= \frac{1}{\cos^4\theta\sin^4\theta} = \frac{1}{(\cos\theta\sin\theta)^4}$$

می‌دانیم:

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta \Rightarrow \sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta$$

بنابراین:

$$\frac{1}{(\cos\theta\sin\theta)^4} = \frac{1}{(\frac{1}{2}\sin 2\theta)^4} = \frac{1}{\frac{1}{16}\sin^4 2\theta} = 16\sin^{-4}2\theta$$

راه‌حل دوم: (عددگذاری)

در صورتی که $\theta=\frac{\pi}{4}$ در نظر بگیریم، داریم:

$$\frac{(1+\tan^2\theta)(1+\cot^2\theta)}{1-\sin^2\theta-\cos^4\theta} = \frac{(1+(\tan\frac{\pi}{4})^2)(1+(\cot\frac{\pi}{4})^2)}{1-\sin^2\frac{\pi}{4}-\cos^4\frac{\pi}{4}} = \frac{(1+1)(1+1)}{1-(\frac{\sqrt{2}}{2})^2-(\frac{\sqrt{2}}{2})^4} = 16$$

با جایگذاری $\theta=\frac{\pi}{4}$ در گزینه‌ها، نتیجه می‌گیریم که تنها در گزینهٔ "۴" صدق می‌کند:

$$16\sin^{-4}2\theta = 16(\sin(2\times\frac{\pi}{4}))^{-4} = 16$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۱

۲۸ گزینه ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

گام اول

می‌دانیم:

$$۲\sin x\cos x = \sin ۲x$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

گام دوم

باتوجه‌به گام اول می‌توان نوشت:

$$\sin(x+\frac{\pi}{۴}) = \sin x\cos\frac{\pi}{۴} + \cos x\sin\frac{\pi}{۴} \Rightarrow \sin(x+\frac{\pi}{۴}) = \frac{\sqrt{۲}}{۲}\sin x + \frac{\sqrt{۲}}{۲}\cos x$$

$$\Rightarrow \sin(x+\frac{\pi}{۴}) = \frac{\sqrt{۲}}{۲}(\sin x + \cos x) \Rightarrow \sqrt{۲}\sin(x+\frac{\pi}{۴}) = \sin x + \cos x$$

بنابراین داریم:

$$۲\sqrt{۲}\sin x\cos x = \sin x + \cos x \Rightarrow \sqrt{۲}\sin ۲x = \sqrt{۲}\sin(x+\frac{\pi}{۴}) \Rightarrow \sin ۲x = \sin(x+\frac{\pi}{۴})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲x = ۲k\pi + x + \frac{\pi}{۴} \Rightarrow x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۴} \\ ۲x = ۲k\pi + \pi - x - \frac{\pi}{۴} \Rightarrow ۳x = ۲k\pi + \frac{۳\pi}{۴} \Rightarrow x = \frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۴} \end{cases}$$

به ازای $k \in \mathbb{Z}$، مجموعهٔ جواب‌های $x = \frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۴}$ را $x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۴}$ نیز شامل می‌شود؛ بنابراین جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی داده‌شده به‌صورت $x = \frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۴}$ است.

۲۹ گزینه ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

گام اول

الف) با استفاده از اتحاد مزدوج سمت چپ معادلهٔ مثلثاتی را ساده می‌کنیم:

$$\sin^۴ x - \cos^۴ x = (\sin^۲ x - \cos^۲ x)\underbrace{(\sin^۲ x + \cos^۲ x)}_{۱} = \sin^۲ x - \cos^۲ x$$

ب) با دانستن رابطهٔ $\cos ۲\alpha = \cos^۲\alpha - \sin^۲\alpha$ و $\sin\frac{۵\pi}{۴} = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$، معادله را حل کرده و جواب کلی آن را به دست می‌آوریم.

گام دوم

$$\sin^۲ x - \cos^۲ x = -(\cos^۲ x - \sin^۲ x) = -\cos ۲x$$

$$\sin^۴ x - \cos^۴ x = -\cos ۲x = \sin^۲\frac{۵\pi}{۴} \xrightarrow{\sin\frac{۵\pi}{۴} = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}} -\cos ۲x = (-\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲ \Rightarrow -\cos ۲x = \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \cos ۲x = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow \cos ۲x = \cos\frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow ۲x = ۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳} \xrightarrow{\div ۲} x = k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$$

۳۰ گزینه ۱

تابع را به شکل زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$y = a\sin(\frac{\pi}{۲} + b\pi x) = a\cos b\pi x$$

ماکزیمم تابع برابر با ۲ است؛ بنابراین: $|a| = ۲$

ازطرفی $y(۰) = ۲$، پس:

$$y(۰) = a \times \cos ۰ = a \Rightarrow a = ۲$$

همچنین نمودار تابع در بازهٔ $[-۲/۵, ۳/۵]$ سه بار تکرار شده است، درنتیجه:

$$۳T = ۳/۵ - (-۲/۵) = ۶ \Rightarrow T = ۲$$

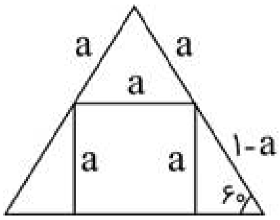
$$\Rightarrow \frac{۲\pi}{|b\pi|} = ۲ \Rightarrow |b| = ۱ \Rightarrow b = \pm ۱$$

که هر دو مقدار قابل‌قبول است. باتوجه‌به گزینه‌ها، $a.b = ۲$ است.

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۸

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

۳۱ گزینه ۱



$$\sin ۶۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \frac{a}{۱-a} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow ۲a = \sqrt{۳} - \sqrt{۳}a \Rightarrow a = \frac{\sqrt{۳}}{۲+\sqrt{۳}} \Rightarrow a = ۲\sqrt{۳} - ۳$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۳۲ گزینه ۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

گام اول

الف) دورهٔ تناوب تابع $y = \sin ax$ از رابطهٔ $T = \frac{۲\pi}{|a|}$ به دست می‌آید.

ب) به ازای هر مقدار دلخواه x و a همواره داریم: $-۱ \leq \sin ax \leq ۱$

گام دوم

تابع $y = a\sin(b\pi x)$ در بازهٔ $[۰, ۳]$، سه نوسان کامل انجام داده است؛ بنابراین طول این بازه سه برابر دورهٔ تناوب تابع است، پس:

$$۳T = ۳ - ۰ \Rightarrow ۳T = ۳ \Rightarrow T = ۱$$

بنابراین طبق قسمت (الف) از گام اول، داریم:

$$T = \frac{۲\pi}{|b\pi|} = \frac{۲\pi}{|b|\pi} = \frac{۲}{|b|} \Rightarrow ۱ = \frac{۲}{|b|} \Rightarrow |b| = ۲ \Rightarrow b = \pm ۲$$

باتوجه‌به قسمت (ب) از گام اول، داریم:

$$-۱ \leq \sin(b\pi x) \leq ۱ \Rightarrow -a \leq a\sin(b\pi x) \leq a \Rightarrow -a \leq y \leq a$$

طبق نمودار تابع $y_{max} = ۳$ و $y_{min} = -۳$ و نمودار تابع ابتدا نزولی و سپس صعودی است بنابراین $a = -۳$ خواهد بود.

ازطرفی، به ازای مقادیر کوچک بزرگ‌تر از صفر، حاصل تابع باید منفی شود و چون $a = -۳$ شد پس مقدار $\sin b\pi x$ باید مثبت باشد؛ بنابراین داریم: $b = ۲$

درنتیجه:

$$ab = (-۳) \times ۲ = -۶$$

۳۳ گزینه ۱

برای یافتن ضابطهٔ تابع $fog(x)$ یا همان $f(g(x))$، کافی است در ضابطهٔ تابع $f(x)$ به جای متغیر x، ضابطهٔ $g(x)$ را قرار دهیم.

$$fog(x) = f(g(x)) = g(x) - \sqrt{g(x)} = \sin^4 x - \sqrt{\sin^4 x} = \sin^4 x - \sin^2 x$$
$$= \sin^2 x(\sin^2 x - 1) = \sin^2 x(-\cos^2 x) = -\sin^2 x\cos^2 x$$

با توجه به فرمول $\sin 2x$، داریم:

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$$

پس ضابطهٔ تابع fog به صورت زیر درمی آید:

$$fog(x) = -(\frac{1}{2}\sin 2x)^2 = -\frac{1}{4}\sin^2 2x$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۳۴ گزینه ۴

$$\sin 5x + \sin 4x = 1 + \cos\pi \Rightarrow \sin 5x + \sin 4x = 0$$

بنابراین:

$$\sin 5x = -\sin 4x = \sin(-4x)$$
$$\begin{cases} 5x = 2k\pi - 4x \Rightarrow 9x = 2k\pi \Rightarrow x = \dfrac{2k\pi}{9} & (1) \\ 5x = 2k\pi + \pi + 4x \Rightarrow x = 2k\pi + \pi & (2) \end{cases}$$

جواب‌های معادلهٔ (۱) عبارت‌اند از:

$$0, \frac{2\pi}{9}, \frac{4\pi}{9}, \frac{6\pi}{9}, \frac{8\pi}{9}, \frac{10\pi}{9}, \frac{12\pi}{9}, \frac{14\pi}{9}, \frac{16\pi}{9}, \frac{18\pi}{9}$$

جواب‌های این معادله یک دنبالهٔ حسابی با قدر نسبت $\frac{2\pi}{9}$ است که مجموع جملات برابر می‌شود با:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \xrightarrow{n=10} S_{10} = \frac{10}{2}(0 + \frac{18\pi}{9}) = 10\pi$$

از طرفی معادلهٔ (۲) در این بازه فقط دارای جواب π است؛ بنابراین مجموع جواب‌های معادله در این بازه 11π است.

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۳ ۱۳۹۴
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۳۵ گزینه ۳

ابتدا معادلهٔ مثلثاتی داده‌شده را تا حد امکان ساده می‌کنیم:

$$۲\cos ۲x = \cot x(۴\sin x + \tan x) \Rightarrow ۲(۲\cos^۲ x - ۱) = ۴\cot x \sin x + \cot x \tan x$$
$$\Rightarrow ۴\cos^۲ x - ۲ = ۴\cos x + ۱ \Rightarrow ۴\cos^۲ x - ۴\cos x - ۳ = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{۴+\sqrt{۶۴}}{۸} = \frac{۴+۸}{۸} = \frac{۱۲}{۸} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow \cos x = \frac{۳}{۲} \quad \text{غ.ق ق} \\ \cos x = \frac{۴-\sqrt{۶۴}}{۸} = \frac{۴-۸}{۸} = -\frac{۴}{۸} = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow \cos x = \cos\frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳} \end{cases}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۳۶ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

گام اول

تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = x_۰$ پیوسته است هرگاه حد چپ و راست تابع در این نقطه برابر با مقدار تابع در این نقطه باشد؛ به عبارت دیگر داشته باشیم:

$$\lim_{x\to x_۰^-} f(x) = \lim_{x\to x_۰^+} f(x) = f(x_۰)$$

گام دوم

ابتدا حد چپ و راست تابع $f(x)$ را در نقطهٔ $x = \frac{\pi}{۴}$ محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}^-} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{۴}^-} \frac{۱-\tan^۲ x}{\cos ۲x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{۴}^-} \frac{۱-\frac{\sin^۲ x}{\cos^۲ x}}{\cos ۲x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{۴}^-} \frac{\frac{\cos^۲ x - \sin^۲ x}{\cos^۲ x}}{\cos^۲ x - \sin^۲ x}$$

$$= \lim_{x\to \frac{\pi}{۴}^-} \frac{۱}{\cos^۲ x} = \frac{۱}{(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲} = \frac{۱}{\frac{۱}{۲}} = ۲$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}^+} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{۴}^+} a\cos ۳x = a\cos\frac{۳\pi}{۴} = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}a$$

$$f(\frac{\pi}{۴}) = a\cos\frac{۳\pi}{۴} = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}a$$

با بررسی شرط پیوستگی در $x = \frac{\pi}{۴}$، مقدار a را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}^-} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{۴}^+} f(x) = f(\frac{\pi}{۴})$$

$$\Rightarrow -\frac{\sqrt{۲}}{۲}a = ۲ \Rightarrow \sqrt{۲}a = -۴ \Rightarrow a = -\frac{۴}{\sqrt{۲}} \Rightarrow a = -۲\sqrt{۲}$$

۳۷ گزینه ۲

نکته: از فرمول های کمان $(\alpha+\beta)$ می دانیم:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

معادلهٔ مثلثاتی را ساده می کنیم:

$$\sin ۲x(\sin x+\cos x)=\cos ۲x(\cos x-\sin x)$$
$$\Rightarrow \sin ۲x\sin x+\sin ۲x\cos x=\cos ۲x\cos x-\cos ۲x\sin x$$
$$\Rightarrow \sin ۲x\cos x+\cos ۲x\sin x=\cos ۲x\cos x-\sin ۲x\sin x$$

با توجه به فرمول های کمان $(\alpha+\beta)$ داریم:

$$\sin(۲x+x)=\cos(۲x+x)\Rightarrow \sin ۳x=\cos ۳x$$
$$\xrightarrow[\cos ۳x\neq ۰]{\div\cos ۳x}\frac{\sin ۳x}{\cos ۳x}=۱\Rightarrow \tan ۳x=۱\Rightarrow \tan ۳x=\tan\frac{\pi}{۴}$$

جواب معادلهٔ مثلثاتی $\tan x=\tan\alpha$ از رابطهٔ $x=k\pi+\alpha$ به دست می آید.

$$۳x=k\pi+\frac{\pi}{۴}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۱۲}$$

جواب های معادله در بازهٔ $[۰,\pi]$ به صورت زیر است:

$$k=۰\Rightarrow x=\frac{\pi}{۱۲}\ ,\ k=۱\Rightarrow x=\frac{۵\pi}{۱۲}\ ,\ k=۲\Rightarrow x=\frac{۹\pi}{۱۲}$$

$$\text{مجموع جواب ها}=\frac{\pi}{۱۲}+\frac{۵\pi}{۱۲}+\frac{۹\pi}{۱۲}=\frac{۱۵\pi}{۱۲}=\frac{۵\pi}{۴}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۳۸ گزینه ۲

در $x=۰$، مقدار تابع برابر است با $y=۳$؛ لذا با جایگذاری در تابع خواهیم داشت $a=۳$. به‌سادگی نتیجه می‌شود که به ازای $x=\frac{۲۵}{۳}$، مقدار تابع برابر است با $y=۲/۵$.

$$T=\frac{۲\pi}{|\pi b|}=۴\Rightarrow |b|=\frac{۱}{۲}\Rightarrow b=-\frac{۱}{۲}\ \checkmark\ ,\ b=\frac{۱}{۲}\ \times\ ,\ y=۳+\sin(\frac{-\pi}{۲}x)$$
$$\xrightarrow{x=\frac{۲۵}{۳}} y=۳+\sin(\frac{-۲۵}{۶}\pi)\Rightarrow y=۳+\sin(-۴\pi-\frac{\pi}{۶})\Rightarrow y=۳-\frac{۱}{۲}=\frac{۵}{۲}=۲/۵$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۳۹ گزینه ۴

نکته:

$$\sin x = \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \alpha \\ x = ۲k\pi + \pi - \alpha \end{cases}$$

$$\frac{\sin ۳x}{\cos(\frac{۳\pi}{۲} + x)} = ۱ \xrightarrow{\cos(\frac{۳\pi}{۲}+x)=\sin x} \frac{\sin ۳x}{\sin x} = ۱$$

$$\Rightarrow \sin ۳x = \sin x \Rightarrow \begin{cases} ۳x = ۲k\pi + x \Rightarrow x = k\pi \ \text{غ ق ق} \\ ۳x = ۲k\pi + \pi - x \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴} \end{cases}$$

چون $\sin x \neq ۰$، بنابراین جواب $x = k\pi$ غیرقابل‌قبول است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۴۰ گزینه ۳

دورهٔ تناوب تابع به معادلهٔ $y = a\sin(bx) + c$ برابر است با $\frac{۲\pi}{|b|}$، پس:

$$y = a\sin(b\pi x) \Rightarrow T = \frac{۲\pi}{|b\pi|} = \frac{۲}{|b|} \quad (*)$$

همچنین باتوجه‌به نمودار $T = ۶$ است، پس:

$$\xrightarrow{(*)} \frac{۲}{|b|} = ۶ \Rightarrow |b| = \frac{۱}{۳} \quad (۱)$$

با فرض $b = \frac{۱}{۳}$ و اگر a عددی مثبت باشد، آنگاه بیشترین مقدار تابع به معادلهٔ $y = a\sin(bx) + c$، برابر با $a + c$ است، پس:

$$y = a\sin(b\pi x) \Rightarrow Max(y) = a \quad (**)$$

همچنین باتوجه‌به نمودار $Max(y) = ۲$، پس:

$$\xrightarrow{(**)} a = ۲ \quad (۲)$$

$$(۱), (۲) \Rightarrow a + b = ۲ + \frac{۱}{۳} = \frac{۷}{۳}$$

توجه: مقادیر a و b می‌توانند هر دو منفی باشند و جواب $a + b = -\frac{۷}{۳}$ نیز قابل‌قبول است که در گزینه‌ها وجود ندارد.

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۵ ۱۳۹۵
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳
قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۸ ۱۳۹۴

۴۱ گزینه ۱

علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۸ ۱۴۰۱
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴
قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸
قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۵ ۱۳۹۵

گام اول

با توجه به اینکه در صورت سؤال مقدار $\tan ۱۵^\circ$ داده شده است، سعی می کنیم تمام زوایا را بر حسب زاویهٔ ۱۵° به دست آوریم.

گام دوم

$$A=\frac{\cos ۲۸۵^\circ-\sin ۲۵۵^\circ}{\sin ۵۲۵^\circ-\sin ۱۰۵^\circ}=\frac{\cos(۲۷۰^\circ+۱۵^\circ)-\sin(۲۷۰^\circ-۱۵^\circ)}{\sin(۵۴۰^\circ-۱۵)-\sin(۹۰^\circ+۱۵^\circ)}$$
$$=\frac{\cos(\frac{۳\pi}{۲}+۱۵^\circ)-\sin(\frac{۳\pi}{۲}-۱۵^\circ)}{\sin(۳\pi-۱۵^\circ)-\sin(\frac{\pi}{۲}+۱۵^\circ)}=\frac{\sin ۱۵^\circ-(-\cos ۱۵^\circ)}{\sin ۱۵^\circ-\cos ۱۵^\circ}=\frac{\sin ۱۵^\circ+\cos ۱۵^\circ}{\sin ۱۵^\circ-\cos ۱۵^\circ}$$

برای این که در کسر داده شده $\tan ۱۵^\circ$ ایجاد شود، صورت و مخرج کسر را بر $\cos ۱۵^\circ$ تقسیم می کنیم. بنابراین داریم:

$$A=\frac{\frac{\sin ۱۵^\circ+\cos ۱۵^\circ}{\cos ۱۵^\circ}}{\frac{\sin ۱۵^\circ-\cos ۱۵^\circ}{\cos ۱۵^\circ}}=\frac{\frac{\sin ۱۵^\circ}{\cos ۱۵^\circ}+\frac{\cos ۱۵^\circ}{\cos ۱۵^\circ}}{\frac{\sin ۱۵^\circ}{\cos ۱۵^\circ}-\frac{\cos ۱۵^\circ}{\cos ۱۵^\circ}}$$
$$=\frac{\tan ۱۵^\circ+۱}{\tan ۱۵^\circ-۱}=\frac{۰/۲۸+۱}{۰/۲۸-۱}=\frac{۱/۲۸}{-۰/۷۲}=-\frac{۱۲۸}{۷۲}=-\frac{۱۶}{۹}$$

۴۲ گزینه ۱

به فرمول های ۲α توجه کنید:

$$\sin ۲\alpha=۲\sin\alpha\cos\alpha,\ \cos ۲\alpha=۲\cos^۲\alpha-۱$$
$$۲\cos^۲x+۲\sin x\cos x=۱\Rightarrow ۲\cos^۲x-۱=-۲\sin x\cos x\Rightarrow \cos ۲x=-\sin ۲x$$
$$\xrightarrow[\cos\alpha=\sin(\frac{\pi}{۲}-\alpha)]{-\sin\alpha=\sin(-\alpha)}\sin(\frac{\pi}{۲}-۲x)=\sin(-۲x)$$
$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{\pi}{۲}-۲x=۲k\pi-۲x\Rightarrow\frac{\pi}{۲}=۲k\pi\Rightarrow \text{جواب ندارد}\\ \frac{\pi}{۲}-۲x=۲k\pi+\pi-(-۲x)\Rightarrow -۴x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}\xrightarrow{\div(-۴)}x=\frac{-k\pi}{۲}-\frac{\pi}{۸},\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

نکته: چون $k\in\mathbb{Z}$ است پس k- را همان k در نظر می‌گیریم. بنابراین گزینهٔ "۱" صحیح است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

۴۳ گزینه ۲

نکته:

$$\tan x = \tan \alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

از نکتهٔ بالا می‌توان فهمید $\tan(\frac{\pi}{4} - x) = \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}$؛ بنابراین:

$$\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} = \tan 3x \Rightarrow \tan(\frac{\pi}{4} - x) = \tan 3x$$

$$\Rightarrow 3x = k\pi + (\frac{\pi}{4} - x) \Rightarrow 4x = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{16}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

۴۴ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

گام اول

الف) معادلهٔ مثلثاتی $\cos 3x + \cos x = 0$ را به معادلهٔ مثلثاتی $\cos 3x = -\cos x$ تبدیل می‌کنیم.

ب) به‌جای $-\cos x$ عبارت $\cos(\pi - x)$ را قرار داده و جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی را تعیین می‌کنیم.

گام دوم

$$\cos 3x = \cos(\pi - x) \Rightarrow 3x = 2k\pi \pm (\pi - x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \pi - x \Rightarrow 4x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \\ 3x = 2k\pi - \pi + x \Rightarrow 2x = 2k\pi - \pi \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

جواب کلی $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ هر دو جواب به‌دست‌آمده را شامل می‌شود.

۴۵ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

گام اول

الف) با در نظر گرفتن $\cot\frac{x}{۲}=\frac{۱}{\tan\frac{x}{۲}}$ معادله را برحسب $\tan\frac{x}{۲}$ به دست می‌آوریم. معادله به یک معادلهٔ درجه‌دو برحسب $\tan\frac{x}{۲}$ تبدیل و با حل معادلهٔ درجه‌دو، حاصل $\tan\frac{x}{۲}$ را تعیین می‌کنیم.

ب) با استفاده از فرمول کمان $\tan ۲x$، ابتدا $\tan x$ و سپس $\tan ۲x$ را محاسبه می‌کنیم.

گام دوم

$$\tan\frac{x}{۲}-\cot\frac{x}{۲}=۱\Rightarrow \tan\frac{x}{۲}-\frac{۱}{\tan\frac{x}{۲}}=۱$$

$$\Rightarrow\frac{\tan^{۲}\frac{x}{۲}-۱}{\tan\frac{x}{۲}}=۱\Rightarrow\tan^{۲}\frac{x}{۲}-۱=\tan\frac{x}{۲}$$

$$\Rightarrow\tan^{۲}\frac{x}{۲}-\tan\frac{x}{۲}-۱=۰\Rightarrow\tan\frac{x}{۲}=\begin{cases}\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\\ \frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}\end{cases}$$

محاسبهٔ $\tan x$:

$$\tan x=\frac{۲\tan\frac{x}{۲}}{۱-\tan^{۲}\frac{x}{۲}}=\frac{۲(۱\pm\sqrt{۵})^{۲}}{۱-(\frac{۱\pm\sqrt{۵}}{۲})^{۲}}=-۲$$

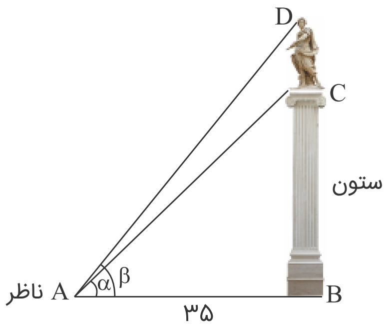
محاسبهٔ $\tan ۲x$:

$$\tan ۲x=\frac{۲\tan x}{۱-\tan^{۲}x}=\frac{۲(-۲)}{۱-(-۲)^{۲}}=\frac{-۴}{۱-۴}=\frac{-۴}{-۳}=\frac{۴}{۳}$$

۴۶

گزینه ۲

ابتدا مسئله را به مدل هندسی تبدیل می‌کنیم:



$$\alpha = ۴۰^\circ \quad , \quad \beta = ۴۵^\circ$$

$$\tan\beta = \frac{BD}{۳۵} \xrightarrow{\beta=۴۵^\circ} BD = ۳۵ \times \tan ۴۵^\circ = ۳۵$$

$$\tan\alpha = \frac{BC}{۳۵} \xrightarrow{\alpha=۴۰^\circ} BC = ۳۵ \times \tan ۴۰^\circ = \frac{۸}{۱۰} \times ۳۵ = ۲۸$$

بنابراین:

ارتفاع مجسمه : $CD = BD - BC = ۳۵ - ۲۸ = ۷$

گزینه دو ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۳ ۱۳۹۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

۴۷

گزینه ۳

در فرض تست مقدار $\tan ۲۰^\circ$ به ما داده شده است، پس ابتدا تمامی زوایا را به‌صورت جمع یا تفاضل کمان‌های معروف و زاویهٔ ۲۰° می‌نویسیم. عبارت نهایی را برحسب $\tan ۲۰^\circ$ به دست آورده و حاصل عددی آن را محاسبه می‌کنیم.

$$A = \frac{\sin ۲۵۰^\circ + \sin ۷۰۰^\circ}{\cos ۵۶۰^\circ - \cos ۱۱۰^\circ} = \frac{\sin(۲۷۰ - ۲۰^\circ) + \sin(۷۲۰^\circ - ۲۰^\circ)}{\cos(۵۴۰^\circ + ۲۰^\circ) - \cos(۹۰^\circ + ۲۰^\circ)}$$

$$= \frac{-\cos ۲۰^\circ + \sin(-۲۰^\circ)}{\cos(۱۸۰^\circ + ۲۰^\circ) - (-\sin ۲۰^\circ)} = \frac{-\cos ۲۰^\circ - \sin ۲۰^\circ}{-\cos ۲۰^\circ + \sin ۲۰^\circ}$$

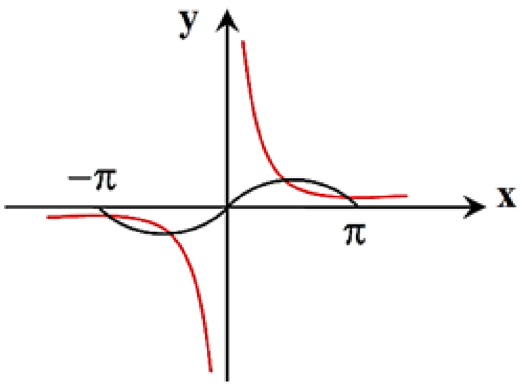
$$\xrightarrow{\div \cos ۲۰^\circ} A = \frac{\frac{-\cos ۲۰^\circ}{\cos ۲۰^\circ} - \frac{\sin ۲۰^\circ}{\cos ۲۰^\circ}}{\frac{-\cos ۲۰^\circ}{\cos ۲۰^\circ} + \frac{\sin ۲۰^\circ}{\cos ۲۰^\circ}} = \frac{-۱ - \tan ۲۰^\circ}{-۱ + \tan ۲۰^\circ} = \frac{-۱ - ۰/۴}{-۱ + ۰/۴} = \frac{-۱/۴}{-۰/۶} = \frac{۷}{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۹۴

۴۸ گزینه ۲

$$\mathrm{x}\sin \mathrm{x} - ۱ = ۰ \Rightarrow \mathrm{x}\sin \mathrm{x} = ۱ \Rightarrow \sin \mathrm{x} = \frac{۱}{\mathrm{x}}$$

کافی است تعداد نقاط تلاقی نمودارهای $\mathrm{y} = \sin \mathrm{x}$ و $\mathrm{y} = \frac{۱}{\mathrm{x}}$ را در بازهٔ $[-\pi, \pi]$ به دست بیاوریم. برای این منظور هر دو نمودار را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.



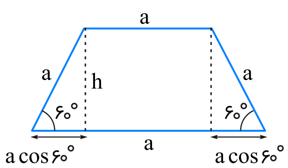
باتوجه‌به شکل، واضح است که معادلهٔ داده‌شده در بازهٔ $[-\pi, \pi]$ دارای ۴ ریشهٔ حقیقی است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

۴۹ گزینه ۲

$$(\text{محیط})\ \mathrm{P} = ۳\mathrm{a} + ۲\mathrm{a}\cos ۶۰^\circ + \mathrm{a} \Rightarrow ۳۰ = ۵\mathrm{a} \Rightarrow \mathrm{a} = ۶$$

$$\mathrm{S} = \frac{(\mathrm{a}+۲\mathrm{a})\mathrm{h}}{۲} = \frac{۳\mathrm{a} \times \mathrm{a}\sin ۶۰^\circ}{۲} \xrightarrow{\mathrm{a}=۶} \mathrm{S} = \frac{۳\sqrt{۳} \times ۶^۲}{۴} = ۲۷\sqrt{۳}$$



کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۵۰ گزینه ۱

$$۲\sin^۲\mathrm{x} + ۳\cos \mathrm{x} = ۰ \xrightarrow{\sin^۲\mathrm{x}=۱-\cos^۲\mathrm{x}} ۲ - ۲\cos^۲\mathrm{x} + ۳\cos \mathrm{x} = ۰ \Rightarrow ۲\cos^۲\mathrm{x} - ۳\cos \mathrm{x} - ۲ = ۰$$

$$\Rightarrow \cos \mathrm{x} = \frac{۳ \pm \sqrt{۹+۱۶}}{۴} = \begin{cases} ۲ & \text{غ‌قق} \\ -\frac{۱}{۲} \end{cases} \Rightarrow \cos \mathrm{x} = \frac{-۱}{۲} \Rightarrow \mathrm{x} = ۲\mathrm{k}\pi \pm \frac{۲\pi}{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۵۱ گزینه ۱

$$\cos(\frac{۳\pi}{۲}-۲\alpha)=-\sin ۲\alpha$$

$$\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{۱}{۲}\xrightarrow{\text{به توان دو می‌رسانیم}}\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha-۲\sin\alpha\cos\alpha=\frac{۱}{۴}$$

$$\xrightarrow[۲\sin\alpha\cos\alpha=\sin ۲\alpha]{\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱}-\sin ۲\alpha=-\frac{۳}{۴}\xrightarrow{\cos(\frac{۳\pi}{۲}-۲\alpha)=-\sin ۲\alpha}\cos(\frac{۳\pi}{۲}-۲\alpha)=-\frac{۳}{۴}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۵۲ گزینه ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

گام اول

الف) تابع در بازهٔ بین $\frac{\pi}{۱۸}$ و $\frac{۱۳\pi}{۱۸}$ یک دوره تناوب کامل را طی می‌کند.

ب) دوره تناوب تابع $y=a-۲\cos\left(bx+\frac{\pi}{۲}\right)$ از رابطهٔ $T=\frac{۲\pi}{|b|}$ به دست می‌آید.

ج) داریم:

$$y=a-۲\cos(bx+\frac{\pi}{۲})=a+۲\sin bx$$

باتوجه‌به نمودار b باید مثبت باشد زیرا در غیر این صورت نمودار تابع قرینهٔ نمودار رسم شده خواهد بود.

د) نقطه به مختصات $\left(\frac{\pi}{۱۸},۰\right)$ در ضابطهٔ تابع صدق می‌کند.

گام دوم

باتوجه‌به قسمت الف از گام اول، دوره تناوب تابع برابر است با:

$$T=\frac{۱۳\pi}{۱۸}-\frac{\pi}{۱۸}=\frac{۱۲\pi}{۱۸}=\frac{۲\pi}{۳}$$

همچنین باتوجه‌به قسمت ب و ج از گام اول می‌توان نوشت:

$$T=\frac{۲\pi}{|b|}=\frac{۲\pi}{۳}\quad\Rightarrow\quad|b|=۳\quad\xrightarrow{b>۰}\quad b=۳$$

اکنون با توجه به اینکه $f\left(\frac{\pi}{۱۸}\right)=۰$ است، مقدار a را محاسبه می‌کنیم:

$$۰=a-۲\cos\left(۳\times\frac{\pi}{۱۸}+\frac{\pi}{۲}\right)=a-۲\cos\left(\frac{\pi}{۶}+\frac{\pi}{۲}\right)=a+۲\sin\left(\frac{\pi}{۶}\right)=a+۲\left(\frac{۱}{۲}\right)$$

$$\Rightarrow\quad a+۱=۰\quad\Rightarrow\quad a=-۱$$

پس حاصل $a+b$ برابر است با:

$$a+b=-۱+۳=۲$$

۵۳ گزینه ۳

با استفاده از اتحاد مزدوج داریم:

$$\sin^4 x - \cos^4 x = \left(\sin^2 x - \cos^2 x\right)\underbrace{\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)}_{1}$$

$$= \sin^2 x - \cos^2 x = -\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) = -\cos 2x$$

همچنین با استفاده از فرمول کمان‌های 2α داریم:

$$\sin 4x = 2\sin 2x\cos 2x$$

بنابراین معادلهٔ مثلثاتی به‌صورت زیر ساده می‌شود:

$$2\sin 2x\cos 2x = -\cos 2x \quad \Rightarrow \quad 2\sin 2x\cos 2x + \cos 2x = 0$$

$$\Rightarrow \quad \cos 2x\left(2\sin 2x + 1\right) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x = k\pi + \dfrac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{k\pi}{2} + \dfrac{\pi}{4} \\ \sin 2x = -\dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \dfrac{7\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad x = k\pi + \dfrac{7\pi}{12} \\ 2x = 2k\pi - \dfrac{\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad x = k\pi - \dfrac{\pi}{12} \end{cases} \end{cases}$$

حالا جواب‌های معادله را در بازهٔ $[0, \pi]$ به دست می‌آوریم:

$$x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \begin{cases} k = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{\pi}{4} \\ k = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4} \end{cases}$$

$$x = k\pi + \frac{7\pi}{12} \xrightarrow{k=0} x = \frac{7\pi}{12}$$

$$x = k\pi - \frac{\pi}{12} \xrightarrow{k=1} x = \pi - \frac{\pi}{12} = \frac{11\pi}{12}$$

بنابراین مجموع تمام جواب‌های معادله در بازهٔ $[0, \pi]$ برابر است با:

$$\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} + \frac{7\pi}{12} + \frac{11\pi}{12} = \pi + \frac{18\pi}{12} = 2\pi + \frac{6\pi}{12} = 2\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}$$

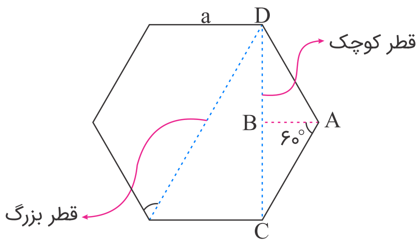
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

۵۴ گزینه ۲

شش ضلعی منتظم به ضلع a از شش مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع a تشکیل شده است، پس مساحت آن برابر است با:

$$S = ۶ \times \frac{۱}{۲} \times a \times a \times \sin ۶۰^\circ = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}a^۲$$

$$S = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}a^۲ = ۹\sqrt{۳} \Rightarrow a^۲ = ۶ \Rightarrow a = \sqrt{۶}$$



با استفاده از تقارن داریم:

$$DC = ۲BC = ۲AC \sin ۶۰^\circ = ۲\sqrt{۶} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \sqrt{۱۸} = ۳\sqrt{۲}$$

نکته: در شش ضلعی منتظم به طول ضلع a داریم:

الف) طول قطر کوچک آن $a\sqrt{۳}$ است.

ب) طول قطر بزرگ آن $۲a$ است.

پ) مساحت آن $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}a^۲$ است.

قلمچی علوم تجربی دهم آزمون شماره ۵ ۱۳۹۹

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۵۵ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

گام اول

می‌دانیم: $\tan\left(\frac{\pi}{۲} + \frac{\alpha}{۲}\right) = -\cot \frac{\alpha}{۲}$

گام دوم

با استفاده از فرمول‌های کمان ۲α، رابطهٔ $\frac{۱}{۲} = \frac{\sin\alpha}{۱+\cos\alpha}$ را ساده کرده و مقدار خواسته‌شده را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{\sin\alpha}{۱+\cos\alpha} = \frac{۲\sin\frac{\alpha}{۲}\cos\frac{\alpha}{۲}}{۱+۲\cos^۲\frac{\alpha}{۲}-۱} = \frac{۲\sin\frac{\alpha}{۲}\cos\frac{\alpha}{۲}}{۲\cos^۲\frac{\alpha}{۲}} = \tan\frac{\alpha}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \cot\frac{\alpha}{۲} = \frac{۱}{\tan\frac{\alpha}{۲}} = \frac{۱}{\frac{۱}{۲}} = ۲ \Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{۲}+\frac{\alpha}{۲}\right) = -\cot\frac{\alpha}{۲} = -۲$$

۵۶ گزینه ۱

$$\sin(x+\frac{\pi}{8})+\cos(x-\frac{3\pi}{8})=1$$

باتوجه‌به اینکه $\sin\alpha=\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)$ است، داریم:

$$\cos(\frac{\pi}{2}-x-\frac{\pi}{8})+\cos(x-\frac{3\pi}{8})=\cos(\frac{3\pi}{8}-x)+\cos(x-\frac{3\pi}{8})$$
$$=2\cos(x-\frac{3\pi}{8})=1\Rightarrow\cos(x-\frac{3\pi}{8})=\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}$$
$$\Rightarrow x-\frac{3\pi}{8}=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=2k\pi+\frac{3\pi}{8}\pm\frac{\pi}{3}$$
$$\xrightarrow{x\in[0,2\pi]} x\in\left\{\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi}{3},\frac{3\pi}{8}-\frac{\pi}{3}\right\}$$
$$\Rightarrow \text{مجموع جواب‌ها}=\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi}{3}+\frac{3\pi}{8}-\frac{\pi}{3}=\frac{3\pi}{4}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۵۷ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

گام اول

نکته:

$$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$$

گام دوم

با استفاده از گام اول، معادلهٔ داده‌شده را تا حد امکان ساده می‌کنیم:

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{4}$$
$$\Rightarrow\left(\cos x\cos\frac{\pi}{4}-\sin x\sin\frac{\pi}{4}\right)\left(\cos x\cos\frac{\pi}{4}+\sin x\sin\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{4}$$
$$\Rightarrow\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right)=\frac{1}{4}$$
$$\Rightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x-\sin x)\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x+\sin x)=\frac{1}{4}$$
$$\Rightarrow\cos^2x-\sin^2x=\frac{1}{2}\quad\Rightarrow\quad\cos 2x=\frac{1}{2}\quad\Rightarrow\quad\cos 2x=\cos\frac{\pi}{3}$$

با توجه به اینکه می‌دانیم رابطهٔ $\cos x=\cos\alpha$ هنگامی برقرار است که $x=2k\pi\pm\alpha$ باشد، جواب معادلهٔ مثلثاتی داده‌شده، برابر است با:

$$2x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}\quad\Rightarrow\quad x=k\pi\pm\frac{\pi}{6}$$

۵۸ گزینه ۳

دورهٔ تناوب تابع برابر π و ماکزیمم مقدار آن ۱/۵ است.

$$T=\frac{2\pi}{|b|}=\pi\Rightarrow |b|=2\Rightarrow b=\pm 2 \quad (I)$$

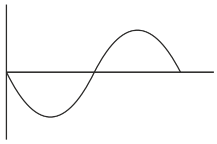
$$\text{ماکزیمم تابع}=1+|a|=1/5\Rightarrow |a|=\frac{1}{2}\Rightarrow a=\pm\frac{1}{2}\ (II)$$

از طرفی عرض نقطهٔ تماس نمودار با محور yها بزرگ‌تر از یک است.

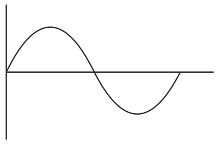
$$x=0: y=1+a\sin(\frac{-\pi}{6})=1-\frac{a}{2}>1\Rightarrow \frac{a}{2}<0\Rightarrow a<0\xrightarrow{(II)} a=\frac{-1}{2}$$

باتوجه‌به اینکه ضریب sin در تابع منفی است و باتوجه‌به شکل زیر، نتیجه می‌گیریم باید b (ضریب x) مثبت باشد (حالت اول)؛ یعنی $b=2$ قابل‌قبول است.

$$a+b=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$



نمودار $y=-\sin x$



نمودار $y=-\sin(-x)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۵۹ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

گام اول

با استفاده از فرمول $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$ عبارت داده‌شده را ساده کرده و معادله را حل می‌کنیم.

گام دوم

$$\cos 2x+2\cos^2 x=0\Rightarrow 2\cos^2 x-1+2\cos^2 x=0$$

$$\Rightarrow 4\cos^2 x=1\Rightarrow \cos^2 x=\frac{1}{4}\Rightarrow \cos x=\pm\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\cos x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}\\ \cos x=-\frac{1}{2}\Rightarrow x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}\end{cases}\xrightarrow{\text{اجتماع}} x=k\pi\pm\frac{\pi}{3}$$

۶۰ گزینه ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

گام اول

با استفاده از رابطهٔ $\cos ۲x = ۱ - ۲\sin^۲ x$ معادلهٔ مثلثاتی داده‌شده را به یک معادلهٔ مثلثاتی برحسب $\sin x$ تبدیل می‌کنیم.

گام دوم

$$۳\sin^۲ x - ۴\sin^۴ x = \cos ۲x \Rightarrow ۳\sin^۲ x - ۴\sin^۴ x = ۱ - ۲\sin^۲ x$$

$$\Rightarrow ۴\sin^۴ x - ۵\sin^۲ x + ۱ = ۰ \xrightarrow{\sin^۲ x = t} ۴t^۲ - ۵t + ۱ = ۰$$

$$t = ۱ \Rightarrow \sin^۲ x = ۱ \Rightarrow \sin x = \pm ۱ \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۲} \qquad (۱)$$

$$t = \frac{۱}{۴} \Rightarrow \sin^۲ x = \frac{۱}{۴} \Rightarrow \sin x = \pm\frac{۱}{۲} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{۶} \qquad (۲)$$

$$(۱) \cup (۲) : x = \frac{k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۶}$$

۶۱ گزینه ۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

گام اول

باتوجه‌به نمودار رسم‌شده مشخص است دورهٔ تناوب تابع برابر با ۴π است. دورهٔ تناوب تابع $y = \frac{۱}{۲} + ۲\cos mx$ از رابطهٔ $T = \frac{۲\pi}{|m|}$ به دست می‌آید.

گام دوم

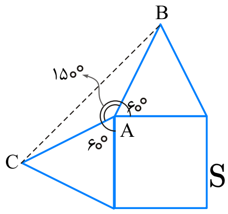
$$\frac{۲\pi}{|m|} = ۴\pi \Rightarrow |m| = \frac{۱}{۲} \Rightarrow m = \pm\frac{۱}{۲}$$

با فرض $m = \frac{۱}{۲}$ تست را حل می‌کنیم (اگر $m = -\frac{۱}{۲}$ هم فرض شود تأثیری در جواب تست ندارد).

$$m = \frac{۱}{۲} \Rightarrow y = \frac{۱}{۲} + ۲\cos\frac{x}{۲} \Rightarrow f(\frac{۱۶\pi}{۳}) = \frac{۱}{۲} + ۲\cos\frac{۸\pi}{۳}$$

$$= \frac{۱}{۲} + ۲\cos(۲\pi + \frac{۲\pi}{۳}) = \frac{۱}{۲} + ۲\cos\frac{۲\pi}{۳} = \frac{۱}{۲} + ۲(-\frac{۱}{۲}) = \frac{۱}{۲} - ۱ = -\frac{۱}{۲}$$

۶۲ گزینه ۳



$$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۲ \times \sin ۱۵۰^\circ = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۲ \times \sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۲ \times \frac{۱}{۲} = ۱$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۶۳ گزینه ۴

$$\sin ۲x + \cos(\frac{\pi}{۲} - x) = ۰ \Rightarrow ۲ \sin x \cos x + \sin x = ۰ \Rightarrow \sin x(۲ \cos x + ۱) = ۰$$

$$\sin x = ۰ \Rightarrow x = ۰, \pi, ۲\pi$$

$$۲ \cos x + ۱ = ۰ \Rightarrow \cos x = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow x = \pi - \frac{\pi}{۳} = \frac{۲\pi}{۳}, x = \pi + \frac{\pi}{۳} = \frac{۴\pi}{۳}$$

$$\pi + ۲\pi + \frac{۲\pi}{۳} + \frac{۴\pi}{۳} = ۵\pi$$

در اینجا نیازی به محاسبهٔ جواب‌های کلی معادلهٔ مثلثاتی نیست، فقط کافی است جواب‌ها را در فاصلهٔ داده‌شده، مشخص کنیم.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

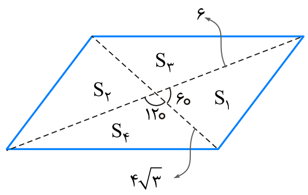
۶۴ گزینه ۴

نکته: در مثلث ABC با اضلاع a، b و c، اگر زاویهٔ بین اضلاع a و b برابر با α باشد، مساحت مثلث برابر است با:

$$S = \frac{۱}{۲} \times a \times b \times \sin\alpha$$

بااستفاده از نکتهٔ بالا داریم:

$$S_۱ = S_۲ \Rightarrow \frac{۱}{۲} \times ۶ \times ۴\sqrt{۳} \times \sin ۶۰^\circ = ۱۸$$
$$S_۳ = S_۴ \Rightarrow \frac{۱}{۲} \times ۶ \times ۴\sqrt{۳} \times \sin(۱۲۰^\circ) = ۱۸$$
$$S_۱ + S_۲ + S_۳ + S_۴ = ۴ \times ۱۸ = ۷۲$$



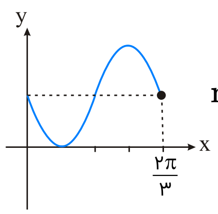
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۶۵ گزینه ۴

$$\text{طبق نمودار} : T = \frac{۲\pi}{۳}$$
$$\text{از روی ضابطه} : T = \frac{۲\pi}{|m|}$$

$$\Rightarrow \frac{۲\pi}{۳} = \frac{۲\pi}{|m|} \Rightarrow |m| = ۳ \Rightarrow m = \pm ۳$$

چون باتوجه‌به نمودار تابع باید ابتدا $\min$ و سپس $\max$ داشته باشد، بنابراین:



$$m = ۳ \Rightarrow y = ۱ - \sin ۳x \xrightarrow{x=\frac{۷\pi}{۶}} y(\frac{۷\pi}{۶}) = ۱ - \sin(۳(\frac{۷\pi}{۶}))$$
$$= ۱ - \sin(\frac{۷\pi}{۲}) = ۱ - (-۱) = ۲$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

۶۶ گزینه ۴

$$\tan x=\frac{۱}{\tan ۳x}=\cot ۳x=\tan(\frac{\pi}{۲}-۳x)$$

$$x=k\pi+\frac{\pi}{۲}-۳x\Rightarrow ۴x=k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۴}+\frac{\pi}{۸}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

۶۷ گزینه ۲

راه‌حل اول:

$$\sin ۲x\sin ۴x+\sin^۲ x=۱\Rightarrow \sin ۲x\sin ۴x=۱-\sin^۲ x$$
$$\Rightarrow (۲\sin x\cos x)(۲\sin ۲x\cos ۲x)=\cos^۲ x$$
$$\Rightarrow (۲\sin x\cos x)(۴\sin x\cos x\cos ۲x)=\cos^۲ x$$
$$\Rightarrow (\cos^۲ x)(۸\sin^۲ x\cos ۲x-۱)=۰$$
$$\Rightarrow (\cos^۲ x)(۸\sin^۲ x(۱-۲\sin^۲ x)-۱)=۰$$
$$\Rightarrow (\cos^۲ x)(-۱۶\sin^۴ x+۸\sin^۲ x-۱)=۰$$
$$\Rightarrow (\cos^۲ x)(-(۴\sin^۲ x-۱)^۲)=۰$$
$$\Rightarrow \begin{cases}\cos x=۰\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۲} & (۱)\\ ۴\sin^۲ x-۱=۰\Rightarrow \sin^۲ x=\frac{۱}{۴}\Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{۶} & (۲)\end{cases}$$
$$\xrightarrow{(۱)\cup(۲)} x=(۲k+۱)\frac{\pi}{۶}$$

راه‌حل دوم:

$$\sin ۲x\sin ۴x=۱-\sin^۲ x\Rightarrow \frac{۱}{۲}(\cos(-۲x)-\cos ۶x)=\cos^۲ x$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}\cos ۲x-\frac{۱}{۲}\cos ۶x=\frac{۱+\cos ۲x}{۲}\Rightarrow \cos ۶x=-۱$$

$$\Rightarrow ۶x=(۲k+۱)\pi\Rightarrow x=(۲k+۱)\frac{\pi}{۶}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

۶۸ گزینه ۱

ماکزیمم برابر ۴ است.

$$f(۰)=۰\Rightarrow a+b=۰\ ,\quad f(۲)=۴\Rightarrow a+b\cos\pi=۴\Rightarrow a-b=۴$$

$$\begin{cases}a+b=۰\\ a-b=۴\end{cases}\Rightarrow a=۲\ ,\ b=-۲$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

۶۹ گزینه ۲

$$\frac{\sin ۳x + \sin ۲x}{۱ + \cos x} = ۰$$

برای آنکه کسر صفر شود باید صورت آن صفر باشد.

$$\sin ۳x + \sin ۲x = ۰ \Rightarrow \sin ۳x = -\sin ۲x \Rightarrow \sin ۳x = \sin(-۲x)$$

$$\begin{cases} ۳x = ۲k\pi - ۲x \Rightarrow ۵x = ۲k\pi \Rightarrow x = \dfrac{۲k\pi}{۵} & \checkmark \\ ۳x = ۲k\pi + \pi - (-۲x) \Rightarrow x = ۲k\pi + \pi & \times \end{cases}$$

توجه کنید که به ازای $x = ۲k\pi + \pi$ مخرج یعنی $۱ + \cos x$ صفر می‌شود؛ بنابراین جواب کلی همان $x = \frac{۲k\pi}{۵}$ است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

۷۰ گزینه ۳

کمترین مقدار تابع ۱- است؛ پس:

$$۱ - |a| = -۱ \Rightarrow |a| = ۲$$

تابع در دو دورهٔ تناوب رسم شده است، پس:

$$۲T = \frac{۴}{۳} \Rightarrow T = \frac{۲}{۳}$$

$$\frac{۲\pi}{|b\pi|} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow |b| = ۳$$

باتوجه‌به نمودار a و b هم‌علامت است؛ پس:

$a + b = ۵$ یا -۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

۷۱ گزینه ۲

$$\tan\frac{۱۱\pi}{۴} = \tan(\frac{۱۲\pi}{۴} - \frac{\pi}{۴}) = \tan(۳\pi - \frac{\pi}{۴}) = \tan(-\frac{\pi}{۴}) = -۱$$

$$\sin\frac{۱۵\pi}{۴} = \sin(\frac{۱۶\pi}{۴} - \frac{\pi}{۴}) = \sin(۴\pi - \frac{\pi}{۴}) = \sin(-\frac{\pi}{۴}) = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\cos\frac{۱۳\pi}{۴} = \cos(\frac{۱۲\pi}{۴} + \frac{\pi}{۴}) = \cos(۳\pi + \frac{\pi}{۴}) = -\cos(\frac{\pi}{۴}) = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$A = \tan\frac{۱۱\pi}{۴} + \sin\frac{۱۵\pi}{۴}\cos\frac{۱۳\pi}{۴} = -۱ + (\frac{-\sqrt{۲}}{۲})(\frac{-\sqrt{۲}}{۲}) = -۱ + \frac{۱}{۲} = -\frac{۱}{۲}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

۷۲ گزینه ۴

$$A = \sqrt{۱+\tan^۲ x}(۲\sin^۲\frac{\pi}{۴} - \sin^۲ x) = \sqrt{\frac{۱}{\cos^۲ x}}\left(۲(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲ - \sin^۲ x\right)$$

$$= \frac{۱}{|\cos x|}(۲ \times \frac{۱}{۲} - \sin^۲ x) = \frac{۱ - \sin^۲ x}{|\cos x|} = \frac{\cos^۲ x}{|\cos x|}$$

چون $\pi < x < \frac{۳\pi}{۲}$ است، یعنی x در ناحیهٔ سوم قرار دارد و درنتیجه $|\cos x| = -\cos x$ است. پس:

$$A = \frac{\cos^۲ x}{-\cos x} = -\cos x$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۷۳ گزینه ۳

$$\sin\frac{۱۷\pi}{۳} = \sin(\frac{۱۸\pi}{۳} - \frac{\pi}{۳}) = \sin(۶\pi - \frac{\pi}{۳}) = \sin(-\frac{\pi}{۳}) = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\cos(-\frac{۱۷\pi}{۶}) = \cos(\frac{۱۷\pi}{۶}) = \cos(\frac{۱۸\pi}{۶} - \frac{\pi}{۶}) = \cos(۳\pi - \frac{\pi}{۶})$$

$$= \cos(\pi - \frac{\pi}{۶}) = -\cos\frac{\pi}{۶} = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan(\frac{۱۹\pi}{۴}) = \tan(\frac{۲۰\pi}{۴} - \frac{\pi}{۴}) = \tan(-\frac{\pi}{۴}) = -۱$$

$$\sin(-\frac{۱۱\pi}{۶}) = -\sin\frac{۱۱\pi}{۶} = -\sin(\frac{۱۲\pi}{۶} - \frac{\pi}{۶}) = \sin\frac{\pi}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

حاصل عبارت خواسته‌شده برابر است با:

$$(-\frac{\sqrt{۳}}{۲})(-\frac{\sqrt{۳}}{۲}) + (-۱)(\frac{۱}{۲}) = \frac{۳}{۴} - \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۴}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۷۴ گزینه ۳

باتوجه‌به نمودار $f(\pi) = -\frac{۳}{۲}$ است، پس:

$$-\frac{۳}{۲} = a + b\sin(\pi + \frac{\pi}{۳}) \Rightarrow a + b(-\frac{\sqrt{۳}}{۲}) = -\frac{۳}{۲}$$

$$\xrightarrow{\times ۲} ۲a - b\sqrt{۳} = -۳ \quad (۱)$$

باتوجه‌به نمودار تابع $b > ۰$ است و همچنین چون ماکزیمم تابع $\sqrt{۳}$ است، پس:

$$a + |b| = \sqrt{۳} \xrightarrow{b>۰} a + b = \sqrt{۳} \quad (۲)$$

با حل دستگاه داریم:

$$-۲\begin{cases} a + b = \sqrt{۳} \\ ۲a - b\sqrt{۳} = -۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۲a - ۲b = -۲\sqrt{۳} \\ ۲a - b\sqrt{۳} = -۳ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{+} -b(۲ + \sqrt{۳}) = -(۳ + ۲\sqrt{۳}) \Rightarrow b = \frac{\sqrt{۳}(۲ + \sqrt{۳})}{۲ + \sqrt{۳}} = \sqrt{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۷۵ گزینه ۴

$$۴\sin x \sin(\frac{۳\pi}{۲} - x) = ۱ \Rightarrow ۴\sin x(-\cos x) = ۱$$

$$\Rightarrow -۴ \times \frac{۱}{۲}\sin ۲x = ۱ \Rightarrow \sin ۲x = -\frac{۱}{۲} = \sin(-\frac{\pi}{۶})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۶} \\ ۲x = ۲k\pi + \pi + \frac{\pi}{۶} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi - \frac{\pi}{۱۲} & (۱) \\ x = k\pi + \frac{۷\pi}{۱۲} & (۲) \end{cases}$$

تعداد جواب‌ها را در دسته‌های مختلف به دست می‌آوریم:

(۱)

k	۱	۲
x	$\pi - \frac{\pi}{۱۲}$	$۲\pi - \frac{\pi}{۱۲}$

(۲)

k	۰	۱
x	$\frac{۷\pi}{۱۲}$	$\pi + \frac{۷\pi}{۱۲}$

مجموع جواب‌ها برابر است با:

$$\pi - \frac{\pi}{۱۲} + ۲\pi - \frac{\pi}{۱۲} + \frac{۷\pi}{۱۲} + \pi + \frac{۷\pi}{۱۲} = ۴\pi + \pi = ۵\pi$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۷۶

گزینه ۱

از اتحادهای $a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)$ و $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha$ استفاده می‌کنیم.

$$\sin^3 x+\cos^3 x=1-\frac{1}{2}\sin 2x$$

$$\Rightarrow (\sin x+\cos x)(\underbrace{\sin^2 x+\cos^2 x}_{1}-\underbrace{\sin x\cos x}_{\frac{1}{2}\sin 2x})=1-\frac{1}{2}\sin 2x$$

$$(\sin x+\cos x)\left(1-\frac{1}{2}\sin 2x\right)-\left(1-\frac{1}{2}\sin 2x\right)=0$$

$$\left(1-\frac{1}{2}\sin 2x\right)(\sin x+\cos x-1)=0$$

$$\begin{cases}1-\frac{1}{2}\sin 2x=0\Rightarrow \sin 2x=2\Rightarrow \text{فاقد ریشهٔ حقیقی}\\ \sin x+\cos x-1=0\Rightarrow \sin x+\cos x=1\end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})=1\Rightarrow \sin(x+\frac{\pi}{4})=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \sin(x+\frac{\pi}{4})=\sin\frac{\pi}{4}\Rightarrow\begin{cases}x+\frac{\pi}{4}=2k\pi+\frac{\pi}{4}\\ x+\frac{\pi}{4}=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{4}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=2k\pi & (1)\\ x=2k\pi+\frac{\pi}{2} & (2)\end{cases}$$

مجموعه جواب در بازه‌های داده‌شده $\left\{0,\frac{\pi}{2},2\pi\right\}$ می‌باشد که مجموع آن‌ها $\frac{5\pi}{2}$ است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

۷۷ گزینه ۳

تابع را کمی ساده می‌کنیم. از رابطهٔ $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{۱}{۲}\sin ۲\alpha$ استفاده می‌کنیم:

$$y = ۱ + a\sin bx\cos bx = ۱ + \frac{a}{۲}\sin ۲bx$$

باتوجه‌به نمودار داده‌شده، ماکزیمم تابع $\frac{۳}{۲}$، مینیمم تابع $\frac{۱}{۲}$ و دورهٔ تناوب $\frac{۳\pi}{۴} - (-\frac{\pi}{۴}) = \pi$ است. پس:

$$\begin{cases} ۱ + \left|\frac{a}{۲}\right| = \frac{۳}{۲} \\ ۱ - \left|\frac{a}{۲}\right| = \frac{۱}{۲} \end{cases} \Rightarrow \frac{|a|}{۲} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow |a| = ۱$$

$$\frac{۲\pi}{|۲b|} = \pi \Rightarrow |b| = ۱$$

باتوجه‌به اینکه تابع داده‌شده در سمت راست محور y صعودی است، پس $\frac{a}{۲}$ و $۲b$ باید هم‌علامت باشند. پس مسئله دو دسته جواب $\begin{cases} a = ۱ \\ b = ۱ \end{cases}$ یا $\begin{cases} a = -۱ \\ b = -۱ \end{cases}$ دارد، درنتیجه $a + b = ۲$ یا $a + b = -۲$ صحیح است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

۷۸ گزینه ۱

$$\frac{\tan x}{\sqrt{۱ + \tan^۲ x}}\left(\frac{۱}{\sin x} - \sin x\right) = \frac{\tan x}{\sqrt{\frac{۱}{\cos^۲ x}}}\left(\frac{۱ - \sin^۲ x}{\sin x}\right)$$

$$= \frac{\tan x}{\frac{۱}{\frac{۱}{|\cos x|}}} \times \frac{\cos^۲ x}{\sin x} = \frac{\sin x}{\cos x} \times |\cos x| \times \frac{\cos^۲ x}{\sin x}$$

اگر $\frac{\pi}{۲} < x < \pi$ باشد آنگاه $\cos x < ۰$ است، پس $|\cos x| = -\cos x$ است. بنابراین:

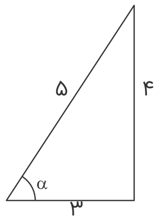
$$\frac{\sin x}{\cos x} \times (-\cos x) \times \frac{\cos^۲ x}{\sin x} = -\cos^۲ x$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۷۹ گزینه ۳

$$\sin(\frac{۹\pi}{۲}+\alpha)=\sin(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=\cos\alpha$$
$$\cos(\frac{۷\pi}{۲}-\alpha)=-\sin\alpha$$
$$\tan(\alpha-\frac{۳\pi}{۲})=-\tan(\frac{۳\pi}{۲}-\alpha)=-\cot\alpha$$

اگر $\tan\alpha=\frac{۴}{۳}$ باشد، با رسم مثلث سایر نسبت‌های مثلثاتی α را پیدا می‌کنیم:



$$\tan\alpha=\frac{۴}{۳}\ ,\cot\alpha=\frac{۳}{۴}$$
$$\sin\alpha=-\frac{۴}{۵}\ ,\cos\alpha=-\frac{۳}{۵}$$
$$\text{حاصل}:\cos\alpha(-\sin\alpha)-(-\cot\alpha)=-\frac{۳}{۵}(\frac{۴}{۵})+\frac{۳}{۴}$$
$$=-\frac{۱۲}{۲۵}+\frac{۳}{۴}=\frac{-۴۸+۷۵}{۱۰۰}=\frac{۲۷}{۱۰۰}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۸۰ گزینه ۲

$$\tan(\frac{۱۷\pi}{۶})=\tan(\frac{۱۸\pi}{۶}-\frac{\pi}{۶})=\tan(-\frac{\pi}{۶})=-\tan\frac{\pi}{۶}=-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$
$$\sin(\frac{۱۱\pi}{۳})=\sin(\frac{۱۲\pi}{۳}-\frac{\pi}{۳})=\sin(-\frac{\pi}{۳})=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$
$$\cos(\frac{۱۰\pi}{۳})=\cos(۳\pi+\frac{\pi}{۳})=-\cos\frac{\pi}{۳}=-\frac{۱}{۲}$$

حاصل عبارت برابر است با:

$$(-\frac{\sqrt{۳}}{۳})(-\frac{\sqrt{۳}}{۲})-\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۶}-\frac{۱}{۲}=۰$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

۸۱ گزینه ۱

داریم:

$$\tan\alpha - \cot\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{-\cos 2\alpha}{\frac{1}{2}\sin 2\alpha} = -2\cot 2\alpha$$

بنابراین $\tan\alpha - \cot\alpha = -2\cot 2\alpha$، پس:

$$f(x) = \tan(\pi x) - \cot(\pi x) = -2\cot(2\pi x)$$

دورهٔ تناوب تابع $\tan(ax)$ و $\cot(ax)$ برابر $\frac{\pi}{|a|}$ است، پس دورهٔ تناوب تابع $f(x)$ برابر $\frac{\pi}{|2\pi|}$ است، یعنی $\frac{1}{2}$.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

۸۲ گزینه ۲

$$\cos 3x + \cos x = 0 \Rightarrow \cos 3x = -\cos x \Rightarrow \cos 3x = \cos(\pi - x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \pi - x \Rightarrow 4x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \\ 3x = 2k\pi - \pi + x \Rightarrow 2x = 2k\pi - \pi \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\cos x \neq 0} x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۸۳ گزینه ۴

می‌دانیم:

$$(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 = \sin^4\alpha + \cos^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$$

$$\Rightarrow 1 = \sin^4\alpha + \cos^4\alpha + \frac{1}{2}\sin^2 2\alpha$$

$$\Rightarrow \sin^4\alpha + \cos^4\alpha = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\alpha$$

حال از رابطهٔ $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\alpha$ کمک می‌گیریم:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin^2 2x = 1$$

$$\Rightarrow \sin 2x = \pm 1 \Rightarrow 2x = k\pi \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{4}$$

جواب‌های موجود در بازهٔ $[0, 2\pi]$ برابر $\left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$ می‌باشد که مجموع آن‌ها 4π است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

۸۴ گزینه ۲

$$y = a + b\cos(\frac{\pi}{۲} - x) = a + b\sin x$$

مقدار تابع در $-\frac{۵\pi}{۶}$ صفر است. پس:

$$y(-\frac{۵\pi}{۶}) = a + b\sin(-\frac{۵\pi}{۶}) = a + b(-\frac{۱}{۲}) = ۰ \Rightarrow b = ۲a$$

بنابراین: $y = a + ۲a\sin x$. به‌علاوه باتوجه‌به اینکه $y(۰) > ۰$ می‌باشد، پس $a > ۰$ است و ماکزیمم تابع زمانی رخ می‌دهد که $\sin x = ۱$ باشد.

$$\max = ۳ \Rightarrow a + ۲a = ۳ \Rightarrow a = ۱$$
$$\Rightarrow y = ۱ + ۲\sin x$$
$$y(\frac{\pi}{۶}) = ۱ + ۲(\frac{۱}{۲}) = ۲$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۸۵ گزینه ۴

$$\sin C = \frac{۵}{۱۳} \xrightarrow{\cos C > ۰} \cos C = \sqrt{۱ - \sin^۲ C} = \sqrt{۱ - \frac{۲۵}{۱۶۹}} = \frac{۱۲}{۱۳}$$

$$\begin{cases} \tan C = \dfrac{\sin C}{\cos C} = \dfrac{\frac{۵}{۱۳}}{\frac{۱۲}{۱۳}} = \dfrac{۵}{۱۲} \\ \tan C = \dfrac{AH}{CH} = \dfrac{AH}{۹} \end{cases} \Rightarrow \frac{۵}{۱۲} = \frac{AH}{۹} \Rightarrow AH = \frac{۴۵}{۱۲} = \frac{۱۵}{۴} = ۳/۷۵$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۸۶ گزینه ۴

دورهٔ تناوب را باتوجه‌به نمودار به دست می‌آوریم:

$$T = \frac{۹\pi}{۲} - (-\frac{۳\pi}{۲}) = \frac{۱۲\pi}{۲} = ۶\pi$$

$$\Rightarrow T = ۶\pi = \frac{۲\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = \frac{۱}{۳} \Rightarrow b = \pm\frac{۱}{۳}$$

طبق نمودار داریم:

$$\begin{cases} \max : |a| + c = ۱ \\ \min : -|a| + c = -۳ \end{cases} \Rightarrow ۲c = -۲ \Rightarrow c = -۱ \Rightarrow |a| = ۲ \Rightarrow a = \pm۲$$

طبق نمودار، تابع در حوالی $x = ۰$ نزولی است، بنابراین $ab < ۰$، پس داریم:

$$\begin{cases} a = -۲ \\ b = \frac{۱}{۳} \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} a = ۲ \\ b = -\frac{۱}{۳} \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{b} = -۶$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۸۷ گزینه ۴

$$y = a + b\sin(\frac{\pi}{۲} + x) = a + b\cos x$$

باتوجه‌به نمودار ماکزیمم تابع برابر ۳ است، پس:

$$\text{ماکزیمم} = a + |b| = ۳ \xrightarrow[b<۰]{\text{باتوجه‌به نمودار}} a - b = ۳ \quad (۱)$$

$$(\frac{۷\pi}{۳}, ۰) : ۰ = a + b\cos(\frac{۷\pi}{۳}) = a + b\cos(۲\pi + \frac{\pi}{۳}) = a + b(\frac{۱}{۲})$$

$$\Rightarrow a + \frac{b}{۲} = ۰ \Rightarrow ۲a + b = ۰ \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} \begin{cases} a - b = ۳ \\ ۲a + b = ۰ \end{cases} \xrightarrow{+} ۳a = ۳ \Rightarrow a = ۱ \Rightarrow b = -۲$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۸۸ گزینه ۲

$$\tan(۳x)\tan x = ۱ \xrightarrow{\tan x \neq ۰} \tan ۳x = \frac{۱}{\tan x} = \cot x$$

$$\Rightarrow \tan ۳x = \tan(\frac{\pi}{۲} - x) \Rightarrow ۳x = k\pi + \frac{\pi}{۲} - x \Rightarrow ۴x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \Rightarrow x = \frac{(۲k+۱)\pi}{۸}$$

$$\xrightarrow{x \in [\pi, ۲\pi]} x = \frac{۹}{۸}\pi, \frac{۱۱}{۸}\pi, \frac{۱۳}{۸}\pi, \frac{۱۵}{۸}\pi \Rightarrow \text{مجموع جواب‌ها} = ۶\pi$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۸۹ گزینه ۲

$$\tan(۳۰۰)\cos(۲۱۰)+\tan(۴۸۰)\sin(۸۴۰)$$

$$=\tan(۳۶۰^\circ-۶۰^\circ)\cos(۱۸۰^\circ+۳۰^\circ)+\tan(۳۶۰^\circ+۱۲۰^\circ)\sin(۷۲۰^\circ+۱۲۰^\circ)$$

$$=\tan(-۶۰^\circ)\cos(۱۸۰^\circ+۳۰^\circ)+\tan(۱۸۰^\circ-۶۰^\circ)\sin(۱۸۰^\circ-۶۰^\circ)$$

$$=(-\tan(۶۰^\circ))(-\cos(۳۰^\circ))+(-\tan(۶۰^\circ))\sin(۶۰^\circ)$$

$$=(-\sqrt{۳})(-\frac{\sqrt{۳}}{۲})+(-\sqrt{۳})(\frac{\sqrt{۳}}{۲})=\frac{۳}{۲}-\frac{۳}{۲}=۰$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹
علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۶ ۱۴۰۱
علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۷ ۱۴۰۱

۹۰ گزینه ۴

$$\sin(۲x-\frac{\pi}{۴})=\cos(x+\frac{\pi}{۴})\Rightarrow\sin(۲x-\frac{\pi}{۴})=\sin(\frac{\pi}{۲}-(x+\frac{\pi}{۴}))$$

$$\Rightarrow\sin(۲x-\frac{\pi}{۴})=\sin(\frac{\pi}{۴}-x)$$

حال این معادله را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases}۲x-\frac{\pi}{۴}=۲k\pi+\frac{\pi}{۴}-x\Rightarrow۳x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=\frac{۲k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۶}\\ ۲x-\frac{\pi}{۴}=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۴}+x\Rightarrow x=۲k\pi+\pi\ \ (x\neq k\pi\ \ \text{غیرقابل‌قبول زیرا})\end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۹۱ گزینه ۴

$$\tan(۲۸۵^\circ)=\tan(۲۷۰^\circ+۱۵^\circ)=-\cot(۱۵^\circ)$$

$$\tan(-۱۶۵^\circ)=-\tan(۱۶۵^\circ)=-\tan(۱۸۰^\circ-۱۵^\circ)=\tan(۱۵^\circ)$$

$$\sin(۱۰۹۵^\circ)=\sin(۱۰۸۰^\circ+۱۵^\circ)=\sin ۱۵^\circ$$

$$\cos(۲۵۵^\circ)=\cos(۲۷۰^\circ-۱۵^\circ)=-\sin(۱۵^\circ)$$

$$\tan(۲۸۵^\circ)\tan(-۱۶۵^\circ)-\sin(۱۰۹۵^\circ)\cos(۲۵۵^\circ)=-\cot(۱۵^\circ)\tan(۱۵^\circ)+\sin^۲(۱۵^\circ)$$

$$=-۱+\sin^۲(۱۵^\circ)=-\cos^۲(۱۵^\circ)$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۹۲ گزینه ۳

$$\text{ماکزیمم} = a + |b| = \frac{۳}{۲} \xrightarrow[b<۰]{\text{باتوجه‌به نمودار}} a - b = \frac{۳}{۲}$$

$$\left(\frac{\pi}{۲}, ۰\right) : f\left(\frac{\pi}{۲}\right) = ۰ \Rightarrow a + b\sin(\frac{\pi}{۲} + \frac{\pi}{۳}) = ۰ \Rightarrow a + b\cos(\frac{\pi}{۳}) = ۰ \Rightarrow a + \frac{۱}{۲}b = ۰$$

$$\Rightarrow ۲a + b = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a - b = \frac{۳}{۲} \\ ۲a + b = ۰ \end{cases} \Rightarrow ۳a = \frac{۳}{۲} \Rightarrow a = \frac{۱}{۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۹۳ گزینه ۳

داریم:

$$۱ + \cot^۲ C = ۱ + \frac{\cos^۲ C}{\sin^۲ C} = \frac{\sin^۲ C + \cos^۲ C}{\sin^۲ C} = \frac{۱}{\sin^۲ C} \Rightarrow ۱ + (\frac{\sqrt{۵}}{۲})^۲ = \frac{۱}{\sin^۲ C}$$

$$\Rightarrow \sin^۲ C = \frac{۴}{۹} \xrightarrow{C<۹۰^\circ} \sin C = \frac{۲}{۳}$$

$$\sin C = \frac{AH}{AC} \Rightarrow \frac{۲}{۳} = \frac{AH}{۹۶} \Rightarrow AH = \frac{۹۶ \times ۲}{۳} = ۶۴$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۹۴ گزینه ۳

راه‌حل اول:

$$۴\sin(۳x)\cos(۳x) = ۱ \Rightarrow ۲\sin(۳x)\cos(۳x) = \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \sin(۶x) = \frac{۱}{۲} = \sin(\frac{\pi}{۶})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۶x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۳۶} \Rightarrow \begin{cases} k = ۰ \Rightarrow x = \frac{\pi}{۳۶} \\ k = ۱ \Rightarrow x = \frac{۱۳\pi}{۳۶} \end{cases} \\ ۶x = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۶} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۳} + \frac{۵\pi}{۳۶} \Rightarrow \begin{cases} k = ۰ \Rightarrow x = \frac{۵\pi}{۳۶} \\ k = ۱ \Rightarrow x = \frac{۱۷\pi}{۳۶} \end{cases} \end{cases}$$

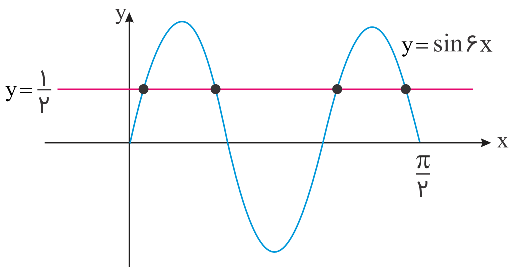
بنابراین معادله چهار جواب دارد.

راه‌حل دوم:

$$۴\sin(۳x)\cos(۳x) = ۱ \Rightarrow \sin(۶x) = \frac{۱}{۲}$$

$$۰ \le x \le \frac{\pi}{۲} \Rightarrow ۰ \le ۶x \le ۳\pi$$

باتوجه‌به شکل معادله چهار جواب دارد:



کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۹۵ گزینه ۱

$$\sin(x + \frac{\pi}{۶}) + \cos(x + \frac{\pi}{۳}) = \cos ۲x$$

$$\Rightarrow (\sin x \cos \frac{\pi}{۶} + \cos x \sin \frac{\pi}{۶}) + (\cos x \cos \frac{\pi}{۳} - \sin x \sin \frac{\pi}{۳}) = \cos ۲x$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲}\sin x + \frac{۱}{۲}\cos x + \frac{۱}{۲}\cos x - \frac{\sqrt{۳}}{۲}\sin x = \cos ۲x$$

$$\Rightarrow \cos x = \cos ۲x \Rightarrow x = ۲k\pi \pm ۲x \quad ; k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -۲k\pi \\ x = \frac{۲k\pi}{۳} \end{cases} \xrightarrow{\text{اجتماع جواب‌ها}} x = \frac{۲k\pi}{۳} \quad ; k \in \mathbb{Z}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۹۶ گزینه ۱

دورهٔ تناوب را باتوجه‌به نمودار به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} T = \dfrac{۵\pi}{۶} - \dfrac{\pi}{۶} = \dfrac{۴\pi}{۶} = \dfrac{۲\pi}{۳} \\ T = \dfrac{۲\pi}{|b|} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{۲\pi}{۳} = \dfrac{۲\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = ۳ \Rightarrow b = \pm ۳$$

طبق نمودار داریم:

$$\begin{cases} \max : |a| + c = ۱ \\ \min : -|a| + c = -۳ \end{cases} \Rightarrow ۲c = -۲ \Rightarrow c = -۱$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = -۳, \ c = -۱ \\ b = ۳, \ c = -۱ \end{cases}$$

فقط حالت $b = ۳, c = -۱$ را در گزینه‌ها داریم، پس گزینهٔ ۱ صحیح است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۹۷ گزینه ۳

$$(۱ - \cos^۲ x) + \sin^۲ x \cos ۳x = ۰ \Rightarrow \sin^۲ x(۱ + \cos ۳x) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = ۰ \Rightarrow x = k\pi \\ \cos ۳x = -۱ \Rightarrow ۳x = (۲k+۱)\pi \Rightarrow x = (۲k+۱)\dfrac{\pi}{۳} \end{cases}$$

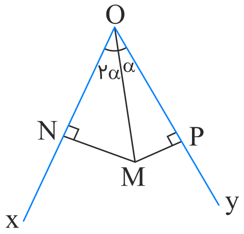
جواب‌های بازه $[۰, ۲\pi]$ برابر $\left\{۰, \pi, ۲\pi, \dfrac{\pi}{۳} \ , \ \dfrac{۵\pi}{۳}\right\}$ است که تعداد آن‌ها ۵ تا است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۹۸

گزینه ۴

فرض کنیم $M\hat{O}y = \alpha$. پس $x\hat{O}M = ۲\alpha$ و داریم:



$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{ONM} : \sin ۲\alpha = \dfrac{MN}{OM} \\ \overset{\Delta}{OPM} : \sin \alpha = \dfrac{MP}{OM} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{رابطهٔ اول را بر رابطهٔ دوم تقسیم می‌کنیم}} \frac{\sin ۲\alpha}{\sin \alpha} = \frac{MN}{MP}$$

$$\Rightarrow \frac{۲\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{MN}{MP} \Rightarrow \frac{MN}{MP} = ۲\cos\alpha = ۲\left(\frac{OP}{OM}\right) = \frac{۲OP}{OM}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

۹۹ گزینه ۴

در هر سه پرانتز از اتحاد $1+\cos A = 2\cos^2 \frac{A}{2}$ استفاده می‌کنیم:

$$(1+\cos 2\alpha)(1+\cos 4\alpha)(1+\cos 8\alpha)=\frac{1}{8} \Rightarrow (2\cos^2\alpha)(2\cos^2 2\alpha)(2\cos^2 4\alpha)=\frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow \cos^2\alpha\cos^2 2\alpha\cos^2 4\alpha=\frac{1}{64} \Rightarrow |\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha|=\frac{1}{8}$$

دو طرف معادلهٔ بالا را در $|\sin\alpha|$ ضرب می‌کنیم:

$$|\sin\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha|=\frac{1}{8}|\sin\alpha|$$

حالا از اتحاد $\sin A\cos A=\frac{1}{2}\sin 2A$ سه بار استفاده می‌کنیم:

$$|\underbrace{\underbrace{\underbrace{\sin\alpha\cos\alpha}_{\frac{1}{2}\sin 2\alpha}\cos 2\alpha}_{\frac{1}{4}\sin 4\alpha}\cos 4\alpha}_{\frac{1}{8}\sin 8\alpha}|=\frac{1}{8}|\sin\alpha| \Rightarrow |\sin 8\alpha|=|\sin\alpha| \Rightarrow \begin{cases}\sin 8\alpha=\sin\alpha\\ \sin 8\alpha=\sin(-\alpha)\end{cases}$$

هر دو معادله را حل می‌کنیم و بزرگ‌ترین جواب هرکدام در بازهٔ $[0,\pi]$ را می‌نویسیم:

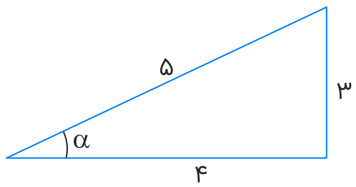
$$1)\ \sin 8\alpha=\sin\alpha \Rightarrow \begin{cases}8\alpha=2k\pi+\alpha \Rightarrow \alpha=\frac{2k\pi}{7} \Rightarrow \alpha_{max}=\frac{6\pi}{7}\\ 8\alpha=2k\pi+\pi-\alpha \Rightarrow \alpha=\frac{2k\pi+\pi}{9} \Rightarrow \alpha_{max}=\frac{7\pi}{9}\end{cases}$$

$$2)\ \sin 8\alpha=\sin(-\alpha) \Rightarrow \begin{cases}8\alpha=2k\pi-\alpha \Rightarrow \alpha=\frac{2k\pi}{9} \Rightarrow \alpha_{max}=\frac{8\pi}{9}\\ 8\alpha=2k\pi+\pi+\alpha \Rightarrow \alpha=\frac{2k\pi+\pi}{7} \Rightarrow \alpha_{max}=\frac{5\pi}{7}\end{cases}$$

تذکر: در جواب‌ها $\alpha=\pi$ را به خاطر ضرب طرفین در $\sin\alpha$ در نظر نگرفتیم. بنابراین بزرگ‌ترین جواب، $\frac{8\pi}{9}$ است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

۱۰۰ گزینه ۲



$$\tan\alpha = \frac{۳}{۴} \quad , \quad \cot\alpha = \frac{۴}{۳} \quad , \quad \sin\alpha = -\frac{۳}{۵} \quad , \quad \cos\alpha = -\frac{۴}{۵}$$

$$\frac{\cos\left(۲\alpha - \frac{\pi}{۲}\right) + \cos(\alpha + \pi)}{\cot ۲\alpha} = \frac{\sin ۲\alpha - \cos\alpha}{\frac{\cot\alpha - \tan\alpha}{۲}} = \frac{۲\sin\alpha\cos\alpha - \cos\alpha}{\frac{\cot\alpha - \tan\alpha}{۲}}$$

$$= \frac{۲\left(-\frac{۳}{۵}\right)\left(-\frac{۴}{۵}\right) + \frac{۴}{۵}}{\frac{\frac{۴}{۳} - \frac{۳}{۴}}{۲}} = \frac{\frac{۴}{۵}\left(\frac{۶}{۵} + ۱\right)}{\frac{۱۶ - ۹}{۲۴}} = \frac{\frac{۴}{۵}\left(\frac{۱۱}{۵}\right)}{\frac{۷}{۲۴}} = \frac{۴\,(۱۱)\,(۲۴)}{۵\,(۵)\,(۷)} = \frac{۱۰۵۶}{۱۷۵}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۱۰۱ گزینه ۴

طرفین رابطه را در $\sin^۲ ۳x$ ضرب می‌کنیم:

$$f(x)\sin^۲ ۳x = ۱۶\sin^۲ ۳x\cos^۲ ۳x\cos^۲ ۶x\cos^۲ ۱۲x\cos^۲ ۲۴x$$

$$\Rightarrow f(x)\sin^۲ ۳x = ۴\sin^۲ ۶x\cos^۲ ۶x\cos^۲ ۱۲x\cos^۲ ۲۴x$$

$$= \sin^۲ ۱۲x\cos^۲ ۱۲x\cos^۲ ۲۴x$$

$$= \frac{۱}{۴}\sin^۲ ۲۴x\cos^۲ ۲۴x = \frac{۱}{۱۶}\sin^۲ ۴۸x$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{\sin^۲ ۴۸x}{۱۶\sin^۲ ۳x}$$

$$f\left(\frac{\pi}{۳۶}\right) = \frac{\sin^۲\frac{۴۸\pi}{۳۶}}{۱۶\sin^۲\frac{\pi}{۱۲}} = \frac{\sin^۲\left(\frac{\pi}{۳}\right)}{۱۶\sin^۲\frac{\pi}{۱۲}} = \frac{\frac{۳}{۴}}{۸\left(۱ - \cos\frac{\pi}{۶}\right)}$$

$$= \frac{۳}{۴ \times ۸ \times \left(۱ - \frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)} = \frac{۳}{۱۶(۲ - \sqrt{۳})} = \frac{۳(۲ + \sqrt{۳})}{۱۶}$$

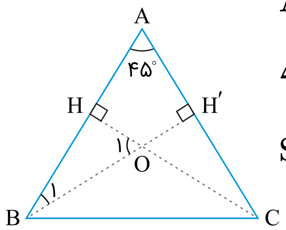
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۱۰۲ گزینه ۳

$$\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}+\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}+\frac{2\cos^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}=\cot\frac{\theta}{2}+\cot\frac{\theta}{2}=2\cot\frac{\theta}{2}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

۱۰۳ گزینه ۴



$$\hat{A}=45^\circ \Rightarrow \hat{O}_1=\hat{B}_1=45$$

$$\Delta AHC:AH=\frac{AC}{\sqrt{2}}=\frac{8}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}\Rightarrow HB=HO=8-4\sqrt{2}$$

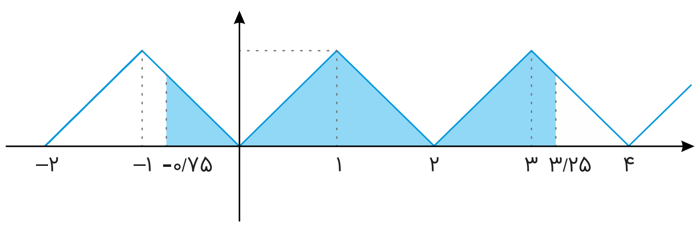
$$S_{OHB}=\frac{1}{2}(8-4\sqrt{2})^2=\frac{1}{2}\times 16(2-\sqrt{2})^2=8(6-4\sqrt{2})=16(3-2\sqrt{2})=\frac{16}{3+2\sqrt{2}}$$

.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۱۰۴ گزینه ۱

نمودار تابع به‌صورت زیر خواهد بود:



$$S=2\times\frac{1\times 2}{2}=2$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۱۰۵ گزینه ۳

$\cos\alpha = \frac{۲}{۳}$ و α در ناحیهٔ چهارم است:

$$\sin\alpha = -\sqrt{۱-\frac{۴}{۹}} = -\frac{\sqrt{۵}}{۳} \quad , \quad \tan^۲\alpha = \frac{\sin^۲\alpha}{\cos^۲\alpha} = \frac{\frac{۵}{۹}}{\frac{۴}{۹}} = \frac{۵}{۴}$$

$$\frac{\sin(\alpha+\frac{\pi}{۲})-\sin(\alpha-\pi)}{|\tan^۲\alpha-۱|} = \frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\frac{۵}{۴}-۱} = \frac{\frac{۲-\sqrt{۵}}{۳}}{\frac{۱}{۴}} = \frac{۴(۲-\sqrt{۵})}{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۱۰۶ گزینه ۴

اگر تابعی نسبت به خط $x = x_۰$ متقارن باشد، آنگاه: $f(x) = f(۲x_۰ - x)$

$f(x) = f(۲-x)$: تابع نسبت به خط $x = ۱$ متقارن است

$f(x) = f(۶-x)$: تابع نسبت به خط $x = ۳$ متقارن است

$$f(x) = f(۶-x) \xrightarrow{x=x+۴} f(x+۴) = f(۶-(x+۴)) = f(۲-x)$$

پس $f(x) = f(۴+x)$، پس f تابعی متناوب با دورهٔ تناوب ۴ است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

۱۰۷ گزینه ۲

$$۲\sin x\cos ۲x + \sin x = ۱ \Rightarrow ۲\sin x(۱-۲\sin^۲ x) + \sin x = ۱$$
$$\Rightarrow ۳\sin x - ۴\sin^۳ x = ۱ \Rightarrow \sin ۳x = ۱ \Rightarrow ۳x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲}$$
$$\Rightarrow x = \frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۶} \Rightarrow x \in \{\frac{\pi}{۶}, \frac{۵\pi}{۶}, \frac{۹\pi}{۶}\}$$

مجموع جواب‌ها $\frac{۱۵\pi}{۶}$ یعنی $\frac{۵\pi}{۲}$ است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

۱۰۸ گزینه ۱

طرفین تابع را در $\sin^۲ x$ ضرب می‌کنیم:

$$f(x)\sin^۲ x = ۳۲\sin^۲ x\cos^۲ x\cos^۲(۲x)\cos^۲(۴x)\cos^۲(۸x)\cos^۲(۱۶x)$$
$$= ۸\sin^۲(۲x)\cos^۲(۲x)\cos^۲(۴x)\cos^۲(۸x)\cos^۲(۱۶x)$$
$$= ۲\sin^۲(۴x)\cos^۲(۴x)\cos^۲(۸x)\cos^۲(۱۶x)$$
$$= \frac{۱}{۳۲}\sin^۲(۳۲x) \Rightarrow f(x) = \frac{\sin^۲(۳۲x)}{۳۲\sin^۲ x}$$

$$f(\frac{\pi}{۱۲}) = \frac{\sin^۲\frac{۳۲\pi}{۱۲}}{۳۲\sin^۲\frac{\pi}{۱۲}} = \frac{\sin^۲(\frac{\pi}{۳})}{۳۲\sin^۲(\frac{\pi}{۱۲})}$$

$$\Rightarrow f(\frac{\pi}{۱۲}) = \frac{\frac{۳}{۴}}{۳۲ \times \frac{۱ - \cos\frac{\pi}{۶}}{۲}} = \frac{\frac{۳}{۴}}{۱۶(۱ - \frac{\sqrt{۳}}{۲})}$$

$$= \frac{\frac{۳}{۴}}{۸(۲ - \sqrt{۳})} = \frac{۳}{۳۲(۲ - \sqrt{۳})} = \frac{۳(۲ + \sqrt{۳})}{۳۲} = \frac{۶ + \sqrt{۲۷}}{۳۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۱۰۹ گزینه ۲

$$۲\cos(۳x) = -۲ - ۵\sin^۲ x$$

اگر برد دو طرف تساوی را حساب کنیم خواهیم داشت:

$$-۲ \leq ۲\cos(۳x) \leq ۲ \quad , \quad -۷ \leq -۲ - ۵\sin^۲ x \leq -۲$$

پس دو طرف تساوی فقط به ازای -۲ برقرار خواهد بود.

$$\begin{cases} ۲\cos(۳x) = -۲ \Rightarrow \cos(۳x) = -۱ \Rightarrow ۳x = (۲k - ۱)\pi \Rightarrow x = (۲k - ۱)\frac{\pi}{۳} \quad , k \in \mathbb{Z} \\ -۲ - ۵\sin^۲ x = -۲ \Rightarrow \sin^۲ x = ۰ \Rightarrow x = k'\pi \quad , \ k' \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

جواب‌های مشترک دو معادله را پیدا می‌کنیم:

$$\{-\pi , \frac{-\pi}{۳} , \frac{\pi}{۳} , \pi\} \cap \{-\pi , ۰ , \pi\} = \{-\pi , \pi\}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۱۱۰ گزینه ۴

به‌کمک رابطهٔ $1 + \cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2}$ معادله به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$64\cos^2 \frac{\alpha}{2}\cos^2\alpha\cos^2 2\alpha = 1$$

حال طرفین رابطه را در $\sin^2 \frac{\alpha}{2}$ ضرب می‌کنیم:

$$64\sin^2 \frac{\alpha}{2}\cos^2 \frac{\alpha}{2}\cos^2\alpha\cos^2 2\alpha = \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$
$$16\sin^2\alpha\cos^2\alpha\cos^2 2\alpha = \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$
$$4\sin^2 2\alpha\cos^2 2\alpha = \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$
$$\sin^2 4\alpha = \sin^2 \frac{\alpha}{2} \Rightarrow 4\alpha = k\pi \pm \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{2k\pi}{7} \\ \alpha = \frac{2k\pi}{9} \end{cases}$$

فقط توجه داشته باشید که $k\pi$ ها قابل قبول نیستند.

در بازهٔ $[0, 2\pi]$ تعداد جواب‌های $\alpha = \frac{2k\pi}{7}$ برابر ۶ تا و تعداد جواب‌های $\alpha = \frac{2k\pi}{9}$ برابر ۸ است. معادله مجموعاً ۱۴ ریشه دارد.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

۱۱۱ گزینه ۳

$$2\sin^2 x + \cos^2 x = \frac{4}{3} \Rightarrow \sin^2 x + \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{1} = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \sin^2 x + 1 = \frac{4}{3} \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۱۱۲ گزینه ۳

$$\begin{cases} \max = |a| + c = 5 \\ \min = -|a| + c = 1 \end{cases} \Rightarrow c = 3$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۱۱۳ گزینه ۱

$$-\frac{\pi}{۴} < x < \frac{\pi}{۴} \Rightarrow -\frac{\pi}{۴} < -x < \frac{\pi}{۴} \Rightarrow ۰ < \frac{\pi}{۴} - x < \frac{\pi}{۲}$$

$$\Rightarrow \tan(\frac{\pi}{۴} - x) > ۰ \Rightarrow \frac{۱ - m}{۲ + m} > ۰$$

m		-۲		۱	
$۱ - m$	+		+	○	−
$۲ + m$	−	○	+		+
$\frac{۱ - m}{۲ + m}$	−	ت ن	+	○	−

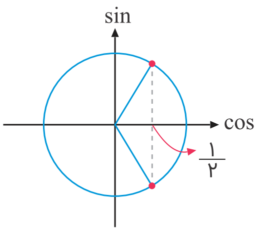
$$\Rightarrow -۲ < m < ۱$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۱۱۴ گزینه ۴

$$۸\cos x - \tan^۲ x = ۱ \Rightarrow ۸\cos x = ۱ + \tan^۲ x = \frac{۱}{\cos^۲ x}$$

$$\Rightarrow \cos^۳ x = \frac{۱}{۸} \Rightarrow \cos x = \frac{۱}{۲}$$



$x \in [۰, ۲\pi] \Rightarrow$ دو جواب دارد

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۱۱۵ گزینه ۱

باتوجه‌به نمودار داریم:

$$T = ۲(\frac{۵}{۴} - \frac{۱}{۴}) = ۲ \;,\; T = \frac{۲\pi}{|b|} = ۲$$
$$\Rightarrow |b| = \pi \xrightarrow{b>۰} b = \pi$$
$$f(\frac{۱}{۴}) = ۰ \Rightarrow a\cos(\frac{\pi}{۴} + c) = ۰ \Rightarrow \frac{\pi}{۴} + c = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow c = \frac{\pi}{۴}$$

ماکزیمم تابع برابر $\frac{۱}{۴}$ است:

$$|a| = \frac{۱}{۴} \Rightarrow a = \pm\frac{۱}{۴}$$
$$f(x) = \pm\frac{۱}{۴}\cos(\pi x + \frac{\pi}{۴})$$
$$x = ۰ : f(۰) = \pm\frac{۱}{۴}\cos\frac{\pi}{۴} = \pm\frac{\sqrt{۲}}{۸}$$

باتوجه‌به نمودار $f(۰)$ باید مثبت باشد، پس:

$$\frac{ac}{b} = \frac{\frac{۱}{۴} \times \frac{\pi}{۴}}{\pi} = \frac{۱}{۱۶}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

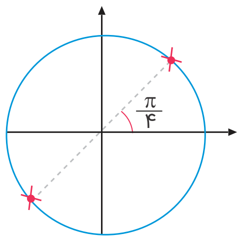
۱۱۶ گزینه ۳

$$\sin x + \sqrt{۳}\cos x = \sqrt{۲} \xrightarrow{\div ۲} \frac{۱}{۲}\sin x + \frac{\sqrt{۳}}{۲}\cos x = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$
$$\Rightarrow \cos\frac{\pi}{۳}\sin x + \sin\frac{\pi}{۳}\cos x = \sin\frac{\pi}{۴}$$
$$\Rightarrow \sin(x + \frac{\pi}{۳}) = \sin\frac{\pi}{۴}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{۳} = ۲k\pi + \frac{\pi}{۴} \Rightarrow x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۱۲} \\ x + \frac{\pi}{۳} = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۴} \Rightarrow x = ۲k\pi + \frac{۵\pi}{۱۲} \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{۱۲}, \frac{۲۳\pi}{۱۲} \\ x = \frac{۵\pi}{۱۲} \end{cases} \Rightarrow \text{مجموع} = \frac{۹\pi}{۴}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

۱۱۷ گزینه ۲

$$\sin(x+\frac{\pi}{۴}).\cos(\frac{\pi}{۴}-x)=۱ \Rightarrow \sin(x+\frac{\pi}{۴}).\sin(\frac{\pi}{۲}-(\frac{\pi}{۴}-x))=۱$$
$$\Rightarrow \sin(x+\frac{\pi}{۴}).\sin(x+\frac{\pi}{۴})=۱ \Rightarrow \sin^۲(x+\frac{\pi}{۴})=۱$$
$$\Rightarrow x+\frac{\pi}{۴}=k\pi+\frac{\pi}{۲} \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۴}$$
$$\Rightarrow \text{جواب‌ها}: \frac{\pi}{۴}, \frac{۵\pi}{۴} \xrightarrow{\text{مجموع}} \frac{۶\pi}{۴}=\frac{۳\pi}{۲}$$

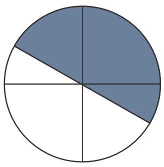


کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۱۸ گزینه ۲

$$-\frac{\pi}{۱۲}<x<\frac{۵\pi}{۱۲} \Rightarrow \frac{-\pi}{۶}<۲x<\frac{۵\pi}{۶}$$

حداقل مقدار سینوس در این بازه $-\frac{۱}{۲}$ و حداکثر آن ۱ است.



$$-\frac{۱}{۲}<\frac{m-۱}{۴}\le ۱ \xrightarrow{\times ۴} -۲<m-۱\le +۴ \Rightarrow -۱<m\le ۵$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۱۹ گزینه ۲

$$\sin(x+\frac{\pi}{۶})\cos(\frac{\pi}{۳}-x)=۱ \Rightarrow \sin(x+\frac{\pi}{۶})\sin(\frac{\pi}{۲}-(\frac{\pi}{۳}-x))=۱$$

$$\sin^{۲}(x+\frac{\pi}{۶})=۱ \Rightarrow \begin{cases} \sin(x+\frac{\pi}{۶})=۱ \Rightarrow x=\frac{\pi}{۳} \\ \sin(x+\frac{\pi}{۶})=-۱ \Rightarrow x=\frac{۴\pi}{۳} \end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۲۰ گزینه ۳

$$\sin x+\cos x=\frac{۶\sqrt{۵}}{۱۰}=\frac{۳\sqrt{۵}}{۵}\xrightarrow{\text{به توان ۲}}\sin^{۲}x+\cos^{۲}x+۲\sin x\cos x=\frac{۹}{۵}$$

$$\Rightarrow ۱+\sin ۲x=\frac{۹}{۵}\Rightarrow \sin ۲x=\frac{۴}{۵}$$

$$\sin ۲x=\frac{۲\tan x}{۱+\tan^{۲}x}\Rightarrow \frac{۴}{۵}=\frac{۲\tan x}{۱+\tan^{۲}x}$$

$$\Rightarrow ۴+۴\tan^{۲}x=۱۰\tan x\Rightarrow ۴(۱+\tan^{۲}x)=۱۰\tan x$$

$$\Rightarrow ۱+\tan^{۲}x=\frac{۵}{۲}\tan x\xrightarrow{\times ۲}۲\tan^{۲}-۵\tan x+۲=۰\xrightarrow{\Delta=۹}\begin{cases}\tan x=۲\\ \tan x=\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۲۱ گزینه ۴

$$\begin{cases} y_{max}=|a|+c=\frac{۵}{۲} \\ y_{min}=-|a|+c=-\frac{۱}{۲} \end{cases} \Rightarrow \quad |a|=\frac{۳}{۲}\ ,\ c=۱$$

$$\Rightarrow y=۱+a\cos bx\ ;\ \ y(۰)=۱+a=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow a=-\frac{۳}{۲}$$

پس تابع به صورت $y=۱-\frac{۳}{۲}\cos bx$ می‌باشد و حاصل ac برابر است با:

$$ac=\frac{-۳}{۲}\times ۱=\frac{-۳}{۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۲۲

گزینه ۱

اختلاف max و min تابع ۱۰ واحد است. پس $|a| = ۵$ خواهد بود. حال چون تابع از $x = ۰$ نزولی شده، پس $a = ۵$ است. همچنین تابع دو واحد پایین آمده است، پس $b = -۲$ است.

$$f(x) = ۵\cos x - ۲ \xrightarrow{x=\frac{\pi}{۳}} f(\frac{\pi}{۳}) = ۵\cos\frac{\pi}{۳} - ۲ = ۵(\frac{۱}{۲}) - ۲ = \frac{۵}{۲} - ۲ = \frac{۱}{۲}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱